На правах рукописи

Щелчков Кирилл Александрович

КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОНФЛИКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель: **Николай Никандрович Петров,** доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Ухоботов Виктор Иванович,** доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», заведующий кафедрой теории управления и оптимизации;

Кумков Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

Защита состоится 13 мая 2020 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УРО РАН:
http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.01/

Автореферат разослан «____» ____________ 2020 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Костоусова Елена Кирилловна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями. Динамические процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми.

Развитие теории дифференциальных игр стимулировалось наличием реальных прикладных задач, имеющих значение для механики, экономики, военного дела, радиоэлектроники, биологии и других областей.

Становление этой теории связано с исследованиями Р. Айзекса, А. Брайсона, Б.Н. Пшеничного, У. Флеминга, Л.А. Петросяна.

В Советском Союзе активная разработка теории дифференциальных игр началась после фундаментальных работ академиков Н.Н. Красовского и Л.С. Понтрягина. Существенный вклад в эту разработку внесли В.Д. Батухтин, Р.В. Гамкрелидзе, Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятников, В.И. Жуковский, В.В. Захаров, М.И. Зеликин, А.Ф.Клейменов, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский, В.Н. Лагунов, А.А. Меликян, Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольский, Ю.С. Осипов, Н.Н. Петров, Е.С. Половинкин, Н.Ю. Сатимов, А.И. Субботин, Н.Н. Субботина, В.Е. Третьяков, Н.Т. Тынянский, В.И. Ухоботов, В.Н. Ушаков, А.Г. Ченцов, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрий и многие другие авторы.

Из зарубежных авторов можно в первую очередь отметить работы Л. Берковича, Д. Брейквелла, А. Фридмана, Р. Эллиота, Дж. Лейтмана, Р.П. Иванова и других авторов.

В работах Н.Н. Красовского и его учеников[1] развит позиционный подход к дифференциальным играм, в основе которого лежит понятие макси-

[1]Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Наука, 1974. — 456 с. ; Субботин, А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления / А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. — М.: Наука, 1981. — 288 с. ; Красовский, Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1985. — 516 с.

мального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. Однако эффективное построение таких мостов для исследования реальных конфликтно управляемых процессов, в первую очередь нелинейных дифференциальных игр, весьма затруднительно или даже невозможно. Удобнее строить мосты, не являющиеся максимальными, но обладающие свойством стабильности и дающие эффективно реализуемые процедуры управления для отдельных классов игр, обладающих дополнительными свойствами.

Одним из важнейших разделов теории дифференциальных игр являются задачи преследования-убегания с участием группы управляемых объектов, хотя бы с одной из противоборствующих сторон. При этом ситуация может быть осложнена наличием ограничений на состояния объектов.

Одна из первых задач, линейная глобальная задача уклонения, была поставлена Л.С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко[2].

В этом направлении следует отметить также работы А. Азамова, М.С. Габриэляна, В.Л. Зака, А.В. Мезенцева, В.В. Остапенко, И.С. Раппопорта, В.С. Пацко, Б.Б. Рихсеева, С.И. Тарлинского и других авторов. Наибольшую трудность для исследований представляет задача уклонения с участием нескольких лиц с терминальным множеством сложной структуры. Специфика этих задач требует создания новых методов их исследования. Весьма актуальной представляются проблемы выяснения возможности уклонения группы убегающих от многих преследователей и переноса критериев разрешимости задач преследования-убегания на нестационарный случай. В нелинейных дифференциальных играх значимой является задача построения разрешающих воздействий и их аналитический вывод. Решению этих вопросов и посвящена настоящая диссертация.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является изучение задач преследования-убегания, представленных одним преследователем, группой или двумя группами преследователей с одной стороны, и как одного убегающего, так и группы убегающих, с другой, и нахождение условий разрешимости в этих задачах. Исследованы и найдены условия разре-

[2]Понтрягин, Л.С. Задача убегания одного управляемого объекта от другого / Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 189, № 4. — С. 721–723.

шимости следующих задач: 1) задача убегания одного убегающего от двух групп преследователей при наличии фазовых ограничений для убегающего; 2) задача убегания группы убегающих от двух групп преследователей; 3) задача простого преследования убегающего группой преследователей; 4) задачи преследования и убегания в нелинейных дифференциальных играх двух лиц.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и снабжены полными доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации дополняют теорию дифференциальных игр преследования-убегания.

Развитый в работе геометрический подход к исследованию нелинейных дифференциальных игр преследования-убегания двух лиц может быть использован при рассмотрении нелинейных задач группового преследования.

