На правах рукописи

Банщикова Ирина Николаевна

ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск – 2020

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель: **Попова Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты: **Сергеев Игорь Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», профессор кафедры дифференциальных уравнений.

Чудинов Кирилл Михайлович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», доцент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики.

Ведущая организация: Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Защита состоится 21 октября 2020 года в $11^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:
`http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.01/`

Автореферат разослан “____” ______________ 20____ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Костоусова Елена Кирилловна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Одним из основных методов конструирования управления для линейных систем с постоянными коэффициентами является метод размещения полюсов[1]. Этот метод основан на выборе такой обратной связи, что полюса замкнутой системы оказываются в наперед заданных точках комплексной плоскости. Теоретической основой данного метода является следующая классическая теорема (В.М. Попов[2], У. Уонэм[3]): *линейная стационарная система*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k,$$

управляема тогда и только тогда, когда для любого набора комплексных чисел $\Lambda = \big(\mu_1, \ldots, \mu_n\big)$*, симметричного относительно вещественной оси, найдется стационарная обратная связь* $u = Ux$ *с постоянной матрицей* $U \in \mathbb{R}^{k\times n}$*, обеспечивающая совпадение спектра замкнутой системы*

$$\dot{x} = \big(A + BU\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

с набором Λ. Аналогичный результат имеет место и для систем с дискретным временем[4]. В то же самое время, для стационарных систем хорошо изучена связь между положением полюсов и динамическими свойствами системы, такими, как устойчивость, колеблемость решений и т. п.

Аналогичная задача для нестационарных систем значительно менее изучена. Практически все известные результаты для нестационарных систем с непрерывным временем можно найти в книге[5].

Отметим, что для нестационарных систем (в отличие от стационарных) существует целый ряд неэквивалентных определений управляемости: равномерная, полная, дифференциальная, по входу, по выходу, и т. д.[6] Кроме того, для таких систем нет очевидного обобщения понятия полюсов. В определенной степени, показатели Ляпунова играют ту же роль, что вещественные части полюсов для стационарных систем с непрерывным време-

[1] Sontag, E. D. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems, vol. 6 / E. D. Sontag. — New York, NY, USA: Springer, 2013.

[2] Попов, В. М. Гиперустойчивость автоматических систем: пер. с румын. / В. М. Попов. — М.: Наука, 1970. — 335 с.

[3] Wonham, W. M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems / W. M. Wonham // IEEE Trans. Autom. Control. — 1967. — Vol. AC-12, no. 6. — Pp. 660–665.

[4] Dickinson, B. On the fundamental theorem of linear state variable feedback / B. Dickinson // IEEE Trans. Autom. Control. — 1974. — Vol. AC-19, no. 5. — Pp. 577–579.

[5] Макаров, Е. К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. — Минск: Беларуская навука, 2012. — 407 с.

[6] Klamka, J. Controllability of dynamical systems / J. Klamka. — Kluwer Academic Publishers Dordrecht, The Niderlands, 1991.

нем и логарифмы абсолютных значений полюсов для стационарных систем с дискретным временем.

Впервые задача о назначении спектра показателей Ляпунова линейной нестационарной системы с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

посредством линейной обратной связи $u(m) = U(m)x(m)$ была рассмотрена в работе[7]. В этой работе было установлено, что свойство равномерной полной управляемости системы (1) обеспечивает разрешимость задачи о глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова замкнутой системы

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

т. е. возможности построения для произвольного наперед заданного набора чисел $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ такого матричного управления $U\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{k\times n}$, что полный спектр замкнутой системы (2) совпадает с этим набором. Заметим, что алгоритм построения управления $U(\cdot)$ в этой работе не гарантирует малости нормы управления, даже если требуемое смещение показателей Ляпунова системы (2) по отношению к показателям свободной системы

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

мало́.

В связи с этим возникает вопрос — можно ли для любого набора из малой окрестности полного спектра показателей Ляпунова системы (3) гарантировать возможность построения такой матрицы обратной связи $U(\cdot)$, что полный спектр показателей системы (2) совпадает с этим набором, при этом малому смещению показателей отвечает малая норма управления $U(\cdot)$? Решению этого вопроса посвящена диссертация.

Для решения поставленной задачи в работе введено понятие пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (2).

Отметим, что вопрос о пропорциональной локальной управляемости спектра тесно связан с задачей об отыскании достижимых границ подвижности показателей системы при различных возмущениях ее коэффициентов. Для систем с непрерывным временем существенный вклад в решение этой задачи внесли Р. Э. Виноград, В. М. Миллионщиков, Н. А. Изо-

[7] Babiarz, A. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems / A. Babiarz, A. Czornik, E. Makarov, M. Niezabitowski, S. Popova // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2017. — Vol. 55, no. 2. — Pp. 671–692.

