Н.Н. Петров, К.А. Щелчков

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

Ижевск 2022

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

Институт математики, информационных технологий и физики

Кафедра дифференциальных уравнений

Н.Н. Петров, К.А. Щелчков

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

Сборник задач

Ижевск
2022

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.185я73
П 305

Работа выполнена в рамках мероприятий, проводимых в Уральском математическом центре.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010

Рецензент: д.ф.-м.н., Беляева Н.А., профессор кафедры прикладной математики и компьютерных наук Сыктывкарского университета

Петров Н.Н., Щелчков К.А.

П 305 Методы оптимизации: сборник задач и упражнений. — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2022. — 170 с.

ISBN XXX-X-XXX-XXXX-X

Пособие содержит 23 варианта индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по курсу «Методы оптимизации».

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.185я73

ISBN XXX-X-XXX-XXXX-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Методы оптимизации» принадлежит к числу обязательных общеобразовательных математических дисциплин, определяющих профессиональное назначение специалистов-математиков, обучаемых в университете.

Пособие написано на основе лекций и практических занятий, которые автор проводил в течение более десяти лет на математическом факультете Удмуртского государственного университета.

Многие практические задачи, будучи формализованными в математической форме, состоят в нахождении минимума или максимума некоторой функции или функционала с учетом ограничений, накладываемых на допустимые значения переменных. Такие задачи называют экстремальными.

Изучение любого курса, в том числе и курса «Методы оптимизации», предполагает сопровождение лекций обязательными практическими занятиями, позволяющими закрепить теоретический материал и привить минимальные практические навыки. Кроме того, студентам необходимо дать возможность более глубокого изучения теории путем самостоятельного решения задач. Для этого и предназначено данное учебное пособие, в котором приводится 23 варианта индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов. Все задания разделены на две части. В первой части приводятся конечномерные экстремальные задачи: гладкие экстремальные задачи, выпуклые экстремальные задачи, задачи линейного, целочисленного и дробно-линейного программирования.

Под формулировками некоторых задач понимается следующее.

Задача о коммивояжере. Имеется n городов, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Для любой пары (i, j) городов задано расстояние $c_{ij} \geqslant 0$ между ними (c_{ij} может означать не только расстояние, но и время, путевые расходы и прочее, поэтому в общем случае не предполагается, что $c_{ij} = c_{ji}$). Выехав из исходного города, коммивояжер должен вернуться в него, побывав во всех остальных городах по одному разу. В качестве исходного может быть выбран любой город. Требуется найти маршрут минимальной длины. Пусть $C = (c_{ij})$.

Транспортная задача. В пунктах $A_1, \ldots A_m$ сосредоточено соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц некоторого однородного груза. Данный груз следует перевезти в пункты назначения $B_1, \ldots, B_n$, причем в каждый из них надлежит завезти соответственно $b_1, \ldots, b_n$ единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза из A_i в B_j равна c_{ij}. При этом если $\sum\limits_i a_i \leqslant \sum\limits_j b_j$, то требуется вывезти весь груз от производителей. Если $\sum\limits_i a_i > \sum\limits_j b_j$, то требуется выполнить все заявки потребителей. Требуется составить план перевозок, суммарные расходы которого минимальны. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $C = (c_{ij})$.

Задача о рюкзаке. Имеется n предметов, a_j— вес, b_j — ценность j-го предмета, $a_j > 0, b_j > 0$. Требуется загрузить рюкзак, выдерживающий суммарный вес c набором предметов, суммарная ценность которых максимальна. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$,
$b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Задача о замене оборудования. Имеется период времени, разделенный на n этапов. В течение данного периода фирма должна производить продукцию на оборудовании, комплект которого вместе с установкой стоит z условных единиц. Со временем оборудование изнашивается, поэтому стоимость произведенной продукции $C(k)$ зависит от номера этапа и уменьшается с увеличением возраста оборудования. Кроме того, увеличиваются затраты $R(k)$ на обслуживание и ремонт оборудования. Требуется определить те моменты, в которые следует заменять старый комплект на новый, чтобы прибыль от произведенной продукции была максимальной. Под прибылью понимается суммарная стоимость произведенной продукции за вычетом стоимости обслуживания и приобретения нового оборудования. Предполагается, что в начальный момент времени установлено новое оборудование и что возраст оборудования, которое останется после окончания периода времени из n этапов, роли не играет.

Вторая часть пособия содержит задачи вариационного исчисления и оптимального управления. При этом предполагается, что момент T_0 задан, а момент T не задан, а подлежит определению из условия оптимума. В задаче, посвященной дифференцируемости по Фреше, если точка не задана, то требуется провести исследование для всех точек области определения.

В каждой части приводится дополнительный набор задач повышенной сложности.

Список литературы, которую авторы использовали для написания данного пособия, приведен в конце. Кроме того, данный список можно рекомендовать для дальнейшего знакомства с математической теорией оптимизации и для ее серьезного изучения.

Авторы будут благодарны всем читателям за советы и пожелания по поводу пособия, которые просьба направлять по e-mail:

kma3@list.ru

или обычной почтой по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, Удмуртский университет, кафедра дифференциальных уравнений.

ЧАСТЬ I

Вариант 1

1. $x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 \to \mathrm{extr}$.
2. $x^2 + 12xy + 2y^2 \to \mathrm{extr},\ y^2 + 4x^2 = 25$.
3. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \to \mathrm{extr}, \quad x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 \leqslant 1$.
4. $\dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x_n} \to \mathrm{extr}, \quad \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \cdots + \beta_nx_n \leqslant 1,\ \alpha_i \geqslant 0$.
5. $y^2 \to \mathrm{extr}, \quad 9x^3 + 2y^3 - 27xy \geqslant -16$.
6. Разделить натуральное число n на две части так, чтобы произведение их произведения на разность было максимально.
7. Точка x_0 – точка локального экстремума функции f. Будет ли точка x_0 точкой локального экстремума функции $f^2 - f$, если f – непрерывная (произвольная) функция.
8. Вычислить $\max\limits_{x\in[0,2]} \min\limits_{y\in[-1,1]} (x^2 + \alpha xy)$.
9. Найти расстояние от точки в пространстве R^n до гиперплоскости.
10. Из всех параллелограммов данной площади найти тот, у которого большая диагональ минимальна.
11. $3x_1 - 8x_2 \to \min,\ |x_1 + x_2| \leqslant 2,\ |x_2 - x_1| \leqslant 2,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$.
12. Будет ли произведение двух неотрицательных выпуклых функций выпуклой функцией?
13. $(4x^3 - 3x)^6 + (4y^3 - 3y)^6 \to \mathrm{extr}, \quad x^2 + y^2 = 1$.
14. Доказать, что объем V и площадь боковой поверхности S прямого кругового конуса удовлетворяют неравенству
$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leqslant \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$
15. Решить задачу линейного программирования
$$-x + 9y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 7y \leqslant 28, \\ 6x - 2y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 + x_2 + x_3 \to \max,\ \ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-3, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \ \max,\ \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 7, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1?. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,\ \ x_2 \geqslant 0,\ \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \min,\ \ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \to \ \max,\ \ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, \\ x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

21. Цех выпускает три вида продукции (А, В, С). В производстве участвуют три участка, располагая для этого определенными фондами времени в плановой период. Затраты времени на выпуск одной тонны продукции каждого вида, а также прибыль с каждой тонны продукции указаны в таблице

№ участка	Фонд времени	A	B	C
1	120	4	2	4
2	130	4	6	2
3	140	5	3	1
Прибыль, у.е.		100	80	50

Найти план выпуска продукции, обеспечивающей максимум прибыли при условии изготовления не менее 20 т продукции вида С и 8 т продукции вида А.

22. Фирма производит из одного вида сырья два продукта: A и B, продаваемых соответственно по 0,08 и 0,15 ед. за упаковку. Рынок сбыта для каждого из продуктов практически не ограничен. Продукт A обрабатывают на машине 1, продукт B – на машине 2. Затем оба продукта упаковывают на фабрике. Один килограмм сырья стоит 0,06 ед. Машина 1 обрабатывает 5000 кг сырья за один час с потерями 10%. Машина 2 обрабатывает 4000 кг. Сырья за один час с потерями 20%. Машина 1 доступна 6 часов в день; ее использование стоит 228 ед. в час. Машина 2 доступна 5 часов в день; ее использование обходится 186 ед. в час. Фабрика может работать 10 часов в день. Один час работы фабрики обходится в 360 ед. За один час можно изготовить 12000 упаковок продукта A или 8000 упаковок продукта B. Упаковка продукта A весит 0,25 кг, упаковка продукта B – 0,33 кг. Сколько сырья для производства продуктов A и B нужно закупать ежедневно, чтобы максимизировать прибыль?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 1 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (7, 8, 5, 6),\ b = (11, 2, 6, 7),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 3$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 4$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 16, \\ x_1 - 3x_2 = 2. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 25, \ a = (6, 7, 9, 8, 4, 7), \ b = (2, 12, 3, 7, 1, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max, \ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11, \ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 4$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	12	11	11	10	8	8
Затраты на обслуживание, у.е.	1	2	2	3	5	6

Вариант 2

1. $x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to \text{extr}.$

2. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 \to \text{extr}, \ x + y + z = 1.$

3. $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 \to \text{extr}, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1.$

4. $x_1^2 x_2^3 \dots x_n^{n+1} \to \text{extr}, \ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1.$

5. $5x + 4y \to \text{extr}, \quad x^2 + 2y^2 \geqslant 72, \ x \geqslant 2, \ y \geqslant -3.$

6. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма длин катетов равна заданному числу.

7. Найти расстояние от точки до гиперболы.

8. Вычислить $\max\limits_{x \in [-1,2]} \min\limits_{y \in [-1,1]} (-x^2 + \alpha xy).$

9. Привести пример двух гладких функций, каждая из которых на интервале $(0, 1)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения, а их сумма имеет наибольшее значение на данном интервале, но не имеет наименьшего значения на данном интервале.

10. Внутри данного треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника наименьшая.

11. $x_1 - 2x_2 \to \ \min, \ |x_2 + 3x_1| \leqslant 9, \ |x_1| \leqslant 5.$

12. $f: R^n \to R, \quad f(x) = ||Ax - b||^2,$ $A-$ матрица, $b-$ вектор. Является ли f выпуклой функцией?

13. Найти наибольшее значение площади треугольника, вершины которого лежат на трех концентрических окружностях радиусов 1, $3\sqrt{2}$, 5.

14. Доказать, что для треугольника со сторонами a, b, c и площадью S имеет место неравенство
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

15. Решить задачу линейного программирования
$$x + 9y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 7y \leqslant 28, \\ 3x - 2y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования
$$x_1 + x_2 + x_3 \to \ \max, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad = 2. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(2, 3)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max, \ x_2 \geqslant 0, \ \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования
$$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 1. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования
$$\frac{x_1 + 2x_2 + 4x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \to \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

21. Промышленный комплекс состоит из угольных шахт и ТЭЦ. Добытый на шахтах уголь (валовая продукция) распределяется следующим образом:

а) очищается(сортируется), в процессе чего отсеивается 5% добытого угля;

б) идет на производство электроэнергии (на производство 1 кВт/ч электроэнергии требуется 100 кг угля);

в) продается на сторону (товарная продукция).

Аналогично распределяется выработанная на ТЭЦ электроэнергия:

а) теряется в сетях и идет на потребление самой ТЭЦ 4%;

б) идет на добычу угля (на 1 т угля расходуется 0,2 кВт/ч электроэнергии);

в) продается на сторону (товарная продукция).

В плановый период необходимо получить не менее 1200 тыс. т товарного угля и выработать не менее 2500 тыс кВт/ч товарной электроэнергии.

Составить математическую модель задачи оптимизации суммарных затрат на валовой продукт комплекса в плановый период (в денежном эквиваленте), если затраты на 1 т добытого угля составляют 0,3 у.е., а на 1 кВт/ч электроэнергии — 0, 02 у.е.

22. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидения, радио, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7, 4 денежные ед. в расчете на 1 денежную ед., затраченную на рекламу. Фирма не может выделить на рекламу более 500 000 денежных единиц. Кроме того, фирма считает, что следует расходовать не более 40% рекламного бюджета на телевидение и не более 20% бюджета на афиши, а, на радио планируется расходовать, по крайней мере, половину того, что планируется расходовать на телевидение. Как целесообразнее распределить рекламный бюджет?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программиро-

вания, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 53 & 11 & 13 & 6 \\ 17 & \infty & 6 & 12 & 32 & 25 \\ 8 & 13 & \infty & 5 & 15 & 11 \\ 21 & 6 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 12 & 26 & 17 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 15 & 15 & 11 & 9 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (20, 10, 6, 7),\ b = (14, 7, 10, 17),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_4$ ограничена $x_{14} \leqslant 8$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 4$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 29,\ a = (5, 7, 9, 6, 7, 5),\ b = (4, 8, 3, 7, 1, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max,\ 4x_1 + x_1 + 3x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 4$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	12	12	10	9	7	6
Затраты на обслуживание, у.е.	1	1	2	3	6	6

Вариант 3

1. $xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{50}{y} \to \mathrm{extr}.$

2. $x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p \to \mathrm{extr},\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1,\ p > 1.$

3. $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \mathrm{extr},\ 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leqslant 40,$
   $2x_1 + x_2 - x_3 = -3,\ x_2 \geqslant 0.$

4. $x^2 - y^2 + z^2 \to \mathrm{extr},\ x + y + z \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$

5. $7x + 4y \to \mathrm{extr},\ \ 2x^2 + 5y^2 \geqslant 100,\ x \geqslant -3,\ y \geqslant 3.$

6. Задача о полиноме Лежандра второй степени:
$$\int_{-1}^{1} (t^2 + tx_1 + x_2)^2 dt \to \ \min .$$

7. Найти расстояние от точки в пространстве R^n до прямой.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-2,2]} \min\limits_{y\in[-2,1]} (-x^2 + \alpha x - y^2).$

9. Точка x_0 является точкой локального экстремума функции f. Будет ли данная точка x_0 точкой экстремума функции $e^f - f$, если f– непрерывная (произвольная) функция.

10. Из всех треугольников данного периметра найти тот, у которого радиус вписанной окружности максимален.

11. $f : R^2 \to R^1,\ f(x_1, x_2) = \max\limits_{t\in[-1,1]} (t^2 + x_1 t + x_2)$. Является ли f выпуклой на R^2 функцией?

12. $x^2 + xy + y^2 + 3|x + y - 2| \to \min .$

13. На плоскости даны прямая l и точки A, B, лежащие по разные стороны от нее. Построить окружность, проходящую через данные точки так, чтобы прямая l высекала на ней хорду наименьшей длины.

14. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 20% цинка, 50% олова, 30% марганца. Второй сплав содержит 30% цинка, 20% олова, 50% марганца. Третий сплав содержит 10% цинка, 10% олова, 80% марганца. Требуется приготовить сплав, содержащий 40% олова. Найти минимальный процент цинка в таком сплаве.

15. Решить задачу линейного программирования

$$-x-9y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 6x+5y \leqslant 30, \\ -4x+7y \leqslant 28, \\ 3x-2y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$2x_1+3x_2-6x_3+8x_4 \to \ \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1, \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3, \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-1,2)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 2x_1-x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 5. \\ x_1+x_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1-2x_2+x_3 \to \max, \ x_2 \leqslant 0, \ \begin{cases} 3x_1-4x_2-x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1+6x_2+x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$-x_1+x_2+3x_3+x_4 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} -x_1+x_2-x_3+2x_4 \leqslant 6, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4 \leqslant 4. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{4x_1+2x_2-x_3}{2x_1+x_2+x_3} \to \ \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 2x_1+x_2+x_3=5. \end{cases}$$

21. Строительной организации необходимо выполнить три вида земляных работ (I, II, III) по 25000 м^3. Организация располагает для этого тремя экскаваторами A, B, C. Нормы выработки указаны в таблице (м^3/ч)

№ вида работ	A	B	C
I	110	123	71
II	91	86	51
III	91	97	59

Построить математическую модель, определения плана использования экскаваторов по видам работ, при котором все работы выполняются за кратчайшее время.

Примечание. Рассмотреть два случая:

а) экскаваторы начинают и заканчивают работу одновременно;

б) экскаваторы могут начинать и заканчивать работу в разное время.

22. Фирма выпускает шляпы двух фасонов. Трудоемкость изготовления шляпы фасона 1 вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы фасона 2. Если бы фирма выпускала только шляпы фасона 1, суточный объем производства составил бы 500 шляп. Суточный объем сбыта шляп обоих фасонов находится в диапазоне от 150 до 200 штук. Прибыль от продажи шляпы фасона 1 равна 8 ед., а шляпы фасона 2 – 5 ед. Фирма хочет максимизировать свою прибыль.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 27 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 43 & \infty & 35 & 5 & 1 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 11 & 16 & 47 & 48 & \infty & 5 \\ 13 & 5 & 5 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 4, 2, 7),\ b = (3, 12, 2, 17),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_2 \to b_2$ запрещена $x_{22} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_1 \to b_4$ в объеме $x_{14} \geqslant 4$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 26,\ a = (7, 4, 9, 8, 6, 5),\ b = (2, 12, 3, 7, 1, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max,\ x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 5$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	15	13	11	10	8	8
Затраты на обслуживание, у.е.	2	3	4	6	7	8

Вариант 4

1. $3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to \text{extr}.$
2. $x_1^2 + x_2^2 + \dots + \dots x_n^2 \to \text{extr},\ \dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \dots + \dfrac{x_n}{a_n} \leqslant 1,\ a_i > 0.$
3. $xyz \to \text{extr},\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1.$
4. $5x + y \ \to \text{extr},\ x^2 + y^2 \geqslant 9,\ x \geqslant 1,\ y \geqslant 2.$
5. Задача о полиноме Лежандра третьей степени:

$$\int_{-1}^{1} (t^3 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3)^2 dt \to \min.$$

6. Найти минимум линейного функционала на единичном шаре R^n.
7. Привести пример гладкой конечномерной непериодической экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой абсолютный максимум и минимум достигаются в бесконечном числе точек.
8. Вычислить $\max\limits_{x\in[0,2]} \min\limits_{y\in[0,2]} (-x^2 + \alpha xy - y^2).$
9. Внутри данного треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника была бы наименьшей.

10. $\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}-\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\to\ \min,\quad x>0,\ y>0.$

11. $f: R\to R,\ f(x)=\inf\{x_1^2+x_2^2|x_1+x_2=x\}$. Является ли функция f выпуклой на R?

12. $x^2+y^2+2\max(x,y)\to\ \min.$

13. У грузового автомобиля передние покрышки стираются через 15тыс. км, а задние – через 25тыс. (на задних колесах по две покрышки, на передних по одной). Каким образом нужно менять покрышки на колесах, чтобы проехать на одних и тех же покрышках наибольшее расстояние?

14. $\sqrt{x^2+y^2+x+y+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}\to\text{extr}.$

15. Решить задачу линейного программирования

$$x-9y\to\text{extr},\qquad \begin{cases}6x+5y\leqslant 30,\\ -4x+7y\leqslant 28,\\ 3x-2y\leqslant 30.\end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1-3x_2-x_3-x_4\to\min, x_i\geqslant 0,\ \begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=4,\\ x_1-3x_2+x_3-x_4=2.\end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-2,5)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2\to\ \max,\ \begin{cases}5x_1-2x_2\leqslant 0,\\ 2x_1+3x_2\leqslant 13,\\ x_1+x_2\leqslant 3.\end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1-2x_2-x_3\to\min,\ x_1\leqslant 0,\ \begin{cases}3x_1-4x_2-x_3=1,\\ 5x_1+6x_2+x_3\geqslant 2.\end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$2x_1+x_2-x_3+2x_4\to\min,\ x_i\geqslant 0,\ \begin{cases}x_1+3x_2-x_3+4x_4\leqslant 5,\\ -x_1-x_2+x_3+2x_4\leqslant 3.\end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{-3x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + 3x_3} \to \max, \; x_i \geqslant 0, \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

21. Максимальное количество используемых под овощи площадей в хозяйстве составляет 313 га. Трудовые ресурсы для производства овощей в течение года могут быть выделены в размере
45 тыс. чел.-дн., в том числе в напряженный период (сентябрь) – 8600 чел.-дн.

По заключенным договорам необходимо продать 50 тыс. ц овощей, в том числе капусты (a) — 31 500 ц., огурцов(b) — 4 500 ц., помидоров(c) — 6 500 ц., свеклы столовой(d) — 6 000 ц., прочих овощей(e) — 1 500 ц. Затраты труда, урожайность и прибыль в среднем за последние 3 года представлены в табл.

Показатель	a	b	c	d	e
Затраты на 1 га чел.-дн.	75	138	346	158	91
Затраты в напр. период	26	22	35	34	40
Урожайность ц/га	325	92	176	206	52
Прибыль, у.е./га	996	390	388	37	11

Определить оптимальную структуру посевных площадей, позволяющих получить максимальную прибыль.

22. Необходимо вырезать из фанеры заготовки трех видов для 450 изделий. На одно изделие идет 2 заготовки первого вида, 4 – второго и 3 – третьего. Имеется три способа раскроя. По первому способу из листа фанеры получается 10 заготовок первого вида, 5 заготовок второго и 8 заготовок третьего вида. По второму – 4 первого, 6 второго и 10 третьего. По третьему – 6 первого, 10 второго и 6 третьего. Сколько листов фанеры нужно кроить каждым способом, чтобы минимизировать расход фанеры?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программиро-

вания, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 27 & 23 & 16 & 20 & 26 \\ 27 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 43 & \infty & 35 & 5 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 11 & 16 & 47 & 48 & \infty & 15 \\ 13 & 5 & 5 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 4, 3, 8),\ b = (3, 12, 2, 17),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ запрещена $x_{11} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_1 \to b_2$ в объеме $x_{12} \geqslant 5$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 23. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 27,\ a = (7, 9, 3, 8, 5, 12),\ b = (2, 4, 3, 7, 1, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 5x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 5$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	13	12	10	9	8	7
Затраты на обслуживание, у.е.	1	1	2	3	5	7

Вариант 5

1. $x^3+y^3+3xy \to \mathrm{extr}$.
2. $x-2y+2z \to \mathrm{extr}\ x^2+y^2+z^2=9$.
3. $e^{x_1-x_2}-x_1-x_2 \to \mathrm{extr},\ x_1+x_2 \leqslant 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$.
4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \to \mathrm{extr}\ ,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ x+y+z \leqslant 0$.
5. $xy^3 \to \mathrm{extr},\ x+5y \leqslant 8,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0$.
6. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой функционал ограничен, абсолютный максимум достигается, минимум - нет.
7. В эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям координат.
8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,2]}\min\limits_{y\in[0,2]}(x^2+\alpha xy-y^2)$.
9. Медианы AD, BE треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Какое максимальное значение может иметь угол C?
10. $x^3y^2z^2u \to\ \max,\ 2x+xy+z+xyz=1,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0,$ $z \geqslant 0,\ u \geqslant 0$.
11. $x^2+y^2+\dfrac{3}{2}|x+y-1| \to\ \min$.
12. Является ли выпуклым множество
$$\{(x_1,x_2)\mid 0 \leqslant x_2 \leqslant \sin x_1^2,\ x_1 \in [0,\pi]\}?$$
13. Нужно перебросить камень через ограду высотой h. Горизонтальное расстояние до преграды равно l. При какой минимальной скорости это можно выполнить?
14. Нужно перевести по железной дороге 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых – 2 т. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 т. Грузоподъемность вагона – 80 т. Найти минимальное число вагонов, необходимых для перевозки всех контейнеров.

15. Решить задачу линейного программирования

$$-x+y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 6x+5y \leqslant 30, \\ -4x+7y \leqslant 28, \\ 3x-4y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1+2x_3+2x_5 \to \ \max, \ x_i \geqslant 0, \ \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5, \\ x_2+x_3+x_4-x_5=2, \\ x_3-x_4+x_5=1. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(4,5)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 5x_1-4x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 25, \\ x_1+x_2 \leqslant 9. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1-2x_2+x_3 \to \min, \ x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \ \begin{cases} 3x_1-4x_2-x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1+6x_2+x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$3x_1-2x_2+x_3+2x_4 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \ \begin{cases} x_1-x_2+3x_3+2x_4 \leqslant 6, \\ 2x_1+x_2-x_3+4x_4 \leqslant 4. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{4x_1-x_2-x_3}{2x_1+3x_2+x_3} \to \ \max, \ x_i \geqslant 0, \ \begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=8, \\ 2x_1-x_2-2x_3=-1. \end{cases}$$

21. Имеется три пункта печатания газет (A, B, C). Они должны обеспечить печатью семь областей. Пункт A расположен в области 1, пункт B – в области 2, пункт C – в области 3.

   Суточный выпуск газет в пунктах печатания составляет
   $Q_A = 230$ тыс., $Q_B = 160$ тыс., $Q_C = 190$ тыс. экземпляров.

   Потребность в газетах для каждой области составляет:
   $q_1 = 70$ тыс., $q_2 = 80$ тыс., $q_3 = 90$ тыс., $q_4 = 80$ тыс. , $q_5 = 90$ тыс., $q_6 = 75$ тыс., $q_7 = 95$ тыс. экземпляров.

   Для простоты примем, что потребление газет в каждой области сосредоточено в одном пункте и что в 1 — 3 областях газеты получают из пунктов печати, в них расположенных. Затраты на перевозку 1 тыс. экземпляров приведены в таблице:

Пункт печатания	4	5	6	7
A	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$3,1$
B	$0,9$	$3,1$	$1,4$	$1,1$
C	$3,8$	$2,3$	$1,6$	$1,4$

Найти такой план закрепления пунктов печатания газет за областями 4 – 7, при котором суммарные затраты на их перевозку были бы минимальными.

22. В угольном бассейне добывают уголь трех сортов в соотношении 1 : 3 : 1. Этот уголь доставляют 6 энергетическим установкам. Известны теплотворные способности каждого из сортов угля (ккал/кг): 2800, 3000, 3500 и потребности установок (млрд. ккал): 7, 14, 11, 25, 17, 9. Затраты на добычу 1 тонны угля каждого сорта (ед.) таковы: 8, 10, 15. Найти нужный объем добычи и распределение разных сортов угля между энергетическими установками из условия минимизации суммарных затрат?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 23 & 16 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 43 & \infty & 35 & 5 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 47 & 48 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 5 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 4, 5, 8),\ b = (3, 12, 2, 17),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 2$;

б) гарантирована перевозка $a_4 \to b_2$ в объеме $x_{42} \geqslant 2$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$5x_1 - x_2 - x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 25,\ a = (9, 6, 3, 8, 7, 4),\ b = (7, 4, 2, 5, 1, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 6$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	13	11	10	8	7	7
Затраты на обслуживание, у.е.	2	2	4	5	6	7

Вариант 6

1. $x^3 - (y-1)^3 - 3xy^2 \to \text{extr}.$

2. $xy^2z^3 \to \text{extr},\ x + y + z = 12.$

3. $3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to \text{extr},\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leqslant 0,$
   $5x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2,\ x_3 \geqslant 0.$

4. $\sin x \times \sin y + \sin z \to \text{extr},\ x + y + z = \dfrac{\pi}{2},\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$

5. $y^2 \to \text{extr},\ 3x^3 + 2y^3 - 9xy \leqslant -4.$

6. Найти расстояние от точки до гиперболы.

7. Привести пример гладкой конечномерной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой функционал ограничен, но абсолютные минимум и максимум не достигаются.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,2]} \min\limits_{y\in[0,2]} (x^2 + \alpha xy + y^2).$

9. $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \to \max,\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = a,\ x_i \geqslant 0.$

10. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат на трех разных сторонах другого?

11. $f : R^2 \to R,\ f(x_1, x_2) = \max\limits_{t \in [-1,1]} |-t^2 + tx_1 + x_2|$. Будет ли f выпуклой на R^2 функцией?

12. $x_1^2 + x_2^2 + \max(x_1, x_2) \to \min, |x_1| + |x_2| \leqslant 4.$

13. Несколько ящиков вместе весят 10 т, причем каждый из них весит не более одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок достаточно, чтобы за один раз увести весь этот груз?

14. В трапецию с углом α между основанием и боковой стороной вписана окружность радиусом R. Определить угол между основанием и другой стороной, при котором средняя линия трапеции минимальна.