Методология и методы исследования. При решении поставленных задач использованы методы теории дифференциальных игр, аппарат математического анализа и теории дифференциальных уравнений, методы выпуклого анализа, а также элементы теории управления динамическими системами.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Исследована задача убегания одного убегающего от группы преследователей в линейных нестационарных дифференциальных играх в предположении, что среди преследователей имеются как участники, у которых множество допустимых управлений, являющееся шаром с центром в нуле, совпадает с множеством допустимых управлений убегающего, так и преследователи с меньшими возможностями, причем убегающий не покидает пределы некоторого множества. Доказано, что если число преследователей, возможности которых совпадают с возможностями убегающего, меньше размерности пространства, то преследователи с меньшими возможностями не влияют на разрешимость задачи уклонения.

2. В задаче убегания группы убегающих от группы преследователей в нестационарных дифференциальных играх при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых не уступают возможностям убегающих, так и участники с меньшими возможностями, показано, что если в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи хотя бы одного убегающего на бесконечном промежутке времени, то при добавлении «слабых» преследователей уклонение будет происходить на любом конечном промежутке времени.

3. Для задачи простого преследования группой преследователей одного убегающего получены как необходимые так и достаточные условия поимки, зависящие от структуры множества значений управлений и числа преследователей.

4. Получены новые достаточные условия разрешимости задач преследования-уклонения в нелинейных дифференциальных играх двух лиц.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов подтверждена строгостью математических доказательств. Результаты диссертации обсуждались на Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям и математической теории управления (руководитель семинара — профессор Н.Н. Петров, 2016–2019 гг.), на семинаре отдела динамических систем Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (руководители — член-корреспондент РАН В.Н. Ушаков, профессор А.М. Тарасьев, 2019 г.), а также на следующих конференциях:

- Международная (45-я Всероссийская) молодежная школа-конференция, посв. 75-летию В.И. Бердышева, «Современные проблемы математики и её приложений», г. Екатеринбург, 2014 г., [18].
- Международная конференция «Колмогоровские чтения - VII. Общие проблемы управления и их приложения», г. Тамбов, 2015 г., [13].
- Международная конференция «Системный анализ: моделирование и управление», посвященная памяти академика А. В. Кряжимского, г. Екатеринбург, 2016 г., [20].

- Международная (48-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений», г. Екатеринбург, 2018 г., [12].
- 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018), г. Екатеринбург, 2018 г., [19].
- XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», г. Москва, 2018 г., [15].
- Научная конференция «Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам», г. Суздаль, 2018 г., [16].
- Международная (49-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений», г. Екатеринбург, 2018 г., [14].
- Международная (50-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений», г. Екатеринбург, 2019 г., [17].

Публикации. Основные результаты опубликованы в 20 научных работах [1–20]. Из них 8 работ [1–8] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК. Еще 3 работы [9–11] опубликованы в зарубежных рецензируемых журналах, приравненных к изданиям из перечня ВАК. При этом работы [1,3,6–9,11] проиндексированы в международной реферативной базе данный Web of Science, а работы [3,6–12] — в базах данных Scopus.

В работах, выполненных в соавторстве, научному руководителю Н.Н. Петрову принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю К.А. Щелчкову — точные формулировки и доказательства результатов. Соавтору А.Я. Нарманову принадлежит идея использования положительного базиса в соответствующей работе. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00346, 18-51-41005, 17-38-50118).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, списка использованных обозначений, четырех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на 13 параграфов, которые имеют сквозную нумерацию. Нумерация формул в параграфах двойная — первая цифра означает номер главы, вторая — номер формулы в главе. Такая же нумерация принята для определений, лемм, теорем, замечаний, предположений и примеров. Полный объём диссертации составляет 98 страниц. Список литературы содержит 113 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе рассматриваются две линейные нестационарные задачи уклонения одного убегающего от группы преследователей с фазовыми ограничениями и простой матрицей. Предполагается, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых совпадают с возможностями убегающего, так и участники с меньшими возможностями.

В первом параграфе рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = b(t)u_i, \ \|u_i\| \leqslant \alpha_i,$$

причем $\alpha_j = 1$ для всех $j = 1, \ldots, m < n$ и $\alpha_j < 1$ для всех $j = m+1, \ldots, n$.

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = b(t)v, \ \|v\| \leqslant 1.$$

При $t = t_0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и начальное положение убегающего y^0, причем $x_i^0 \neq y^0, i = 1, \ldots, n$.

Здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$, $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция.

Дополнительно предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает выпуклого множества D $(D \subset \mathbb{R}^k)$ с непустой внутренностью.