бов, И. Н. Сергеев. Вопросы построения спектрального множества при различных классах возмущений систем с непрерывным временем изучались С. А. Гришиным, Н. А. Изобовым, Т. Е. Зверевой, М. И. Рахимбердиевым, Н. Х. Розовым, А. Г. Сурковым. Кроме того, задача об управлении показателями Ляпунова имеет непосредственную связь с проблемами устойчивости и стабилизации. В заключение обзорной части отметим, что вопросами устойчивости и стабилизации решений систем с дискретным временем занимались В. Т. Борухов и О. М. Кветко; В. А. Зайцев; А. А. Кандаков и К. М. Чудинов; А. Ю. Куликов и В. В. Малыгина; Г. А. Леонов; A. Bacciotti, A. Biglio; S. Bittanti, P. Bolzern, G. De Nicolao; C. I. Byrnes, W. Lin, B. K. Ghosh; V. Cheng; J. C. Engwerda; L. Grüne, F. Wirth; W. Kwon, A. Pearson; W. Lin; J. Tsinias и другие авторы.

Цель и задачи работы. Основной целью работы является изучение как достаточных, так и необходимых и достаточных условий пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (2). Для достижения этой цели в работе решены следующие задачи: изучены свойства устойчивости полного спектра показателей Ляпунова и интегральной разделенности линейных систем с дискретным временем, получено описание спектрального множества линейной системы в случае устойчивости полного спектра, изучено свойство равномерной полной управляемости линейной системы с дискретным временем, изучены свойства оболочки Бебутова линейной управляемой системы с дискретным временем.

Методы исследования. В работе применяются методы общей теории динамических систем, асимптотической теории линейных систем, математической теории управления, матричного анализа.

Научная новизна работы. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Положения и результаты, выносимые на защиту. В работе получены следующие результаты.

1. Исследованы свойства устойчивости полного спектра показателей Ляпунова и интегральной разделенности систем с дискретным временем. Получено описание спектрального множества при мультипликативных возмущениях системы с устойчивым спектром показателей Ляпунова.

2. Получены достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

3. Получены необходимые и достаточные условия пропорциональной

локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова всех систем, входящих в оболочку Бебутова заданной линейной управляемой системы.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследования задач стабилизации и управления асимптотикой решений нестационарных систем с дискретным временем. Примененные методы могут служить основой разработки алгоритмов стабилизации систем, динамика которых отслеживается в дискретные моменты времени. Результаты диссертации могут быть использованы при проведении исследований по математической теории управления и по теории стабилизации управляемых систем в Институте математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской Академии наук, в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской Академии наук, в Институте математики Национальной Академии наук Беларуси, в Московском, Санкт-Петербургском, Белорусском и Удмуртском государственных университетах, а также при чтении спецкурсов в Белорусском и Удмуртском госуниверситетах.

Степень достоверности и апробация результатов диссертации. Результаты диссертации приведены в виде строгих математических утверждений, а также примеров, иллюстрирующих применение этих утверждений. Все результаты диссертации строго доказаны. Достоверность выводов и непротиворечивость полученных результатов подтверждается обоснованным применением строгих математических методов исследований, публикацией работ в открытой печати в ведущих рецензируемых изданиях и апробацией результатов диссертации. Результаты диссертации обсуждались на Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям и математической теории управления (руководитель семинара — профессор Н. Н. Петров, 2016–2019 гг.), на семинаре отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук (руководители — член-корреспондент РАН В. Н. Ушаков, профессор А. М. Тарасьев, 2019 г.), на Пермском городском семинаре по функционально-дифференциальным уравнениям (руководители — доцент В. В.,Малыгина, профессор В. П. Максимов, профессор П. М. Симонов, 2020 г.), а также на следующих конференциях:

- Международном симпозиуме «Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала» (Пермь, ПГНИУ, 2016 г.);

- 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR) (Poland, Miedzyzdroje, 2016 г.);
- Международной (49-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2018 г.);
- XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Москва, ИПУ РАН, 2018 г.);
- Международной (50-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2019 г.);
- Международной конференции «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посвященной 95-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2019 г.).

Публикации автора по теме диссертации. Основной материал диссертации опубликован в 13 научных работах [1–13]. Из них 8 статей опубликованы в журналах, входящих в Международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus, и тем самым приравненных к изданиям из Перечня ВАК. А именно, статьи [3 – 7] опубликованы в изданиях, входящих в Web of Science и Scopus, а статьи [1, 2, 8] — в изданиях, входящих в Scopus. Статьи [9] и [10] опубликованы в сборниках материалов международных конференций, входящих в Web of Science и/или Scopus. Остальные работы [11 – 13] — это тезисы докладов на международных конференциях.

Личный вклад соискателя. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, С. Н. Поповой принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю И. Н. Банщиковой — точные формулировки и доказательства результатов. Из совместных работ [4, 6, 7, 9] в диссертацию для полноты изложения включены формулировки вспомогательных результатов — лемм 9.1, 10.1, 10.2, 10.3 и следствий 10.1, 12.1, которые доказали соавторы работ Е. К. Макаров, A. Babiarz, A. Czornik, M. Niezabitowski. Все остальные результаты из этих работ, включенные в диссертацию, доказаны лично соискателем.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и списка основных обозначений. Главы разбиты на 13 параграфов (нумерация параграфов сквозная). Нумерация формул в параграфах двойная (номер параграфа и номер формулы в параграфе). Такая же нумерация принята для определений, утверждений, лемм, теорем, следствий, замечаний, примеров. Полный объем диссертации составляет 118 страниц. Список литературы содержит 73 наименования.

Содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность работы, определяются цели исследования, раскрывается научная новизна полученных результатов и формулируются основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** введены и исследованы свойства *устойчивости полного спектра* линейных систем с дискретным временем и исследуется важный подкласс множества систем с устойчивыми показателями — *системы с интегральной разделенностью.*

В **первом параграфе** приведен обзор известных результатов о простейших свойствах решений линейных систем с дискретным временем.

Рассмотрим линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m), \tag{4}$$

где аргумент m пробегает множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел; неизвестная функция x принимает значения в $\mathbb{R}^n$; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $\mathbb{R}^{n\times n}$. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ *вполне ограничена*[8] на $\mathbb{N}$, то есть при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a_0, что

$$\|A\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|A^{-1}\|_\infty \leqslant a_0.$$

Здесь и ниже использовано обозначение

$$\|A\|_\infty \doteq \sup_{m\in\mathbb{N}} \|A(m)\|.$$

Определение 1.2[9]. *Фундаментальной системой решений* (ФСР) системы (4) называется совокупность из n линейно независимых решений этой системы.

Определение 1.3. Пусть $x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)$ — некоторая ФСР системы (4). *Фундаментальной матрицей* системы (4) называется матрица

$$\Phi(\cdot) = \big[x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)\big].$$

[8]Демидович, В. Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений / В. Б. Демидович // Дифференциальные уравнения. — 1969. — Т. 5, № 7. — С. 1247–1255.

[9]Нумерация определений, теорем, лемм и следствий в автореферате совпадает с их нумерацией в тексте диссертации.

О п р е д е л е н и е 1.4. Пусть $\Phi(\cdot)$ — некоторая фундаментальная матрица системы (4). *Матрицей Коши* системы (4) называется матрица

$$X_A(m,s)=\Phi(m)\Phi^{-1}(s),$$

где m, s — натуральные числа.

Тогда для каждого решения $x(\cdot)$ системы (4) имеет место равенство

$$x(m)=X_A(m,s)x(s)\quad \text{для всех } m\in\mathbb{N},\ s\in\mathbb{N},$$

и

$$X_A(m,s)=\begin{cases}\prod\limits_{l=s}^{m-1}A(l) & \text{при } m>s,\\ E & \text{при } m=s,\\ X_A^{-1}(s,m) & \text{при } m<s.\end{cases}$$

Здесь $\prod\limits_{l=s}^{m-1}A(l)=A(m-1)A(m-2)\cdots A(s)$, то есть матрицы перемножаются в порядке убывания индекса; $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная матрица.

Напомним теперь основные понятия асимптотической теории линейных систем с дискретным временем[10]. *Показателем Ляпунова* произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (4) называется величина

$$\lambda[x]=\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\|x(m)\|.$$

Для того чтобы каждое нетривиальное решение системы (4) обладало конечным показателем Ляпунова, достаточно потребовать полной ограниченности матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ этой системы.

Множество показателей Ляпунова всех нетривиальных решений системы (4) называется *спектром показателей Ляпунова* этой системы. Известно, что спектр показателей Ляпунова системы (4) расположен на отрезке $[-\ln a_0,\ln a_0]$ и состоит не более, чем из n различных чисел. Приписывая каждому элементу спектра его *кратность*, в итоге получим набор n чисел, который называется *полным спектром показателей Ляпунова* системы (4). Пусть $\lambda(A)=\big(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)\big)$ — полный спектр показателей Ляпунова системы (4). Будем предполагать, что выполнены неравенства $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$, то есть $\lambda(A)$ является элементом множества $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ упорядоченных по неубыванию наборов n чисел. Определим также ε-окрестность

[10] Гайшун И. В. Системы с дискретным временем / И. В. Гайшун. — Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. — 400 с.

полного спектра $\lambda(A)$ равенством

$$\mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big) \doteq \big\{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant} \colon |\nu_j - \lambda_j(A)| < \varepsilon \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

Определение 1.7. *Преобразованием Ляпунова* системы (4) называется линейное преобразование вида

$$y(m) = L(m)x(m), \tag{5}$$

где матрица $L \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вполне ограничена. Матрица $L(\cdot)$ при этом называется *матрицей Ляпунова.* Системы (4) и

$$y(m+1) = C(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

называются *асимптотически эквивалентными* (или *приводимыми* друг к другу), если существует связывающее их преобразование Ляпунова.

В последующих параграфах первой главы изучается свойство устойчивости полного спектра показателей Ляпунова. Во **втором параграфе** показано, что в случае систем с дискретным временем более целесообразно рассматривать мультипликативные возмущения матрицы коэффициентов системы. Остановимся подробнее на этих вопросах.

Определение 2.1 [1,8]. Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ системы (4). *Спектральным множеством* системы (4), отвечающим заданному классу возмущений, будем называть совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегают весь заданный класс.