15. Решить задачу линейного программирования
$$x + y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 7y \leqslant 28, \\ 3x - 4y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования
$$-x_1 - x_2 + x_3 \to \max,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(1, 3)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max,\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 13, \\ x_1 + x_2 \leqslant 4. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$$x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 6. \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leqslant 4. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 4x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

21. Для кормления коров фермер располагает клеверным и луговым сеном, силосом подсолнечника, кормовой свеклой, картофелем и концентратами. Для нормального развития скота необходимо, чтобы дневной рацион включал 19,26 кормовых единиц, 1926 г переработанного белка, 114 г кальция и 85 г фосфора.

   Требуется составить наиболее дешевый дневной рацион, обеспечивающий необходимое количество питательных веществ. Содержание питательных веществ (в граммах) и цена 1 кг кормов приведена в таблице (1 — белок, 2 — кальций, 3 — фосфор).

Корм 1 кг	Цена 1кг, у.е.	Корм. ед.	1	2	3
Сено клеверное	$1,7$	$0,54$	56	$9,29$	$1,95$
Сено луговое	$1,2$	$0,52$	36	$6,02$	$2,14$
Силос подсолнечный	$0,8$	$0,18$	12	$3,55$	$0,65$
Свекла	$1,5$	$0,12$	3	$0,38$	$0,33$
Картофель	$2,4$	$0,30$	9	$0,14$	$0,68$
Концентраты	$4,0$	$1,06$	196	$2,60$	$7,60$

22. При производстве изделий A, B, C используют два вида оборудования. На первом для изготовления одного изделия A требуется 1,15 ч, B – 1,5 ч, C – 2,1 ч. Для второго вида оборудования затраты времени составляют соответственно 1,3; 1,6; 1,5 ч. На производство изделий выделено 3000 часов работы первого оборудования и 2400 часов – второго. Прибыль от реализации одного изделия A равна 80 ед., одного изделия B – 60 ед. одного изделия C – 70 ед. За каждый час простоя оборудования взимается штраф 10 ед. Требуется максимизировать прибыль.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программиро-

вания, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 23 & 56 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 43 & \infty & 3 & 35 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 5 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 7, 5, 9),\ b = (3, 11, 4, 17),\ C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_2$ ограничена $x_{12} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_1 \to b_4$ в объеме $x_{14} \geqslant 7$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-3x_1 + x_2 - x_3 \to \min, x_j \in Z_+, \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 25,\ a = (9, 6, 13, 8, 7, 5),\ b = (7, 9, 2, 5, 1, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 5$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	15	13	11	10	8	8
Затраты на обслуживание, у.е.	2	2	4	4	6	6

Вариант 7

1. $x^3 + y^3 - 3xy \to \text{extr}.$

2. $y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy \to \text{extr},\ 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1.$

3. $x^2 + y^2 \to \text{extr},\ 6x - 4y + 5 \geqslant 0,\ y - x + 1 \geqslant 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

4. $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \to \text{extr},\ x_1 + \dfrac{x_2}{2} + \cdots + \dfrac{x_n}{n} \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0.$

5. $xy^3 \to \text{extr},\ 2x + 3y \geqslant 7,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0.$

6. На эллипсоиде $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ найти точку, наиболее удаленную от начала координат.

7. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи, заданной на всем пространстве, в которой имеется бесконечное число локальных минимумов, но нет ни одного локального максимума.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,6]} \min\limits_{y\in[-4,2]} (\alpha x^2 + \alpha xy + 2y^2)$.

9. Сумма длин двух сторон треугольника равна a, а угол между ними равен $\dfrac{\pi}{6}$. Каковы должны быть длины сторон этого треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

10. Вписать в круговой сектор радиусом R с центральным углом α прямоугольник наибольшей площади.

11. $f : R^2 \to R,\ f(x_1, x_2) = \max\limits_{t\in[0,2]} |t^2 + tx_1 + x_2|$. Будет ли f выпуклой на R^2 функцией?

12. $|x| - |y| \to \text{extr},\ x^2 + 2x + y^2 - 4y \leqslant 0.$

13. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья — за 13 минут, выпить кастрюлю молока за 14 минут, а Карлсон может сделать это за 6, 6, 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они вдвоем смогут покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и кастрюли молока?

14. При каком наибольшем значении k для любых трех вещественных неотрицательных чисел a, b, c, сумма которых равна 1, выполняется неравенство
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant kabc?$$

15. Решить задачу линейного программирования

$$-x-y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 6x+5y \leqslant 30, \\ -4x+7y \leqslant 28, \\ 3x-4y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1+x_2+x_3 \to \ \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 4, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4 = -2. \\ 4x_2+2x_4 = 6. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-1,3)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 3x_1-x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 12, \\ x_1+x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$3x_1+2x_3+x_4 \to \min,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \begin{cases} x_1-x_3-x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1+6x_2+x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$3x_1-x_2+2x_3+x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4 \leqslant 5, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{2x_1+3x_2}{2x_1+x_2} \to \ \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} 3x_1+x_2 \geqslant 8, \\ x_1-x_2 \leqslant -3, \\ 2x_1-x_2 \leqslant 6. \end{cases}$$

21. На кондитерской фабрике изготовляют три вида восточных сладостей, для которых используется миндаль, фудук и арахис. Миндаль покупается по цене (за тонну) 6500 у.е.,
фундук — 2500 у.е., арахис — 3500 у.е.

Продукт 1 должен содержать не менее 50% миндаля и не более 25% фундука, продукт 2 — не менее 25% миндаля и не более 50% фундука, продукт 3 может содержать любое количество миндаля, фундука и арахиса. Продажная цена продукта 1 (1 т) — 5 тыс. у.е., продукта 2 — 3500 у.е., продукта 3 — 2500 у.е. Запасы сырья ограничены: миндаля — 100 т, фундука — 100 т, арахиса — 60 т.

Какое количество продукта 2 следует производить, чтобы получить максимальную прибыль?

22. Из пункта A в пункт B и обратно отправляются 4 поезда в соответствии со следующим расписанием: из A в B: в 9, 12, 16, 20 часов. Из B в A: в 10, 15, 18, 22 ч. Время в пути для всех поездов одинаково и равно 5 часов. Локомотивы, ведущие поезда, совершают в сутки 2 рейса: один из пункта, к которому локомотив прикреплен, второй обратно, с ближайшим очередным рейсом. Найти оптимальное закрепление локомотивов за пунктами A и B, обеспечивающее минимум суммарного времени простоя локомотивов.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 23 & 6 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 47 & 48 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 15 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (7, 14, 5, 8),\ b = (5, 9, 12, 17),\ C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_2 \to b_2$ ограничена $x_{22} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 4$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$3x_2 + 2x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 26,\ a = (9, 6, 3, 8, 7, 9),\ b = (7, 4, 2, 5, 5, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 6$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	17	15	13	10	8	7
Затраты на обслуживание, у.е.	2	2	3	5	6	6

Вариант 8

1. $x^2 - y^2 + 2e^{-x^2} \to \text{extr}.$
2. $ax^2 + by^2 + cz^2 \to \text{extr},\ x + y + z = 1,\ a > 0, b > 0, c > 0.$
3. $2x_1 - x_1^2 + x_2 \to \text{extr},\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 1,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 16.$
4. $x_1^2 x_2^3 \dots x_n^{n+1} \to \text{extr},\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0.$
5. $x^2 y^2 \to \text{extr},\ 5x - 3y \geqslant 19,\ x \geqslant 1,\ y \geqslant -1.$
6. Вписать в заданный круг треугольник максимальной площади.
7. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой функционал ограничен, имеет локальные максимумы и минимумы, а глобальные максимум и минимум не достигаются.
8. Вычислить $\max\limits_{x \in [-4,0]} \min\limits_{y \in [-2,2]} (x^2 + \alpha xy - 2y^2).$
9. Две стороны треугольника ABC равны a, b. Какую наименьшую величину может иметь наибольший угол треугольника?
10. Найти расстояние от точки до конуса $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.
11. $f : R^2 \to R,\ f(x_1, x_2) = \max\limits_{t \in [-1,1]} |t^2 + tx_1 + x_2|$. Будет ли f выпуклой на R^2 функцией?

12. $x_1^2 + 2x_2^2 + \max(x_1, -x_2) \to \ \min, \ |2x_1| + |x_2| \leqslant 4.$

13. Какое из чисел больше:

$$100! \text{ или } 100\Big(\frac{100}{e}\Big)^{100}.$$

14. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции f. Будет ли точка x_0 точкой локального экстремума функции $\cos f$, если f – непрерывная (произвольная) функция.

15. Решить задачу линейного программирования

$$x - y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 7y \leqslant 28, \\ 3x - 4y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \ \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-2, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min, \ x_1 \leqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leqslant 4. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \to \ \max, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_3 = 6. \end{cases}$$

21. На производство поступила партия стержней длиной 250 см и 190 см. Необходимо получить не менее 470 отрезков по 45 см и не менее 450 отрезков по 80 см. Как разрезать имеющиеся стержни, чтобы сократить до минимума отходы?

22. Минимально необходимое количество автобусов в i–й час суток равно b_i, $i = 1, \ldots, 24$. Каждый автобус используется на линии непрерывно в течение 6 часов. Превышений числа автобусов в i–ый час величины b_i приводит к дополнительным издержкам c_i на один машино– час. Нужно минимизировать суммарные дополнительные издержки.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 6 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 47 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (7, 14, 5, 18),\ b = (15, 9, 12, 17),\ C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ запрещена $x_{11} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_1$ в объеме $x_{21} \geqslant 12$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 26,\ a = (9, 4, 3, 8, 5, 9),\ b = (7, 4, 2, 5, 7, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max,\ \ 4x_1 + 6x_1 + 2x_2 + 3x_4 \leqslant 11,\ \ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	18	16	14	12	8	8
Затраты на обслуживание, у.е.	1	3	5	5	5	6

Вариант 9

1. $(x-y)^2 + (2-y)^2 \to \text{extr}.$

2. $x^2 - 3xy^2 + 18y \to \text{extr},\ 3x - y - 6 = 0.$

3. $-x^2 - y^2 + 6x \to \text{extr},\ x + y \leqslant 5,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0.$

4. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{2}{x_2} + \cdots + \dfrac{n}{x_n} \to \text{extr}, x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \leqslant 1, x_i \geqslant \dfrac{1}{n^2}.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ 9x^3 + 2y^3 - 27xy \leqslant -16,\ x \geqslant 0.$

6. На сколько частей и как нужно разложить отрезок данной длины a, чтобы произведение длин всех полученных отрезков было наибольшим?

7. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой функционал ограничен, существуют глобальный минимум и локальный максимум, а глобального максимума не существует.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,4]} \min\limits_{y\in[-2,2]} (x^2 + \alpha xy - \alpha y^2).$

9. Две стороны треугольника ABC равны a, b. Какую величину может иметь наименьший угол треугольника?

10. Найти расстояние между множествами

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0,\ 9x - 7y + 16 = 0.$$

11. $x_1 + (x_2 + 3)^2 \to \text{extr},\ |x_1 + 1| + |x_2| \leqslant 1.$

12. Будет ли выпуклой композиция двух выпуклых функций?

13. Найти наименьшее значение x, для которого существуют y, z такие, что

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

14. Дан прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен α. Найти отношение радиусов описанной и вписанной окружностей и определить, при каком α это отношение будет наибольшим.

15. Решить задачу линейного программирования

$$x + 5y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 12x_5 = 12. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-1, 3)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \max, \begin{cases} 3x_1 - 1x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min, \ x_1 \leqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \geqslant 1. \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \leqslant 5, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 5. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{4x_1 + x_2 - x_3}{2x_1 + x_2 + x_3} \to \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

21. В цех поступили стержни длиной 107 см. Для дальнейшего производства потребуется не менее 210 отрезков длиной 26 см, не менее 163 отрезков по 29 см и не менее 175 отрезков по 32 см. Необходимо удовлетворить данную потребность, разрезав при этом как можно меньше стержней.

22. Фирма производит из одного вида сырья два продукта: A и B, продаваемых соответственно по 0,08 и 0,05 ед. за упаковку. Рынок сбыта для каждого из продуктов практически не ограничен. Продукт A обрабатывают на машине 1, продукт B – на машине 2. Затем оба продукта упаковывают на фабрике. Один килограмм сырья стоит 0,08 ед. Машина 1 обрабатывает 5000 кг сырья за один час с потерями 20%. Машина 2 обрабатывает 4000 кг. Сырья за один час с потерями 10%. Машина 1 доступна 8 часов в день; ее использование стоит 228 ед. в час. Машина 2 доступна 6 часов в день; ее использование обходится 186 ед. в час. Фабрика может работать 10 часов в день. Один час работы фабрики обходится в 360 ед. За один час можно изготовить 12000 упаковок продукта A или 8000 упаковок продукта B. Упаковка продукта A весит 0,25 кг, упаковка продукта B – 0,33 кг. Сколько сырья для производства продуктов A и B нужно закупать ежедневно, чтобы максимизировать прибыль

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где
$$C = \begin{pmatrix} \infty & 37 & 23 & 6 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 8 & 5 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:
$$a = (7, 14, 5, 13),\ b = (15, 8, 12, 17),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_2$ запрещена $x_{12} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 10$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 25,\ a = (7, 5, 4, 8, 6, 9),\ b = (7, 4, 2, 5, 7, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	16	14	12	10	8	7
Затраты на обслуживание, у.е.	2	3	5	5	6	6

Вариант 10

1. $x^3 + y^3 + z^3 + 12xy + 2z \to \text{extr}.$

2. $xyz \to \text{extr},\ x + y + z = 5,\ xy + xz + yz = 8.$

3. $8x^2 + 10y^2 - 12xy + 50x - 80y \to \text{extr}, x + y \leqslant 1,\ 8x^2 + y^2 \leqslant 2.$

4. $xy^2z^3 \to \text{extr},\ x + 2y + 3z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ -36x^3 + y^3 - 27xy \leqslant 8,\ x \geqslant 0.$

6. Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме длин его ребер.

7. Найти наибольший член последовательности $n^{\frac{1}{n}},\ n \in N.$

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,4]} \min\limits_{y\in[-2,2]} (-x^2 + \alpha xy - \alpha y^2).$

9. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой имеется бесконечное число локальных минимумов, но нет и одного локального максимума.

10. Найти треугольник наименьшего периметра, зная две его вершины A, B и прямую l, которой принадлежит третья вершина.

11. $|x_1| + x_2^2 \ \to \mathrm{extr},\ x_2 \leqslant 2,\ x_2 \geqslant 1 + x_1,\ x_2 \geqslant 1 - x_1.$

12. f – выпуклая неотрицательная функция, заданная на R. Будет ли выпуклой на R функция f^2?

13. Высота, опущенная из вершины основания правильной треугольной пирамиды на противоположную ей боковую грань, равна b. Чему должна равняться сторона основания пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим?

14. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, во второй – 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, во втором – в q раз. О числах p, q известно, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

15. Решить задачу линейного программирования

$$-x - 5y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 + 2x_2 + 2x_5 \to \ \min,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2. \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(1, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \ \max, \begin{cases} 4x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 15, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 \leqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \to \min, \;\; x_i \geqslant 0, \;\; \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leqslant 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 5. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{-2x_1 - 3x_2 + x_3}{2x_1 + x_2 + x_3} \to \; \max, \;\; x_i \geqslant 0, \;\; \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

21. Завод заключил договор на поставку комплектов отрезков стержней длиной по 18, 23 и 32 см. Причем количества отрезков разной длины в комплекте должны быть в соотношении 1 : 5 : 3. На данный момент имеется 80 стержней длиной по 89 см. Как их следует разрезать, чтобы количество комплектов было максимальным?

22. ОАО "Прицеп" производит совковые и штыковые лопаты. Для их изготовления требуется листовой металл и древесина. Для изготовления одной совковой лопаты требуется 0,04 листа металла и 0,004 м3 древесины, для изготовления одной штыковой лопаты – 0,02 листа металла и 0,004 m^3 древесины. Розничная цена одной совковой лопаты 60 руб., а штыковой – 50 руб. Изучение рынка сбыта показало, что спрос на штыковые лопаты превышает спрос на совковые не более, чем на 3 тыс. штук в месяц. Кроме того, спрос на совковые лопаты не превышает 15 тыс. штук в месяц. Сколько лопат каждого вида должно изготовлять АООТ "Прицеп" в месяц, если оно располагает 300 листами металла и 60 m^3 древесины и хочет получить максимальный доход от реализации своей продукции?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 46 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 8 & 5 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (9, 14, 5, 12), \;\; b = (16, 8, 8, 17), \;\; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_1$ в объеме $x_{21} \geqslant 7$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 26,\ a = (7, 5, 4, 8, 4, 9),\ b = (6, 4, 2, 5, 7, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 8$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	19	17	16	14	12	8
Затраты на обслуживание, у.е.	2	2	5	5	6	7

Вариант 11

1. $x^2 - y^2 + 6y - 4x \to \text{extr}$.

2. $x + y + z \to \text{extr},\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

3. $x^2 + 2xy + 3y^2 + x + y \to \text{extr},\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x - y \leqslant 1$.

4. $xyz(x + y + z) \to \text{extr},\ x^4 + y^4 + z^4 \leqslant 1$.

5. $y^3 \to \text{extr},\ 3x^3 + 2y^3 - 9xy \geqslant -4,\ x \leqslant 0$.

6. Вписать в шар пространства R^n прямоугольный параллелепипед максимального объема.

7. Найти расстояние от эллипса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ до прямой $3x + y - 9 = 0$.

8. Вычислить $\max\limits_{x \in [-4,4]} \min\limits_{y \in [-2,2]} (-x^2 - \alpha xy + \alpha y^2)$.

9. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи, заданной на всем пространстве, в которой имеется бесконечное число локальных максимумов, но нет ни одного локального минимума.

10. Найти треугольник наименьшего периметра, зная вершину A и прямые l, m, которым принадлежат две другие вершины.

11. При каких значениях параметра α функция

$$f : f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \times x_2^{4-\alpha}$$

будет выпуклой на множестве $\{(x_1, x_2) | x_1 > 0, x_2 > 0\}$?

12. $(x_1 - 3)^2 + (x_1 - x_2)^2 \to \ \min, \quad \max\{|x_1|, |x_2|\} \leqslant 1.$

13. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести в два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в аудитории абитуриентов удалось бы рассадить так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равно числу аудиторий. Найти минимальное возможное количество абитуриентов, которые могли быть проэкзаменованы при этих условиях.

14. Среди точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию

$$y = 4 - \left|y - \frac{6}{x}\right| - 2\left|\frac{3}{x} - 1\right|,$$

найти точку с наибольшей ординатой.

15. Решить задачу линейного программирования

$$x - 5y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 30. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \to \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6=1, \\ x_2+x_3-x_4-x_5-x_6=1, \\ x_2-x_6=2. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-1,3)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1-x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 8, \\ x_1+x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1+2x_2 \to \max,\ x_2 \leqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1-4x_2=1, \\ 5x_1+6x_2=2, \\ -7x_1+8x_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$-2x_1+x_2-x_3+x_5 \to \min,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} -2x_2+x_4+x_5=-3, \\ x_3-2x_4=2, \\ x_1+3x_2-x_4 \leqslant 5, \\ x_1+x_3 \geqslant -3. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{x_1-2x_2+3x_4}{x_2+2x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1+x_2-x_3=5, \\ -x_1+2x_2 \geqslant 1, \\ -3x_1+x_2+x_4=1. \end{cases}$$

21. На овощную базу прибыл железнодорожный состав, доставивший 300 т овощей. Имеется 4 бригады грузчиков, предложивших свои услуги на следующих условиях: бригада j берется разгружать по a_j тонн в день по расценке p_j у.е. за тонну. За каждый день простоя база платит штраф 250 у.е. Какие договоры на разгрузку состава следует заключить, чтобы минимизировать суммарные затраты. Исходные данные приведены в таблице.

№ бригады	a_j	p_j
1	10	10
2	20	15
3	30	20
4	40	25

22. "Прицеп" выпускает 4,5–тонные прицепы и кормораздатчики "Ванюша" по цене 40 и 74 тыс. руб. соответственно. По результатам маркетинговых исследований спрос на изделия первого вида составляет не менее 1 200 ед. в год. Для производства прицепов используются сталь и чугун, запасы которых на предприятии составляют 25 000 и 4 500 т соответственно. Для изготовления 1 тыс. прицепов норма расхода стали составляет 1 615 т, а чугуна – 385 т. Для изготовления 1 тыс. кормораздатчиков расходуется: стали – 2 022 т, чугуна – 478 т. Себестоимость прицепов – 34,66, а кормораздатчиков – 63,9 тыс. руб. Найти оптимальное решение по производству прицепов и кормораздатчиков, чтобы количество выпускаемых изделий было максимальным.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 20 & 6 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 8 & 5 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (9, 14, 5, 12),\ \ b = (16, 8, 8, 14),\ \ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 3$;

б) перевозка $a_2 \to b_4$ ограничена $x_{24} \leqslant 7$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-x_1 - x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 15, \\ x_1 \leqslant 7. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 24,\ a = (7, 5, 4, 8, 4, 6),\ b = (6, 8, 2, 5, 7, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 7x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 8$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	19	18	16	15	12	9
Затраты на обслуживание, у.е.	2	3	5	6	8	8

Вариант 12

1. $5x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 12y \to \mathrm{extr}$.
2. $x_1^4 + \cdots + x_n^4 \to \mathrm{extr}, \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.
3. $2x^2 + 4y^2 \to \mathrm{extr}, \quad x^2 + 5y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$.
4. $\sin x + \sin y + \sin z + 3 \sin \dfrac{x + y + z}{3} \to \mathrm{extr}$.
5. $y^3 \to \mathrm{extr}, \quad 12x^3 + y^3 - 18xy \leqslant -16,\ x \leqslant 0$.
6. Среди треугольников данного периметра найти треугольник максимальной площади.
7. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи, заданной на всем пространстве, в которой имеется единственный локальный экстремум, не являющийся глобальным.
8. Вычислить $\max\limits_{x \in [-4,4]} \min\limits_{y \in [-2,2]} (-\alpha x^2 - \alpha xy + y^2)$.
9. Дан отрезок AB и прямая l. На данной прямой найти точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

10. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции f. Будет ли точка x_0 – точкой локального экстремума функции $f^3 + f$, если f – непрерывная (произвольная) функция.

11. При каких значениях параметра α функция
$$f : f(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)^2$$
будет выпуклой на R^2?

12. $\max\{x_1^2, x_2\} \ \to \text{extr}, \quad 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6.$

13. В параболу $y = ax^2 + bx + c$ вписан четырехугольник $ABCD$ максимальной площади с диагоналями AC, BD. Найти координаты вершины C, если $A(-3, -4), B(-2, -1), D(1, -4)$.

14. Составить уравнение окружности наименьшего радиуса,
внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием
$$|2y + 3x - 2| + |3x + 6| \leqslant 6.$$

15. Решить задачу линейного программирования
$$x - 4y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 24. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования
$$x_1 + x_3 + x_6 \to \ \max, \ x_i \geqslant 0. \ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 15, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 + x_6 = 22. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-2, 3)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 7, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min, \ x_1 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \ \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 - 10x_2 + x_3 \to \max,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 - 5,5x_2 - 7x_3 = -13, \\ x_1 - 14,5x_2 + 7x_3 = 15. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 3x_2 + 2x_4} \to \ \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 \leqslant 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 17. \end{cases}$$

21. В обработку поступили две партии досок для изготовления комплектов из трех деталей, причем первая партия содержит 50 досок по 6,5 м каждая, а вторая партия содержит 200 досок по 4 м каждая. Каждый комплект состоит из двух деталей по 2 м и одной детали длиной 1,25 м.

    Как распилить все доски, чтобы получить возможно большее количество комплектов?

22. Совхозу требуется не более 10 трехтонных автомашин и не более 8 пятитонных. Отпускная цена автомашины первой марки 2 000 ден. ед., второй марки 4 000 ден.ед. Совхоз может выделить для приобретения машин 40 000 ден. ед. Сколько следует приобрести автомашин каждой марки в отдельности, чтобы их общая (суммарная) грузоподъемность была максимальной.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 37 & 23 & 16 & 2 & 6 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 8 & 5 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (9, 14, 11, 12),\ b = (12, 8, 9, 14),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

    2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_2 \to b_1$ ограничена $x_{21} \leqslant 6$;

б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_4$ в объеме $x_{34} \geqslant 8$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-4x_1 - 3x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leqslant 25, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 37. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 29,\ a = (7, 5, 9, 8, 14, 6),\ b = (6, 8, 2, 5, 7, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	19	18	16	15	13	11
Затраты на обслуживание, у.е.	2	2	4	6	7	8

Вариант 13

1. $3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to \text{extr}.$

2. $x_1^2 + \dots + x_n^2 \to \text{extr}, \quad x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = 1.$

3. $(x-4)^2 + (y-3)^2 \to \text{extr}, \quad y \geqslant x^2,\ y \leqslant 4.$

4. $x_1 x_2 \dots x_n \to \max,\ x_i \geqslant \frac{1}{n}, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$

5. $y^3 \to \text{extr}, \quad x^3 + 2y^3 - 6xy \geqslant 4,\ x \geqslant 0.$

6. Среди всех n–угольников данного периметра найти n– угольник наибольшей площади.

7. Пусть P – многочлен четной степени, имеющий единственную точку x_0 такую, что $P'(x_0) = 0$. Будет ли точка x_0 точкой экстремума?

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[2,4]}\min\limits_{y\in[0,6]}(\alpha x^2 - 2\alpha xy + 3y^2)$.

9. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и составляет с плоскостью основания угол α. При каком α объем пирамиды будет наибольшим?

10. Два человека, у которых есть один велосипед, должны попасть из пункта А в пункт В, находящийся на расстоянии
40 км от А. Первый передвигается со скоростью 4 км/час пешком и 30 км/час на велосипеде. Второй – пешком со скоростью 6 км/час, на велосипеде – 20 км/час. За какое наименьшее время они могут добраться до пункта В(велосипед на пути можно оставлять без присмотра)?

11. При каких значениях параметра α функция
$$f : f(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 x_2^2 + (x_1 + x_2)^2$$
будет выпуклой на R^2?

12. $e^{x_1} \to \min, \quad |x_1| + 2|x_2| \leqslant 4.$

13. Среди всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию
$z \cdot \overline{z} = 25$, найти такие, что $|z - 7| + |z - 7i|$ принимает наименьшее значение.

14. Тело состоит из цилиндра и двух конусов, построенных извне на основаниях цилиндра. Это тело вписано в шар данного радиуса так, что основания и вершины конусов лежат на поверхности шара. Когда такое тело имеет наибольший объем?

15. Решить задачу линейного программирования
$$-3x + 4y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 24. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования
$x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 + x_5 + x_6 \to \max, \; x_i \geqslant 0,$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 15, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 + x_6 = 22. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(2, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 16, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min, \ x_1 \leqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$-6x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max, \ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{-3x_1 + 2x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + 3x_5} \to \min, \ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_4 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 20, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 35, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_6 = 11. \end{cases}$$

21. Имеются четыре механизма A_1, A_2, A_3, A_4, каждый из которых может быть использован на каждом из четырех видов работ B_1, B_2, B_3, B_4 с производительностью (в условных единицах), заданой в виде таблицы

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	3	2
A_2	2	4	1	1
A_3	3	1	5	3
A_4	3	4	3	1

Требуется так распределить механизмы по одному на каждую из работ, чтобы себестоимость выпускаемых изделий была минимальной.