Под разбиением σ промежутка $[t_0, \infty)$ будем понимать последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, не имеющую конечных точек сгущения и такую, что $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q < \dots$. Под разбиением σ промежутка $[t_0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\eta = T$.

Определение 1.1. *Кусочно-программной стратегией* V убегающего E, заданной на $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$) называется пара (σ, V_σ), где σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), а V_σ — семейство отображений $c^r (r = 0, 1, \dots)$, ставящих в соответствие величинам $(t_l, x_1(t_l), \dots, x_n(t_l), y(t_l))$ измеримую функцию $v = v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что
$\|v_l(t)\| \leqslant 1,\ y(t) \in D,\ t \in [t_l, t_{l+1})$.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n)$.

Определение 1.2. В игре $\Gamma(n)$ *происходит уклонение от встречи на* $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), если существует кусочно-программная стратегии V убегающего E такая, что для любых траекторий $x_s(t)$ преследователей P_s, $y_q(t) \neq x_s(t)$ для всех s и всех $t \in [t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$).

Обозначим через $\mathrm{Int}D$ внутренность множества D.

Теорема 1.1. Пусть $y^0 \in \mathrm{Int}D$, b — функция, ограниченная на любом компакте и $m < k$. Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$ из любых начальных позиций.

Пусть теперь $D = \{z \in \mathbb{R}^k \mid (p_j, z) \leqslant \mu_j,\ j = 1, \dots, r\}$, где $p_1, \dots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}^1$, причем $\mathrm{Int}\, D \neq \emptyset$.

Теорема 1.2. Пусть $0 \notin \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{x_1^0 - y^0, \dots, x_m^0 - y^0, p_1, \dots, p_r\}$. Тогда в игре $\Gamma(n)$ происходит уклонение на любом отрезке $[t_0, T]$.

Справедливо следующее следствие из этой теоремы.

Следствие 1.1. Пусть $D = R^k$ и $y^0 \notin \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{x_1^0, \dots, x_m^0\}$. Тогда в игре $\Gamma(n)$ происходит уклонение на любом отрезке $[t_0, T]$.

Во втором параграфе рассматривается задача уклонения в конусе.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = a(t)x_i + u_i,\ \|u_i\| \leqslant \alpha_i,$$

причем $\alpha_j = 1$ для всех $j = 1, \dots, m < n$ и $\alpha_j < 1$ для всех $j = m+1, \dots, n$.

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = a(t)y + v,\ \|v\| \leqslant 1.$$

При $t = t_0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и начальное положение убегающего y^0, причем $x_i^0 \neq y^0, i = 1, \ldots, n$.

Здесь $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция.

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого конуса

$$D = \{y : \ y \in \mathbb{R}^k, \ \ (p_j, y) \leqslant 0, j = 1, \ldots r\},$$

где $p_1, \ldots p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$ такие, что $\mathrm{Int} D \neq \emptyset$.

Убегающий использует кусочно-программные стратегии.

Теорема 1.3. Пусть $y^0 \in \mathrm{Int} D$, a — функция, ограниченная на любом компакте и $m < k$. Тогда в игре $\Gamma(n)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$ из любых начальных позиций.

Во второй главе рассматривается задача уклонения с участием группы преследователей и группы убегающих при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых не уступают возможностям убегающих, так и участники с меньшими возможностями. Цель группы преследователей — «переловить» всех убегающих. Цель группы убегающих — помешать этому, т. е. предоставить возможность по крайней мере одному из убегающих уклониться от встречи.

В третьем параграфе приводится постановка основной задачи. В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ
$n + m$ лиц: n преследователей P_i и m убегающих E_j с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i), \quad u_i \in U_i(t), \quad \dot{y}_j = A_j(t) y_j + v_j, \quad v_j \in V_j(t),$$
$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j(t_0) = y_j^0.$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено иначе $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $x_i, y_j \in \mathbb{R}^k$ — фазовые переменные, $u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия, $A_i(t)$ — квадратные матрицы, непрерывно зависящие от t, f_i — функции, удовлетворяющие стандартным условиям существования, единственности решения задачи Коши и продолжимости решения на промежуток $[t_0, \infty)$. Множества $V_j(t)$ и $U_i(t)$ для всех $i, j, t \geqslant t_0$ — выпуклые компакты с непустой внутренностью, непрерывные по t в метрике Хаусдорфа и такие, что существуют выпуклые компакты V_j^0, U_i^0, для которых $V_j(t) \subset V_j^0, U_i(t) \subset U_i^0$ для всех $t \geqslant t_0, i, j$. Также предполагается, что для всех $t \geqslant t_0$, для всех $x \in \mathbb{R}^k$ и для каждого j выполнено включение

$$f_i(x, U_i(t)) \subset A_j(t)x + \mathrm{Int}V_j(t),$$

$$i = l+1, \dots, n, \quad f_i(x, U_i) = \{f_i(x, u) \,|\, u \in U_i\},$$

где l — заданное натуральное число, $l < n$.