Сначала рассмотрим возмущенную систему в виде

$$y(m+1) = \big(A(m) + Q(m)\big)y(m), \quad m \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Систему (7) будем называть *аддитивно возмущенной* по отношению к системе (4), а сами возмущения $Q(\cdot)$ — *аддитивными.* Чтобы возмущенная система (7) обладала полным спектром показателей Ляпунова, состоящим из n чисел, достаточно потребовать от аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ полной ограниченности матрицы $A(\cdot) + Q(\cdot)$. Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ будем называть *допустимым* для системы (4), если матрица $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$. Множество всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида (7) будем обозначать через $\mathcal{Q}$. Допуская некоторую вольность, будем отождествлять систему (7) с возмущением $Q(\cdot)$ и использовать обозначение $Q(\cdot) \in \mathcal{Q}$ для допустимо аддитивно возмущенной системы (7). Спектральное множество, отвечающее классу возмущений $\mathcal{Q}$, обозначим $\lambda(\mathcal{Q})$. Таким образом,

$$\lambda(\mathcal{Q}) = \big\{\lambda(A+Q) \colon Q(\cdot) \in \mathcal{Q}\big\}.$$

Для произвольного $\delta > 0$ рассмотрим подмножество $\mathcal{Q}_\delta$ множества $\mathcal{Q}$, состоящее из допустимо аддитивно возмущенных систем вида (7), для которых $\|Q\|_\infty < \delta$. Спектральное множество класса возмущений $\mathcal{Q}_\delta$ обозначим $\lambda(\mathcal{Q}_\delta)$.

Л е м м а 2.1 [1]. *Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ допустимо для системы* (4) *в том и только том случае, когда существует такая вполне ограниченная матрица $R\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, что*

$$Q(m) = A(m)R(m) - A(m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Равенство (8) позволяет записать возмущенную систему в виде

$$z(m+1) = A(m)R(m)z(m), \quad m \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Матрицу $R(\cdot)$ будем называть *мультипликативным возмущением* системы (4), а саму систему (9) — *мультипликативно возмущенной* по отношению к системе (4). Если матрица $A(\cdot)R(\cdot)$ вполне ограничена, то полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (9) состоит из n чисел. Так как по условию матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена, то мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ будем называть *допустимым*, если матрица $R(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$. Множество всех допустимо мультипликативно возмущенных систем обозначим $\mathcal{R}$. Для произвольного $\delta > 0$ обозначим через $\mathcal{R}_\delta$ подмножество допустимо мультипликативно возмущенных систем вида (9), для которых $\|R - E\|_\infty < \delta$. Пусть $\lambda(\mathcal{R})$ и $\lambda(\mathcal{R}_\delta)$ — соответствующие спектральные множества.

Из леммы 2.1 и определений 2.2 и 2.3 вытекает следствие.

С л е д с т в и е 2.1 [1]. *Множество $\mathcal{Q}$ всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида* (7) *совпадает со множеством $\mathcal{R}$ всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида* (9).

Л е м м а 2.2 [1]. *Для каждого $\delta > 0$ справедливы включения $\mathcal{Q}_\delta \subset \mathcal{R}_{a_0\delta}$, $\mathcal{R}_\delta \subset \mathcal{Q}_{a_0\delta}$.*

Тогда из следствия 2.1 и леммы 2.2 получаем такое утверждение.

С л е д с т в и е 2.2 [1,8]. *Множества $\lambda(\mathcal{Q})$ и $\lambda(\mathcal{R})$ совпадают. Для каждого $\delta > 0$ имеют место включения $\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \subset \lambda(\mathcal{R}_{a_0\delta})$, $\lambda(\mathcal{R}_\delta) \subset \lambda(\mathcal{Q}_{a_0\delta})$.*

Основные результаты диссертации получены при условии устойчивости показателей Ляпунова системы (4).

О п р е д е л е н и е 2.4. Показатели Ляпунова системы (4) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой аддитивно возмущенной системы вида (7) из множества $\mathcal{Q}_\delta$ выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(A+Q)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то есть имеет место включение $\lambda\big(\mathcal{Q}_\delta\big) \subset O_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Определение 2.4 представляет собой непосредственный перенос на линейные системы с дискретным временем аналогичного определения для линейных систем с непрерывным временем[11].

Из следствия 2.2 вытекает, что определение 2.4 эквивалентно следующему определению.

Определение 2.5 [1]. Показатели Ляпунова системы (4) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой мультипликативно возмущенной системы вида (9) из множества $\mathcal{R}_\delta$ выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то есть имеет место включение $\lambda\big(\mathcal{R}_\delta\big) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Отметим, что свойство неустойчивости полного спектра показателей Ляпунова линейных систем с непрерывным временем впервые было установлено О. Перроном[12]. В **третьем параграфе** первой главы работы приведен пример 3.1 двумерной линейной однородной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова, при этом возмущение матрицы коэффициентов системы построено мультипликативным [3].

В **четвертом параграфе** введено понятие интегральной разделенности линейной системы с дискретным временем.

Определение 4.1 [3]. Система (4) называется *системой с интегральной разделенностью*, если она имеет фундаментальную систему решений $x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)$ такую, что при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $j < m$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполнены неравенства

$$\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(j)\|} \geqslant \gamma a^{m-j} \frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(j)\|}.$$

Определение 4.1 — непосредственный перенос на системы с дискретным временем определения интегральной разделенности систем с непрерывным временем (Б. Ф. Былов[13]).

[11] Изобов, Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. А. Изобов // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ. — 1974. — Т. 12. — С. 71–146.

[12] Perron, O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme / O. Perron // Math. Z. — 1930. — Bd. 31. — Pp. 748–766.