22. На имеющихся у фермера 400 га земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требуют на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей, – 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер

сои – 6 ден. ед. Однако согласно этому договору фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров. Фермеру хотелось бы знать, сколько гектаров нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 37 & 23 & 16 & 29 & 6 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 13 & \infty & 8 & 15 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (19, 14, 11, 12),\ b = (12, 18, 9, 14),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 8$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 8$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-6x_1 - 8x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \leqslant 75, \\ 5x_1 + 13x_2 \leqslant 47. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 29,\ a = (7, 8, 9, 8, 14, 6),\ b = (6, 2, 4, 5, 7, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	15	14	13	10	9	9
Затраты на обслуживание, у.е.	2	3	3	5	6	7

Вариант 14

1. $3xy - x^2y - xy^2 \to \text{extr}.$
2. $xyz \to \text{extr}, \quad \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1.$
3. $3x - y + z^2 \to \text{extr}, \quad x + y + z \leqslant 0, \ -x + 2y + z^2 \geqslant 0.$
4. $x^2 + y^2 + z^2 \to \text{extr}, \quad x + y + z \leqslant 1, \ 2x - y - z \geqslant 0.$
5. $y^3 \to \text{extr}, \ 9x^3 + 16y^3 - 27xy \leqslant -2, \ x \geqslant 0.$
6. Вписать в круг n-угольник наибольшей площади.
7. Даны точки $A(4,0,4), B(4,4,4), C(4,4,0)$. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти точку S, чтобы объем тетраэдра $SABC$ был наименьшим.
8. Вычислить $\min\limits_{x\in[2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (\alpha x^2 - 2\alpha xy + 3y^2).$
9. При каком натуральном k величина k^{m-k} максимальна?
10. На книжной полке стоят книги по математике и по логике, всего их 20. Какое максимальное количество комплектов можно составить, если в комплект входят 5 книг по математике и 5 книг по логике?
11. При каком $p > 0$ функция $f : f(x) = \dfrac{|x|^p}{p}$ выпукла на R?
12. $\max\{|x_1|, |x_2 - 1|\} \to \ \min, \quad |x_1| + |x_2| \leqslant 8.$
13. Пусть A – точка окружности с центром в точке O, B – середина отрезка OA. Для какой точки окружности M величина угла OMB максимальна?
14. На диаметре AB окружности единичного радиуса дана точка P. Через данную точку P провести хорду СД так, чтобы площадь четырехугольника АСВД была наибольшей.
15. Решить задачу линейного программирования

$$-3x - 4y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 24. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 \to \max, \; x_i \geqslant 0,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 10. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-1, 5)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14, \\ x_1 + x_2 \leqslant 4. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \; x_1 \geqslant 0, \; x_3 \geqslant 0, \; x_4 \leqslant 0,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$-6x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max, \; x_i \geqslant 0, \; \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{x_1 - 2x_2 + 3x_3}{x_2 + 2x_4} \to \min, \; x_i \geqslant 0, \; \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 1, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

21. На кондитерской фабрике для производства карамели используют сахарный песок, патоку и фруктовое пюре, ресурсы которых в плановый период заданы числами 600 т, 200 т и 120 т соответственно. Расход сырья на одну тонну карамели (в тоннах) соответствующего вида, а также прибыль (у.е.) заданы в таблице.

Вид сырья	Расход сырья		
	№1	№2	№3
Сахарный песок	$0,6$	$0,5$	$0,4$
Патока	$0,4$	$0,2$	$0,3$
Фруктовое пюре	–	$0,3$	$0,3$
Прибыль	140	150	130

Найти план производства карамели, при котором прибыль максимальна.

22. Для производства двух видов кормовых биодобавок можно использовать витамины трех групп. При этом на изготовление биодобавки "Телец" расходуется 16 кг витамина А, 8 кг витамина В, 5 кг витамина Е. На изготовление биодобавки "Овен"расходуется 4 кг витамина А, 7 кг витамина В и 9 кг витамина Е. На складе фирмы имеется всего 784 кг витамина А, 552 кг витамина В и 567 кг витамина Е. От реализации добавки "Телец" фирма имеет прибыль 4 тыс. руб., а от добавки "Овен" – 7,2 тыс. руб. Определить максимальную прибыль от реализации обеих биодобавок

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 29 & 6 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 1 & \infty & 8 & 15 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (19, 14, 11, 2),\ b = (12, 18, 9, 14),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 10$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 4$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 10, \\ 2x_1 + 4x_3 \geqslant 14, \\ 2x_2 + x_3 \geqslant 7. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 29,\ a = (7, 8, 9, 8, 14, 5),\ b = (6, 2, 4, 5, 7, 8).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 8$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	17	16	14	12	10	10
Затраты на обслуживание, у.е.	2	3	3	5	6	7

Вариант 15

1. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to \text{extr}.$

2. $x^2 + 4xy + 5y^2 \to \text{extr},\ x^2 + y^2 = 1.$

3. $2x^2 + 3y^2 \to \text{extr},\ x + y \leqslant 8,\ -x + 2y \leqslant 4,\ x \geqslant 0.$

4. $ax + by + cz \to \text{extr},\ ax^2 + by^2 + cz^2 \leqslant 1.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ 14x^3 + 4y^3 - 21xy \leqslant 4,\ x \geqslant 0.$

6. Дан угол и точка внутри него. Через эту точку провести отрезок, имеющий концы на сторонах угла так, чтобы полученный треугольник имел наименьшую площадь.

7. Даны точки $A(4, 0, 4), B(4, 4, 4), C(4, 4, 0)$. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти точку S, чтобы объем тетраэдра $SABC$ был наибольшим.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[2,4]}\max\limits_{y\in[0,6]}(-\alpha x^2 - 2\alpha xy - 3y^2)$.

9. Каково минимальное число студентов на курсе, если хорошо успевающих студентов не более 48% и не менее 45%.

10. Среди всех конусов, периметр осевого сечения которых равен 8, найти конус максимального объема.

11. $\max\{x_1, x_2^2 - 1\} \to \min, \quad |x_1| + 4|x_2| \leqslant 12$.

12. Будет ли выпуклой на R функция

$$f : f(x) = \inf\{x_1^2 + x_2^4 | x_1 + x_2 = x\}?$$

13. Найти наибольшее значение произведения трехзначного числа на сумму трех слагаемых, каждое из которых есть взаимно обратное число к цифрам этого трехзначного числа.

14. Найти наибольшую величину боковой поверхности кругового конуса, вершина которого находится в центре эллипса
$x^2 + 4y^2 = 4$, высота направлена по большей оси, а один из диаметров основания есть хорда.

15. Решить задачу линейного программирования

$$3x - 4y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 6x + 5y \leqslant 30, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 24. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 + x_3 + x_6 \to \max, \; x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 - x_6 = 2. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(3, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 19, \\ x_1 + x_2 \leqslant 7. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \; x_1 \leqslant 0, \; x_3 \geqslant 0, \; x_4 \leqslant 0,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geqslant 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$-2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{x_1 - x_2 - x_3}{2x_1 + x_2} \to \ \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

21. На участке имеются две группы взаимозаменяемого оборудования с ресурсами 280 нормо-часов в месяц для каждой группы. Участку установлен план выпуска двух видов изделий $A_1 = 80$ штук и $A_2 = 90$ штук. В таблице приведено время изготовления одного изделия на обеих группах оборудования (в часах).

Группа оборудования	№1	№2
I	2	3
II	5	4

22. Фирма выпускает два набора удобрений "Купрум-I" и "Купрум-II". В "Купрум-I"входит 3 кг азотных, 1 кг калийных и 1 кг медных удобрений. В "Купрум- II" – 1 кг азотных, 2 кг калийных и 6 кг медных удобрений. После осушения торфяных болот для внесения в почву потребовалось по меньшей мере 9 кг азотных, 8 кг калийных и 12 кг медных удобрений. "Купрум-I"стоит 4 усл. ден. ед., а "Купрум-II"стоит 6 усл. ден. ед. Какие и сколько наборов удобрений необходимо внести, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программиро-

вания, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 47 & 23 & 16 & 29 & 56 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 1 & \infty & 8 & 15 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 5 \\ 13 & 25 & 35 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 14, 11, 2),\ b = (12, 15, 9, 14),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 9$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 8$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6, \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 29,\ a = (7, 8, 9, 8, 4, 15),\ b = (6, 2, 4, 5, 7, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 11,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	25	23	21	18	15	13
Затраты на обслуживание, у.е.	3	3	7	7	9	9

Вариант 16

1. $x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{2}{z} \to \mathrm{extr}.$

2. $x - 2y + 2z \to \mathrm{extr},\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$

3. $x^2 + y^2 + z^2 \to \mathrm{extr},\ 2x - y + z \leqslant 5,\ x + y + z \leqslant 3,\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$

4. $x - y + z \to \mathrm{extr},\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z \geqslant 0.$

5. $y^3 \to \mathrm{extr},\ -7x^3 + 16y^3 - 21xy \leqslant -2,\ x \geqslant 0.$

6. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ, найти параллелепипед максимального объема.

7. Пусть P – многочлен нечетной степени, имеющий единственную точку x_0 такую, что $P'(x_0) = 0$. Будет ли точка x_0 точкой экстремума?

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (-2\alpha x^2 - 2\alpha xy - 3y^2)$.

9. Внутри данного четырехугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

10. Можно ли в прямоугольник площади единица поместить ряд непересекающихся кругов так, чтобы сумма их радиусов равнялась 1998?

11. $x_1^2 + |x_2| \to \mathrm{extr},\ \ x_1 \leqslant 4,\ x_1 \geqslant x_2 + 2,\ x_1 \geqslant 2 - x_2.$

12. Будет ли выпуклой на R функция
    $f : f(x) = \inf\{x_1^4 + x_2^4 \mid x_1 + x_2 = x\}$?

13. Что больше: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ или $\dfrac{\alpha}{\beta}$, если $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$?

14. Деревни A, B, C расположены в вершинах равностороннего треугольника. В деревне A живут 100 школьников, в деревне B – 200, в деревне C – 300. Где нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было минимально?

15. Решить задачу линейного программирования

$$-3x - 4y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 4x + 5y \leqslant 24, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 24. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(1, 5)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \text{extr},\ \begin{cases} 5x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 20, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,\ x_1 \leqslant 0,\ x_4 \leqslant 0,\ \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{x_1 - x_2 - 3x_4}{3x_1 + 2x_2 + x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 10. \end{cases}$$

21. Оборудование фабрики позволяет выпускать фруктовые компоты в трех видах тары: стеклянной в количестве 10 ц, жестяной в количестве 10 ц, и полиэтиленовой в количестве 8 ц.

    Найти производственную программу предприятия, максимизирующую прибыль, если себестоимость 1 ц компота составляет: в стеклянной банке — 16 у.е., в жестяной — 10 у.е. и в полиэтиленовой — 14 у.е. Отпускная цена 1 ц компота составляет: в стеклянной банке — 40 у.е., в жестяной — 30 у.е., в полиэтиленовой — 35 у.е.

22. На участке производства зубчатых колес имеются два станка – зубофрезерный и зубодолбежный. Требуется изготовить три вида зубчатых колес в следующих количествах: первого вида – 80 шт, второго и третьего – 110 и 140 штук соответственно. Каждое зубчатое колесо может

быть изготовлено на любом из станков. Для выпуска одного колеса первого вида на зубофрезерном станке требуется затратить 20 мин, а на зубодолбежном – 34 мин. Для выпуска одного колеса второго вида на зубофрезерном станке требуется затратить 12 мин, а на зубодолбежном – 14 мин. Для выпуска одного колеса третьего вида требуется затратить 10 и 8 мин соответственно. Ресурс работы зубофрезерного станка без смены инструмента (фрезы) позволяет выпустить всего 180 колес, а ресурс работы зубодолбежного станка без смены инструмента (долбяка) позволяет выпустить всего 150 зубчатых колес. Определить оптимальную загрузку станков, обеспечивающую минимальное общее время их работы без смены инструмента.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 29 & 56 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 1 & \infty & 8 & 15 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 5 \\ 13 & 25 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 14, 11, 7),\ b = (12, 15, 11, 14),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 8 & 11 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 10$;

б) перевозка $a_4 \to b_4$ запрещена $x_{44} = 0$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+, \begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6, \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 28,\ a = (4, 8, 9, 8, 9, 15),\ b = (6, 2, 4, 5, 7, 3).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 5x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 12,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 9$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	25	24	23	20	19	19
Затраты на обслуживание, у.е.	3	6	6	9	9	9

Вариант 17

1. $xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z) \to \text{extr}.$
2. $xyz \to \text{extr},\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0.$
3. $x^2 + y^2 + z^2 \to \text{extr},\ 2x - y + z \leqslant 5,\ x + y + z = 3.$
4. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \to \text{extr},\ \dfrac{1}{x_1} + \dots + \dfrac{1}{x_n} \leqslant 1,\ x_i > 0,\ \alpha_i \geqslant 0.$
5. $y^3 \to \text{extr},\ -36x^3 + y^3 - 27xy \leqslant 8,\ x \geqslant 1.$
6. Среди всех тетраэдров с данным основанием и данной площадью боковой поверхности найти тетраэдр наибольшего объема.
7. Пусть P – многочлен нечетной степени, имеющий две точки x_1, x_2 такие, что $P'(x_1) = P'(x_2) = 0$. Будут ли точки x_1, x_2 точками экстремума?
8. Вычислить $\min\limits_{x \in [2,4]} \max\limits_{y \in [0,6]} (-2\alpha x^2 + 2\alpha x + y - 3y^2)$.
9. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка X. M, N – ее проекции на катеты AC и BC. При каком положении точки X длина отрезка MN минимальна?
10. Предполагается использовать 2000 ден. ед. на путевки в дома отдыха. Путевки есть на 15, 27 и 45 дней. Их стоимость соответственно 21, 40 и 60 денежных единиц. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее количество дней отдыха было наибольшим и все деньги были израсходованы?
11. $e^{x_1 x_2} \to \min,\ |x_1| + |x_2| \leqslant 1,\ 2|x_1| + 0,5|x_2| \leqslant 1.$

12. Будет ли выпуклой на R функция

$$f : f(x) = \inf\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 | x_1 + x_2 + x_3 = x\}?$$

13. Что больше: $4 \operatorname{tg} 5^0 \operatorname{tg} 9^0$ или $3 \operatorname{tg} 6^0 \operatorname{tg} 10^0$?

14. В треугольной пирамиде три ребра, исходящие из одной вершины, перпендикулярны друг другу, причем одно из них равно противолежащему ему ребру основания, а произведение длин двух других ребер равно a. Найти наименьшее значение объема пирамиды.

15. Решить задачу линейного программирования

$$3x - 4y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 4x + 5y \leqslant 24, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 24. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$2x_1 - 6x_2 + 3x_5 \to \ \max, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(2, 5)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 20, \\ x_1 + x_2 \leqslant 7. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \ x_1 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \ x_4 \geqslant 0,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geqslant 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{3x_1 - 2x_2}{x_2 + 3x_3} \to \min, \; x_i \geqslant 0, \; \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

21. В резерве трех железнодорожных станций A, B, C находятся соответственно 50, 70 и 40 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки зерна, если пункту № 1 требуется 60, № 2 — 45, № 3 — 65,
№ 4 — 30 вагонов. При этом следует учесть, что в пунктах № 1, и № 3 нет условий для длительного хранения зерна, поэтому его необходимо вывезти из них полностью. Стоимость перегона одного вагона со станции A в указанные пункты соответственно равна $14, 13, 16, 11$ у.е.; со станции B — $12, 17, 14, 18$ у.е.; со станции C — $15, 12, 11, 13$ у.е.

22. Ремонтный завод "Хоперский" выпускает насосы двух типов: топливные и водяные. В комплектацию этих изделий входят четыре основных вида деталей: корпус, платик, манжета, шестерня. Для изготовления топливного насоса требуется один корпус, четыре платика, четыре манжеты и одна шестерня, для изготовления водяного насоса – 1, 2, 4 и 3 комплектующих деталей, соответственно. От реализации одного топливного насоса завод имеет прибыль 50 руб., а от одного водяного – 200 руб. На складе завода имеется следующий запас комплектующих: корпусов – 6 шт; платиков – 8 шт; манжет – 12 шт; шестерней – 9 шт. Составить план производства, обеспечивающий заводу наибольший доход.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 9 & 6 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 1 & \infty & 8 & 11 & 19 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 5 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (7, 13, 11, 17), \; b = (12, 15, 11, 14), \; C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_2$ ограничена $x_{12} \leqslant 3$;

б) гарантирована перевозка $a_4 \to b_1$ в объеме $x_{41} \geqslant 6$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 29,\ a = (4, 8, 9, 8, 9, 9),\ b = (6, 7, 4, 5, 7, 8).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 12,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	25	24	23	20	19	17
Затраты на обслуживание, у.е.	2	4	6	7	8	9

Вариант 18

1. $(2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \to \text{extr}.$
2. $xy^2z^3 \to \text{extr},\ x + y + z = 1.$
3. $x + y + e^{x-y} \to \text{extr},\ x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$
4. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \to \text{extr},\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{2}{x_2} + \dots + \dfrac{n}{x_n} \leqslant 1,\ x_i > 0,\ \alpha_i \geqslant 0.$
5. $xy^3 \to \text{extr},\ x + 5y \leqslant 8,\ x \geqslant -1,\ y \geqslant -2.$
6. Найти расстояние от эллипсоида $\dfrac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ до плоскости $3x + 4y + 12z = 128$.
7. Привести пример двух гладких функций, заданных на всем пространстве, каждая из которых не имеет глобальных экстремумов, а их сумма имеет не совпадающие между собой глобальные минимум и максимум.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[-2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (-2\alpha x^2 + 2\alpha x + y + 3y^2)$.

9. Рассматриваются все остроугольные треугольники с заданными стороной a и углом α. Найти максимум суммы квадратов длин двух оставшихся сторон.

10. При каком натуральном n величина $\dfrac{\ln 2 \ln 3 \ldots \ln n}{10^n}$ принимает наименьшее значение?

11. Будет ли выпуклым множество всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\inf\limits_n x_n = 1$?

12. $|x_1 - 1| + |2x_2 - 4| \to \ \min, \ |x_1 + 4| + |x_2| \leqslant 1$.

13. Найти углы равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине m медианы, проведенной к его боковой стороне.

14. Из чашки с кофе в чашку с молоком перелили ложку кофе, затем такую же ложку смеси перелили обратно. Чего больше: молока в чашке с кофе или кофе в чашке с молоком?

15. Решить задачу линейного программирования
$$-3x - 2y \to \mathrm{extr}, \qquad \begin{cases} 4x + 5y \leqslant 24, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 14. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования
$$x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5+2x_6 \to \ \max, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + 2x_6 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 3. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-3, 5)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \ \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 11, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1+2x_2+x_3+3x_4 \to \min, \quad \begin{cases} 3x_1-4x_2-x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1+6x_2+2x_3+4x_4=2, \\ -7x_1+8x_2+4x_3-5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1+x_2+2x_4+x_5=5, \\ x_1+x_2+x_3+3x_4+2x_5=9, \\ x_2+x_3+2x_4+x_5=6. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{3x_1-2x_2}{3x_2+3x_3} \to \ \min, \ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=6. \end{cases}$$

21. Уголь трех сортов в количестве $A_1=300$ т, $A_2=250$ т, $A_3=350$ т распределяется между тремя котлами ТЭЦ, потребности которых в планируемый период составляют $B_1=180$ т, $B_2=400$ т, $B_3=320$ т. Известна матрица теплотворной способности, где c_{ij} ккал/кг — теплотворная способность i-го сорта угля при отапливании им j-го топочного устройства:

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти такой план распределения угля, при котором будет получено максимальное количество тепла.

22. На российском рынке продаются растворимые соки (порошки) фирм Zuko, Yupi и Invait. Отпускные цены на них – соответственно 2.5, 1.5 и 1.8 рублей. Количество порошков, продаваемых в одной торговой точке в день, не более 150 шт. Организация, занимающаяся оптовой торговлей, установила следующие условия: оптовая закупка Zuko – от 3000 до 10000 шт., а Yupi и Invait – не менее 1000 шт. Как достичь максимума дохода одной торговой точки при ежемесячной оптовой закупке товара?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программиро-

вания, где

$$C=\begin{pmatrix}\infty & 7 & 23 & 16 & 9 & 3\\ 11 & \infty & 16 & 11 & 13 & 25\\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15\\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18\\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 5\\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty\end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a=(7,13,21,17),\ b=(14,15,11,14),\ C=\begin{pmatrix}8 & 7 & 5 & 5\\ 3 & 5 & 8 & 11\\ 3 & 4 & 5 & 5\\ 5 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_4$ ограничена $x_{14} \leqslant 2$;

б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_4$ в объеме $x_{34} \geqslant 10$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-x_1 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases}3x_1 + x_2 + x_3 = 12,\\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24.\end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 31,\ a = (4, 8, 9, 8, 3, 9),\ b = (6, 7, 4, 5, 7, 8).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 12,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	35	30	23	19	17	15
Затраты на обслуживание, у.е.	4	5	5	6	7	8

Вариант 19

1. $xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{50}{y} \to \mathrm{extr}.$

2. $x_1^p + \cdots + x_n^p \to \mathrm{extr},\ x_1 + \cdots + x_n = 1,\ p > 1.$

3. $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \mathrm{extr},\ 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leqslant 40,$
   $-2x_1 + x_2 - x_3 = -3,\ x_2 \geqslant 0.$

4. $(x - \dfrac{9}{4})^2 + (y-2)^2 \to\ extr,\ y^2 - x \leqslant 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

5. $y^3 \to \mathrm{extr},\ 3x^3 + 2y^3 - 9xy \geqslant -4, x \leqslant 0.$

6. $m_1||x - a_1||^2 + \cdots + m_n||x - a_n||^2 \to\ \min,\ x, a_i \in R^n,\ m_i > 0.$

7. Привести пример двух гладких функций, заданных на всем пространстве, каждая из которых не имеет глобальных экстремумов, а их разность имеет не совпадающие между собой глобальные минимум и максимум.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[-2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (\alpha x^2 + 2\alpha x + y + 3y^2).$

9. Какую наибольшую площадь имеет четырехугольник, длины трех сторон которого равны 1?

10. Дана прямая l и точки A, B по разные стороны от нее. Найти на прямой l точку, разность расстояний от которой до данных точек A, B имеет наибольшее по абсолютной величине значение.

11. $x_1 e^{|x_1+x_2|} \to\ \min,\ |x_1| + 2|x_2| \leqslant 4.$

12. Будет ли выпуклой на R функция

$$f : f(x) = \inf\{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \mid x_1 + x_2 + x_3 = x\}?$$

13. В геометрической прогрессии $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ с положительными членами выполняется условие $b_1 = (b_1 + b_2)(3b_1 + 4b_2)$. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых четырех членов прогрессии максимальна?

14. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h вписать прямоугольный параллелепипед максимального объема так, чтобы четыре его вершины лежали на боковых ребрах пирамиды.

15. Решить задачу линейного программирования

$$3x - 6y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 4x + 5y \leqslant 24, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 14. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \min, \; x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 - x_6 = 2. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-5, 6)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \; \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \; x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \leqslant 0,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_5 \to \max, \; x_i \geqslant 0, \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{4}{5}x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - \frac{4}{5}x_5 = 1. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{3x_1 - 2x_2 + x_3}{x_1 + 3x_2 + 3x_3} \to \min, \; x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

21. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в таблице.

Вид ресурсов	Расход сырья				Объем ресурсов
	№1	№2	№3	№4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч	10	8	8	16	128
Прибыль	30	25	56	48	

Дополнительно требуется, чтобы первого товара выпускалось не более 5 единиц, второго — не менее 8 единиц, а третьего и четвертого — в отношении $1:2$.

Какой ассортимент товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной?

22. Коммерческая фирма осуществляет продажу автомобилей из салона в Германии в Россию на заказ. Предлагаются автомобили марок BMW, Volvo, Mersedes, Saab. Необходимо так организовать оформление заказов, чтобы за каждый рейс получать максимум прибыли. За один рейс фирма хочет поставлять автомобилей BMW не менее 2 шт. (так как уверена, что сможет их продать), но не более чем в два раза больше, чем Volvo (с учетом спроса на российском рынке). Общее число автомобилей Mersedes и Saab должно быть (по условиям договора с салоном) не менее 5 шт., а общее число автомобилей Mersedes, Volvo, Saab по организационным причинам не должно быть более 20 шт. за один рейс. Прибыль фирмы от продажи автомобилей марок BMW, Mersedes, Volvo, Saab равна соответственно 1000, 1200, 800 и 900 условных единиц.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 3 & 16 & 9 & 3 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 18 & \infty & 5 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 13, 21, 17),\ b = (14, 15, 11, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ запрещена $x_{11} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 12$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-x_1 + x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 33,\ a = (4, 8, 9, 8, 3, 8),\ b = (6, 7, 4, 5, 7, 8).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 12,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	25	24	23	20	18	15
Затраты на обслуживание, у.е.	2	3	5	7	8	9

Вариант 20

1. $2x^3 + 5x^2 + y^2 - xy^2 \to \text{extr}.$

2. $5x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr},\ x^2 - xy + y^2 = 1.$

3. $x^2 - 2y^2 \to \text{extr},\ x + y \leqslant 1,\ y - x \leqslant 1,\ x \geqslant 0.$

4. $y^3 \to \text{extr},\quad 4x^3 + y^3 - 6xy \geqslant 16,\ x \geqslant 0.$

5. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \to \text{extr},\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2x_2} + \dots + \dfrac{1}{nx_n} \leqslant 1,$
$x_i > 0,\ \alpha_i \geqslant 0.$

6. Через точку (a_1, a_2, a_3), $a_i > 0$ провести плоскость так, чтобы объем тетраэдра, отсекаемого плоскостью от первого координатного угла, был наименьшим.

7. Привести пример двух гладких функций, заданных на всем пространстве, каждая из которых не имеет ни локального максимума, ни локального минимума, а их произведение имеет не совпадающие между собой локальные минимум и максимум.

8. Вычислить $\min\limits_{x \in [-2,4]} \max\limits_{y \in [0,6]} (\alpha x^2 + 2\alpha x + y - y^2)$.

9. Даны отрезок и окружность. На окружности найти точку, из которой данный отрезок виден под наименьшим углом.

10. При каком натуральном n величина $\dfrac{n^2}{(1,0002)^n}$ принимает наибольшее значение?

11. При каких α функция
$$f : f(x,y) = x^2 + y^2 + \alpha|x+y|$$
будет выпуклой на R^2?

12. $x^2 + y^2 + |x+y| \to \min,\ |x| + 2|y| \leqslant 4.$

13. Отрезок с концами на сторонах прямого угла содержит внутри себя точку, удаленную на расстояния 1 и 8 от сторон этого угла. Найти наименьшую длину такого отрезка.

14. Числа $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ — решения системы
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - 3y^2 = \dfrac{10p - p^2}{4p^2 + 9}, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = \dfrac{10 - p}{4p^2 + 9}. \end{cases}$$
При каком p выражение $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

15. Решить задачу линейного программирования
$$3x + 2y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 4x + 5y \leqslant 24, \\ -4x + 7y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 24. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4-2x_5=3, \\ x_2-x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+x_4-x_5=0. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-4,6)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 6x_1-4x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 11, \\ x_1+x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1+2x_2+x_3+3x_4 \to \min, x_1 \geqslant 0, \begin{cases} 3x_1-4x_2-x_4=1, \\ 5x_1+6x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1+8x_2+4x_3-5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$x_1-x_2+x_3-3x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} -2x_1+x_2+x_4-x_5=6, \\ -x_1+x_2-x_3+\frac{4}{5}x_4+x_5=8, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4-\frac{3}{4}x_5=1. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{3x_1-2x_2}{x_1+3x_2+3x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=6. \end{cases}$$

21. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в таблице.

Вид ресурсов	Расход сырья				Объем ресурсов
	№1	№2	№3	№4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч	10	8	8	16	128
Прибыль	30	25	56	48	

Кроме того заданы производственные издержки в условных единицах на одну единицу каждого изделия: 6, 9, 12, 3, при этом суммарные издержки не должны превышать 96 условных единиц.

Какой ассортимет товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной?

22. После получения долгожданной зарплаты семья собирается поехать на мелкооптовый рынок за мясом. В семье (муж, жена и мать жены) из мяса готовят пельмени, котлеты, голубцы и гуляш. У каждого члена семьи – свои соображения о том, на какие блюда лучше использовать мясо. Муж хочет, чтобы на голубцы пошло не менее 1кг., а на пельмени и котлеты – не более 5кг. Жена считает, что на пельмени и голубцы нужно выделить не менее 4 кг., а на гуляш – как минимум в два раза меньше, чем на пельмени. Ее мама хочет на котлеты выделить минимум 2 кг., а на голубцы не более 3 кг. Все они согласны в том, что на котлеты и пельмени нужно отвести не меньше половины всего мяса. Так как мясо в наше время дорогое, то не хочется покупать лишнего мяса. Сколько его купить, чтобы удовлетворить все пожелания всех членов семьи?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 3 & 16 & 9 & 13 \\ 11 & \infty & 16 & 7 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 18 & \infty & 5 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 13, 21, 17),\ b = (14, 15, 21, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_3$ ограничена $x_{13} \leqslant 8$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 10$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-2x_1 + x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 32,\ a = (4, 8, 9, 8, 3, 8),\ b = (6, 7, 2, 5, 7, 8).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 12,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 9$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	30	25	23	20	17	14
Затраты на обслуживание, у.е.	2	3	7	8	9	10

Вариант 21

1. $x^2 + xy + y^2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{y} \to \text{extr}.$

2. $e^{xy} \to \text{extr},\ x + y = 1.$

3. $x_1 + x_2 + x_3 \to \text{extr},\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3 \leqslant 1.$

4. $xyzw \to \text{extr},\ x^2+y^2+z^2+w^2 \leqslant 1,\ x+y+z+w \leqslant 0.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ 28x^3+y^3-21xy \leqslant 8.$

6. В какой точке эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ касательная к нему образует с осями координат треугольник наименьшей площади?