Обозначим $Z_0^s = (x_1^0, \dots, x_s^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$.

Определение 2.1. Кусочно-программной стратегией Q_j убегающего E_j, заданной на $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$) называется пара (σ, Q_σ^j), где σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), а Q_σ^j — семейство отображений $c_j^r (r = 0, 1, \dots)$, ставящих в соответствие величинам

$$\Big(t_r, x_i(t_r), y_j(t_r), \min_{t \in [t_0, t_r]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\|\Big)$$

измеримую функцию v_j^r, определенную на $[t_r, t_{r+1})$ и, такую, что $v_j^r(t) \in V_j(t)$ для всех $t \in [t_r, t_{r+1})$.

Аналогично определяются кусочно-программные стратегии S_i преследователей P_i.

Здесь и всюду далее в данной главе $s = 1, \dots, l$. Игру, в которой участвуют преследователи P_s и убегающие E_j, обозначим через $\Gamma(l, m, Z_0^l)$, а в которой участвуют преследователи P_i и убегающие E_j — $\Gamma(n, m, Z_0^n)$.

Определение 2.2. В игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ *происходит уклонение от встречи на* $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), если существуют кусочно-программные стратегии Q_j убегающих E_j, такие, что для любых траекторий $x_s(t)$ преследователей P_s найдется, такой номер q, что $y_q(t) \neq x_s(t)$ для всех s и всех $t \in [t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$).

Предположение 2.1. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $Z \in O_{\delta_0}(Z_0^l)$ для каждого $T > t_0$ в игре $\Gamma(l, m, T, Z_0^l)$ существует седловая точка.

В четвертом параграфе доказана основная теорема.

Теорема 2.1. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$ и выполнено предположене 2.1. Тогда в игре $\Gamma(n, m, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи на любом отрезке $[t_0, T]$.

В пятом параграфе рассматривается частный случай основной задачи данной главы, для которого конкретизирован вид стратегий убегающих, гарантирующих уклонение от встречи.

В шестом параграфе рассматривается пример Понтрягина. В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, m)$ $n+m$ лиц: n преследователей P_i и m убегающих E_j с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{gathered}
x_i^{(q)} + a_{q-1}(t)x_i^{(q-1)} + \cdots + a_1(t)x_i = u_i, \quad u_i \in U_i(t), \\
y_j^{(q)} + a_{q-1}(t)y_j^{(q-1)} + \cdots + a_1(t)y_j = v_j, \quad v_j \in V_j(t), \\
x_i^{(\alpha)}(t_0) = x_{i\alpha}^0, \ y_j^{(\alpha)}(t_0) = y_{j\alpha}^0, \ \alpha = 0, \ldots, q-1.
\end{gathered}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $a_1(t), \ldots, a_{q-1}(t) \in \mathbb{R}^1$, — непрывные на $[t_0, \infty)$ функции, $U_i(t), V_i(t)$ — определяются как в третьем параграфе.

Дополнительно предполагается, что для всех $t \geqslant t_0$, $j \in J$ выполнены включения $U_i(t) \subset \mathrm{Int} V_j(t)$, $i = l+1, \ldots, n$, где l — заданное натуральное число, $l < n$.

Теорема 2.3. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$. Тогда в игре $\Gamma(n, m, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи на любом отрезке $[t_0, T]$.

В третьей главе рассматриваются две задачи простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что все игроки обладают равными возможностями.

В седьмом параграфе приводится общая постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E с законами движения

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{y} = v, \quad v \in U, \quad y(0) = y^0,$$

где U — выпуклый компакт с непустой внутренностью. Обозначим
$z_i^0 = x_i^0 - y^0$, $z^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0\}$. Считаем, что $z_i^0 \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 3.2. *Кусочно-программной контрстратегией* U_i преследователя P_i называется пара (σ, U_σ^i), где σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, а U_σ^i — семейство отображений $\{b_i^l\}_{l=0}^\infty$ ставящих в соответствие величинам $(t_l, x_1(t_l), \dots, x_n(t_l), y(t_l))$ и функции $v_l(t), t \in [t_l, t_{l+1})$, измеримую функцию $u_i^l : [t_l, t_{l+1}) \to U$.