[13] Былов, Б. Ф. О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду / Б. Ф. Былов // Математический сборник. — 1965. — Т. 67 (109), № 3. — С. 338–344.

Определение 4.2 [3]. Функция $c_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *интегрально отделенной* от функции $c_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, если при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $s < m$ выполнены неравенства

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|c_2(l)|}{|c_1(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s}.$$

Совокупность функций $c_1, \ldots, c_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *интегрально разделенной*, если существует перестановка $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $(1, \ldots, n)$ такая, что для каждого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $c_{i_{j+1}}(\cdot)$ интегрально отделена от функции $c_{i_j}(\cdot)$.

В параграфе доказаны некоторые свойства интегрально разделенных систем и рассмотрен вопрос о приведении системы (4) к диагональному виду.

Для произвольной ФСР $\Phi(\cdot) = \bigl\{x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)\bigr\}$ системы (4) обозначим через $\mathcal{L}_i(m)$ линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, натянутое на векторы $x^1(m), \ldots, x^i(m)$, и через $\beta_i(m) \in (0, \pi/2]$ — угол между $\mathcal{L}_i(m)$ и вектором $x^{i+1}(m)$ (т. е. угол между вектором $x^{i+1}(m)$ и его проекцией на $\mathcal{L}_i(m)$), $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Следствие 4.2 [3]. *Система (4) приводима к системе (6) с вполне ограниченной диагональной матрицей $C(\cdot) = \operatorname{diag}\bigl(c_1(\cdot), \ldots, c_n(\cdot)\bigr)$ тогда и только тогда, когда она имеет ФСР $\Phi(\cdot) = \bigl\{x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)\bigr\}$, такую, что при некотором $\beta \in (0, \pi/2]$ и всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ для углов $\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot; \Phi)$ выполнены неравенства*

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \beta_i(m) \geqslant \beta. \tag{10}$$

В **пятом параграфе** главы установлены свойства интегрально разделенных систем с дискретным временем, необходимые для получения результатов третьей главы.

Теорема 5.1 [3]. *Если (4) — система с интегральной разделенностью, то для всякой нормальной*[10] *ФСР $\Psi(\cdot) = \bigl\{y^1(\cdot), \ldots, y^n(\cdot)\bigr\}$ этой системы, упорядоченной по возрастанию показателей, найдутся такие $\gamma_1 > 0$ и $a > 1$, что при всех натуральных $m \geqslant s$ и $i \leqslant n-1$ выполнены неравенства*

$$\frac{\|y^{i+1}(m)\|}{\|y^{i+1}(s)\|} \geqslant \gamma_1 a^{m-s} \frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|}.$$

Следствие 5.1 [3]. *Для всякой нормальной фундаментальной системы решений $\Phi(\cdot)$ системы с интегральной разделенностью (4) для углов*

$\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot;\Phi)$ *имеют место неравенства* (10) *при некотором* $\beta \in (0, \pi/2]$ *и всех натуральных* $i \leqslant n-1$.

Следствие 5.3 [3]. *Система* (4) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда она приводима к диагональной системе* (6) *с интегрально разделенной диагональю.*

Определение 5.1[10]. *Сопряженной системой* к линейной однородной системе (4) называется система

$$\psi(m+1) = \psi(m)A^{-1}(m), \quad m \in \mathbb{N},\ \psi^* \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Теорема 5.2 [3]. *Если* (4) *— система с интегральной разделенностью, то сопряженная система* (11) *также является системой с интегральной разделенностью.*

В заключение параграфа доказан следующий критерий интегральной разделенности.

Теорема 5.3 [3]. *Система* (4) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда ее полный спектр показателей Ляпунова устойчив и некратен, т. е. состоит из* n *различных чисел.*

Вторая глава диссертации посвящена вопросу о достаточных условиях пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (2).

В шестом параграфе рассматривается линейная управляемая система вида (1) с вполне ограниченной $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и ограниченной $B : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times k}$. Выберем управление в виде линейной обратной связи

$$u(m) = U(m)x(m),$$

в итоге получим замкнутую систему вида (2). Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (2). Поскольку мы будем решать задачу об управлении спектром показателей Ляпунова, то естественным образом приходим к следующему определению.

Определение 6.1 [7]. Матричное управление $U : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{k\times n}$ называется *допустимым* для системы (2), если матрица матрица $A(\cdot) + B(\cdot)U(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Пусть $U(\cdot)$ — допустимое матричное управление. Тогда для замкнутой системы (2) определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A + BU)$.

Следующее определение является ключевым определением работы.

Определение 6.2 [7]. Полный спектр показателей Ляпунова системы (2) называется *пропорционально локально управляемым*, если найдутся такие $\delta > 0$ и $\ell > 0$, что для каждого набора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{O}_\delta(\lambda(A))$ существует допустимое для системы (2) матричное управление $U(\cdot)$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_\infty \leqslant \ell \max\limits_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \mu_j|$ и гарантирующее выполнение равенства $\lambda(A + BU) = \mu$.

В заключение параграфа доказано одно утверждение о свойстве пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Лемма 6.1 [5]. *Свойство пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова инвариантно относительно преобразований Ляпунова.*

В **седьмом параграфе** изучается свойство равномерной полной управляемости системы (1). Определим матрицу управляемости (матрицу Калмана) этой системы равенством

$$W(m_0, m) = \sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m_0, j+1)B(j)B^*(j)X_A^*(m_0, j+1),$$

где $m > m_0 \geqslant 1$ — произвольные натуральные числа, $X_A(m, s)$ — матрица Коши системы (4).