7. Привести пример двух гладких функций, заданных на всем пространстве, каждая из которых не имеет глобальных минимума и максимума, а их произведение имеет не совпадающие между собой глобальные минимум и максимум.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[2,4]}\max\limits_{y\in[-2,6]}(-\alpha x^2+2\alpha x-y-y^2)$.

9. В плоскости треугольника ABC найти точку X такую, что $2|XA|+|XB|+3|XC|$ минимальна.

10. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $|ax^2-ax+1| \leqslant 1$ выполнено для всех $x \in [0,1]$.

11. Является ли выпуклой на R^2 функция
$$f : f(x,y) = x^2+y^2+2\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}?$$

12. $x^2+y^2+4\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to \ \min.$

13. Найти наибольшее значение функции
$f : f(x) = \dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

14. В правильной восьмиугольной пирамиде, боковые ребра которой пронумерованы подряд, проведено сечение через первое и четвертое ребра, имеющее площадь S. Каким должен быть острый угол между плоскостью данного сечения и плоскостью основания, чтобы объем пирамиды был наибольшим?

15. Решить задачу линейного программирования
$$-3x+2y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 4x+5y \leqslant 24, \\ -4x+6y \leqslant 28, \\ 3x-5y \leqslant 14. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \to \ \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=3, \\ x_1-2x_2-3x_3+4x_4=0. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-5, 8)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 8x_1-5x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 17, \\ x_1+x_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1+2x_2+x_3+3x_4 \to \min,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \leqslant 0,\ \begin{cases} 3x_1-4x_2-x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1+6x_2+2x_3+4x_4=2, \\ -7x_1+8x_2+4x_3-5x_4 \geqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$x_1-x_2+x_3-3x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} -2x_1+x_2+x_4-x_5=6, \\ -x_1+x_2-x_3+\frac{4}{5}x_4+x_5=8, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4-\frac{1}{2}x_5=1. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{x_1-2x_2}{x_1+3x_2+3x_3} \to \ \min,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=6. \end{cases}$$

21. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката:
600 тыс. л алкината, 350 тыс. л крекинг-бензина, 500 тыс. л прямой перегонки, 300 тыс. л изопентона.

В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А — 2 : 3 : 5 : 2, бензин В — 3 : 1 : 2 : 1, бензин
С — 2 : 2 : 1 : 3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина равны соответственно 120, 100, 150 у. е.

Определить оптимальный план смешения из условия максимального использования компонетов.

22. В магазине организована продажа джинсов пяти марок – "Motor" , "Cross" , "Dallas" , "Levi's"и "GAP". Магазин не имеет складского помещения, весь товар завозится с оптовых складов раз в 3 дня и помещается на полках. На полках можно разместить не более 2000 джинсов (с учетом остатка от прошлого завоза). Джинсы "Motor"и "Cross"доставляются с одного склада на машине, которая может вместить не более 1300 джинсов. В последнее время участились кражи джинсов марки "GAP"(самых дорогих), поэтому решено разместить их на отдельных полках в количестве не более 300 шт. Из статистической обработки данных о продажах выяснено, что джинсов марок "Cross"и "Dallas"за три дня продается не менее 700 шт.

    В ближайшем будущем ожидается прибытие на склады крупных партий джинсов марок "Motor"и "Dallas поэтому решено, что в рекламных целях доля продажи этих джинсов должна составлять не менее 50% от продажи всех остальных марок.

    Определить количество заказываемых на складах джинсов, при котором магазин может получить максимальную прибыль (пропорциональную стоимости проданного товара). Известно, что цены (за 1 джинсы) таковы: "Motor"стоит 30, "Cross"стоит 38, "Dallas"стоит 38, "Levi's"стоит 44, "GAP"стоит 50 условных единиц.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 8 & 16 & 9 & 13 \\ 11 & \infty & 16 & 7 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 11 & \infty & 15 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 13, 21, 12),\ b = (14, 15, 21, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

    2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

    а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 7$;

    б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_4$ в объеме $x_{34} \geqslant 12$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-2x_1 + 3x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 34,\ a = (3, 8, 9, 8, 3, 8),\ b = (6, 7, 2, 5, 7, 8).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,\ 4x_1 + x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 12,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 8$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	31	27	25	20	17	14
Затраты на обслуживание, у.е.	2	5	7	8	9	10

Вариант 22

1. $xy^2(12 - x - y) \to \text{extr}.$

2. $x^2 - y^2 + xy \to \text{extr},\ 3x + 4y = 1.$

3. $x^2 + y^2 - 12x + 16y \to \text{extr},\ x^2 + y^2 \leqslant 25,\ x \geqslant 0.$

4. $xy^2z^3w^4 \to \text{extr},\ x + y + z + w = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ w \geqslant 0.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ 7x^3 + 2y^3 - 21xy \leqslant 16,\ y \leqslant 0.$

6. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции
$f,\ f(x_0) \neq 0$. Будет ли точка x_0 точкой локального экстремума функции $\dfrac{1}{f}$?

7. Найти расстояние от точки до параболы.

8. Вычислить $\min\limits_{x \in [-2,4]} \max\limits_{y \in [-2,6]} (-\alpha x^2 - 2\alpha x - y - y^2).$

9. Даны отрезок и окружность. На окружности найти точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.

10. Найти треугольник наибольшей площади, вписанный в параболический сегмент, заключенный между параболой
$y = x^2$ и прямой $y = 3x$.

11. Будет ли выпуклой на R^2 функция
$$f : f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + |x + y|?$$

12. $\max\{|x_1|, |x_2 - 1|\} \to \min, \; |x_1 - 3| + |x_2 + 2| \leqslant 2.$

13. Что больше: $79^{\frac{3}{5}} + 1900^{\frac{3}{5}}$ или $1979^{\frac{3}{5}}$?

14. Найти максимальное значение параметра d, при котором уравнение
$$x^3 - (4 + d)x^2 + 5dx - d^2 = 0$$
имеет три корня, которые являются квадратами сторон некоторого неостроугольного треугольника.

15. Решить задачу линейного программирования
$$3x - 2y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 4x + 5y \leqslant 24, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 14. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования
$$x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max, x_i \geqslant 0, \; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2. \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-3, 7)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \max, \; \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 27, \\ x_1 + x_2 \leqslant 4. \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \; x_1 \geqslant 0, \; x_3 \geqslant 0, \; x_4 \geqslant 0,$$

$$\begin{cases}3x_1-4x_2-x_4\leqslant 1,\\ 5x_1+6x_2+2x_3+4x_4\geqslant 2,\\ -7x_1+8x_2+4x_3-5x_4\leqslant 3.\end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$x_1-x_2+x_3-3x_5\to\max,\ x_i\geqslant 0,\ \begin{cases}-2x_1+x_2+x_4-x_5=6,\\ -x_1+x_2-x_3+\frac{3}{4}x_4+x_5=8,\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4-\frac{1}{2}x_5=1.\end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{x_1-2x_2}{x_1+3x_2+x_3}\to\ \min,\ x_i\geqslant 0,\ \begin{cases}x_1-x_2+2x_3=4,\\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=6.\end{cases}$$

21. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката:
600 тыс. л алкината, 350 тыс. л крекинг-бензина, 400 тыс. л прямой перегонки, 300 тыс. л изопентона.

В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А — 2 : 3 : 5 : 2, бензин В — 3 : 1 : 2 : 1, бензин
С — 2 : 2 : 1 : 3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина равны соответственно 220, 200, 250 у. е.

Определить оптимальный план смешения из условия стоимости произведенной продукции.

22. Книготорговая фирма собирается, имея в своем распоряжении 100000 руб., издать три книги – "Французско-русский словарь учебник "Немецкий язык для всех"А. Н. Попова и приложение к нему – "Ключи а также взять на реализацию краткий учебник "Немецкий за 13 дней"того же А.Н. Попова. Затраты на издание (в расчете на 1 экз.) составляют 8 руб., 2 руб. и 5 руб. соответственно. Затраты на перевозку из типографии: 1 руб. для словаря, 0.9 руб. для учебника, "Ключи"весьма компактны и перевозятся вместе с учебником, поэтому на стоимость перевозки не влияют. Доставка из другой фирмы краткого учебника обходится в 1.3 руб. за 1 экз. На перевозки выделено дополнительно 20000 руб. Чтобы типография заключила контракт, общий тираж не должен быть меньше чем 22 тыс. экз.

Учебник издается повторно, поэтому рискованно издавать его тиражом более 15 тыс. экз. "Ключей"должно быть издано не больше, чем обоих учебников. Краткий учебник – новая книга, ее рискованно брать более чем 1/8 от тиража полного учебника.

Имеются также дополнительные расходы (перевозка на рынок, доставка клиентам и др.), которые составляют 1 руб. на 1 экз. полного учебника и словаря, 2 руб. для "Ключей"и 3 руб. для краткого учебника. Нужно минимизировать эти дополнительные расходы выбором оптимальных тиражей книг.

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 8 & 16 & 7 & 13 \\ 11 & \infty & 16 & 7 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 5 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 11, 21, 12),\ b = (14, 15, 14, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_3 \to b_4$ ограничена $x_{34} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_3$ в объеме $x_{33} \geqslant 10$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-2x_1 - 5x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 34,\ a = (3, 8, 9, 8, 3, 7),\ b = (6, 7, 2, 5, 7, 8).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,\ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 12,\ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 9$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	32	29	27	25	17	14
Затраты на обслуживание, у.е.	3	5	7	8	9	10

Вариант 23

1. $x^2 + xy + y^2 + \dfrac{27}{x} + \dfrac{9}{y^2} \to \mathrm{extr}.$

2. $4x^2 + xy - y^2 \to \mathrm{extr},\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 1.$

3. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \to \mathrm{extr},\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

4. $xy + yz \to \mathrm{extr},\ x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2,\ x \geqslant 0.$

5. $xy^3 \to \mathrm{extr},\ x + 5y \geqslant 8,\ y \geqslant 1.$

6. Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении около одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

7. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции f. Будет ли точка x_0 точкой локального экстремума функции $f - f^2$?

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[-2,4]} \max\limits_{y\in[-2,6]} (-\alpha x^2 - 2\alpha x - 2y + 2y^2).$

9. Представить число 100 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

10. Дан равнобедренный треугольник $ABC(AC = CB \geqslant AB)$. Для какой точки X плоскости величина $|XA| + |XB| - |XC|$ будет наименьшей?

11. При каких α функция

$$f : f(x, y) = x^2 + y^2 + \alpha \min(x, y)$$

будет выпуклой на R^2?

12. $e^{3x_1} \to\ \min,\ 6|x_1 - 2| + |x_2 + 1| \leqslant 24.$

13. Найти наибольшее значение функции

$$f : f(x, y) = \frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}.$$

14. Что больше $\cos^2 \frac{\pi}{180} + \cos^2 \frac{4\pi}{180}$ или $\cos^2 \frac{2\pi}{180} + \cos^2 \frac{3\pi}{180}$?

15. Решить задачу линейного программирования

$$3x + 2y \to \text{extr}, \qquad \begin{cases} 4x + 5y \leqslant 24, \\ -4x + 6y \leqslant 28, \\ 3x - 5y \leqslant 14. \end{cases}$$

16. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \to \ \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2. \end{cases}$$

17. При каких значениях параметра k точка $(-1, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \ \max, \ \begin{cases} 4x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 17, \\ x_1 + x_2 \leqslant 3? \end{cases}$$

18. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max,\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \leqslant 0,\ x_4 \leqslant 0,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geqslant 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

19. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{3}{4}x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - \frac{2}{3}x_5 = 1. \end{cases}$$

20. Решить задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 3x_2 + x_3} \to \ \min,\ x_i \geqslant 0, \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

21. Необходимо произвести сплав, содержащий 30% свинца, 30% цинка и 40% олова, используя 9 сплавов. Их составы и цены приведены в таблице.

Сплав	A	B	C	D	E	F	G	H	K
Свинец	18	9	32	54	27	27	35	16	19
Цинк	46	38	32	28	37	41	41	50	48
Олово	36	53	36	18	36	32	24	34	33
Стоим. 1 кг	6	15	13	11	10	8	14	16	12

Определить, какое количество сплава каждого типа необходимо для производства килограмма смеси, чтобы ее стоимость была минимальной.

22. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидения, радио, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 5, 7, 2 денежные ед. в расчете на 1 денежную ед., затраченную на рекламу. Фирма не может выделить на рекламу более 500 000 денежных единиц. Кроме того, фирма считает, что следует расходовать не более 40% рекламного бюджета на телевидение и не более 20% бюджета на афиши, а, на радио планируется расходовать, по крайней мере, половину того, что планируется расходовать на телевидение. Как целесообразнее распределить рекламный бюджет?

23. Задачу коммивояжера с матрицей C решить методом ближайшего соседа, методом ближайшей вставки и методом динамического программирования, где

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 8 & 6 & 7 & 13 \\ 11 & \infty & 10 & 7 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 5 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 11 & \infty \end{pmatrix}.$$

24. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу:

$$a = (17, 11, 21, 13),\ b = (14, 12, 14, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_3 \to b_1$ ограничена $x_{31} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_4$ в объеме $x_{34} \geqslant 12$.

25. Методом ветвей и границ и методом Гомори решить задачу целочисленного программирования:

$$-2x_1 - 7x_2 \to \min, \ x_j \in Z_+, \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

26. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке:

$$c = 31, \ a = (3, 8, 5, 8, 3, 7), \ b = (6, 4, 2, 5, 7, 8).$$

27. Методом динамического программирования решить задачу

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to \max, \ 4x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 6x_4 \leqslant 12, \ x_j \in Z_+.$$

28. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 9$ у.е., стоимость реализации одной единицы продукции 2 у.е.

Возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
Выпуск продукции, у.е.	35	32	31	30	27	24
Затраты на обслуживание, у.е.	5	7	9	10	12	15

Дополнительные задачи

1. Пусть $f \in C^1(R^1)$. Доказать, что если x^* единственная точка, такая что $f'(x^*) = 0$ и x^* — точка локального минимума, то x^* — точка глобального минимума.

2. Пусть $f \in C(R)$. Доказать, что между любыми двумя точками локального минимума функции f находится точка локального максимума(предполагается, что f имеет, по крайней мере, две точки локального минимума). Будет ли верно данное утверждение, если f не является непрерывной?

3. Многочлены P, Q степени n не имеют общих корней. Могут ли они иметь общие точки локального экстремума?

4. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскую поверхность. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный путь имел минимальную длину?

5. Стороны треугольника удовлетворяют неравенствам
$$a \leqslant 5 \leqslant b \leqslant 6 \leqslant c \leqslant 8$$
Найти наибольшую площадь такого треугольника.

6. Найти степень четверки, наиболее близкую к числу $2^{100} + 3^{100}$.

7. Пусть $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2}), i = 1, \dots n$ и
$$tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 \cdot \dots \cdot tg\alpha_n = 1.$$
Найти наибольшее значение $\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \dots \cdot \sin\alpha_n$.

8. Пусть $A(z), B(z^2), C(z^3)$ — точки комплексной плоскости, отвечающие данным комплексным числам. Среди всех $z, |z| = 1$ найти те, для которых площадь треугольника ABC наибольшая.

9. Найти наименьшее значение ординаты середины отрезка длины 4, концы которого расположены на параболе $y = x^2$.

10. Натуральное число называется упрощенным, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее число последовательных натуральных чисел может оказаться упрощенным?

11. Верно ли следующее утверждение: четная функция не может иметь четного числа точек экстремума.

12. Верно ли следующее утверждение: нечетная функция не может иметь четного числа точек экстремума.

13. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 100 можно выбрать, чтобы сумма любых двух выбранных чисел не делилась на 6.

14. Привести пример дифференцируемой на R^2 функции, имеющей ровно n точек локального минимума.

15. Привести пример дифференцируемой на R^2 функции, имеющей бесконечное число точек локального минимума и не имеющей ни одной точки локального максимума.

16. Пусть x^* — точка строгого локального минимума бесконечно дифференцируемой на R функции. Следует ли отсюда, что существует k такое, что $f^{(k)}(x^*) \neq 0$?

17. Найти наибольшее значение определителя шестого порядка, все элементы которого по модулю не превосходят единицы.

18. Пусть $f_i, g_i : X \to R^1$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказать неравенство

$$\left| \inf_{x\in X} \max_{i\in I} f_i(x) - \inf_{x\in X} \max_{i\in I} g_i(x) \right| \leqslant \sup_{x\in X} \max_{i\in I} |f_i(x) - g_i(x)|.$$

19. Пусть $F : X \times Y \to R^1$. Доказать неравенство

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} F(x, y) \leqslant \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} F(x, y).$$

20. Пусть $X \subset R^n$, $Y \subset R^m, F : X \times Y \to R^1$, $F \in C(X \times Y)$, X, Y — компакты, $g(x) = \min\limits_{y\in Y} F(x, y)$. Доказать что функция g непрерывна на X.

21. Пусть $f \in C(R^2)$ и

$$A = \{(x_r, y_r) : f(x_r, y_r) = \min_{x^2+y^2=r^2} f(x, y),\ r \geqslant 0\}.$$

Является ли множество A связным?

22. Последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ из множества X называется минимизирующей для функции f, если

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in X} f(x) = f_*.$$

Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — минимизирующая, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_* \in X$, $f \in C(X)$. Доказать, что в этом случае минимизирующая последовательность сходится к непустому множеству точек глобального минимума функции f на множестве X.

23. Последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к множеству A, если

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\inf_{a\in A}||a - x_k||\Big) = 0.$$

Показать, что последовательность, сходящаяся к множеству точек глобального минимума, не обязательно сходится к
какой-либо точке глобального минимума.

24. Доказать, что для всех $a > 0$ система

$$\begin{cases} \frac{ax}{ye^x+e^y} = \frac{y}{xe^y+e^x} \\ xe^y + ye^x = 1 \end{cases}$$

имеет решение.

25. Функция $f : R^{n+1} \to R$ определяется следующим образом:

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \int\limits_0^{\pi} \Big(e^{-it} - \sum_{j=0}^{n} x_j e^{ijt}\Big)^2 .dt$$

Найти глобальный минимум функции f.

26. Функция $f : R^{n+1} \to R$ определяется следующим образом:

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \int\limits_0^{1} \Big(t^k - \sum_{j=0}^{n} x_j t^{\lambda_j}\Big)^2 dt,$$

где k — заданное натуральное число,
$\lambda_0 < \lambda_1 \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n$ — заданные вещественные числа. Найти глобальный минимум функции f.

27. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Убедиться, что равенство достигается лишь в случае
$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

28. Доказать, что для любого неотрицательного набора вещественных чисел $x_1, \dots, x_n$ справедливо неравенство

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — заданные положительные числа, сумма которых равна единице.

29. Доказать, что задача линейного программирования

$$< c, x > \to \max, \ Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0,$$

где $b \geqslant 0$, разрешима, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) в матрице A имеется, по крайней мере, одна положительная строка;

б) матрица A неотрицательная и в ней нет нулевых столбцов.

30. Пусть при любом $c \in R^n$ задача линейного программирования

$$< c, x > \to \max, \ Ax \leqslant b$$

разрешима. Доказать, что ее множество допустимых планов ограничено.

31. Привести пример линейной функции f, заданной на выпуклом замкнутом множестве A такой, что

$$\sup_{x \in A} f(x) = 0, \text{ но } \ f(x) < 0 \text{ для } \ \text{всех } x \in A.$$

32. Доказать, что выпуклая функция f ограничена сверху на многограннике M и принимает на M наибольшее значение.

33. Привести пример выпуклой функции f, заданной и ограниченной на выпуклом компакте M, но не достигающей на M своей верхней грани.

34. Доказать, что максимум выпуклой функции на выпуклом многограннике достигается в одной из крайних точек.

35. Пусть f — вогнутая функция, заданная на выпуклом множестве X, $g(x) = \big|\min(0; f(x))\big|^q$, $q \geqslant 1$. Доказать, что функция g является выпуклой на X.

36. Пусть $Y \subset R^n$, $f(x) = \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\|$. Доказать, что f является выпуклой на R^n тогда и только тогда, когда замыкание множества Y является выпуклым множеством.

37. Пусть X — выпуклое подмножество R^n. Функция $f : X \to R^1$ называется *квазивыпуклой* на X, если для всех $x, y \in X$, для любого $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}.$$

Верно ли, что выпуклая на X функция является квазивыпуклой на X функцией?

38. Пусть X — выпуклое подмножество R^n, $f : X \to R^1$ — выпуклая на X функция. $X(u) = \{v \in X : f(v) \leqslant f(u)\}$. Доказать, что множество $X(u)$ выпукло для всех $u \in X$. Верно ли обратное утверждение?

39. Пусть X — выпуклое подмножество R^n, $f : X \to R^1$ — выпуклая на X функция, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ —- последовательность неотрицательных вещественных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек из X такая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ сходится. Можно ли утверждать, что имеет смысл и выполняется неравенство

$$f\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(x_k).$$

40. Пусть f — непрерывная на выпуклом множестве X функция, причем для любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Доказать, что f — выпуклая на X функция.

41. Пусть f — функция, заданная на выпуклом множестве X, причем для любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Верно ли, что f — выпуклая на X функция?

42. Пусть X — выпуклое подмножество R^n, $f : X \to R^1$ — выпуклая на X функция. Доказать, что множество точек локального минимума функции f на множестве X либо пусто, либо выпукло. Если $f \in C(X)$, множество X — замкнуто, то множество точек локального минимума функции f на X либо пусто, либо выпуклое замкнутое множество.

43. Привести пример гладкой экстремальной задачи с ограничениями типа равенств, в которой точке локального минимума отвечает единственный множитель Лагранжа $\lambda_0 = 0$.

44. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — непрерывные на R_+ функции, $P_n = \{x \in R^n_+,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$. Доказать, что существует $x^* \in P_n$ и число λ такие, что $(j = 1, \dots, n)$

$$f_j(x_j^*) \begin{cases} = \lambda, & \text{если } \ x_j^* > 0, \\ \geqslant \lambda, & \text{если } \ x_j^* = 0. \end{cases} \tag{1}$$

45. Рассматривается задача

$$\min_j f_j(x_j) \to \max, \quad x \in P_n,$$

где $f_1, \dots, f_n$ — непрерывные монотонно неубывающие на R_+ функции. Доказать, что существует глобальное решение x^* данной задачи и число λ такие, что выполнено (1).

46. Привести пример прямой и двойственной задач линейного программирования, множества решений которых

а) содержат по одной точке;

б) не ограничены.

47. Привести пример прямой и двойственной задач линейного программирования, допустимые множества которых

а) пусты;

б) непусты и ограничены;

в) не ограничены.

48. Пусть x^* — решение задачи линейного программирования

$$(c, x) \to \max, \quad Ax \leqslant b.$$

Доказать, что данное решение единственно тогда и только тогда, когда система

$$(c, h) \geqslant 0, \ Ah \leqslant 0$$

имеет только тривиальное решение $h = 0$.

49. Пусть
$$V = \max\{(c,x)\ :\ Ax = b,\ x \geqslant 0\}.$$
Ясно, что V является функцией координат векторов b, c и элементов матрицы A. При этом V не определено, если множество допустимых планов пусто; $V = \infty$, если линейная форма не ограничена сверху на множестве допустимых планов; $V = V_0 < \infty$, если задача разрешима.

а) Доказать, что
$$V_0(c_1 + c_2) \leqslant V_0(c_1) + V_0(c_2).$$

б) Привести пример задачи линейного программирования, в которой
$$V_0(c_1 + c_2) < V_0(c_1) + V_0(c_2).$$

в) Доказать, что
$$V_0(b_1 + b_2) \geqslant V_0(b_1) + V_0(b_2).$$

г) Привести пример задачи линейного программирования, в которой
$$V_0(b_1 + b_2) > V_0(b_1) + V_0(b_2).$$

д) Привести пример, показывающий, что V_0 не обязательно непрерывно зависит от элементов матрицы A.

50. Найти проекцию точки a на множество X в случае, если X — неотрицательный ортант, гиперплоскость, координатный параллелепипед.

51. Рассматривается задача
$$f(x) \to \min, \quad x \in X,$$
где X — замкнутое выпуклое множество, не содержащее прямых, f — вогнутая на X функция. Доказать, что если множество решений данной задачи непусто, то оно содержит хотя бы одну крайнюю точку множества X.

52. Пусть $x_j \in (0,1), \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1, n > 1$. Доказать неравенство
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - x_j} \geqslant \frac{n^2}{n-1}.$$

53. Пусть $x_j \in (0,1), \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1, n > 1$. Доказать неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} x_j(1-x_j) \geqslant \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

54. Пусть $x_j \in (0,1), \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1, n > 1,\ a > 0, b > 0$. Доказать неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} (a + \frac{b}{x_j}) \geqslant (a+nb)^n.$$

55. Найти точки экстремума функции $f : R^2 \to R$, определяемой неявно уравнением

$$\int\limits_0^{f(x_1,x_2)} e^{u^2} du = x_1^2 + x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in R^2.$$

56. Доказать, что существует функция $f \in C^1(R)$, у которой множество $\{x : f'(x) = 0\}$ совпадает с канторовым множеством.

57. Пусть функция $f \in L_\infty[0,1]$. Найти константу, наилучшим образом приближающую эту функцию в метрике

$$a) L_1[0,1]; \quad b) L_2[0,1]; \quad c) L_\infty[0,1].$$

58. f - непрерывна и возрастает на $[0,1]$. При каком c интеграл

$$\int\limits_0^1 |f(t) - c| dt$$

принимает наименьшее значение?

59. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

60. Рассматривается график квадратного трехчлена, имеющий корни 1 и 4. Из начала координат (точка О) к данному графику проводятся две касательные, касающиеся его в точках А и В. Найти наибольшее значение косинуса угла АОВ.

61. Найти какой-либо многочлен с целыми коэффициентами, наименьшее значение которого на всей прямой равно а) $\sqrt{2}$;
б) $-\sqrt{2}$.

62. Написать уравнение геометрического места точек (t, x), являющихся точками экстремума решений уравнения $\dot{x} = f(t, x)$. Как отличить точки локального максимума от точек локального минимума?

63. Описать алгоритм симплекс-метода для задачи

$$< c, x > \to \min, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказать, что он всегда заканчивается не более чем за n шагов.

64. Пусть $f : R^n \to R, f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \|x - a_i\|, \alpha_i > 0$. Доказать, что существует точка глобального минимума функции f на R^n. При каких условиях данная точка не является единственной?

65. В приемной в ожидании личной встречи с директором собралось n посетителей. Предварительный опрос показал, что рассмотрению вопроса i-го посетителя директор должен уделить время $t_i,\ i = 1, \ldots, n$. Директор, зная, что хотя общее время, которое он уделит всем посетителям одно и то же $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i$, хотел бы организовать прием так, чтобы посетители находились в приемной в целом как можно меньше. Какова должна быть очередность приема?

66. Пусть M_1, M_2 — линейные подпространства R^n,
$M = M_1 \cap M_2,\ x_0 \in M,\ \ \delta_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$ Вычислить $\partial \delta_M(x_0)$.

67. Пусть $f : R^2 \to R^1,\ f(x, y) = |x| + |y|$. Вычислить $\partial f(x_0, y_0)$.

Замечание. Во всех задачах пространства конечномерны.

ЧАСТЬ II

Вариант 1

1. Показать, что оператор A является линейным, и вычислить его норму:

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1] \quad (Ax)(t) = \int\limits_{t}^{1-t} x(\tau)\,d\tau.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z, и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (xe^x y, ye^{-x}, x^2+y^2),\ (0,0),$$

$$F\colon L^2[0,1] \to R^1, \quad F(x) = \Big(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\Big)^2.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если M — множество ортогональных матриц второго порядка, x_0 — единичная матрица.