Обозначим данную игру $\Gamma(n, z^0)$.

Определение 3.3. В игре $\Gamma(n, z^0)$ *происходит уклонение от встречи,* если существует кусочно-программная стратегия V убегающего E такая, что для любых траекторий $x_1(t), \dots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ выполнено $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \geqslant 0$ и всех $i = 1, \dots, n$, где $y(t)$ — траектория E, порожденная стратегией V.

Определение 3.4. В игре $\Gamma(n, z^0)$ *происходит поимка* если существует $T > 0$ такое, что для любой кусочно-программной стратегии V убегающего E, найдутся кусочно-программные контрстратегии $U_1, \dots, U_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$, для которых $x_p(\tau) = y(\tau)$ при некоторых $p, \tau \in [0, T]$.

Известно[3], что в игре $\Gamma(n, z^0)$ происходит поимка тогда и только тогда, когда $\delta(z^0) > 0$, где

$$\delta(z^0) = \min_{v \in U} \max_{i=1,\dots,n} \lambda_i(v), \quad \lambda_i(v) = \sup\{\lambda \mid \lambda \geqslant 0, \ -\lambda z_i^0 \in -v + U\}.$$

В восьмом параграфе предполагается, что множество $U = \mathrm{co}\{A_1, \dots, A_m\}$, причём для всех j точки A_j являются крайними. Для каждого $i = 1, \dots, m$ определим следующие множества:

$$L_i = \left\{ \xi \mid \xi = \sum_{j=1,\dots,m, \ j \neq i} \alpha_j (A_j - A_i), \quad \sum_{j=1,\dots,m, \ j \neq i} \alpha_j = 1, \ \alpha_j \in [0,1] \right\},$$

и

$$C_i = \{\gamma L_i \mid \gamma \geqslant 0\}.$$

Теорема 3.2. Пусть $m = k+1$. Для того, что бы в игре $\Gamma(k+1, z^0)$ происходила поимка необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$-z_i^0 \in C_{i_j}, \ j = 1, \dots, m,$$

$$\{i_1\} \cup \dots \cup \{i_{k+1}\} = \{1, \dots, m\}.$$

При этом $\delta(z^0) = \min\limits_{j=1,\dots,k+1} \dfrac{\lambda_j(A_{i_j})}{k}$.

[3]Григоренко, Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего / Н.Л. Григоренко // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и киберн. — 1983. — № 1. — С. 41–47.

В девятом параграфе рассматривается задача преследования, в которой множество U — выпуклый компакт с непустой внутренностью, количество преследователей равно двум.

Для каждого $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$ определим множество $W(p)$ следующим образом: $w \in W(p)$ если выполнены следующие условия
1) $w \in \partial U$;
2) существуют вектор $\|q\| = 1$, $(q, p) = 0$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $v \in U$, $(v, q) \leqslant \alpha$, $(w, q) = \alpha$.

Введём следующие обозначения:

$$D_{max}(p, w) = w + p \cdot \max\{\gamma \in \mathbb{R}^1 \mid \gamma p + w \in \partial U\},$$

$$D_{min}(p, w) = w + p \cdot \min\{\gamma \in \mathbb{R}^1 \mid \gamma p + w \in \partial U\}.$$

Теорема 3.3. Для существования начальных положений z_1^0 и z_2^0, из которых в данной игре происходит поимка, необходимо и достаточно существование такого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, что для любой точки $w \in W(p)$ выполнено $\|D_{max}(p, w) - D_{min}(p, w)\| > 0$. При этом поимка будет гарантирована, если $z_1^0 = \alpha p$, $z_2^0 = -\beta p$ для некоторых $\alpha, \beta > 0$.

В десятом параграфе получены необходимые условия поимки в случае, когда количество преследователей не превосходит размерности фазового пространства.

Обозначим $L_m(p_1, \ldots, p_m)$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^k$, определяемое линейно независимыми векторами $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^k$, $\|p_j\| = 1$.
$L_m^{\perp}(p_1, \ldots, p_m)$ — ортогональное дополнение к $L_m(p_1, \ldots, p_m)$.

Теорема 3.4. Для осуществления поимки необходимо, чтобы
$0 \in \mathrm{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.