Определение 7.1[14]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если найдутся такие $K \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$, что

$$\xi^* W(m_0, m_0 + K)\xi \geqslant \gamma \|\xi\|^2$$

для каждых $m_0 \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Понятие равномерной полной управляемости линейных систем с непрерывным временем было введено Р. Калманом[15].

Смысл понятия равномерной полной управляемости проясняет следующий критерий равномерной полной управляемости[14]:
система (1) *равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существуют такие $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что для произвольных $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $m_0 \in \mathbb{N}$ найдется управление $u\colon [m_0, m_0+K-1] \to \mathbb{R}^k$ такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы* (1) *с выбранным $u(\cdot)$ и начальным условием $x(m_0) = x_0$ удовлетворяет равенству $x(m_0 + K) = 0$, при этом*

$$\max\bigl\{\|u(m)\|\colon m = m_0, m_0+1, \ldots, m_0+K-1\bigr\} \leqslant \alpha\|x_0\|.$$

[14] Halanay, A. Time-varying discrete linear systems: input-output operators, Riccati equations, disturbance attenuation / A. Halanay, V. Ionescu. — Basel: Springer, 1994. — 230 p.

[15] Kalman, R. E. Contribution to the theory of optimal control / R. E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. — 1960. — Vol. 5, no 1. — Pp. 102–119.

Отметим, что аналогичный критерий для систем с непрерывным временем был получен Е. Л. Тонковым[16].

В параграфе доказаны различные свойства равномерно вполне управляемых систем. Самый важный из полученных результатов установлен в следующей теореме.

Т е о р е м а 7.4 [7]. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то существуют* $\delta > 0$ *и* $l > 0$ *такие, что для любой* $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$ *найдется допустимое для системы* (2) *матричное управление* $U(\cdot)$ *такое, что*

$$\|U\|_\infty \leqslant l\|R - E\|_\infty,$$

и система (9) *асимптотически эквивалентна системе* (2).

Восьмой параграф посвящен описанию спектрального множества системы (4) при мультипликативных возмущениях ее матрицы коэффициентов в случае устойчивости показателей Ляпунова этой системы. Это описание основано на определении 8.1 и теореме 8.2.

О п р е д е л е н и е 8.1 [7]. Полный спектр показателей Ляпунова системы (9) называется *пропорционально глобально управляемым*, если для каждого $\Delta > 0$ существует $\ell = \ell(\Delta) > 0$ такое, что для любого набора

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{O}_\Delta\big(\lambda\,(A)\big)$$

найдется матрица $R(\cdot) \in \mathcal{R}$, удовлетворяющая оценке

$$\|R - E\|_\infty \leqslant \ell \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \mu_j|$$

и гарантирующая выполнение равенства $\lambda(AR) = \mu$.

Получено достаточное условие пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей системы (9).

Т е о р е м а 8.2 [1]. *Пусть показатели Ляпунова системы* (4) *устойчивы. Тогда полный спектр показателей Ляпунова мультипликативно возмущенной системы* (9) *пропорционально глобально управляем.*

Из теорем 7.4 и 8.2 вытекает описание спектрального множества мультипликативно возмущенной системы в случае устойчивости показателей невозмущенной системы.

Т е о р е м а 8.3 [1,8]. *Предположим, что показатели Ляпунова системы* (4) *устойчивы. Тогда спектральное множество* $\lambda(\mathcal{R})$ *системы* (4) *при*

[16] Тонков, Е. Л. К теории линейных управляемых систем/ Е. Л. Тонков. — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2018. — 228 с.

всевозможных допустимых мультипликативных возмущениях ее коэффициентов совпадает со множеством $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ *всех упорядоченных по неубыванию наборов из* n *чисел, при этом для каждого* $\Delta > 0$ *найдется такое* $\ell = \ell(\Delta) > 1$, *что для любого* $\delta \in (0, \Delta)$ *имеет место включение*

$$\mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big) \subset \lambda(\mathcal{R}_{\ell\delta}).$$

Теорема 8.4 [8]. *Пусть показатели Ляпунова системы* (4) *устойчивы. Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие положительные* $\delta_1 < \delta_2$, *что справедливы включения* $\mathcal{O}_{\delta_1}\big(\lambda(A)\big) \subset \lambda(\mathcal{R}_{\delta_2}) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

В девятом параграфе получены достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (4).

Сначала установлена связь между свойствами пропорциональной глобальной управляемости полного спектра мультипликативно возмущенной системы (9) и пропорциональной локальной управляемости полного спектра замкнутой системы (2).

Теорема 9.1 [7]. *Пусть система* (1) *равномерно вполне управляема. Если полный спектр показателей Ляпунова системы* (9) *пропорционально глобально управляем, то полный спектр показателей Ляпунова системы* (2) *пропорционально локально управляем.*

Из теорем 8.2 и 9.1 вытекает основное утверждение второй главы диссертации.