4. $\int\limits_{-1}^{1} (x^2+\dot{x}^2)\,dt \to \text{extr},\ x(1) = x(-1) = 1.$

5. $\int\limits_{0}^{T_0} (x^2-\dot{x}^2+4x\sin t)\,dt \to \text{extr},\ x(0) = x(T_0) = 0.$

6. $\int\limits_{0}^{1} (\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-2x_1x_2)\,dt \to \text{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = 0,$

   $x_1(1) = \text{sh}1,\ x_2(1) = -\text{sh}1.$

7. $\int\limits_{0}^{1} \dot{x}^2\,dt + x^2(0) - 2x^2(1) \to \text{extr}.$

8. $\int\limits_{0}^{T} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 1,\ x(T) = 2.$

9. $\int\limits_{0}^{T} \dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_{0}^{T} x\,dt = 1,\ x(0) = 1,\ x(T) = 0.$

10. $\int\limits_0^1 (x_2 + x_1)\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2\, dt = 0,\ \ x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = 1,\ x_2(1) = -3.$

11. $\int\limits_1^e (1+t)t\ddot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \dot{x}(1) = 1,\ x(e) = e,\ \dot{x}(e) = 2.$

12. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \dot{x}(0) = -1,\ \ddot{x}(0) = 1,\ x(1) = 1/2.$

13. $\int\limits_1^e t^3\ddot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_1^e x\, dt \geqslant 0,\ x(1) = 1,\ x(e) = 1/e,$
$\dot{x}(e) = -1/e^2.$

14. $\int\limits_0^1 u^2\, dt \to \text{extr},\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 1.$

15. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin t\ \ dt \to \text{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(-\pi) = x(\pi) = 0.$

16. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\, dt \to \text{extr},\ \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 0,\ x(2) = 1,\ \dot{x}(2) = 2.$

17. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(-1) = -1,\ x(T) = 1,\ \dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0.$

18. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) + \dot{x}(T) = 0,\ x(T) = \dot{x}(0) = 1.$

19. $x_1^2(1) + x_2^2(1) \to \text{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,$
$x_1(0) = x_2(0) = 1,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1.$

20. $\int\limits_0^1 u^2(t)\, dt + x(1) \to \text{extr},\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 1.$

21. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1,$
$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. $T \to \inf,\ \dot{x} = bx + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = \xi,\ x(T) = 0.$

23. Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси OX образует поверхность наименьшей площади.

24. $T \to \inf,\ \ddot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ |x(0)| \leqslant 1,\ |\dot{x}(T)| \geqslant 4.$

25. $\int\limits_0^{21}(2u-2u^2+5x)\,dt \to \text{extr},\ \dot{x}=-3x+12u,\ u\in[0,1],$
$x(0)=1,\ x(21)=0.$

26. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1^2+3u_2^2\leqslant 9,$
$x_1(0)=x_2(0)=4,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

27. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1\in[-2,4],\ u_2\in[-3,1],$
$x_1(0)=6,\ x_2(0)=-2,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

28. $\int\limits_0^{13}(3x_1+2x_2+2u_1+u_2)\,dt+2x_2(0)\to\text{extr},\ \dot{x}_1=u_1,$
$\dot{x}_2=u_2,\ u_1^2+u_2^2\leqslant 4,\ x_1(13)=x_2(13)=0,\ x_1(0)=1.$

29. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=x_2-u_1,\ \dot{x}_2=x_1+u_2,\ u_1\geqslant -1,\ u_2\geqslant -2,$
$|u_1+2u_2|\leqslant 6,\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=2,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

30. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=-x_2,\ \ \dot{x}_2=x_1+u,\ |u|\leqslant 1,$
$x_1(0)-x_2(0)=1,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

31. $\int\limits_0^{T}(x_1+|u|)\,dt\to\min,\ \ \dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=u,\ \ u\in[-1,4],$
$x_1(0)=12,\ \ x_2(0)=0,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

32. $\int\limits_0^{T}(1+u_1+|u_2|)\,dt\ \to\ \min,\ \ \dot{x}_1=u_1,\ \ \dot{x}_2=u_2,\ u_1+|u_2|\leqslant 4,\ u_1\geqslant 0,$
$x_1(0)=12,\ x_2(0)=0,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

33. $\int\limits_0^{2\pi}x\sin 6t\,dt\to\min,\ \dot{x}=u,\ \ u\in[-3,6],\ \ x(0)=4,\ \ x(2\pi)=0.$

34. $\int\limits_0^{T_0}\varphi(t)u_1u_2\,dt\to\min,\ u_1^2+u_2^2\leqslant 9,\ (\varphi(t)\geqslant 0).$

Вариант 2

1. Показать, что оператор A является линейным, и вычислить его норму:

$$A\colon C[0,1]\to R^1\quad Ax=x(0)-3\int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau-4x(1).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z, и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^3 \to R^2, \quad F(x,y,z) = (1 + x^2 e^{yz}, (x^2 - z^2)\sin y),\ (0,0,0),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \dot{x}(t) - \int\limits_0^t x^2(t)\,dt.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если

$$M = \{x \mid\ x \in C^n[0,1],\ x^{(n)}(t) = x_0^{(n)}(t),\ x_0 \in C^n[0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 1,\ x(1) = 0.$

5. $\int\limits_{-1}^1 (\dot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(-1) = 1,\ x(1) = 1.$

6. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - 16x^2 - 4\sin t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = x(T_0) = 0.$

7. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = x_2(1) = \mathrm{sh}1.$

8. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt + \alpha x^2(1) \to \mathrm{extr},\ x(0) = 1.$

9. $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ T - x(T) = 1.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x\,dt = 3,\ x(0) = 1,\ x(1) = 6.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x_1\,dt = \int\limits_0^1 x_2\,dt = 0,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,$
$x_2(1) = 0,\ x_1(1) = 2.$

12. $\int\limits_0^1 (t+1)^2\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x}(0) = 0,$

$x(1) = 1,\ \dot{x}(1) = 2,\ \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 0.$

13. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0,\ x(1) = 1,\ \dot{x}(1) = 4.$

14. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(\pi) = \mathrm{sh}(\pi).$

15. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 1,\ \dot{x}(0) = \mathrm{sh}1,\ x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

16. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$

17. $\int\limits_0^{7\pi/4} x\sin t\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 1.$

18. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ x(2) = 0.$

19. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(-1) = 1,\ x(T) = -1,$
$\dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0.$

20. $T \to \inf,\ -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ \dot{x}(0) + \dot{x}(T) = 1,\ x(0) = 1,\ x(T) = 2.$

21. $x_1(1) + x_2(1) \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1,$
$x_1(0) = x_2(0) = 0.$

22. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x(0) \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(1) = 2.$

23. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt = 1,\ x(0) = 1,\ x(1) = 0.$

24. $T \to \inf,\ \ddot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = -2,\ |\dot{x}(T)| \leqslant 1.$

25. $\int\limits_0^{20} (4u - 2u^2 + 5x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -2x + 12u,\ u \in [-1, 1],$
$x(0) = -1,\ x(20) = 0.$

26. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ 2u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 18,$
$x_1(0) = x_2(0) = -4,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-2, 4],\ u_2 \in [-3, -1],$
$x_1(0) = -6,\ x_2(0) = 2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{16}(4x_1+2x_2+2u_1-u_2)\,dt+2x_2(0)\to \mathrm{extr}$, $\dot x_1=u_1$,
$\dot x_2=u_2$, $u_1^2+u_2^2\leqslant 4$, $x_1(16)=1$, $x_2(16)=0$, $x_1(0)=1$.

29. $T\to \inf$, $\dot x_1=x_2+u_1$, $\dot x_2=x_1+u_2$, $u_1\geqslant -1$, $u_2\geqslant -2$,
$|2u_1+2u_2|\leqslant 8$, $x_1(0)=1$, $x_2(0)=-2$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

30. $T\to \inf$, $\dot x_1=-x_2$, $\dot x_2=x_1+u$, $|u|\leqslant 2$,
$x_1(0)+x_2(0)=1$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

31. $\int\limits_0^{T}(x_2+2|u|)\,dt\to \min$, $\dot x_1=-x_2$, $\dot x_2=u$, $u\in[-1,2]$,
$x_1(0)=-12$, $x_2(0)=1$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

32. $\int\limits_0^{T}(1+|u_1|+|u_2|)\,dt\to \min$, $\dot x_1=u_1$, $\dot x_2=u_2$, $|u_1|+2|u_2|\leqslant 4$, $x_1(0)=4$,
$x_2(0)=-13$, $x_2(T)=3x_1(T)$.

33. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos 6t\,dt\to \min$, $\dot x=u$, $u\in[-2,4]$, $x(-\pi)=-4$,
$x(\pi)=0$.

34. $\int\limits_0^{T_0}(|u_1|+u_2+tu_1)\,dt\to \min$, $|u_1|\leqslant 10$, $|u_2|\leqslant 1$.

Вариант 3

1. Показать, что оператор A является линейным, и вычислить его норму:

$$A\colon C[0,1]\to R^1 \quad Ax=\int\limits_0^1 x(\tau)\sin(\pi\tau)\,d\tau-x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z, и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2\to R^2,\quad F(x,y)=(|x|e^y,|y|e^x),$$

$$F\colon C^2[0,1]\to C[0,1],\quad (Fx)(t)=\ddot x(t)-\int\limits_0^t \sin x(\tau)d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если

$$M = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in R^2,\ x_1 x_2 \leqslant 1/2\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (x - \dot{x}^2)\, dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(1) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - 9x^2 + 4x\cos t)\, dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = 0.$

6. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + x_1 x_2)\, dt \to \mathrm{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = 1,$
$x_1(1) = e,\ x_2(1) = 1/e.$

7. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\, dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 1,\ T + x(T) = 2.$

8. $\int\limits_0^{T_0} x\sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt \to \mathrm{extr},\ x(T_0) = 1.$

9. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 tx\, dt = 1,\ x(0) = x(1) = \dot{x}(1) = \dot{x}(0) = 0.$

10. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 + 4x^2)\, dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ x(\pi) = \mathrm{sh}(\pi).$

11. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\, dt + \alpha x^2(T) \to \mathrm{extr},\ x(0) = x_0.$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\, dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1 + \frac{\pi}{2},\ \dot{x}(\pi/2) = 1.$

13. $\int\limits_0^T x\, dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^T \ddot{x}^2\, dt = 1,\ x(0) = 1,\ x(T) = 0.$

14. $\int\limits_0^{T_0} x\, dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{T_0} \ddot{x}^2\, dt = 1,\ x(0) = 1,\ x(T_0) = 0.$

15. $\int\limits_0^1 u^2\, dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 0,$
$x(1) = \mathrm{sh}1,\ \dot{x}(1) = \mathrm{ch}1 + \mathrm{sh}1.$

16. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(T_0) = 1.$

17. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} \leqslant 24,\ x(0) = 11,\ x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

18. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0,\ x(0) = 1,\ x(T) = \xi.$

19. $\int\limits_0^1 (x + u)\, dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 1.$

20. $T \to \inf,\ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) + \dot{x}(T) = 1,\ \dot{x}(0) = 1,\ x(T) = 0.$

21. $\int\limits_0^T u^2\, dt + x(1) \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = -1.$

22. Задано количество массы M, которое надо распределить по кривой $y = y(x)$, соединяющей две заданные точки плоскости A, B с заданной плотностью $\sigma(x, y)$ Найти форму кривой, чтобы ее момент инерции относительно оси OY был наименьшим.

23. $\int\limits_0^1 (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u_1,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = u_2 - a,$
$x_1(0) = -1,\ x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0,\ x_1(T) = 0,$
$x_2(T) = x_3(T) = x_4(T) = 0.$

24. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} u,$
$u \in \mathrm{co}\{(1, -1), (2, 1), (0, 3)\},\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0.$

25. $\int\limits_0^{20} (4u - 2u^2 - 5x)\, dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = 2x - 12u,\ u \in [-1, 1],$
$x(0) = 1,\ x(20) = 0.$

26. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ 2u_1^2 + u_2^2 \leqslant 18,$
$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = -4,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-1, 4],\ u_2 \in [-3, 1],$
$x_1(0) = -16,\ x_2(0) = 2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{18} (4x_1 - 2x_2 + 2u_1 - u_2)\, dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4,\ x_1(18) = -1,\ x_2(18) = 0,\ x_1(0) = 1.$

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 + u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u_2$, $u_1 \geqslant -1$, $u_2 \geqslant -2$, $|u_1 + 2u_2| \leqslant 8$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 2$, $x_1(0) + x_2(0) = 1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 - |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-1, 4]$, $x_1(0) = 12$, $x_2(0) = 0$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $4|u_1|+3|u_2| \leqslant 24$, $x_1(0) = 20$, $x_2(0) = -3$, $x_2(T) = -x_1(T)$.

33. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi} x \sin 8t\, dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-3, 1]$, $x(-\frac{\pi}{2}) = 6$, $x(\pi) = 1$.

34. $\int\limits_0^{T_0} (u_1^2 + tu_1 + u_2^2 + tu_2)\, dt \to \min$, $u_1 \in [-2, 1]$, $u_2 \geqslant 0$.

Вариант 4

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to R^1,\ Ax = \int\limits_0^1 x\, dt + x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (y\cos x, x\cos y, x^2 - y^2),$$

$$F\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = e^{x(t)} - \int\limits_0^t x^2(\tau)\, d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке $(0,0)$:

$$M = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in R^2,\ x_1^2 \geqslant x_2^3\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + tx)\, dt \to \text{extr}$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$.

5. $\int\limits_0^{T_0}(4\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos t)\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = 0.$

6. $\int\limits_0^{\pi/2}(\dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2)\,dt \to \text{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(\pi/2) = 1,$
$x_2(\pi/2) = -1.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2}(\dot{x}^2 - x^2)\,dt + x^2(0) - x^2(\pi/2) + 4x(\pi/2) \to \text{extr}.$

8. $\int\limits_0^{T}\dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ (T-1)x^2(T) + 2 = 0.$

9. $\int\limits_0^{1}(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - x_1x_2)\,dt \to \text{extr},\ x_1(1) = x_2(1) = 1.$

10. $\int\limits_0^{1}\dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^{1}tx\,dt = 0,\ x(0) = -4,\ x(1) = 4.$

11. $\int\limits_0^{1}\dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^{1}x\,dt \geqslant 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

12. $\int\limits_0^{T}\dot{x}^2\,dt + \alpha x^2(0) \to \text{extr},\ x(T) = x_1$

13. $\int\limits_0^{1}(\dddot{x}^2 + \ddot{x}^2)\,dt \to \text{extr},\ x(0) = \ddot{x}(0) = 0, \dot{x}(0) = 1,$
$\dot{x}(1) = \text{ch}1,\ x(1) = \text{sh}1.$

14. $\int\limits_0^{1}u^2\,dt \to \text{extr},\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = \text{sh}1,$
$\dot{x}(1) = \text{ch}1 + \text{sh}1.$

15. $\int\limits_0^{4}(\dot{x}^2 + x)\,dt \to \text{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(4) = 1.$

16. $\int\limits_0^{2}\ddot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \ddot{x} \geqslant 6,\ x(0) = \dot{x}(2) = 0,\ x(2) = 17.$

17. $T \to \inf,\ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0) = \xi_1,\ \dot{x}(0) = \xi_2,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

18. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) + \dot{x}(T) = \xi_1,\ x(T) = 1,\ \dot{x}(0) = \xi_2.$

19. $\int\limits_0^1 (u_1^2 + u_2^2)\,dt + x_1^2(1) + x_2^2(1) \to \mathrm{extr},\ \dot x_1 = u_1,\ \dot x_2 = u_2,$

$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1.$

20. $\int\limits_0^T u^2\,dt + x(1) \to \mathrm{extr},\ \dot x = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(T) = 1.$

21. $\int\limits_0^T (\dddot x^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = \dot x(0) = \ddot x(0) = 1,\ x(T) = 0.$

22. $T \to \inf,\ -2 \leqslant \ddot x \leqslant -1,\ x(0) = \xi_0,$

$\dot x(0) = \xi_1,\ x(T) = \dot x(T) = 0.$

23. Исходя из принципа Ферма — луч света из одной точки в другую проходит за минимально возможное время — найти кривую, по которой луч света проходит из одной точки в другую, если скорость света зависит от координат.

24. $T \to \inf,\ \ddot x + 2\dot x + x = u,\ \|u\| \leqslant 1,\ x, u \in R^2,$

$x(0) = x_0,\ x(T) = x_1.$

25. $\int\limits_0^{30} (4u - 2u^2 - 2x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot x = -2x - 12u,\ u \in [-2, 2],$

$x(0) = 1,\ x(30) = 0.$

26. $T \to \inf,\ \dot x_1 = u_1,\ \dot x_2 = u_2,\ 2u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 24,$

$x_1(0) = -2,\ x_2(0) = 4,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot x_1 = u_1,\ \dot x_2 = u_2,\ u_1 \in [-1, 4],\ u_2 \in [-3, 4],$

$x_1(0) = 16,\ x_2(0) = -2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{28} (4x_1 - 2x_2 + 2u_1 + 4u_2)\,dt - x_2(0) \to \mathrm{extr},\ \dot x_1 = u_1,$

$\dot x_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4,\ x_1(28) = -12,\ x_2(28) = 0,\ x_1(0) = 1.$

29. $T \to \inf,\ \dot x_1 = x_2 - u_1,\ \dot x_2 = x_1 + 2u_2,\ u_1 \geqslant -2,\ u_2 \geqslant -4,$

$|u_1 + 2u_2| \leqslant 8,\ x_1(0) = -4,\ x_2(0) = 4,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf,\ \dot x_1 = -x_2,\ \dot x_2 = x_1 + u,\ |u| \leqslant 2,$

$2x_1(0) + x_2(0) = 1,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (x_2+|u|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-1,1],$
$x_1(0)=2,\ x_2(0)=1,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\,dt \to \min,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2, |u_1|+5|u_2| \leqslant 10, x_1(0)=-2,$
$x_2(0)=3,\ x_2(T)=4x_1(T).$

33. $\int\limits_{-2\pi}^0 x\sin 8t\,dt \to \min,\ \dot{x}=u,\ u\in[-1,2],\ x(-2\pi)=8,$
$x(0)=-1.$

34. $\int\limits_{-2}^2 (u_1^3 - tu_1^2 + u_2^3 - tu_2^2)\,dt \to \min,\ u_1,u_2 \in [-0,5,0,5].$

Вариант 5

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:
$$A\colon C[0,1] \to R^1, \quad Ax = \int\limits_0^{1/2} x\,dt - \int\limits_{1/2}^1 x\ dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:
$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = (xy, x^2+y^2),$$
$$F\colon C^2[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \ddot{x}^2(t) - \cos x(t).$$

3. Найти касательное пространство к множеству M
в точке $(0,0)$:
$$M = \{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 0\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (4x\sin t - x^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=x(1)=0.$

5. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} (x^2 - 4x\cos t - \dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(-T_0)=0,\ x(T_0)=0.$

6. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 6\dot{x}_1 t + 12\dot{x}_2 t^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x_1(0)=x_2(0)=0,$
$x_1(1)=x_2(1)=1.$

7. $\int\limits_0^{T_0} (x^2 + \dot{x}^2)\, dt + \alpha x^2(T_0) \to \text{extr}.$

8. $\int\limits_0^{T} \dot{x}^3\, dt \to \text{extr},\ T + x(T) = 1,\ x(0) = 0.$

9. $\int\limits_0^{1} \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - x_1 x_2\right) dt \to \text{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = 1.$

10. $\int\limits_0^{1} \dot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^{1} x\, dt = 1,\ \int\limits_0^{1} tx\, dt \leqslant 0,\ x(0) = x(1) = 0.$

11. $\int\limits_0^{1} \dot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^{1} t^2 x\, dt \geqslant 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dddot{x}^2 - \ddot{x}^2)\, dt \to \text{extr},\ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi/2) = 0,$
$x(\pi/2) = 0,\ \ddot{x}(0) = \ddot{x}(\pi/2) = 1.$

13. $\int\limits_{-1}^{1} \ddot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_{-1}^{1} \dot{x}^2\, dt = 1,\ \int\limits_{-1}^{1} x\, dt = 0,$
$x(-1) = x(1) = \dot{x}(-1) = \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{1} (\dddot{x}^2 - x^2)\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^{1} x\, dt \geqslant 1,$
$\ddot{x}(1) = \dot{x}(1) = x(0) = 1.$

15. $\int\limits_0^{T_0} |\dot{x}|\, dt \to \text{extr},\ \ddot{x} \geqslant A,\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

16. $\int\limits_0^{1} \ddot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = -\frac{11}{24}.$

17. $T \to \inf,\ -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0) = 3,$
$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0,\ x(T) = -5.$

18. $T \to \inf,\ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0) = \xi_1,\ x(T) = \xi_2.$

19. $\int\limits_0^{1} u^2\, dt + x(1) \to \text{extr},\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1.$

20. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 + u_1,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2,\ |u_1| \leqslant 1, |u_2| \leqslant 1,$
$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

21. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$, $x_1(0) = \xi_1$, $\dot{x}_2(0) = \xi_2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

22. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(0,1,1)$, $B(2,0,4)$ на поверхности $x^2 + y^2 - z = 0$.

23. На плоскости дана точка $A(x_A, y_A)$. Провести кривую длиной l, соединяющую начало координат с точкой A так, чтобы площадь фигуры, ограниченной данной кривой, осью OX и прямой $x = x_A$, была наибольшей.

24. $x^2(T_0) \to \mathrm{extr}$, $|\ddot{x}| \leqslant 1$, $x(0) = \xi$, $\dot{x}(0) = 0$.

25. $\int\limits_0^{30} (-4u - 2u^2 - 2x)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = 2x - 12u$, $u \in [-2, 2]$, $x(0) = -1$, $x(30) = 0$.

26. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 27$, $x_1(0) = -12$, $x_2(0) = -4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2, 3]$, $u_2 \in [-3, 8]$, $x_1(0) = -6$, $x_2(0) = 5$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $\int\limits_0^{20} (4x_1 + 2x_2 + 2u_1 + 4u_2)\,dt - 2x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4$, $x_1(20) = -10$, $x_2(20) = 1$, $x_1(0) = 1$.

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2$, $u_1 \geqslant -2$, $u_2 \geqslant -6$, $|2u_1 + u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = -14$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 3$, $2x_1(0) - x_2(0) = 1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-2, 1]$, $x_1(0) = -2$, $x_2(0) = 4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + |u_2|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $3|u_1| + 2|u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -13$, $x_2(T) = x_1(T)$.

33. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} x\cos 12t\,dt \to \min,\ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2,4],\ x(-\pi) = -1,$
$x(\frac{\pi}{2}) = 2.$

34. $\int\limits_{-1}^{1} (t^2u_2^2 - tu_2 + u_1 - |u_1|)\,dt \to \min,\ |u_1| \leqslant 4, |u_2| \leqslant 4.$

Вариант 6

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to R^1,\ \ Ax = \int\limits_{1/2}^{1} x\,dt - x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (a|x| + b|y|, x, y),$$
$$F\colon C[0,1] \to R^1, \quad Fx = \int\limits_{0}^{1} \varphi(x(t))\,dt,\ \varphi \in C^1(R^1).$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке z_0 :

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ f(x(0)) = 0,\ f \in C^1(R^1)\}.$$

4. $\int\limits_{0}^{1} (\dot{x}^2 + x^2 + 6x\mathrm{sh}2t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = x(1) = 0.$

5. $\int\limits_{0}^{T_0} (x^2 - \dot{x}^2 + 4x\cos t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

6. $\int\limits_{-1}^{1} (\dot{x}^2 - 2tx)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(-1) = -1,\ x(1) = \xi.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3)\,dt \to \mathrm{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_3(0) = x_2(\pi/2) = 0,\ x_3(\pi/2) = -\pi/2,\ x_1(\pi/2) = \pi/2.$

8. $\int\limits_{0}^{1} (x_1x_2 + \dot{x}_1\dot{x}_2)\,dt + x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x\,dt = -3/2,\ \int\limits_0^1 tx\,dt \geqslant -2,$
$x(0) = 2,\ x(1) = -14.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = 0.$

11. $\int\limits_0^T (x^2 + \dot{x}^2)\,dt + \alpha x^2(T)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ \int\limits_0^T x\,dt \geqslant 1.$

12. $\int\limits_0^T (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x}(0) = 0,\ \int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt = 1.$

13. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{T_0} \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{T_0} \dot{x}^2\,dt \geqslant 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 1,\ \ddot{x}(T_0) = 2.$

15. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} + x = u,\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$

16. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 0.$

17. $x(2) \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 2,\ \int\limits_0^2 \dot{x}^2\,dt = 2,\ x(0) = 0.$

18. $T \to \inf,\ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = \xi,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

19. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = \xi_1,\ \dot{x}(0) + x(T) = \xi_2.$

20. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x(1) \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = x + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 1.$

21. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u,\ -1 \leqslant u \leqslant 0,\ x_1(0) = x_1^0,$
$x_2(0) = x_2^0,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(0,1,2)$, $B(1,0,0)$ на поверхности $x^2 + y^2 = 1$.

23. Дан угол с вершиной в начале координат. Соединить данную точку A на одной стороне угла с неизвестной точкой B на другой стороне угла

кривой длины l так, чтобы площадь между сторонами угла и кривой была максимальной.

24. $\int\limits_0^{3\pi} x\sin t\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot x| \leqslant 1,\ x(0)=0,\ x(3\pi)=\pi.$

25. $\int\limits_0^{30}(-4u-2u^2-x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot x = x-2u,\ u\in[-1,2],$
$x(0)=3,\ x(30)=0.$

26. $T\to\inf,\ \dot x_1=u_1,\ \dot x_2=u_2,\ 3u_1^2+4u_2^2\leqslant 27,$
$x_1(0)=-2,\ x_2(0)=4,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

27. $T\to\inf,\ \dot x_1=u_1,\ \dot x_2=u_2,\ u_1\in[-2,3],\ u_2\in[-3,7],$
$x_1(0)=8,\ x_2(0)=-5,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

28. $\int\limits_0^{20}(4x_1+2x_2-3u_1+4u_2)\,dt-2x_2(0)\to\mathrm{extr},\ \dot x_1=u_1,$
$\dot x_2=u_2,\ u_1^2+u_2^2\leqslant 1,\ x_1(20)=10,\ x_2(20)=-1,\ x_1(0)=1.$

29. $T\to\inf,\ \dot x_1=x_2-u_1,\ \dot x_2=x_1+2u_2,\ u_1\geqslant -2,\ u_2\geqslant -4,$
$|2u_1+3u_2|\leqslant 18,\ x_1(0)=14,\ x_2(0)=2,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

30. $T\to\inf,\ \dot x_1=-x_2,\ \dot x_2=x_1+u,\ |u|\leqslant 3,$
$2x_1(0)-x_2(0)=-1,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

31. $\int\limits_0^{T}(1+|u|)\,dt\to\min,\ \ \dot x_1=x_2,\ \ \dot x_2=u,\ \ u\in[-2,1],$
$x_1(0)=6,\ \ x_2(0)=-1,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

32. $\int\limits_0^{T}(1+|u_1|+|u_2|)\,dt\to\min,\ \ \dot x_1=u_1,\ \ \dot x_2=u_2,\ |u_1|+5|u_2|\leqslant 10,\ x_1(0)=1,$
$x_2(0)=-3,\ 2x_2(T)=x_1(T).$

33. $\int\limits_{-2\pi}^{\pi/4} x\cos 5t\,dt\to\min,\ \dot x=u,\ \ u\in[-2,3],\ \ x(-2\pi)=-3,$
$x(\frac{\pi}{4})=3.$

34. $\int\limits_0^{2\pi} u_1u_2\cos 2t\,dt\to\min,\ \ u_1\geqslant 1,\ u_2\geqslant 2,\ u_1^2+u_2^2\leqslant 9.$

Вариант 7

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to R^1,\ Ax = \int\limits_0^1 x \sin^2 \pi t\, dt - x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^3 \to R^2, \quad F(x,y,z) = (a|x| + b|y| + c|z|, x^2 + y^2 + z^2),$$

$$F\colon C[0,1] \to R^1, \quad F(x) = \int\limits_0^1 \varphi(t, x(t))\, dt,\ \varphi \in C^1(R).$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке z_0 :

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ f(x(0)) = 0,\ f \in C^1(R),\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} \dot{x}^3\, dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin(\frac{t}{6}))\, dt \to \text{extr},\ \ x(0) = \xi,\ x(T_0) = 0.$

6. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + 3x^2)e^{2t}\, dt \to \text{extr},\ x(0) = 1,\ x(1) = e.$

7. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1)\, dt \to \text{extr},\ x_1(0) = 1,$

$x_2(1) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_1(1) = \frac{1}{2}.$

8. $\int\limits_1^e 2\dot{x}(t\dot{x} + x)\, dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_1^e (t\dot{x}^2 + 2x)\, dt \to \text{extr},\ x(1) = e.$

10. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \ \int\limits_0^\pi x\cos t\, dt = \frac{\pi}{2}, x(0) = 1,\ x(\pi) = -1.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^1 tx\, dt \geqslant 1,\ x(0) = x(1) = 1.$

12. $\int\limits_0^T (2x^2 + \dot{x}^2)\,dt - x^2(T) \to \mathrm{extr},\ x(0) = \xi.$

13. $\int\limits_0^\pi (\dddot{x}^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,$

$x(\pi) = \mathrm{sh}(\pi),\ \dot{x}(\pi) = \mathrm{ch}(\pi) + 1.$

14. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \geqslant 4,\ x(0) = x(1) = \dot{x}(0) = 0.$

15. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} + x = u,$

$x(0) = x(\pi/2) = 0,\ \dot{x}(\pi/2) = -\pi/2.$

16. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = \xi.$

17. $x(T_0) \to \inf,\ \int\limits_0^{T_0} \dot{x}^2\,dt \geqslant 2,\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 0.$

18. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = \xi_1,\ \dot{x}(0) = \xi_2,\ \dot{x}(T) = 0.$

19. $T \to \inf,\ -4 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

20. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x^2(1) \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = x + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = \xi.$

21. $\int\limits_0^{T_0} u^2(u-1)^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1,$

$x(0) = 0,\ x(T_0) = 1.$

22. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u,\ -1 \leqslant u \leqslant 2,\ x_1(0) = \xi_1,$

$x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(0,2,0)$ до точки $B(2,2,0)$ на поверхности $y^2 + z^2 = 4$.