Теорема 3.5. Пусть $n \leqslant k$. Тогда, для осуществления поимки необходимо существование такого $L_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1})$, что для любой точки $v \in \partial U$, в которой существует опорная гиперплоскость с внешней нормалью $q \in L_{n-1}^{\perp}(p_1, \ldots, p_{n-1})$, $\|q\| = 1$, было выполнено

$$((L_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1}) + v) \setminus \{v\}) \cap U \neq \emptyset.$$

В четвертой главе рассматриваются дифференциальные игры преследования и уклонения двух лиц, описываемые системой вида

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x,v),\ x \in \mathbb{R}^k,\ u \in U,\ v \in V.$$

Множеством значений управлений игрока, со стороны которого рассматривается задача, является конечное подмножество фазового пространства.

В одиннадцатом параграфе рассматривается следующая задача о поимке.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x,v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовая переменная, $u, v \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \ldots, m$. Множество V — компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ — для каждого $u \in U$ непрерывно дифференцируема по x во всем пространстве $\mathbb{R}^k$. Функция $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}^k$ — для каждого $v \in V$ непрерывно дифференцируема по x во всем пространстве $\mathbb{R}^k$. При этом считаем, что функция $f(\cdot,\cdot)$ — для каждого $u \in U$ липшицева по x, функция $g(\cdot,\cdot)$ — липшицева по совокупности переменных, то есть существуют положительные числа $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m$, L_2 такие, что

$$\|f(x^1,u_i) - f(x^2,u_i)\| \leqslant \overline{L}_i \|x^1 - x^2\|, \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\|g(x^1,v^1) - g(x^2,v^2)\| \leqslant L_2(\|x^1 - x^2\| + \|v^1 - v^2\|), \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad v^1, v^2 \in V.$$

Определение 4.1. *Кусочно-постоянной стратегией* Q убегающего E называется пара (σ, Q_σ), где σ — разбиение промежутка $[0,\infty)$, а Q_σ — семейство отображений $c_r, r = 0, 1, \ldots,$ ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $v_r(t) \equiv v_r \in V$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Определение 4.2. *Кусочно-постоянной контрстратегией* W преследователя P называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0,\infty)$, а W_σ — семейство отображений $d_r, r = 0, 1, \ldots,$ ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ и постоянному управлению $v_r(t)$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$ кусочно-постоянную функцию $u_r : [\tau_r, \tau_{r+1}) \to U$ с конечным количеством переключений.

Обозначим данную игру $\Gamma(x_0)$.

Определение 4.3. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любой кусочно-постоянной стратегии Q убегающего E существует кусочно-постоянная контрстратегия W преследователя P такая, что $x(\tau) = 0$ для некоторого $\tau \in (0, T)$.

Определение 4.4. Совокупность векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом*[4] если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1, \ldots, \mu_n \geqslant 0$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

Теорема 4.1 Пусть $f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)$ образует положительный базис и $-g(0, V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}\{f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)\})$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in O_\varepsilon(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит поимка.

В двенадцатом параграфе рассматривается задача об ε-поимке.

Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, $u, v \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ для каждого $u \in U$ липшицева по x. Функция $g : \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ липшицева по совокупности переменных. Ограничения Липшица задаются также, как и в одиннадцатом параграфе.

Определение 4.5. *Кусочно-постоянной стратегией* W преследователя P называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0, T]$, а W_σ — семейство отображений $d_r, r = 0, 1, \ldots, \eta$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v : [0, \infty) \to V$. Обозначим данную игру $\Gamma(x_0)$.

Определение 4.6. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит ε-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \varepsilon$ для некоторого $\tau \in [0, T]$.

[4]Петров, Н.Н. Об управляемости автономных систем / Н.Н. Петров // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 4. — С. 606–617.

Теорема 4.2. Пусть $f(0,u_1),\dots,f(0,u_m)$ образуют положительный базис и $-g(0,V)\subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}\{f(0,u_1),\dots,f(0,u_m)\})$. Тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для любой точки $x_0\in O_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка.

В тринадцатом параграфе рассматривается задача об убегании.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k\geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\dot x = f(x,v)+g(x,u),\quad u\in U,\quad v\in V,\quad x(0)=x_0,$$

где $x\in\mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, $u,v\in\mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $V=\{v_1,\dots,v_m\}$, $v_i\in\mathbb{R}^l$, $i=1,\dots,m$. Множество $U\subset\mathbb{R}^s$ — компакт. Функции $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$ определяются также, как и в параграфе 12.

Определение 4.7. *Кусочно-постоянной стратегией* W убегающего E называется пара (σ,W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0,\infty)([0,T])$, а W_σ — семейство отображений $d_r, r=0,1,\dots,\eta$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r,x(\tau_r))$ постоянное управление $\overline{v}_r(t)\equiv\overline{v}_r\in V$, $t\in[\tau_r,\tau_{r+1})$.