Теорема 9.2 [7]. *Пусть система* (1) *равномерно вполне управляема, а полный спектр показателей Ляпунова системы* (4) *устойчив. Тогда полный спектр показателей Ляпунова системы* (2) *пропорционально локально управляем.*

В заключение параграфа решается вопрос о необходимости полученных достаточных условий пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. Построен пример 9.1 двумерной системы вида (1), показывающий, что найденные условия не являются необходимыми [4]. В этом примере система (1) не является равномерно вполне управляемой, а полный спектр показателей Ляпунова соответствующей свободной системы (4) неустойчив. Таким образом, ни первое, ни второе условия теоремы 9.2 не выполнены. Но при этом оказывается, что полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы (2) пропорционально локально управляем.

Третья глава посвящена вопросу о необходимости свойства равномерной полной управляемости системы (1) для пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. При этом мы предполагаем, что свойство устойчивости показателей Ляпунова свободной системы (4) выполнено «с нагрузкой», а именно, что эта система является системой с интегральной разделенностью.

Для исследования необходимости условия равномерной полной управляемости в **десятом параграфе** применено понятие оболочки Бебутова линейной управляемой системы и доказаны некоторые ее свойства.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$x(m+1) = A_0(m)x(m) + B_0(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \tag{12}$$

с вполне ограниченной $A_0(\cdot)$ и ограниченной $B_0(\cdot)$. Систему (12) отождествим с функцией $m \mapsto \sigma_0(m) \doteq \big(A_0(m), B_0(m)\big) \in \mathbb{R}^{n\times(n+k)}$. Обозначим $\sigma_s(m) \doteq \sigma_0(m+s)$ — сдвиг σ_0 на $s \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ — замыкание множества $\{\sigma_s(\cdot)\colon s \in \mathbb{N}\}$ в топологии, порожденной поточечной сходимостью. Таким образом, $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ в том и только том случае, когда существует неубывающая последовательность моментов времени $\big(s_j\big)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ такая, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\lim\limits_{j\to\infty} \|\sigma(m) - \sigma_{s_j}(m)\| = 0$. Метрика в $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ может быть задана равенством

$$\rho(\sigma, \widehat{\sigma}) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \min\{\|\sigma(m) - \widehat{\sigma}(m)\|, m^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{R}(\sigma_0), \rho)$ компактно[17]. Оно называется *оболочкой Бебутова*[18] системы σ_0. Каждый элемент $\sigma(\cdot) \doteq \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ отождествим с линейной управляемой системой (1). Замкнутую систему (2) также отождествляем с $\sigma(\cdot) \doteq \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$.

Рассмотрим свободную систему

$$x(m+1) = A_0(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

и аналогично определим оболочку Бебутова $\mathfrak{R}(A_0)$ ее матрицы коэффициентов $A_0(\cdot)$.

В **одиннадцатом параграфе** доказано, что если исходная линейная однородная система с дискретным временем интегрально разделена, то каждая система из ее оболочки Бебутова обладает этим свойством.

[17]Sell, G. Topological dynamics and ordinary differential equations (Series Van Nostrand Reinhold mathematical studies) / G. Sell. — New York, NY, USA: Van Nostrand, 1971.

[18]Johnson, R. Nonautonomous linear Hamiltonian systems: oscillation, spectral theory and control / R. Johnson, R. Obaya, S. Novo, G. Núñez, R. Fabbri. — Springer, 2016.

Т е о р е м а 11.1 [5]. *Если система* (13) *интегрально разделена, то для каждой* $A(\cdot) \in \mathfrak{R}(A_0)$ *система* (4) *интегрально разделена.*

В **двенадцатом параграфе** доказаны следующие утверждения.

Т е о р е м а 12.1 [6]. *Система* $\sigma_0(\cdot)$ *равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда каждая система* $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ *равномерно вполне управляема.*

Т е о р е м а 12.2 [6]. *Если система* $\sigma_0(\cdot)$ *не является равномерно вполне управляемой, то существуют система* $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ *и вектор* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, *такие, что* $\xi^* X_A(1, m+1)B(m) = 0$ *для каждого* $m \in \mathbb{N}$.

Т е о р е м а 12.3 [5]. *Пусть система* (13) *интегрально разделена, а* $\sigma_0(\cdot) = \big(A_0(\cdot), B_0(\cdot)\big)$ *не является равномерно вполне управляемой. Тогда существует система* $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$, *которая некоторым преобразованием Ляпунова* (5) *приводится к системе*

$$y(m+1) = F(m)y(m) + G(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N}, \ y \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^k,$$

с диагональной матрицей $F(\cdot)$ *и матрицей* $G(\cdot)$ *с нулевой первой строкой.*

Основным результатом третьей главы и **тринадцатого параграфа** является следующая теорема.