24. На сторонах OA и OB угла с вершиной O даны точки A и B. Требуется соединить их кратчайшей линией ACB при условии, что площадь $OACB$ равна S.

25. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} u,$

$u \in \mathrm{co}\{(0,0), (-1,1), (1,-1)\},\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0.$

26. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ 3u_1^2 + 25u_2^2 \leqslant 27,$
$x_1(0) = -12,\ x_2(0) = -4,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-5, 3],\ u_2 \in [-1, 7],$
$x_1(0) = -8,\ x_2(0) = -5,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{20} (4x_1 + 3x_2 - u_1 + 4u_2)\, dt - x_2(0) \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1,\ x_1(20) = 2,\ x_2(20) = 3,\ x_1(0) = 2.$

29. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 - u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2,\ u_1 \geqslant -4,\ u_2 \geqslant -4,$
$|u_1 + 6u_2| \leqslant 12,\ x_1(0) = 4,\ x_2(0) = 12,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 + u,\ |u| \leqslant 3,$
$2x_1(0) - 2x_2(0) = 1,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u,\ \ u \in [-3, 1],$
$x_1(0) = -8,\ \ x_2(0) = 1,\ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + |u_2|)\, dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = u_1,\ \ \dot{x}_2 = u_2,\ 3|u_1| + 2|u_2| \leqslant 6,\ x_1(0) = 12,$
$x_2(0) = -3,\ x_2(T) = -2x_1(T).$

33. $\int\limits_{\pi}^{3\pi} x \cos 6t\, dt \to \min,\ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2, 1],\ \ x(\pi) = -4,\ \ x(3\pi) = 0.$

34. $\int\limits_0^{T_0} (u_1^2 + p_1(t)u_2 + u_1)\, dt \to \min,\ \ 0 \leqslant u_1 + u_2 \leqslant 2,\ \ u_1 \geqslant 0,\ \ u_2 \geqslant 0.$

Вариант 8

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1],\ \ (Ax)(t) = \int\limits_0^{1/2} x(\tau)\, d\tau - \int\limits_{1/2}^{t} x(\tau)\, d\tau.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^3 \to R^3, \quad F(x, y, z) = (x, -y, e^{-z}(x + y)),\ \ (1, 1, 0),$$
$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad F(x)(t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0 :

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ \int\limits_0^1 x^2(\tau)\,d\tau \geqslant 1\},\ x_0(t) = 1.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (4\dot{x}^2 + x^2 + 6x\operatorname{sh}2t)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5. $\int\limits_0^1 \sqrt{x(1+\dot{x}^2)}\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = x(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

6. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\,dt \to \operatorname{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(\pi/2) = 1,\ x_2(\pi/2) = 1.$

7. $\int\limits_0^3 4\dot{x}^2x^2\,dt + 4x^4(0) - 8x(3) \to \operatorname{extr}.$

8. $\int\limits_{-1}^T \dot{x}^2\,dt \to \operatorname{extr},\ x(-1) = T,\ \int\limits_{-1}^T x\,dt \geqslant 1,\ x(T) = 0.$

9. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \operatorname{extr},\ \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \operatorname{extr},\ \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 1,\ x(0) = \xi.$

11. $\int\limits_0^T (x^2 + \dot{x}^2)\,dt + x(0) \to \operatorname{extr},\ x(T) = \xi,\ \int\limits_0^T tx\,dt = 1.$

12. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 1.$

13. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \operatorname{extr},\ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \geqslant 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \operatorname{extr},\ \ddot{x} + x = u,$
$x(\pi/2) = 0,\ \dot{x}(\pi/2) = 1,\ x(0) = 0.$

15. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \operatorname{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(T_0) = \xi.$

16. $\int\limits_0^1 (\frac{x^2+\dot{x}^2}{2} + |\dot{x}|)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(1) = \xi.$

17. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = \xi_1,\ \dot{x}(0) = \xi_2,\ x(T) = 0.$

18. $T \to \inf,\ -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 4,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

19. $\int\limits_0^1 (u^2 + 2tx)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 0.$

20. $T \to \inf,\ \int\limits_0^T x\,dt \geqslant 1,\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 1.$

21. $\int\limits_0^1 \sin u\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = \cos u,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ \ |u| \leqslant \frac{\pi}{2}.$

22. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, \sqrt{12})$, $B(0, 3, 0)$ на поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

23. Среди всех кривых, соединяющих прямые $x = x_0$, $x = x_1$ и образующих вместе с ними и осью OX площадь заданной величины, найти ту, у которой центр тяжести этой фигуры занимает наинизшее положение.

24. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u,\ -2 \leqslant u \leqslant -1,\ x(0) = \xi_1,$
$x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) + x_2(T) = 0.$

25. $\int\limits_0^{30} (4u - u^2 + 2x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = x + 2u,\ u \in [-3, 2],$
$x(0) = -3,\ x(30) = 0.$

26. $T \to \inf\ \ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 27,$
$x_1(0) = 6,\ x_2(0) = 7,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-2, 3],\ u_2 \in [-4, 7],$
$x_1(0) = 28,\ x_2(0) = -14,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{20} (x_1 + 2x_2 - 3u_1 + 4u_2)\,dt + x_2(0) \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1,\ x_1(20) = 1,\ x_2(20) = 1,\ x_1(0) = -1.$

29. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 - u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2,\ u_1 \geqslant -2,\ u_2 \geqslant -4,$
$|u_1 + 6u_2| \leqslant 24,\ x_1(0) = -14,$
$x_2(0) = -2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 4$,
$2x_1(0) + x_2(0) = 3$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-4, 1]$,
$x_1(0) = 16$, $x_2(0) = -6$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1 + |u_1| + |u_2|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $5|u_1| + |u_2| \leqslant 5$, $x_1(0) = 12$,
$x_2(0) = -3$, $x_2(T) = -4x_1(T)$.

33. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi/3} x \cos 5t\, dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 2]$, $x(-\pi) = 4$,
$x(\frac{2\pi}{3}) = -1$.

34. $\int\limits_0^{2\pi} (u^2 - u\cos t)\, dt \to \min$, $|u| \leqslant 0,5$.

Вариант 9

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x(t) - x(0) + x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = (\{x\}, y),$$

$$F\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = tx(t) - \int\limits_0^t x^2(\tau)\, d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0 :

$$M = \{x \in C^3[0,1] \mid \dddot{x} = 0\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\operatorname{sh} t)\, dt \to \operatorname{extr}$, $x(0) = -1$, $x(1) = 0$.

5. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - 4x^2)e^{2t}\, dt \to \operatorname{extr}$, $x(0) = 0$, $x(T_0) = \xi$.

6. $\int\limits_{-1}^{1} x^2(1-\dot{x})^2\,dt \to \text{extr},\ x(-1)=0,\ x(1)=1.$

7. $\int\limits_{0}^{1} (\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+4x_1^2)\,dt \to \text{extr},\ x_1(0)=x_2(0)=0,$
$x_2(1)=0,\ x_1(1)=1.$

8. $\int\limits_{0}^{1} e^x\dot{x}^2\,dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_{0}^{T} e^x\dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ x(0)=\xi,\ x(T)=T+1.$

10. $\int\limits_{0}^{1} \dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_{0}^{1} x\,dt=0,\ x(0)=1,\ \int\limits_{0}^{1} tx^2\,dt \geqslant 1.$

11. $\int\limits_{0}^{1} \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ x(0)=1,\ \int\limits_{0}^{1} x\,dt=1,\ \dot{x}(1)=0.$

12. $\int\limits_{0}^{\pi/2} u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \text{extr},\ \ddot{x}+x=u,\ x(0)=1,\ \dot{x}(\pi/2)=0.$

13. $\int\limits_{0}^{T} \ddot{x}^2\,dt + x(0) \to \text{extr},\ x(T)=\dot{x}(T)=1,\ \dot{x}(0)=0,\ \int\limits_{0}^{T} \dot{x}^2\,dt \geqslant 1.$

14. $T \to \inf,\ \int\limits_{0}^{T} \ddot{x}^2\,dt \geqslant 1,\ x(0)=\dot{x}(0)=0,\ x(T)=\dot{x}(T)=1.$

15. $T \to \inf,\ \int\limits_{0}^{T} \ddot{x}^2\,dt = 4,\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ \dot{x}(T)=-1.$

16. $\int\limits_{0}^{T_0} (\dot{x}^2+x)\,dt \to \text{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0)=0,\ x(T_0)=1.$

17. $\int\limits_{0}^{1} x^2\,dt \to \text{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0)=1.$

18. $T \to \inf,\ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0)=\dot{x}(0)=1,\ x(T)=\dot{x}(T)=2.$

19. $\int\limits_{0}^{1} (x^2+u^2)\,dt + x(1) \to \text{extr},\ \dot{x}=u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0)=1.$

20. $\int\limits_0^T (x_1 + x_2 - 3u)\, dt + x_1(T) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

21. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$, $x_1(0) = \xi_1$, $x_2(0) = \xi_2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

22. На поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ найти кратчайшее расстояние между точками $A\left(\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{3}, 0\right)$, $B(0, 0, -4)$.

23. Данную точку $(0, b)$ оси OY соединить с осью OX кривой, заключающей вместе с осями OX и OY фигуру данной площади S и образующей при вращении около оси OX наименьшую поверхность.

24. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u$, $u \in \mathrm{co}\{(1, 1), (-1, -2), (0, 1)\}$, $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$.

25. $\int\limits_0^{40} (4u - 6u^2 + 5x)\, dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = 3x + 2u$, $u \in [-1, 2]$, $x(0) = 3$, $x(40) = 0$.

26. $T \to \inf$ $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $9u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 36$, $x_1(0) = -6$, $x_2(0) = 5$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2, 3]$, $u_2 \in [-4, 5]$, $x_1(0) = 23$, $x_2(0) = -13$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $\int\limits_0^{21} (3x_1 + 2x_2 - 3u_1 - 4u_2)\, dt + 3x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$, $x_1(21) = -1$, $x_2(21) = 1$, $x_1(0) = -1$.

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2$, $u_1 \geqslant -3$, $u_2 \geqslant -4$, $|u_1 + 6u_2| \leqslant 24$, $x_1(0) = -10$, $x_2(0) = 1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 3$, $2x_1(0) + 2x_2(0) = 3$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-6, 1]$, $x_1(0) = -2$, $x_2(0) = 8$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\,dt \to \min,\ \ \dot x_1 = u_1,\ \ \dot x_2 = u_2,\ |u_1|+2|u_2| \leqslant 6,\ x_1(0)=12,$ $x_2(0)=-3,\ x_2(T)=x_1(T)=0.$

33. $\int\limits_{2\pi}^{4\pi} x\sin 3t\,dt \to \min,\ \dot x = u,\ \ u\in[-2,2],\ \ x(2\pi)=4,\ \ x(4\pi)=-1.$

34. $\int\limits_0^{2\pi} (u^2+u\sin 4t)\,dt \to \min,\ |u| \leqslant \dfrac{1}{4}.$

Вариант 10

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1]\to C[0,1],\ \ (Ax)(t)=t^2x(t)+x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2\to R^2,\quad F(x,y)=(|xy|,x\cos y),$$

$$F\colon C[0,1]\to C^1[0,1],\quad (Fx)(t)=\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0 :

$$M=\{x\in C^2[0,1]\mid \ddot x = f, f\in C^2[0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot x^2+9x^2+4x\,\mathrm{sh}t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=0,\ x(T_0)=\xi.$

5. $\int\limits_0^1 \sin\dot x\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=0,\ x(1)=\pi/2.$

6. $\int\limits_{-1}^1 (x^2+2tx\dot x)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(-1)=1,\ x(1)=1.$

7. $\int\limits_0^1 (16x_1^2-\dot x_2^2+\dot x_1^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x_1(0)=x_2(0)=0,$ $x_1(1)=1,\ x_2(1)=2.$

8. $\int\limits_0^1 e^{t+1}(\dot x^2+2x^2)\,dt + 2x(1)(x(0)+1) \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ x(T) = \xi.$

10. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^\pi x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2},\ \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt = \pi + 2,$
$x(0) = 2,\ x(\pi) = 0.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^1 x^2\,dt \geqslant 1,\ \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\ x(1) = 0.$

12. $\int\limits_0^T (x^2 + (\dot{x} - x)^2)\,dt - x^2(0) \to \text{extr},\ x(T) = \xi,\ \int\limits_0^T x\,dt = 1.$

13. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 1,\ x(1) = \dot{x}(0) = 0.$

15. $T \to \inf,\ \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(T) = 1.$

16. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr},\ \ddot{x} + x = u,\ x(\pi/2) = 1.$

17. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \text{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 0,\ x(T) = \xi.$

18. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 2,\ x(T) = \dot{x}(T) = 4.$

19. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x(1) \to \text{extr},\ \dot{x} = u, |u| \leqslant 1,\ x(0) = 1.$

20. $T \to \inf,\ \dot{x} = 2x + u,\ \ |u| \leqslant 1,\ x(0) = -2,\ x(T) = 0.$

21. $\int\limits_0^5 (3u - 2x)\,dt \to \text{extr},\ \dot{x} = x - u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1,$
$x(0) = 0,\ x(5) = \frac{3}{2}.$

22. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ |u_1| \leqslant 1,\ |u_2| \leqslant 1,\ x_1(0) = \xi_1,$
$x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 1, \sqrt{2})$, $B(-1, 0, \sqrt{3})$ на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

24. Найти кратчайшую линию, соединяющую две точки плоскости, при условии, что данная линия должна отстоять от начала координат на расстояние, не меньшее заданного числа a.

25. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} u$,

$u \in \operatorname{co}\{(-1,1),(2,0),(0,3\}$, $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$.

26. $\int\limits_0^{12} (4u - 6u^2 + 5x)\, dt \to \operatorname{extr}$, $\dot{x} = 3x - 5u$, $u \in [-3, 2]$,

$x(0) = -3$, $x(12) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $9u_1^2 + u_2^2 \leqslant 36$,

$x_1(0) = -16$, $x_2(0) = 15$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2, 3]$, $u_2 \in [-3, 5]$,

$x_1(0) = 22$, $x_2(0) = -13$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

29. $\int\limits_0^{24} (-3x_1 + 2x_2 - 3u_1 - 4u_2)\, dt + 3x_2(0) \to \operatorname{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,

$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$, $x_1(24) = -1$, $x_2(24) = 1$, $x_1(0) = -1$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2$, $u_1 \geqslant -6$, $u_2 \geqslant -4$,

$|u_1 + 6u_2| \leqslant 24$, $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -21$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-1, 4]$,

$x_1(0) = -8$, $x_2(0) = 12$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + |u_2|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $3|u_1| + 2|u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = 12$,

$x_2(0) = -3$, $x_2(T) = -3x_1(T)$.

33. $\int\limits_{\pi/3}^{3\pi} x \cos 3t\, dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 4]$, $x(\frac{\pi}{3}) = 0$, $x(3\pi) = 1$.

34. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} u \cos(t - \dfrac{\pi}{3})\, dt \to \min$, $|u| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Вариант 11

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1]\to C[0,1],\ (Ax)(t)=x(t)-\int\limits_0^1 x(t)\,dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2\to R^2,\quad F(x,y)=(|x|-|y|,\sin(x^2+y^2)),$$

$$F\colon C[0,1]\to C[0,1],\quad (Fx)(t)=\sin x(t)-\int\limits_0^1 x^5(t)\,dt.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0 :

$$M=\{x\in C^1[0,1],\ \int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt\geqslant 1\},\ x_0=t.$$

4. $\int\limits_0^1(\dot{x}^2+x^2+4x\operatorname{ch}t)\,dt\to\operatorname{extr},\ x(0)=1,\ x(1)=0.$

5. $\int\limits_0^1\cos\dot{x}\,dt\to\operatorname{extr},\ x(0)=0,\ x(1)=\xi.$

6. $\int\limits_0^1 x\dot{x}^3\,dt\to\operatorname{extr},\ x(0)=0,\ x(1)=1.$

7. $\int\limits_0^{\pi/4}(2x_2-4x_1^2+\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2)\,dt\to\operatorname{extr},$

   $x_1(0)=x_2(0)=0,\ x_1(\pi/4)=x_2(\pi/4)=1.$

8. $\int\limits_0^1(\dot{x}^2-x)\,dt-\frac{x^2(1)}{2}+\frac{x^2(0)}{2}\to\operatorname{extr}.$

9. $\int\limits_0^T(\dot{x}^2+x)\,dt\to\operatorname{extr},\ x(0)=0,\ x(T)+T=2.$

10. $\int\limits_1^2 t^2\dot{x}^2\,dt\to\operatorname{extr},\ \int\limits_1^2 x\,dt\geqslant 2,\ x(1)=0,\ x(2)=0.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x\,dt = \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = \xi,\ x(1) = 1.$

12. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(1) = \mathrm{sh}1.$

13. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x^2\,dt \leqslant 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 2,\ \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{\pi/2} (u^2 + x)\,dt + x^2(0) \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} + x = u,$

$\dot{x}(\pi/2) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$

15. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 0.$

16. $T \to \inf,\ \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = x(T) = 0.$

17. $T \to \inf,\ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -1,$

$x(T) = 0.$

18. $\int\limits_0^T x^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = \xi.$

19. $T \to \inf,\ \dot{x} = 2x + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = -2,\ x(T) = 0.$

20. $\int\limits_0^5 (x - u)\,dt - x^2(5) \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = 2x + u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ x(0) = 0.$

21. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ |u_2| \leqslant 1,\ 0 \leqslant u_1 \leqslant 2,$

$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(0,0,2)$, $B(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. Пусть $\sigma(x,y) = x + y^2$ — плотность распределения массы вдоль кривой, соединяющей точки $A(1,1)$, $B(2,3)$. Найти такую кривую, для которой момент инерции относительно оси OY был бы минимальным.

24. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u,$

$u \in \mathrm{co}\{(-1,1),(2,-1),(0,2)\},\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0.$

25. $\int\limits_0^{15}(4u+u^2+5x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x}=-3x-15u,\ u\in[-3,4],$
$x(0)=3,\ x(15)=0.$

26. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1^2+4u_2^2\leqslant 36,$
$x_1(0)=-13,\ x_2(0)=11,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

27. $T\to\inf\ \ \dot{x}_1=u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1\in[-2,1],\ u_2\in[-3,2],$
$x_1(0)=-22,\ x_2(0)=-13,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

28. $\int\limits_0^{22}(-3x_1+2x_2-3u_1+4u_2)\,dt+3x_2(0)\to\mathrm{extr},\ \dot{x}_1=u_1,$
$\dot{x}_2=u_2,\ u_1^2+u_2^2\leqslant 1,\ x_1(22)=-1,\ x_2(22)=1,\ x_1(0)=-1.$

29. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=x_2-u_1,\ \dot{x}_2=x_1+2u_2,\ u_1\geqslant -6,\ u_2\geqslant -2,$
$|8u_1+u_2|\leqslant 24,\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=-21,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

30. $\int\limits_0^{T_0} uxdt\ \ \to\inf,\ \ x(0)=x_0,\ \ \dot{x}=(u-2)x,\ \ u\in[0,1].$

31. $\int\limits_0^{T}(1+|u|)\,dt\to\min,\ \ \dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=u,\ \ u\in[-2,1],$
$x_1(0)=16,\ \ x_2(0)=4,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

32. $\int\limits_0^{T}(1+|u_1|+|u_2|)\,dt\to\min,\ \ \dot{x}_1=u_1,\ \ \dot{x}_2=u_2,\ |u_1|+3|u_2|\leqslant 9,\ x_1(0)=12,$
$x_2(0)=-1,\ x_2(T)=-4x_1(T).$

33. $\int\limits_{-\pi}^{5\pi/4} x\cos 4t\,dt\to\min,\ \dot{x}=u,\ \ u\in[-2,4],\ \ x(-\pi)=4,$
$x(\frac{5\pi}{4})=1.$

34. $\int\limits_7^{10}(\ln(tu)+u)\,dt\to\min,\ u\in[1,2].$

Вариант 12

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C^1[0,1]\to C[0,1],\ \ (Ax)(t)=\dot{x}(t)+x(t).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = (|x|,\ e^{|y|}),$$

$$F\colon C^2[0,1] \to C^1[0,1], \quad (Fx)(t) = \dot{x}(t) + \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dt.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0 :

$$M = \{x \in C^2[0,1] \mid \ddot{x}^2(t) < 1 \text{ для всех } t \in [0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\operatorname{ch}t)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} \sin\dot{x}\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

6. $\int\limits_0^1 (t + \dot{x}^2)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 1,\ x(1) = 2.$

7. $\int\limits_{-1}^1 (\dot{x}_1^2 + 2tx_1 + x_2^2 - \dot{x}_2^2)\,dt \to \operatorname{extr},\ x_1(-1) = 2,\ x_1(1) = 1,$
$x_2(-1) = -1,\ x_2(1) = 1.$

8. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)\,dt - 2x^2(0) - x^2(\pi/2) \to \operatorname{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 0.$

10. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 0,\ x(T) = -T - 1.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \operatorname{extr},\ \int\limits_0^1 xe^{-t}\,dt \geqslant e,\ x(0) = 2e + 1,\ x(1) = 2.$

12. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \to \operatorname{extr},\ \int\limits_0^T x\,dt \leqslant 1,\ x(0) = 3.$

13. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + 48x)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$

14. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x\,dt = 1,\ x(0) = x(1) = \dot{x}(0) = 0.$

15. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + x^2(0) \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} + x = u,\ x(\pi/2) = 0,$
$\dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(\pi/2) = 1.$

16. $T \to \inf,\ \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt \geqslant 4,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(T) = 1,\ \dot{x}(T) = 2.$

17. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,$
$x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0,\ u_1 \in [-1, 2],\ u_2 \in [-2, 4].$

18. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = \dot{x}(0) = 1.$

19. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = x(T_0) = 1.$

20. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = \dot{x}(0) = 2,\ x(T) + \dot{x}(T) = 2.$

21. $\int\limits_0^2 (2x - 3u)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = x + u,\ x(0) = 5,\ 0 \leqslant u \leqslant 1.$

22. $T \to \inf,\ \dot{x} = -x + u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ x(0) = -2,\ x(T) = 1.$

23. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти расстояние между точками $A(0, -2, 0)$, $B(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

24. Среди всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки плоскости, найти ту кривую, которая при вращении вокруг оси OY образует поверхность наименьшей площади.

25. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} u,$
$u \in \mathrm{co}\{(1, 1), (-1, 2), (0, 0)\},\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0.$

26. $\int\limits_0^{16} (u - 6u^2 + 5x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -3x + 5u,\ u \in [-3, 2],$
$x(0) = 5,\ x(16) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ 9u_1^2 + u_2^2 \leqslant 36,$
$x_1(0) = 16,\ x_2(0) = -15,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2,\ u_1 \in [-2, 1],\ u_2 \in [-3, 5],$
$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = -13,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

29. $\int\limits_0^{24} (-3x_1 + 6x_2 - 3u_1 - u_2)\, dt - 3x_2(0) \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1,\ x_1(24) = -1,\ x_2(24) = 1,\ x_1(0) = -1.$

30. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 - u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2,\ u_1 \geqslant -6,\ u_2 \geqslant -4,$
$|u_1 + 6u_2| \leqslant 12,\ x_1(0) = 10,\ x_2(0) = 2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u,\ \ u \in [-2, 3],$
$x_1(0) = 24,\ \ x_2(0) = 3,\ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + 2|u_2|)\, dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = u_1,\ \ \dot{x}_2 = u_2,\ |u_1| + 2|u_2| \leqslant 4,\ x_1(0) = 12,$
$x_2(0) = 13,\ x_2(T) = -x_1(T).$

33. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/4} x \cos 9t\, dt \to \min,\ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2, 4],\ \ x(-\pi) = 0,\ \ x(\frac{\pi}{4}) = 3.$

34. $\int\limits_{-12}^{12} (t \ln u - u)\, dt \to \min,\ u \in [6, 10].$

Вариант 13

1. Показать, что оператор A является линейным, и вычислить его норму:

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1] \quad (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau - x\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (xe^{-|x|}y, ye^{-x}, x^2 + y^2),\ (0,0),$$

$$F\colon C^2[0,1] \to R^1, \quad F(x) = \left(\int\limits_0^1 x^3(t)\, dt\right)^{-2}.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0 :

$$M = \{x \in C^1[0,1] \mid \sin x(0) = \cos \dot{x}(1)\}.$$

4. $\int\limits_0^{\pi/2} (x^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr},\ x(0) = 1,\ x(\pi/2) = 0.$

5. $\int\limits_0^{T_0} \cos \dot{x}\, dt \to \text{extr},\ x(0) = x(T_0) = \xi.$

6. $\int\limits_1^{2} \dfrac{dt}{\dot{x}} \to \text{extr},\ x(1) = 0,\ x(2) = 1.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} (2x_1x_2 - 2x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2)\, dt \to \text{extr},$
$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_2(\pi/2) = 0,\ x_1(\pi/2) = 2.$

8. $\int\limits_0^{e-1} (t+1)\dot{x}^2\, dt + 2x(0)(x(e-1)+1) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^{T} \dot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^{T} x\, dt \leqslant 1,\ x(T) = 3.$

10. $\int\limits_0^{1} \dot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^{1} xe^t\, dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

11. $\int\limits_0^{T} (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ (1-T)x(T) = 2.$

12. $\int\limits_0^{1} (\ddot{x}^2 - 48x^2)\, dt \to \text{extr},\ \dot{x}(1) = 0,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$

13. $\int\limits_0^{1} u^2\, dt + \dot{x}^2(0) \to \text{extr},\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 1.$

14. $\int\limits_0^{1} x\, dt \to \text{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

15. $\int\limits_0^{T} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \text{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 0.$

16. $T \to \inf,\ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 1,\ x(T) = 0,\ \dot{x}(0) = -1,$
$\dot{x}(T) = 0.$

17. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = -1,\ \dot{x}(T) = 0.$

18. $T \to \inf$, $\dot{x} = u$, $\int\limits_0^T x\,dt = 0$, $|u| \leqslant 1$, $x(0) = 1$.

19. $\int\limits_0^2 (2x - 3u - u^2)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = x + u$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $x(0) = 5$.

20. $\int\limits_0^4 (u + u^2 - x)\,dt + 2x(4) \to \mathrm{extr}$,

    $\dot{x} = 3x + 2u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $x(0) = 0$.

21. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant u_2 \leqslant 1$,

    $x_1(0) = \xi_1$, $x_1(T) = 0$, $x_2(0) = \xi_2$, $x_2(T) = 0$.

22. Найти расстояние от точки $A(1, -1, \sqrt{2})$ до точки $B(2, 0, 0)$ на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

23. Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ найти ту, которая при вращении вокруг прямой $x = a$ образует поверхность наименьшей площади.

24. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$,

    $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$, $u \in [-1, 1]$.

25. $\int\limits_0^2 (3u - 2u^2 + 5x)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = -3x + 12u$, $u \in [0, 1]$,

    $x(0) = 2$, $x(2) = 0$.

26. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + 9u_2^2 \leqslant 9$,

    $x_1(0) = x_2(0) = -4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2, 4]$, $u_2 \in [-3, 1]$,

    $x_1(0) = -5$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $\int\limits_0^{12} (-3x_1 + 2x_2 - 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,

    $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4$, $x_1(12) = x_2(12) = 0$, $x_1(0) = -2$.