Под управлением преследователя будем понимать произвольную измеримую функцию $u:[0,\infty)\to U$. Обозначим данную игру $\Gamma(x_0)$.

Определение 4.8. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит уклонение от встречи*, если существует $\varepsilon>0$ и кусочно-постоянная стратегия W убегающего E такие, что для любого допустимого управления преследователя $u(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\|>\varepsilon$ для любого $\tau\in[0,\infty)([0,T])$.

Введём следующие обозначения:

$$H(q)=\{x\in\mathbb{R}^k\,|\,(x,q)\leqslant\|q\|^2\};$$

$$H(Q)=\bigcap_{q\in Q}H(q);\quad d(Q)=\max_{a\in Q}\|q\|,\text{ где } Q\text{— компакт.}$$

Теорема 4.3. Пусть $f(0,v_1),\dots,f(0,v_m)$ образуют положительный базис и $-g(0,U)\subset\mathrm{Int}H(f(0,V))$. Тогда в игре $\Gamma(x_0)$ происходит уклонение от встречи для любого $x_0\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$.

Теорема 4.4. Пусть $f(0,v_1),\dots,f(0,v_m)$ образуют положительный базис и $-g(0,U)\subseteq H(f(0,V))$. Тогда для любого $T>0$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит уклонение от встречи на отрезке $[0,T]$ для любого $x_0\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены дифференциальные игры преследования-убегания представленных одним преследователем, группой или двумя группами преследователей с одной стороны, и как одного убегающего, так и группы убегающих, с другой.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Получены достаточные условия разрешимости задачи убегания в двух нестационарных задачах уклонения одного убегающего от группы преследователей при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых совпадают с возможностями убегающего, так и преследователи с меньшими возможностями и убегающий не покидает пределы некоторого множества: нестационарная задача с простой матрицей и убегающий не покидает пределы некоторого выпуклого множества с непустой внутренностью; линейная нестационарная задача преследования при условии, что матрица системы является произведением функции на единичную матрицу и убегающий не покидает пределы выпуклого конуса с вершиной в нуле и с непустой внутренностью.

2. Получены достаточные условия убегания группы убегающих от группы преследователей при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых не уступают возможностям убегающих, так и участники с меньшими возможностями, в трех задачах: задача, в которой динамика преследователей описывается нелинейными стационарными дифференциальными уравнениями, динамика убегающих — линейными нестационарными дифференциальными уравнениями; линейная нестационарная задача с простой матрицей, в которой разрешающее управление убегающего построено аналитически; нестационарный пример Понтрягина.

3. Получены необходимые и достаточные условия поимки в задаче простого преследования с различными условиями: множество значений

управлений является выпуклым многогранником; количество преследователей равно двум. Также в данной задаче получены дополнительные необходимые условия поимки, зависящие от количества преследователей.

4. Получены новые достаточные условия разрешимости задач преследования и убегания в нелинейных дифференциальных играх двух лиц.

В задаче убегания одного или нескольких убегающих (задачи первой и второй глав) от группы преследователей интерес представляет перенос результатов на нелинейный случай. В задаче третьей главы перспективным является поиск достаточных условий поимки одного убегающего группой преследователей, если их число не превосходит размерности фазового пространства. Для нелинейных задач преследования и убегания (глава 4) с одним убегающим и одним преследователем интерес представляет перенос данных результатов на случай группового преследования, в том числе с фазовыми ограничениями.

Публикации автора по теме исследования

Статьи в изданиях, определенных ВАК

1. Нарманов, А.Я. Задача уклонения в нелинейной дифференциальной игре с дискретным управлением / А.Я. Нарманов, К.А. Щелчков // Известия Института математики и информатики УдГУ. — 2018. — Т. 52. — С. 75–85. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-06
2. Петров, Н.Н. К задаче Черноусько / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — № 4. — С. 62–67. DOI: 10.20537/vm120405
3. Петров, Н.Н. Об «эквивалентности» двух задач уклонения со многими убегающими / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Известия Российский академии наук. Теория и системы управления. — 2014. — № 6. — С. 45–49. DOI: 10.7868/S0002338814060092

Переводная версия:

Petrov, N.N. On the “equivalence” of two evasion problems with multiple evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2014. — Vol. 53, issue 6. — P. 819–823. DOI: 10.1134/S1064230714060094

4. Петров, Н.Н. О взаимосвязи двух линейных стационарных задач уклонения со многими убегающими / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2014. — № 3. — С. 52–58. DOI: 10.20537/vm140305
5. Щелчков, К.А. К задаче группового преследования на плоскости / К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — № 3. — С. 383–387. DOI: 10.20537/vm150308
6. Петров, Н.Н. О взаимосвязи двух задач уклонения со многими убегающими / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Прикладная математика и механика. — 2016. — Т. 80, № 4. — С. 473–479.