Т е о р е м а 13.1 [5, 10]. *Пусть* (13) — *система с интегральной разделенностью. Тогда система* σ_0 *равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда для каждой* $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ *соответствующая замкнутая система* (2) *обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

П р и м е р 13.1 [10]. Определим последовательность натуральных чисел $\big(m_j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ равенствами $m_1 = 1$, $m_{2j} = jm_{2j-1}$, $m_{2j+1} = j + m_{2j}$ для $j \in \mathbb{N}$, и скалярную функцию натурального аргумента

$$b(m) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = 1, \\ 1 & \text{при} \quad m \in [m_{2j-1}, m_{2j} - 1], \\ 0 & \text{при} \quad m \in [m_{2j}, m_{2j+1} - 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим линейную управляемую систему (12), где $n = k = 2$, $A_0(m) = \operatorname{diag}\big(1, e\big)$, $B_0(m) = \operatorname{diag}\big(b(m), 1\big)$. Свободная система (13) стационарна и имеет некратный полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A_0) = (0, 1)$, поэтому эта система является системой с интегральной разделенностью. В работе установлено, что система (12) не является равномерно вполне управляемой, но замкнутая система $x(m+1) = \big(A_0(m)+B_0(m)U(m)\big)x(m)$ обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. Из теоремы 13.1 вытекает, что в оболочке Бебутова системы $\sigma_0(\cdot)$ содержится система $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big)$, для которой соответствующая замкнутая система (2) не обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. Доказано, что это система (1) с $A(m) = \mathrm{diag}\big(1, e\big)$, $B(m) = \mathrm{diag}\big(0, 1\big)$.

Заключение

В диссертационной работе рассмотрены задачи управления асимптотикой решений линейных однородных систем с дискретным временем под действием линейной обратной связи. Методами общей теории динамических систем, асимптотической теории линейных систем, математической теории управления и матричного анализа получены следующие основные результаты.

Исследованы свойства устойчивости полного спектра показателей Ляпунова и интегральной разделенности систем с дискретным временем. Получено описание спектрального множества при мультипликативных возмущениях системы с устойчивым спектром показателей Ляпунова.

Получены достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Получены необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова всех систем, входящих в оболочку Бебутова заданной линейной управляемой системы.

Перечислим некоторые возможные направления развития исследований, проведенных в диссертационной работе.

Получить достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова, которые близки к необходимым.

Применить полученные результаты для стабилизации нелинейных систем с дискретным временем по линейному приближению.

Рассмотреть задачи управления не только полным спектром показателей Ляпунова, но и другими асимптотическими инвариантами линейных систем с дискретным временем.

Рассмотреть задачи управления величинами, которые характеризуют асимптотическое поведение решений линейных систем с дискретным временем, но не являются инвариантами преобразований Ляпунова.

Автор выражает искреннюю признательность научному руководителю С. Н. Поповой за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00346 и 18–51–41005).

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. **Банщикова, И. Н.** О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями / И. Н. Банщикова, С. Н. Попова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26, вып. 1. — С. 15–26.
2. **Банщикова, И. Н.** Пример линейной дискретной системы с неустойчивыми показателями / И. Н. Банщикова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26, вып. 2. — С. 169–176.
3. **Банщикова, И. Н.** О свойстве интегральной разделенности систем с дискретным временем / И. Н. Банщикова, С. Н. Попова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27, вып. 4. — С. 481–498.
4. **Банщикова, И. Н.** Об условиях пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем / И. Н. Банщикова, Е. К. Макаров, С. Н. Попова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, вып. 3. — С. 301–311.
5. **Банщикова, И. Н.** Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем / И. Н. Банщикова, С. Н. Попова // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 1. — С. 122–132.
6. **Babiarz, A.** Necessary and sufficient conditions for assignability of the Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying systems / A. Babiarz, I. Banshchikova, A. Czornik, E. Makarov, M. Niezabitowski, S. Popova // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2018. — Vol. 63, no. 11. — Pp. 3825–3837.
7. **Babiarz, A.** Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems / A. Babiarz, I. Banshchikova, A. Czornik, E. Makarov, M. Niezabitowski, S. Popova // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2019. — Vol. 57, no. 2. — Pp. 1355–1377.

8. **Popova, S. N.** Spectral set of a linear system with discrete time / S. N. Popova, I. N. Banshchikova // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 230, no. 5. — Pp. 752–756.

Другие публикации, включенные в Web of Science и/или Scopus

9. **Babiarz, A.** On assignability of Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying system with control / A. Babiarz, I. Banshchikova, A. Czornik, E. Makarov, M. Niezabitowski, S. Popova // 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR): Aug. 29 – Sept. 1 2016: Conference Proceedings. — Miedzyzdroje, 2016. — Pp. 697–701.

10. **Popova, S. N.** On the property of proportional local assignability of the Lyapunov spectrum for discrete time-varying systems / S. N. Popova, I. N. Banshchikova // Proceedings of 2018 14th International Conference "Stability and oscillations of nonlinear control systems" (Pyatnitskiy's conference) (STAB): Russia, Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of control sciences, may 30 – june 1, 2018. Moscow: IEEE, 2018. DOI: 10.1109/STAB.2018.8408389

Прочие публикации

11. **Банщикова, И. Н.** К свойству равномерной полной управляемости систем с дискретным временем / И. Н. Банщикова // Современные проблемы математики и ее приложений: тезисы Международной (49-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, 4–10 февраля 2018 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2018. — С. 23.

12. **Банщикова, И. Н.** Об устойчивости показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем / И. Н. Банщикова // Современные проблемы математики и ее приложений: тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург, 3–9 февраля 2019 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. — С. 28–29.

13. **Банщикова, И. Н.** Об условиях пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем / И. Н. Банщикова, С. Н. Попова // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. — С. 44–48.