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u_2$, $u_1 \geqslant -3$, $u_2 \geqslant -2$,

    $|u_1 + 5u_2| \leqslant 16$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 1$,
$x_1(0) - x_2(0) = 1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-4, 2]$,
$x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 24$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $5|u_1|+2|u_2| \leqslant 40$, $x_1(0) = 12$,
$x_2(0) = -3$, $2x_2(T) = x_1(T)$.

33. $\int\limits_{-2\pi}^{\pi/2} x \cos 3t\, dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 4]$, $x(-2\pi) = 1$,
$x(\frac{\pi}{2}) = 0$.

34. $\int\limits_0^{T_0} (|u_1| + u_1 + p(t)u_2)\, dt \to \min$, $|u_1| \leqslant 1$, $|u_2| \leqslant 1$.

Вариант 14

1. Показать, что оператор A является линейным, и вычислить его норму:

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1] \quad (Ax)(t) = x(0) - 3\int\limits_t^1 x(\tau)\, d\tau - 4x(1).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z, и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^3 \to R^2, \quad F(x,y,z) = (1 + x^2 e^{yz}, (x^2 - z^2)|\sin y|),\ (0,0,0),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \dot{x}^2(t) - \int\limits_0^t x^2(t)\, dt.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если

$$M = \{x \mid\ x \in C^n[0,1],\ x^{(n)}(t) = x_0^{(n)}(t) + x(t),\ x_0 \in C^n[0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} \dot{x} e^{\dot{x}}\, dt \to \text{extr}$, $x(0) = 0$, $x(T_0) = \xi$.

5. $\int\limits_1^e (x - t\dot{x}^2)\, dt \to \text{extr}$, $x(1) = 1$, $x(e) = 2$.

6. $\int\limits_0^{T_0}(16\dot{x}^2 - x^2 - 6\sin 2t)\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = 0.$

7. $\int\limits_0^1(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\,dt \to \text{extr},$

$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(1) = 1,\ x_2(1) = 3.$

8. $\int\limits_1^2 t^2\dot{x}^2\,dt - 2x(1) + x^2(2) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^T \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ T^2x(T) = 1.$

10. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt \geqslant 1,\ x(0) = 0.$

11. $\int\limits_0^\pi(\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(\pi) = 1 + \operatorname{ch}(\pi).$

12. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 1,\ \dot{x}(1) = 2.$

13. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^1 x^2\,dt \geqslant 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$

14. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \text{extr},\ x(0) = 1,\ \ddot{x} - x = u.$

15. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = \dot{x}(1) = 0.$

16. $\int\limits_0^T(x^2 - x)\,dt \to \text{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 0,\ x(T) = 0.$

17. $\int\limits_0^{5\pi/4} x\sin 2t\,dt \to \text{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \pi.$

18. $T \to \inf,\ -2 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3,\ x(0) = \dot{x}(0) = 4,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

19. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = 1,\ x(T) + \dot{x}(T) = 2,\ \dot{x}(0) = 1.$

20. $T \to \inf,\ \int\limits_0^T x\,dt = 1,\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(T) = 1.$

21. $\int\limits_0^{10} (x+u)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = x - u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ x(0) = 1.$

22. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 + u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1,$
$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt = 1,\ x(0) = 1,\ x(1) = 0.$

24. На поверхности $x^2+y^2+z^2 = 10$ найти расстояние от точки $A(1,\sqrt{8},-1)$ до точки $B(\sqrt{8},-1,1)$.

25. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0,\ x(T) = 0,\ u \in [0,1].$

26. $\int\limits_0^6 (3u - 2u^2 + 5x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -3x + 2u,\ u \in [0,1],$
$x(0) = 2,\ x(6) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-3,4],\ u_2 \in [-3,2],$
$x_1(0) = 5,\ x_2(0) = -2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{22} (-3x_1 - 2x_2 - 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4,\ x_1(22) = x_2(22) = 0,\ x_1(0) = -2.$

29. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 - u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2,\ u_1 \geqslant -3,\ u_2 \geqslant -2,$
$|6u_1 + 5u_2| \leqslant 18,\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 + u,\ |u| \leqslant 1,$
$x_1(0) - x_2(0) = -1,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (1+|u|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u,\ \ u \in [-1,1],$
$x_1(0) = 8,\ \ x_2(0) = 10,\ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = u_1,\ \ \dot{x}_2 = u_2,\ 3|u_1|+2|u_2| \leqslant 6,\ x_1(0) = 2,$
$x_2(0) = -3,\ x_2(T) = -x_1(T).$

33. $\int\limits_\pi^{4\pi} x\cos 3t\,dt \to \min,\ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2,4],\ \ x(\pi) = -1,\ \ x(4\pi) = 2.$

34. $\int\limits_0^{\pi} \sin(24tu)\,dt \to \min, \quad u \in [-0,5, 0,5]$.

Вариант 15

1. Показать, что оператор A является линейным, и вычислить его норму:

$$A\colon C[0,1] \to R^1, \quad (Ax)(t) = \int\limits_0^1 \tau x(\tau)\sin(\pi\tau)\,d\tau - x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = \left(|x|e^{|y|}, |y|e^{x}\right),$$

$$F\colon C^2[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \ddot{x}^2(t) - \int\limits_0^t \sin x(\tau)\,d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если

$$M = \{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2,\ x_1x_2 \leqslant 1\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (tx - \dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(1) = \xi$.

5. $\int\limits_0^{T_0} (25\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos 4t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi$.

6. $\int\limits_1^3 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + tx_1x_2)\,dt \to \mathrm{extr}$,
$x_1(1) = x_2(1) = 0,\ x_2(3) = 0,\ x_1(3) = 1 + \ln 3$.

7. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt + x^2(0) - 2x^2(1) \to \mathrm{extr}$.

8. $\int\limits_{\tau}^{T} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(T) = T - 5,\ x(\tau) = \tau^2$.

9. $\int\limits_0^1 (\dot{x} + x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 xe^{-t}\,dt = \frac{1-3e^{-2}}{4},\ x(0) = 0,\ x(1) = \frac{1}{e}$.

10. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt \geqslant 1,\ x(0) = x(\pi) = 0.$

11. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1,\ \dot{x}(\pi) = 0.$

12. $\int\limits_0^{T_0} \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{T_0} \ddot{x}^2\,dt = 1,$
$x(0) = 1,\ x(T_0) = 0,\ \ddot{x}(T_0) = 4.$

13. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x^2(0) \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} - x = u,$
$x(0) = 0,\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$

14. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) + x(2) = 1,\ \dot{x}(2) = 0.$

15. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(T_0) = \xi.$

16. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(T) = 0,\ x(0) = 1.$

17. $\int\limits_0^T u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = ax + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 2,\ x(T) = 0.$

18. $T \to \inf,\ -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0) = x(T) = 1,\ \dot{x}(0) = 6,\ \dot{x}(T) = 0.$

19. $\int\limits_0^T u^2\,dt + x(1) \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,$
$x(0) = -1,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$

20. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ |u_1| \leqslant 1,\ |u_2| \leqslant 1,$
$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

21. Найти расстояние от точки $A(0,1,2)$ до точки $B(1,0,10)$ на поверхности $x^2 + y^2 = 1$.

22. Задано количество массы M, которое надо распределить по кривой $y = y(x)$, соединяющей две заданные точки плоскости A, B с заданной плотностью $\sigma(x,y) = x + y$. Найти форму кривой, чтобы ее момент инерции относительно оси OY был наименьшим.

23. $\int\limits_0^1 (u_1^2 - u_2^2)\,dt \to \text{extr},\ \dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = u_1,\ \dot{x}_3 = x_4,$
$\dot{x}_4 = u_2 - a,\ x_1(0) = -1,\ x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0,$
$x_1(T) = x_2(T) = 0,\ x_3(T) = 0,\ x_4(T) = 0.$

24. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0,\ x(T) = 0,\ u \in \text{co}\{(1,1),(0,2),(-1,-1)\}.$

25. $\int\limits_0^6 (3u - 2u^2 + 5x)\,dt \to \text{extr},\ \dot{x} = -x - 2u,\ u \in [-1,1],$
$x(0) = 2,\ \ x(6) = 0.$

26. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 4,$
$x_1(0) = 3,\ x_2(0) = 4,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-5,4],\ u_2 \in [-3,2],$
$x_1(0) = 3,\ x_2(0) = -2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{27} (3x_1 - 2x_2 - 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \text{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9,\ x_1(27) = x_2(27) = 0,\ x_1(0) = -2.$

29. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 - u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2,\ u_1 \geqslant -3,\ u_2 \geqslant -5,$
$|6u_1 + u_2| \leqslant 15,\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 8,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 + u,\ |u| \leqslant 1,$
$2x_1(0) - x_2(0) = -4,\ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u,\ \ u \in [-1,1],$
$x_1(0) = 5,\ \ x_2(0) = -10,\ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1 + |u_1| + |u_2|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = u_1,\ \ \dot{x}_2 = u_2,\ |u_1| + 2|u_2| \leqslant 4,\ x_1(0) = 12,$
$x_2(0) = -3,\ x_2(T) = x_1(T).$

33. $\int\limits_\pi^{5\pi/2} x\cos 7t\,dt \to \min,\ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2,4],\ \ \ x(\pi) = 1,\ \ x(\tfrac{5\pi}{2}) = 2.$

34. $\int\limits_0^\pi (\cos tu - \sin tu)\,dt \to \min,\ u \in [-0,5,0,5].$

Вариант 16

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to R^1, \quad Ax = \int\limits_0^1 x\,dt - 2x(1/2) + x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (y\cos x, |x\cos y|, x^2 - y^2), \ (\pi,\pi),$$

$$F\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = e^{x(t)} - \left(\int\limits_0^t x^2(\tau)\,d\tau\right)^2.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке $(0,0)$:

$$M = \left\{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2, \ x_1^{2/3} \geqslant x_2^{3/2}\right\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 2xe^{2t})\,dt \to \text{extr}, \ x(0) = 1, \ x(1) = \xi.$

5. $\int\limits_{T_0}^{3\pi/4} (\dot{x}^2 - 4x^2 + 4x\cos 2t)\,dt \to \text{extr}, \ x(T_0) = 0, \ x(3\pi/4) = 0.$

6. $\int\limits_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2\,dt \to \text{extr}, \ x(0) = 0, \ x(1) = 1.$

7. $\int\limits_0^\pi (\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1\cos t + 2x_2^2)\,dt \to \text{extr}, \ x_1(0) = -1,$
$x_2(0) = x_2(\pi) = 0, \ x_1(\pi) = 1 + \pi.$

8. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt - 2\operatorname{sh} T\,x(T) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_1^2 t^2\dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \ \int\limits_1^2 tx\,dt \geqslant \frac{7}{3}, \ x(1) = 1, \ x(2) = 2.$

10. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \ \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt = 1, \ \int\limits_0^\pi x\cos t\,dt = 0, \ x(0) = 0.$

11. $\int\limits_1^e t^2\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ x(1) = e + \frac{1}{e},\ \ddot{x}(1) = 1,\ x(e) = \frac{e^2}{2}.$

12. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = x(\pi) = 0,\ \dot{x}(\pi) = 1.$

13. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} + x = u,\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$

14. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) + x(2) = 0,\ \dot{x}(0) = 0.$

15. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(T) = \xi.$

16. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ x(T) + \dot{x}(T) = 0.$

17. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 0,\ x(0) = \xi_1,\ \dot{x}(0) = \xi_2,$
$\dot{x}(T) = 0,\ x(T) = 0.$

18. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = x + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 1,\ x(T) = 0.$

19. $\int\limits_0^{T_0} x^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{T_0} u^2\,dt \geqslant 1,\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(T) = 2.$

20. $\int\limits_0^3 (x - 6u)\,dt + 2x(3) \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = 2x + u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ x(0) = \frac{1}{2}.$

21. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ 0 \leqslant u_1 \leqslant 1,\ |u_2| \leqslant 1,$
$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. Найти расстояние между точками $A(2, 2, 2)$, $B(0, 12, \sqrt{8})$ на поверхности $x^2 + z^2 = 8$.

23. Исходя из принципа Ферма — луч света из одной точки в другую проходит за минимально возможное время, — найти кривую, по которой луч света проходит из одной точки в другую, если скорость света пропорциональна расстоянию до начала координат.

24. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0,\ x(T) = 0\ u \in \mathrm{co}\left\{(2, 0), (0, 2), (-1, -1)\right\}.$

25. $\int\limits_0^{16}(u+2u^2+5x)\,dt \to \text{extr},\ \dot{x}=-x-2u,\ u\in[-1,1],$
$x(0)=-2,\ x(16)=0.$

26. $T\to\inf\ \ \dot{x}_1=-u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1^2+4u_2^2\leqslant 4,$
$x_1(0)=-3,\ x_2(0)=4,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

27. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1\in[-5,-4],\ u_2\in[-3,1],$
$x_1(0)=3,\ x_2(0)=2,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

28. $\int\limits_0^{7}(3x_1-2x_2+2u_1-u_2)\,dt+2x_2(0)\to\text{extr},\ \dot{x}_1=u_1,$
$\dot{x}_2=u_2,\ u_1^2+u_2^2\leqslant 9,\ x_1(7)=x_2(7)=0,\ x_1(0)=-2.$

29. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=x_2-u_1,\ \dot{x}_2=x_1+u_2,\ u_1\geqslant -4,\ u_2\geqslant -5,$
$|6u_1+u_2|\leqslant 18,\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=-8,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

30. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=-x_2,\ \dot{x}_2=x_1+u,\ |u|\leqslant 1,$
$x_1(0)-2x_2(0)=4,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

31. $\int\limits_0^{T}(1+|u|)\,dt\to\min,\ \ \dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=u,\ \ u\in[-1,1],$
$x_1(0)=-3,\ \ x_2(0)=12,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

32. $\int\limits_0^{T}(1+|u_1|+|u_2|)\,dt\to\min,\ \ \dot{x}_1=u_1,\ \ \dot{x}_2=u_2,\ |u_1|+|u_2|\leqslant 4,\ x_1(0)=12,$
$x_2(0)=-3,\ x_1(T)=0.$

33. $\int\limits_{\pi}^{7\pi/2} x\cos 5t\,dt\to\min,\ \dot{x}=u,\ \ u\in[-1,3],\ \ \ x(\pi)=0,\ \ x(\tfrac{7\pi}{2})=2.$

34. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2tu-\sin tu)\,dt\to\min,\ u\in[-1,1].$

Вариант 17

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1]\to R^1,\ \ Ax=\int\limits_0^{1/2} x\,dt-\int\limits_{1/2}^{1} x\,dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (xy, x^2 + y^2, |x|),$$
$$F\colon C^2[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \big(\ddot{x}^2(t) - \cos x(t)\big)^2.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке $(0,0)$:

$$M = \{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_1^3 + x_2^3 \leqslant 1\}.$$

4. $\int\limits_{2T_0}^{\pi/4} (8x \sin 2t + 4x^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \mathrm{extr},\ x(2T_0) = 0,\ x(\pi/4) = 1.$

5. $\int\limits_{-T_0}^{\pi/2} (x^2 + 2x - \dot{x}^2)\, dt \to \mathrm{extr},\ x(-T_0) = 0,\ x(\pi/2) = 0.$

6. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 t + t^2)\, dt \to \mathrm{extr},$

$x_1(0) = x_2(0) = 1,\ x_1(1) = \frac{3}{2},\ x_2(1) = 1.$

7. $\int\limits_0^{T_0} (x^2 + \dot{x}^2 - 4x \sin t)\, dt - 2x(T_0) + 2x^2(0) - x^2(T_0) \to \mathrm{extr}.$

8. $\int\limits_0^T (\dot{x}^3 + x)\, dt \to \mathrm{extr},\ T - x(T) = 1,\ x(0) = 0.$

9. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\, dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x^2\, dt \geqslant 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

10. $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{\pi} x \cos t\, dt = \frac{\pi}{2},$

$\int\limits_0^{\pi} x \sin t\, dt = -2,\ x(0) = 0.$

11. $\int\limits_1^e t\ddot{x}^2\, dt \to \mathrm{extr},\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1,\ \dot{x}(e) = 2.$

12. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot{x}^2 - x^2)\, dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = x(T_0) = 0,\ \dot{x}(T_0) = 1.$

13. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0),\ x(1) = 1.$

14. $\int\limits_0^1 (u^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} + x = u,\ x(1) = 1.$

15. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) + x(1) = 0,\ \dot{x}(0) + \dot{x}(1) = 1.$

16. $x(2) \to \mathrm{extr},\ -1 \leqslant \dot{x} \leqslant 1,\ \int\limits_0^2 \dot{x}^2\,dt = 2,\ x(0) = 0.$

17. $T \to \inf,\ -2 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,$
$\dot{x}(T) = 1,\ x(T) = 0.$

18. $T \to \inf,\ \dot{x} = x + u,\ x(0) = \xi,\ x(T) = 0.$

19. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x(1) \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

20. $T \to \inf,\ \dot{x} = u,\ \int\limits_0^T u^2\,dt \leqslant 1,\ x(T) = 2.$

21. $\int\limits_0^{10} (2u + u^2 + x)\,dt - 3x(10) \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = x + u,$
$x(0) = -1,\ |u| \leqslant 1.$

22. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 + u_1,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2,\ 0 \leqslant u_2 \leqslant 1,\ |u_1| \leqslant 1,$
$x_1(T) = x_2(T) = 0,\ x_1(0) = \xi_1,\ \dot{x}_2(0) = \xi_2.$

23. Найти расстояние между точками $A(1,0,1)$, $B(0,3,9)$ на поверхности $x^2 + y^2 - z = 0$.

24. Из начала координат плоскости XOY провести кривую OA длиной l, кончающуюся на прямой $x = h$ и образующую вместе с абциссой точки A и осью OY наибольшую площадь.

25. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0,\ x(T) = 0,\ u \in \mathrm{co}\{(2,1), (0,2), (-1,-1)\}.$

26. $\int\limits_0^9 (3u - 2u^2 - 5x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -x - 4u,\ u \in [-1, 1],$
$x(0) = -2,\ x(9) = 0.$

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 4$,
$x_1(0) = 3$, $x_2(0) = -4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-5, 4]$, $u_2 \in [-1, 3]$,
$x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

29. $\int\limits_0^{18} (3x_1 + 2x_2 - 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,
$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9$, $x_1(18) = x_2(18) = 0$, $x_1(0) = 2$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - 2u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u_2$, $u_1 \geqslant -3$, $u_2 \geqslant -4$,
$|6u_1 + u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-2, 6]$,
$x_1(0) = -2$, $x_2(0) = 7$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^{T} (1 + u_1 + |u_2|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 + 3|u_2| \leqslant 9$, $u_1 \geqslant 0$,
$x_1(0) = -8$, $x_2(0) = -2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

33. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} x\cos 9t\,dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 3]$, $x(-\pi) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 1$.

34. $\int\limits_{-1}^{1} (tu^2 - |u|)\,dt \to \min$, $u \in [-1, 2]$.

Вариант 18

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to R^1,\ Ax = \int\limits_{1/2}^{1} x\,dt + 2x(0) - x(1).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^3,\ F(x, y) = (ax^{\frac{2}{3}} + b|y|, x, y),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to R^1, \quad Fx = \int\limits_0^1 \varphi(x^2(t), \dot{x}(t))\,dt, \quad \varphi \in C^1(R^2).$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке z_0 :

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ f(x(0),x(1)) = 0,\ f \in C^1(R^2)\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - 4\dot{x}^3 x + 2t\dot{x}^4)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = x(1) = 0.$

5. $\int\limits_{-T_0}^{\pi/2} (x^2 - 8\dot{x}^2 + 6x\cos 4t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(-T_0) = 0,\ x(\pi/2) = \xi.$

6. $\int\limits_{-1}^{1} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(-1) = -1,\ x(1) = 0.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1x_2)\,dt \to \mathrm{extr},$
$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_2(\pi/2) = x_1(\pi/2) = 1.$

8. $\int\limits_0^3 4\dot{x}^2x^2\,dt + x^4(0) - 8x(3) \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\,\mathrm{sh}\,t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = \xi.$

10. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{\pi/2} x\cos t\,dt \leqslant 1,$
$x(0) = 2,\ x(\pi/2) = 4.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 e^t x\,dt = 1,\ x(0) = 0.$

12. $\int\limits_1^e t^2\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1,\ \dot{x}(e) = 2.$

13. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x}(0) = 0,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(\pi) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

15. $\int\limits_0^1 (x^2 + 2u^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = \frac{x}{\sqrt{2}} + u,\ x(0) = 1.$

16. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \mathrm{extr}$, $|\ddot{x}| \leqslant 2$, $x(0) = 0$, $x(2) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

17. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr}$, $|\dot{x}| \leqslant 1$, $x(0) = 0$, $x(T) = \xi$.

18. $T \to \inf$, $-1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 3$, $x(T) = \dot{x}(T) = 0$.

19. $T \to \inf$, $-1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(T) = 1$, $\dot{x}(0) + x(T) = 3$.

20. $T \to \inf$, $\dot{x} = 2x + u$, $|u| \leqslant 1$, $x(0) = 2$, $x(T) = 0$.

21. $\int\limits_0^3 (x_1 + x_2 + 2u)\,dt - x_2(3) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = x_2 - u$, $\dot{x}_2 = x_1$,
$-2 \leqslant u \leqslant 2$, $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$.

22. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_1 + u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $-1 \leqslant u_1 \leqslant 0$, $0 \leqslant u_2 \leqslant 1$,
$x_1(0) = \xi_1$, $x_2(0) = \xi_2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

23. Найти расстояние между точками $A(\sqrt{2}, 1, 2)$, $B(1, 0, 0)$ на поверхности $x^2 - y^2 = 1$.

24. Дан угол с вершиной в начале координат. Соединить данную точку A на одной стороне угла с данной точкой B на другой стороне угла кривой длины l так, чтобы площадь между сторонами угла и кривой была максимальной.

25. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} u$, $x(0) = x_0$,
$x(T) = 0$, $u \in \mathrm{co}\{(1, -2), (0, 2), (-1, 1)\}$.

26. $\int\limits_0^{10} (4u + 2u^2 - 5x)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = -x - 4u$, $u \in [-1, 1]$,
$x(0) = 2$, $x(10) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $2u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 24$,
$x_1(0) = 3$, $x_2(0) = -4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-5, 4]$, $u_2 \in [-1, 3]$,
$x_1(0) = -13$, $x_2(0) = -2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

29. $\int\limits_0^8 (3x_1 + 2x_2 - 2u_1 + u_2)\,dt + 3x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,
$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9$, $x_1(8) = x_2(8) = 0$, $x_1(0) = 2$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 + 2u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 - u_2$, $u_1 \geqslant -3$, $u_2 \geqslant -4$,
$|u_1 + 3u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-4, 3]$,
$x_1(0) = 6$, $x_2(0) = -1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1 + u_1 + |u_2|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 + 3|u_2| \leqslant 6$, $u_1 \geqslant 0$,
$x_1(0) = -2$, $x_2(0) = 0$, $x_1(T) = x_2(T) = 1$.

33. $\int\limits_{\pi/3}^{7\pi/2} x \cos 4t\,dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 4]$, $x(\frac{\pi}{3}) = 1$, $x(\frac{7\pi}{2}) = 0$.

34. $\int\limits_0^{2\pi} u_1^2 u_2 \sin t\,dt \to \min$, $u_1 \in [0,5,1]$, $u_2(t) \in [-1, 1]$.

Вариант 19

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon L^2[0,1] \to R^1,\ Ax = \int\limits_0^1 x \sin^2 \pi t\,dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^3 \to R^2, \quad F(x,y,z) = (a|x| - b|y| - c|z|,\ x^2 - y^2 + z^2),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to R^1, \quad F(x) = \int\limits_0^1 \varphi(t, \dot{x}(t))\,dt, \quad \varphi \in C^1(R).$$

3. Найти касательное пространство к M в точке z_0 :

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ f(x(0) + x(1)) = 0,\ f \in C^1(R)\}.$$

4. $\int\limits_0^{4/3} \frac{x}{\dot{x}^2}\,dt \to \text{extr}$, $x(0) = 1$, $x(\frac{4}{3}) = \frac{1}{9}$.

5. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 - tx)\,dt \to \text{extr}$, $x(0) = \xi$, $x(T_0) = 0$.

6. $\int\limits_{-T_0}^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - 8x^2 + 16x \sin 12t)\, dt \to \text{extr},\ x(-T_0) = 0,\ x(3\pi/2) = 1.$

7. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 4x_2)\, dt \to \text{extr},$
$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_2(1) = x_1(1) = 1.$

8. $\int\limits_1^e 2\dot{x}(t\dot{x} + x)\, dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (x^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr},\ x(0) = \xi,\ x(T) = 0.$

10. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^{\pi/2} x \sin t\, dt \leqslant 1,\ x(0) = x(\pi/2) = 2.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^1 x e^t\, dt = 2,\ x(0) = 1,\ x(1) = 0.$

12. $\int\limits_1^e t^2 \ddot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ x(1) = -1,\ x(e) = \dot{x}(1) = e.$

13. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\, dt \geqslant 4,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 1.$

15. $\int\limits_0^1 (x^2 + u^2)\, dt \to \text{extr},\ \ddot{x} + \sqrt{2}x = u,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(1) = 0.$

16. $\int\limits_0^2 x\, dt \to \text{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = \xi,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0.$

17. $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^\pi x\, dt \leqslant 1,\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 0.$

18. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 1,$
$x(T) = 1,\ \dot{x}(T) = 0.$

19. $T \to \inf,\ -4 \leqslant \ddot{x} \leqslant 0,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2,\ \dot{x}(T) = 1.$

20. $T \to \inf,\ \dot{x} = -x + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 2,\ x(T) = 0.$

21. $\int\limits_0^{10}(2x-u)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x}=-2x+u,\ -1\leqslant u\leqslant 1,$

$x(0)=1,\ x(10)=\frac{1}{2}.$

22. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=x_2+u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1\leqslant 2u_2\leqslant 4u_1,$

$u_2\leqslant 1-u_1,\ x_1(0)=\xi_1,\ x_2(0)=\xi_2,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

23. Найти расстояние от точки $A(0,2,0)$ до точки $B(0,1,\sqrt{3})$ на поверхности $y^2+z^2=4$.

24. На стороне OA угла с вершиной O дана точка A. Требуется соединить ее кратчайшей линией ACB с неизвестной точкой B на стороне угла OB при условии, что площадь $OACB$ равна S.