   Переводная версия:

   Petrov, N.N. On the interrelationship of two problems on evasion with many evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2016. — Vol. 80, issue 4. — P. 333–338. http://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.09.008.
7. Щелчков, К.А. К нелинейной задаче преследования с дискретным управлением / К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27, № 3. — С. 389-395. DOI: 10.20537/vm170308
8. Щелчков, К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией / К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, № 1. — С. 111–118. DOI: 10.20537/vm180110
9. Petrov, N.N. On the Interrelation of Two Linear NonStationary Problems with Multiply Evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // International

Game Theory Review. — 2015. — Vol. 17, issue 4 (11 pages). https://doi.org/10.1142/S0219198915500139

10. Petrov, N.N. About the problem of group persecution in linear differential games with a simple matrix and state constraints / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 92, № 1. — P. 13–26. DOI: 10.12732/ijpam.v92i1.2
11. Petrov, N.N. Interrelationship of Linear Nonstationary Evasion Problems with Many Evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, issue 32. — P. 499–502. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.470

Публикации в других изданиях и сборниках материалов конференций

12. Щелчков, К.А. К задаче простого преследования / К.А. Щелчков // Современные проблемы математики и ее приложений: материалы 48-й Междунар. молодежной школы-конф., Екатеринбург, 5-11 февр. 2017 г. / Институт математики и механики УрО РАН. под ред.: А. Махнева, С. Правдина. Екатеринбург. — 2017. — С. 71–78.
13. Петров, Н.Н. О взаимосвязи двух задач уклонения со многими убегающими / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1353–1355.
14. Щелчков, К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным временем / К.А. Щелчков // Современные проблемы математики и её приложений : тез. Междунар. (49-й Всерос.) молодежной школы-конф., 4–10 февр. 2018 г. / Ин-т математики и механики УрО РАН; отв. ред. А.А. Махнев; отв. за вып.: С.Ф. Правдин, П.А. Чистяков. — Екатеринбург, 2018. — С. 45.
15. Щелчков, К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с неполной информацией / К.А. Щелчков // Гагаринские чтения — 2018: XLIV Междунар. молодёж. науч. конф.: сб. тез. докл. — Москва: Моск. авиац. ин-т (нац. исслед. ун-т), 2018. — Т. 2. — С. 350.

16. Щелчков, К.А. О нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией / К.А. Щелчков // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тез. докл., Суздаль, 6–11 июля 2018 г. / Матем. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, Владимирский гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова; отв. ред. В.В. Козлов. — Владимир: Аркаим, 2018. — С. 224.
17. Щелчков, К.А. О нелинейной задаче уклонения с дискретным управлением / К.А. Щелчков // Современные проблемы математики и её приложений: тез. Междунар. (50-й Всерос.) молодежной школы-конф., 3–9 февр. 2019 г. / Ин-т математики и механики УрО РАН; отв. ред. А.А. Махнев; отв. за вып.: С.Ф. Правдин, П.А. Чистяков. — Екатеринбург, 2019. — С. 53.
18. Щелчков, К.А. Уклонения от многих преследователей в нестационарных дифференциальных играх с простой матрицей и фазовыми ограничениями / К.А. Щелчков // Современные проблемы математики и её приложений: тез. Междунар. (45-й Всерос.) молодежной школы-конф., посв. 75-летию В.И. Бердышева, 2–8 февр. 2014 г. / Ин-т математики и механики УрО РАН; отв. ред. А.А. Махнев; отв. за вып.: Л.В. Камнева, Н.В. Маслова, М.С. Кошелева, С.Ф. Правдин. — Екатеринбург, 2014. — С. 99–101.
19. Petrov, N. Interrelationship of Linear Nonstationary Evasion Problems with Many Evaders / N. Petrov, K. Shchelchkov // 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018): Book of Abstracts and Program, Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018 / IFAC. — Yekaterinburg: IMM UB RAS, 2018. — P. 29.
20. Petrov, N.N. On a conflict controlled process with multiple evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // Systems Analysis: Modeling and Control: Abstracts of the International Conference in memory of Academician Arkady Kryazhimskiy, Ekaterinburg, Russia, 3–8 October 2016. — Ekaterinburg, 2016. — P. 91–93.