25. $T\to\inf,\ \dot{x}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}u,$

$x(0)=x_0,\ x(T)=0,\ u\in\mathrm{co}\{(1,0),(0,1),(-1,-1)\}.$

26. $\int\limits_0^{18}(-u+2u^2-5x)\,dt\to\mathrm{extr},\ \dot{x}=-x-2u,\ u\in[-1,1],$

$x(0)=-2,\ x(18)=0.$

27. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=-u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1^2+4u_2^2\leqslant 28,$

$x_1(0)=-3,\ x_2(0)=-4,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

28. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ u_1\in[-5,4],\ u_2\in[-1,3],$

$x_1(0)=13,\ x_2(0)=-2,\ x_1(T)=x_2(T)=1.$

29. $\int\limits_0^{7}(3x_1-2x_2+2u_1-u_2)\,dt+2x_2(0)\to\mathrm{extr},\ \dot{x}_1=u_1,$

$\dot{x}_2=u_2,\ u_1^2+u_2^2\leqslant 9,\ x_1(7)=x_2(7)=0,\ x_1(0)=-2.$

30. $T\to\inf,\ \dot{x}_1=2x_2-u_1,\ \dot{x}_2=x_1+u_2,\ u_1\geqslant -4,\ u_2\geqslant -5,$

$|6u_1+u_2|\leqslant 18,\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=-8,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

31. $\int\limits_0^{T}(1+|u|)\,dt\to\min,\ \ \dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=u,\ \ u\in[-1,1],$

$x_1(0)=-7,\ \ x_2(0)=13,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

32. $\int\limits_0^{T}(1+u_1+|u_2|)\,dt\to\min,\ \ \dot{x}_1=u_1,\ \ \dot{x}_2=u_2,\ 2u_1+|u_2|\leqslant 8,\ u_1\geqslant 0,$

$x_1(0)=6,\ x_2(0)=-4,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

33. $\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/2} x\cos 5t\,dt \to \min,\ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2, 3],\ \ x(\frac{\pi}{4}) = 0,\ x(\frac{5\pi}{2}) = 3.$

34. $\int\limits_{0}^{T_0} (u_1^2 + 2u_2 \sin t + u_1)\,dt \to \min,\ \ u_1 + u_2 \leqslant 4,\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0.$

Вариант 20

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to R^1, \quad Ax = \int\limits_{0}^{1/2} x(t)\,dt - 2\int\limits_{1/2}^{1} x(\tau)\,d\tau + x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^3 \to R^3, \quad F(x,y,z) = (x^2, -|y|, e^{-z}(x+y)),\ (1,1,0),$$
$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad F(x)(t) = \sqrt{x^2(t) + \dot{x}^2(t)}.$$

3. Найти касательное пространство к M в точке x_0 :

$$M = \left\{x \mid x \in C[0,1],\ \int\limits_{0}^{1} x^2(\tau)\,d\tau \leqslant 1\right\},\ x_0(t) = 1.$$

4. $\int\limits_{0}^{T_0} (4\dot{x}^2 - x^2 + 6x\,\mathrm{sh}\,2t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = 0.$

5. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{(1+\dot{x}^2)}}{x}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(\frac{1}{2}) = \sqrt{3},\ x(1) = 1.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi} (x^2 - 4\dot{x}^2 + 2x\sin 3t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = 1,$
$x_2(\pi/2) = -\pi/2,\ x_1(\pi/2) = \pi/2.$

8. $\int\limits_{0}^{1} e^{t+1}(\dot{x}^2 + 2x^2)\,dt + 2x(1)(x(0)+1) \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(T) = T^2.$

10. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \geqslant 1,\ x(T_0) = x(-T_0) = 0.$

11. $\int\limits_1^e t^2\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1,\ \dot{x}(e) = \frac{1}{e}.$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 1,\ x(\pi/2) = \dot{x}(\pi/2) = 0.$

13. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \leqslant 1,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 (u^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} - \sqrt{2}\dot{x} = u,\ x(0) = 1.$

15. $\int\limits_0^4 x\,dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) + x(4) = 0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(4) = 1.$

16. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = x(T_0) = 0.$

17. $T \to \inf,\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 3,\ x(T) = 1,\ \dot{x}(T) = 0.$

18. $T \to \inf,\ -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 3,\ x(T) = \xi.$

19. $T \to \inf,\ \dot{x} = -2x + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = -3,\ x(T) = 0.$

20. $\int\limits_0^5 (u^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -x - u,\ 1 \leqslant u \leqslant 10,$
$x(0) = 0,\ x(5) = -2.$

21. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 + u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_2 \leqslant u_1 + 1,$
$0 \leqslant u_2 \leqslant 1 - u_1,\ x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. На поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 2$ найти расстояние между точками $A\left(2, 1, \frac{8}{3}\sqrt{2}\right)$, $B(0, 3, 4)$.

23. Среди всех кривых заданной длины l, соединяющих прямые $x = x_0$, $x = x_1$ и образующих вместе с ними и осью OX площадь с величиной не менее S, найти ту, у которой центр тяжести этой фигуры занимает наинизшее положение.

24. $T \to \inf, \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} u,\ x(0) = x_0,$
$x(T) = 0,\ u \in \operatorname{co}\{(-1,1),(0,1),(1,3)\}.$

25. $\int\limits_0^{16} (u + 2u^2 + 5x)\,dt \to \operatorname{extr},\ \dot{x} = -3x - 2u,\ u \in [-1,2],$
$x(0) = 4,\ x(16) = 0.$

26. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = -u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 16,$
$x_1(0) = -3,\ x_2(0) = 4,\ x_1(T) = x_2(T) = 1.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-5,2],\ u_2 \in [-3,1],$
$x_1(0) = -3,\ x_2(0) = 2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{10} (3x_1 - 2x_2 + 2u_1 - 3u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \operatorname{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9,\ x_1(10) = x_2(10) = 0,\ x_1(0) = -2.$

29. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 - u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2,\ u_1 \geqslant -5,\ u_2 \geqslant -5,$
$|6u_1 + u_2| \leqslant 18,\ x_1(0) = 4,\ x_2(0) = -8,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 + 5u,\ |u| \leqslant 1,$
$2x_1(0) + 2x_2(0) = 4,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u,\ \ u \in [-1,1],$
$x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 2,\ \ x_1(T) = 3,\ \ x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^{T} (1 + u_1 + |u_2|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = u_1,\ \ \dot{x}_2 = u_2,\ 2u_1 + 3|u_2| \leqslant 12,\ u_1 \geqslant 0,$
$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 6,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

33. $\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/2} x \cos 5t\,dt \to \min,\ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2,5],\ \ x(\frac{\pi}{6}) = 1,\ \ x(\frac{5\pi}{2}) = 0.$

34. $\int\limits_0^{2\pi} u_1 u_2 \sin 2t\,dt \to \min,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4.$

Вариант 21

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:
$$A\colon C^1[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \dot{x}(t) - x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = (x\operatorname{sign} y, y),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = t\dot{x}(t) - \int\limits_0^t x^2(\tau)\,d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к M в точке x_0 :

$$M = \{x \in C^1[0,1] \mid \dot{x}(t) \leqslant 0,\ \forall t \in [0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x\operatorname{ch} t)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = x_0 > 0,\ x(T_0) = x_1 > 0.$

6. $\int\limits_0^{\pi} (x^2 - 4\dot{x}^2 + 8x\sin t)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 0,\ x(\pi) = \xi.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1\dot{x}_2)\,dt \to \operatorname{extr},\ x_1(0) = x_2(0) = -1,$
$x_2(\pi/2) = 0,\ x_1(\pi/2) = 1.$

8. $\int\limits_0^{1} e^x\dot{x}^2\,dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \to \operatorname{extr}.$

9. $\int\limits_0^{T} (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = \xi,\ x(T) + T - 1 = 0.$

10. $\int\limits_0^{T} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \operatorname{extr},\ x(0) = 1,\ x(T) = T - 1.$

11. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \operatorname{extr},\ \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \leqslant l,$
$x(-T_0) = x(T_0) = 0.$

12. $\int\limits_0^{T} u^2\,dt + x^2(T) \to \operatorname{extr},\ \ddot{x} + x = u,\ x(0) = 1.$

13. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \operatorname{extr},\ x(\pi/2) = 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ x(1) = \dot{x}(1) = 1,\ \dot{x}(0) = 0,\ \int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \geqslant 1.$

15. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} \geqslant -2,\ x(0) = 0,\ x(2) = -1,\ \dot{x}(2) = -2.$

16. $\int\limits_0^4 x\,dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = 0,\ x(4) = 1.$

17. $T \to \inf,\ -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2,$
$x(T) = 0,\ \dot{x}(T) = 1.$

18. $\int\limits_0^1 (x^2 - u^2)\,dt + x(0) \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1,\ x(1) = 0.$

19. $\int\limits_0^5 (u^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -x - u,\ 1 \leqslant u \leqslant 10,$
$x(0) = 0,\ x(5) = -2.$

20. $T \to \inf,\ \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt \leqslant 1,\ x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 0,$
$x(T) + \dot{x}(T) = 1.$

21. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 + u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_2 \leqslant u_1 + 1,$
$0 \leqslant u_2 \leqslant -u_1 + 1,\ x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. Найти расстояние между точками $A(0, 2, 2)$, $B(1, 1, \sqrt{3})$ на поверхности $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 2$.

23. Данную точку $(0, b)$ оси OY соединить с осью OX кривой, заключающей вместе с осями OX и OY фигуру данной площади S и образующей при вращении около оси OY поверхность наименьшей площади.

24. $T \to \inf, \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0,\ x(T) = 0,\ u \in \mathrm{co}\{(-1, 1), (0, 2), (2, 0)\}.$

25. $\int\limits_0^{16} (u + 2u^2 - 2x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -3x - 2u,\ u \in [-2, 2],$
$x(0) = 4,\ x(16) = 0.$

26. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = -u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 16,$
$x_1(0) = -13,\ x_2(0) = 4,\ x_1(T) = x_2(T) = 2.$

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-5, 2]$, $u_2 \in [-3, 3]$,
$x_1(0) = -3$, $x_2(0) = 12$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $\int\limits_0^{10} (3x_1 - 2x_2 - 2u_1 - 5u_2)\, dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,
$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4$, $x_1(10) = x_2(10) = 0$, $x_1(0) = -2$.

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u_2$, $u_1 \geqslant -5$, $u_2 \geqslant -2$,
$|6u_1 + u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = -6$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + 5u$, $|u| \leqslant 1$,
$2x_1(0) + x_2(0) = 14$, $x_1(T) = x_2(T) = 1$.

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-1, 1]$,
$x_1(0) = -6$, $x_2(0) = -1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^{T} (1 + u_1 + |u_2|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $2u_1 + 3|u_2| \leqslant 24$, $u_1 \geqslant 0$,
$x_1(0) = -2$, $x_2(0) = 4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

33. $\int\limits_{\pi/4}^{7\pi/6} x \cos 9t\, dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 4]$, $x(\frac{\pi}{4}) = 1$, $x(\frac{7\pi}{6}) = 2$.

34. $\int\limits_0^{2\pi} u_1 u_2 \cos 2t\, dt \to \min$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4$.

Вариант 22

1. Показать, что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0, 1] \to C[0, 1], \ (Ax)(t) = t^2 x(t) - x(0) + x(1).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x, y) = (xy, |x \cos y|),$$

$$F\colon C[0, 1] \to C[0, 1], \quad (Fx)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau + x^2(t).$$

3. Найти касательное пространство к M :

$$M = \{x \in C^2[0,1] \mid \ddot{x}(t) \leqslant f(t), \forall t \in [0,1],\ \ f \in C[0,1]\}.$$

4. $\int\limits_1^e (t\dot{x}^2 + x\dot{x})\,dt \to \mathrm{extr},\ x(1) = e,\ x(e) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{\pi/2} (x^2 - 16\dot{x}^2 + 6x\sin t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 0.$

6. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(-T_0) = x(T_0) = \xi.$

7. $\int\limits_0^1 (2x_2^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2)\,dt \to \mathrm{extr},$

$x_1(0) = x_2(1) = 1,\ x_1(1) = 0,\ x_2(0) = 2.$

8. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt + x^2(0) - x^2(\pi/2) + 4x(\pi/2) \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0) = 0,\ x(T) = -T + 1.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x^2\,dt \geqslant 1,\ x(0) = \xi.$

11. $\int\limits_0^1 x_1x_2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x_1\,dt = 1,\ \int\limits_0^1 x_2\,dt = 0,$

$x_1(0) = x_1(1) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_2(1) = 1.$

12. $\int\limits_1^e t^3\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ x(e) = \frac{3}{2},\ \dot{x}(e) = \frac{1}{2e},\ x(1) = \frac{e}{2}.$

13. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(1) = \ddot{x}(0) = \ddot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + \dot{x}(0) \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} + x = u,\ x(\pi/2) = 1,\ x(0) = 0.$

15. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\,dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = 0,\ x(2) = 8,\ \dot{x}(0) = 0.$

16. $\int\limits_0^4 x\,dt \to \text{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = \dot{x}(4) = x(4) = 0.$

17. $T \to \inf,\ \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = 1,\ x(0) + \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(T) = 1.$

18. $T \to \inf,\ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3,$
$x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ x(T) = 0,\ \dot{x}(T) = 1.$

19. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ x(T) = 3.$

20. $T \to \inf,\ \dot{x} = -2x + u,\ |u| \leqslant 1,\ x(0) = 2,\ x(T) = 0.$

21. $\int\limits_0^{10} (u + x)\,dt \to \text{extr},\ \dot{x} = -x + 2u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1,$
$x(0) = 1,\ x(10) = 0.$

22. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 + u,\ \dot{x}_2 = -x_2 + u,\ |u| \leqslant 1,$
$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ найти расстояние между точками $A(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-2, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

24. Найти кратчайшую линию, соединяющую две данные точки плоскости, при условии, что данная линия должна отстоять от точки $A(1, 2)$ на расстоянии, не меньшем заданного числа a.

25. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0,\ x(T) = 0,\ u \in \operatorname{co}\{(-1, 2), (0, 3), (2, 1)\}.$

26. $\int\limits_0^{20} (u - 2u^2 - 2x)\,dt \to \text{extr},\ \dot{x} = -3x - 2u,\ u \in [-2, 2],$
$x(0) = 4,\ x(20) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = -u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 16,$
$x_1(0) = -13,\ x_2(0) = 14,\ x_1(T) = x_2(T) = 2.$

28. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-5, 2],\ u_2 \in [-1, 3],$
$x_1(0) = 3,\ x_2(0) = -12,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

29. $\int\limits_0^{10} (3x_1 - 2x_2 + u_1 - u_2)\,dt - 2x_1(0) \to \text{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4,\ x_1(10) = x_2(10) = 0,\ x_1(0) = -2.$

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = 2x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u_2$, $u_1 \geqslant -5$, $u_2 \geqslant -2$, $|6u_1 + u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = -10$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-1, 1]$, $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = -8$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1 + u_1 + |u_2|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $2u_1 + |u_2| \leqslant 4$, $u_1 \geqslant 0$, $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

33. $\int\limits_{-\pi/6}^{7\pi/4} x \sin 5t\, dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 4]$, $x(-\frac{\pi}{6}) = 1$, $x(\frac{7\pi}{4}) = 0$.

34. $\int\limits_0^{3\pi} (u^2 - u\cos t)\, dt \to \min$, $u \in [-0,5, 0,5]$.

Вариант 23

1. Показать,что оператор A является линейным, и найти его норму:

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x(t) - \int\limits_0^1 tx(t)\, dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше:

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x, y) = (|x + y|, \sin(x^2 + y^2)),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \sin \dot{x}(t) - \int\limits_0^1 x^5(t)\, dt.$$

3. Найти касательное пространство к M в точке x_0 :

$$M = \{x \in C^1[0,1],\ \int\limits_0^1 \dot{x}^2\, dt \leqslant 1\}.$$

4. $\int\limits_1^e (t\dot{x}^2 + 2x)\, dt \to \text{extr}$, $x(1) = 4$, $x(e) = \xi$.

5. $\int\limits_0^{T_0}(\dot{x}^2-36x^2-2x\cos 2t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=0,\ x(T_0)=\xi.$

6. $\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(t_0)=x_0>0,\ x(t_1)=x_1>0.$

7. $\int\limits_0^{\pi}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+2x_1x_2)\,dt \to \mathrm{extr},$

$x_1(0)=x_2(0)=0,\ x_1(\pi)=x_2(\pi)=1.$

8. $\int\limits_0^{T}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=0,\ T^2x(T)=1.$

9. $\int\limits_0^{T}(\dot{x}^2-x^2-4x\cos t)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=0.$

10. $\int\limits_0^{1}\dot{x}_1\dot{x}_2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{1}tx_1\,dt=\int\limits_0^{1}tx_2\,dt=0,$

$x_1(1)=x_2(0)=0,\ x_2(1)=1,\ x_1(0)=-1.$

11. $\int\limits_0^{1}x\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{1}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt=\frac{\pi}{2},\ x(1)=0.$

12. $\int\limits_0^{1}(\ddot{x}^2+4x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=x(1)=0,\ \dot{x}(1)=\mathrm{sh}1.$

13. $\int\limits_0^{1}\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \int\limits_0^{1}x^2\,dt\leqslant 1,\ x(0)=\dot{x}(0)=2,\ x(1)=0.$

14. $\int\limits_0^{T}u^2\,dt+x^2(0) \to \mathrm{extr},\ \ddot{x}+x=u,\ x(T)=\xi.$

15. $\int\limits_0^{2}|\ddot{x}|\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x}\leqslant 2,\ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=-2,\ x(2)=0.$

16. $\int\limits_0^{8}x\,dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}|\leqslant 2,\ \ x(0)=\dot{x}(0)=0,$

$x(8)=\dot{x}(8)=1.$

17. $T\to\inf,\ \int\limits_0^{T}(\ddot{x}^2+x)\,dt=1,\ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=x(T)=0.$

18. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ x(T) = 0,\ \dot{x}(T) = 1.$

19. $T \to \inf,\ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ x(0) = \xi,\ \dot{x}(0) = 2,\ x(T) = 0.$

20. $\int\limits_0^{T_0} x \sin t\, dt \to \mathrm{extr},\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = -2.$

21. $\int\limits_0^{4} (2x_1 - x_2 + 3u)\, dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = x_2 + u,\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2,$
$-1 \leqslant u \leqslant 1,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1.$

22. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = x_2 + u_1,\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2,$
$|u_2| \leqslant 1,\ 0 \leqslant u_1 \leqslant 2,\ x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,$
$x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти расстояние между точками $A(0, 0, -2)$, $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

24. Пусть $\sigma(x, y) = x - y$ — плотность распределения массы вдоль кривой, соединяющей точки $A(0, 1)$, $B(2, 3)$. Найти такую кривую, для которой момент инерции относительно оси OX был бы минимальным.

25. $T \to \inf,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0,\ x(T) = 0,\ u \in \mathrm{co}\{(-1, 2), (0, 3), (2, 1)\}.$

26. $\int\limits_0^{20} (3u - u^2 - 2x)\, dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -3x - 2u,\ u \in [-2, 2],$
$x(0) = -4,\ x(20) = 0.$

27. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = -u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ 3u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 48,$
$x_1(0) = -13,\ x_2(0) = 1,\ x_1(T) = x_2(T) = 2.$

28. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 \in [-5, 2],\ u_2 \in [-1, 4],$
$x_1(0) = 8,\ x_2(0) = -12,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

29. $\int\limits_0^{12} (3x_1 + 5x_2 + u_1 - u_2)\, dt - 2x_1(0) \to \mathrm{extr},\ \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4,\ x_1(12) = x_2(12) = 0,\ x_1(0) = -2.$

30. $T \to \inf,\ \dot{x}_1 = 2x_2 - u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2,\ u_1 \geqslant -3,\ u_2 \geqslant -2,$
$|6u_1 + 5u_2| \leqslant 18,\ x_1(0) = 4,\ x_2(0) = -1,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (1+|u|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u,\ \ u \in [-6,2],$
$x_1(0) = -2,\ \ x_2(0) = 4,\ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1+u_1+|u_2|)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = u_1,\ \ \dot{x}_2 = u_2,\ u_1 + 2|u_2| \leqslant 4,\ u_1 \geqslant 0,$
$x_1(0) = 12,\ x_2(0) = 1,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

33. $\int\limits_{-\pi/4}^{7\pi/2} x \sin 3t\,dt \to \min,\ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2,1],\ \ x(-\frac{\pi}{4}) = 2,$
$x(\frac{7\pi}{2}) = 0.$

34. $\int\limits_0^{T_0} (u_1^2 + p(t)u_2 + u_1)\,dt \to \min,\ \ u_1 + 2u_2 \leqslant 3,\ \ u_1 \geqslant 0,\ \ u_2 \geqslant 0.$

Дополнительные задачи

1. Привести пример отображения, имеющего в данной точке первую вариацию, но не являющегося дифференцируемым по Гато в данной точке.

2. Привести пример отображения, дифференцируемого по Гато в данной точке, но не дифференцируемого по Фреше в данной точке.

3. Пусть M — подмножество банахова пространства $X, x_0 \in X$. Верно ли, что $T_{x_0}M$ является линейным подпространством X?

4. Пусть M — множество рациональных чисел R^1. Построить $T_0 M$.

5. Пусть X — банахово пространство, $f : X \to R^1$ — выпуклый на X функционал. Верно ли, что для любой точки x_0 существует первая вариация $\delta f(x_0, h)$ функционала f?

6. Пусть X — банахово пространство,
$f : X \to R^1$ — выпуклый на X функционал. Верно ли, что для любой точки x_0 субдифференциал $\partial f(x_0)$ является непустым множеством?

7. Пусть (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство и $f : X \to R$. Доказать, что множество всех точек строго локального экстремума функционала f не более чем счетно.

8. Пусть D — совокупность всех 2π периодических функций $f \in C^1(R)$. $\lambda > 0$ — фиксированное число. Найти глобальный минимум в следующей задаче:

$$(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sin x)^2 dx + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx) \to \min_{f \in D}.$$

9. Может ли простейшая задача вариационного исчисления
иметь два решения?

10. Сформулировать задачу о нахождении геодезической на сфере и цилиндре как простейшую задачу вариационного исчисления. Найти решения поставленных задач.

11. Сформулировать задачу о нахождении геодезической на торе как простейшую задачу вариационного исчисления. Найти решения поставленной задачи.

12. Привести пример простейшей задачи вариационного исчисления, в которой слабый локальный минимум является сильным локальным минимумом, но не является глобальным минимумом.

13. Привести пример задачи оптимального быстродействия, имеющей более одного решения.

14. Привести пример задачи оптимального управления, имеющей сильный локальный минимум, но не имеющей глобального минимума.

15. Решить задачу

$$\int\limits_0^{T_0} (1-u)\sqrt{x}\, dt \to \inf,$$

$$\dot{x} = u\sqrt{x} - ux,\ u \in [-1, 1],\ x(0) = x_0,\ x(T_0) = x_0.$$

16. Показать, что для всякого дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = \varphi(t, x, \dot{x}), \quad \varphi \in C^2(R^3)$$

можно найти функцию $f : R^3 \to R^1$ такую, что решения этого уравнения будут экстремалями функционала

$$F : C^1[t_0, t_1] \to R^1,\ F(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

17. Решить задачу

$$\frac{\int_0^1 \dot{x}^2 dt}{\int_0^1 x^2 dt} \to \min, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

18. Рассматривается задача

$$\int\limits_0^1 (1 - (\dot{x})^2)^2 dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Имеется ли в данной задаче:

а) слабый локальный экстремум;

б) сильный локальный экстремум.

19. Решить задачу

$$\int\limits_0^1 tx(t)dt \to \mathrm{extr},$$

$$x \in \{z : z \in C[0,1], z \geqslant 0, \int\limits_0^1 z(t)dt = a,\ z - \text{вогнута}\}.$$

20. Решить задачу

$$\int\limits_0^1 t^2x(t)dt \to \mathrm{extr},$$

$$x \in \{z : z \in C[0,1],\ z \geqslant 0,\ \int\limits_0^1 z(t)dt = a,\ z - \text{вогнута}\}.$$

21. Привести пример простейшей задачи вариационного исчисления, в которой имеется слабый локальный экстремум, но нет сильного локального экстремума.

22. Решить задачу

$$\frac{\int\limits_0^1 \dot{x}^2dt}{\int\limits_0^1 x^2dt} \to \min, \quad \int\limits_0^1 xdt = 0.$$

23. Пусть D — совокупность всех функций f, интегрируемых по Риману на отрезке $[0,2]$, для которых для всех целых n

$$\int\limits_0^2 f(x)e^{-2\pi inx}dx = 0.$$

Найти глобальный минимум в задаче

$$\int\limits_0^2 (f(x)+x-2)^2dx \to \min_{f\in D}.$$

24. Пусть $D \subset R^2$, $F : C^1(D) \to R^1$, $f \in C^1(R^5)$,

$$F(z) = \iint\limits_D f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dxdy.$$

Вычислить первую вариацию функционала F.

25. Пусть $F : C[t_0, t_1] \to R^1$,

$$F(x) = \max_{t \in [t_0, t_1]} g(x(t), t).$$

Исследовать функционал F на дифференцируемость по Фреше.

26. Получить необходимые условия экстремума для задачи

$$\int\limits_0^T f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = g_1(t, x(t)) + \int\limits_0^t g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau, \;\; t \in [0, T].$$

27. Получить необходимые условия экстремума для задачи

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \;\; \to \min, \quad g(t, x(t), \dot{x}(t)) = \alpha$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$.

28. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума для задачи

$$F_0 \to \min, \;\; F_i \leqslant 0, \;\; i = 1, \ldots k, F_i = 0, i = k+1, \ldots, n,$$

$$\dot{x} = \int\limits_0^t f(\tau, x(\tau) u(\tau)) d\tau, \;\; u \in U,$$

где

$$F_i = \int\limits_0^T g_i(t, x(t), u(t)) dt + l_i(x(0), x(T)).$$

29. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума для задачи

$$\max_{t\in[0,T]} g(x(t),t) \to \min,$$

$$\dot{x} = \varphi(x,u), \quad u \in U, \quad x(0) = x_0.$$

30. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума для задачи

$$F_0 \to \min, \ F_i \leqslant 0, \ i = 1, \dots k, F_i = 0, i = k+1, \dots, n,$$

$$\dot{x} = f_1(t, x(t), u(t)) + \int_0^t f_0(\tau, x(\tau) u(\tau)) d\tau, \ u \in U,$$

где F_i определены выше.

31. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума Понтрягина и уточнить структуру оптимального управления для задачи

$$F(u) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{r} |u_i(t)| dt \to \min, \quad x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u_i \in [-1, 1], \ i = 1, \dots r,$$

где A, B — заданные матрицы размерности соответственно $n \times n, n \times r$;
x_0, x_1 — заданные векторы пространства R^n,
t_0, t_1 — заданные моменты времени.

32. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума Понтрягина и уточнить структуру оптимального управления для задачи

$$\varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} (g(x,t) + (b(t), u)) dt \to \min,$$

$$\dot{x} = f(x,t) + A(t)u, \ x(t_0) = x_0, \ u \in U,$$

если t_0, t_1 — заданы и

$a)$ $U = \{u \in R^r, \ |u| \leqslant 1\}$,

$b)$ $U = \{u \in R^r, \ u_i \in [\alpha_i, \beta_i]$,

$c)$ $U = \{u \in R^r, \ \sum\limits_{i=1}^{r} u_i = 1, u_i \geqslant 0\}$.

Замечание. В предлагаемых задачах предполагается, что все входящие функции «достаточно хорошие», а именно такие, для которых выполнены требуемые выкладки и справедливы условия соответствующих теорем. x, u — вектор-функции. Следует рассматривать два варианта соответствующих задач: момент T задан и момент T не задан.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.

[2] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука,1979.

[3] *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

[4] *Ашманов С. А., Тимохов А. В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

[5] *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

[6] *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1977.

[7] *Альбрехт Э. Г., Каюмов Р. И., Соломатин А. М., Шелементьев Г. С.* Методы оптимизации: Введение в теориию решения экстремальных задач. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1993.

[8] *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[9] *Понтрягин Л. С., Гамкрелизде Р. В., Болтянский В. Г., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[10] *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961.

[11] *Коша А.* Вариационное исчисление. М.: Высш. шк., 1983.

[12] *Краснов М. Л., Макаренко Г. П., Киселев А. И.* Вариационное исчисление: Задачи и упражнения. М.: Наука, 1961.

[13] *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. М. Наука, 1950.

[14] *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2003.

[15] *Мезенцев А.В.* Сборник задач по теории оптимального управления. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

[16] *Лагоша Б.А., Лобанов С.М., Дементьев О.Н.* Методы решения задач оптимального управления. М.: Изд-во Моск.экон.-стат. ин-та, 1989.

[17] *Васильев О.В., Аргучинцев А.В.* Методы оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Физматлит, 1999.

[18] *Белоусов Е.Г.* Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.

[19] *Мину М.* Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

[20] *Ахиезер Н.И.* Вариационное исчисление. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1981.

[21] *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

[22] *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.

[23] *Лутманов С.В.* Курс лекций по методам оптимизации. Ижевск: Изд-во РХД, 2001.

[24] *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.

[25] *Буслаев В.С.* Вариационное исчисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

[26] *Лутманов С.В., Аюпов В.В., Гамилова Л.В.* Задачи оптимизации в конечномерных пространствах. Пермь. Изд-во Перм. ун-та, 2007.

[27] *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк., 1986.

[28] *Заславский И.Л.* Сборник задач по линейному программированию. М.: Наука, 1969.

[29] *Калихман И.Л.* Сборник задач по математическому программированию. М: Высш. шк., 1975.

[30] *Палий И.А.* Введение в линейное программирование. Омск: Изд-во СибАДИ., 2007.

[31] *Леонова Н. Л.* Задачи линейного программирования и методы их решения. СПб: Изд-во ВШТЭ СПбГУПТД., 2017.

[32] *Горбацевич В. В.* Современное линейное программирование. М.: Изд-во МАТИ., 1999.

[33] *Дегтярева Н. А.* Сборник задач по экономико-математическим методам и моделям. Челябинск: Цицеро, 2017.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное/научное издание

Петров Николай Никандрович
Щелчков Кирилл Александрович

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

Сборник задач

Авторская редакция

Подписано в печать НН.НН.НННН. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. НН,НН. Уч.-изд. л. НН,НН.
Тираж 50 экз. Заказ № ННН.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426004, Ижевск, Ломоносова, 4Б, каб. 021
тел./ факс: +7 (3412) 916-364 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18