

# Теория управления и математическое моделирование

ISBN 978-5-4312-1004-4



9 785431 210044



Ижевск  
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

## **ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Материалы Всероссийской конференции  
с международным участием  
«Теория управления и математическое моделирование»,  
посвященной памяти  
профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова

Ижевск, Россия  
13–17 июня 2022 г.



Ижевск  
2022

УДК 517.9 (063)

ББК 22.161.6я431+ 22.161.8я431+ 22.19я431+ 22.181я431

Т338

*Издание подготовлено при финансовой поддержке Уральского математического центра (соглашение 075-02-2022-889) и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).*

Редакционная коллегия:

А.С. Банников, Т.С. Быкова, С.Н. Попова, Л.Е. Тонков

Т338 Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022 г.). — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2022. — 400 с.

**ISBN 978-5-4312-1004-4**

В сборнике анонсируются результаты исследований по теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, общей топологии, математическому моделированию. Представлены следующие научные направления: теория устойчивости, теория управления, функционально-дифференциальные уравнения, управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, задачи оценивания и идентификации в динамических системах, обратные задачи, краевые задачи, численные алгоритмы решения задач оптимального управления, краевых задач, математическое моделирование в механике сплошной среды, математическое моделирование в механике жидкости и газа, математическое моделирование в экономике, общая топология.

УДК 517.9

ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

**ISBN 978-5-4312-1004-4**

© ФГБОУ ВО «Удмуртский  
государственный университет», 2022

# Содержание

<b>Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>12</b>
Astashova I. V. On asymptotic properties of solutions to quasi-linear differential equations . . . . .	12
Kinzebulatov D. Fractional Kolmogorov operator and desingularizing weights . . . . .	15
Maikovetsky I. I. On two-point boundary value problem for the matrix Riccati equation with parameter . . . . .	18
Naligama C. A. On the robust controllability analysis of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed systems with delay . . . . .	21
Yuldashev T. K. Impulsive differential equations with mixed maxima and redefinition vector . . . . .	25
Александрова И. В., Белов А. И. Дискретизация функционалов Ляпунова–Красовского для линейных систем с запаздыванием . . . . .	28
Баландин А. С. Об экспоненциальной устойчивости дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами . . . . .	32
Барабанов Е. А., Быков В. В. Распределение значений показателя Перрона по решениям линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами . . . . .	35
Бештокова З. В. Априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках решения нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения конвекции–диффузии . . . . .	39
Бештокова З. В. Разностные методы решения нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения параболического типа общего вида с переменными коэффициентами . . . . .	42
Бондарев А. Н. Регуляризация многоточечной краевой задачи для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий . . . . .	46

Васильев А. В., Васильев В. Б., Ходырева А. А. О сравнении решений некоторых дискретных и непрерывных краевых задач . . . . .	49
Васильев А. В., Васильев В. Б., Эберлейн Н. В. Априорные оценки решения одной краевой задачи . . . . .	52
Ветохин А. Н. О бэровской классификации локальной топологической энтропии автономных динамических систем	54
Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. О матричной форме теории обобщенных степеней Берса . . . . .	57
Жабко А. П., Александрова И. В. Аналог условия Ляпунова для однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	61
Кашпар А. И. Регуляризация задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка . . . . .	64
Клячин А. А. Оценка скорости стабилизации решений уравнения модифицированного ньютоновского гравитационного потенциала в неограниченной области . . . . .	68
Кондакова Д. Д., Куликов А. Н., Куликов Д. А. Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау . . . . .	69
Куликов Д. А. Обобщенное вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау. Устойчивость и локальные бифуркации одномодовых состояний равновесия . . . . .	72
Лаптинский В. Н. Конструктивный анализ линейной интегро-дифференциальной задачи периодического типа . . . . .	75
Макаров Е. К. Об аппроксимации показателя Изобова . . . . .	78
Маковецкая О. А. Регуляризация периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати . . . . .	82
Максимов В. П. Оператор Коши и задачи управления для функционально-дифференциальных систем . . . . .	85
Мальгина В. В. Об асимптотических свойствах функции Коши дифференциального уравнения нейтрального типа . . . . .	89
Мулюков М. В. Устойчивость простейшей непрерывно-дискретной системы . . . . .	92
Нарманов О. А. Инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности . . . . .	95

Перов А. И., Коструб И. Д. Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах . . . . .	97
Плаксина В. П., Плаксина И. М. Об особенностях применения $W$ -метода к сингулярным функционально-дифференциальным уравнениям . . . . .	100
Плаксина И. М. О применении обобщенного оператора Че-заро к исследованию разрешимости одного функционально-дифференциального уравнения . . . . .	103
Попова С. Н., Федорова М. В. О свойстве открытости спектра Ляпунова линейной дифференциальной системы .	106
Равчеев А. В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами	109
Рахимова М. А. О решениях одной переопределенной системы уравнений в частных производных на полосе . . . .	112
Роголев Д. В. Разрешимость и построение решения периодической краевой задачи для обобщенной системы матричных дифференциальных уравнений Риккати . .	114
Румянцев А. Н. О точном построении функции Коши для дифференциального уравнения с линейным запаздыванием . . . . .	118
Сабатулина Т. Л. Об экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения с комплексным коэффициентом и переменным распределённым запаздыванием .	119
Седова Н. О. Модифицированные условия Разумихина для неавтономных систем с запаздыванием и оценки сходимости решений . . . . .	121
Сергеев И. Н. Определение и свойства нелинейных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости . .	124
Сумин В. И. Вольтерровы функциональные уравнения в теории оптимизации распределенных систем . . . . .	128
Филишова О. В. Корректность задачи Коши для дифференциального уравнения с многозначными импульсными воздействиями . . . . .	132
Чудинов К. М. Об областях $D$ -разбиения пространства параметров линейных разностных уравнений . . . . .	135
Шамолин М. В. Тензорные инварианты динамических систем с конечным числом степеней свободы с диссипацией . . . . .	138

Юмагулов М. Г., Акманова С. В. О качественных характеристиках точек равновесия и циклов непрерывно-дискретных систем . . . . .	142
Юмагулов М. Г., Беликова О. Н., Худойбердиев Д. О качественном поведении решений ограниченной задачи трех тел в окрестности прямолинейной точки либрации $L_3$ . . . . .	145

**Теория управления и дифференциальные игры . 149**

Bykova T. S., Zaitsev V. A. On stabilization of bilinear control state-dependent impulsive dynamical systems . . . . .	149
Miller B. M. Generalized solutions of differential equations with Lie algebra structure . . . . .	151
Narmanov A. Ya., Abdishukurova G. M. The stability of completely controllable systems . . . . .	154
Zaitsev V. A., Kim I. G. On block eigenvalues assignment by linear state feedback for block linear control systems . . .	157
Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка группы убегающих . . . . .	159
Бортаковский А. С. Оптимальные по быстродействию траектории с неограниченной кривизной . . . . .	163
Вишнякова О. М. $C$ -гарантированное решение линейно-квадратичной многокритериальной позиционной динамической задачи при неопределенности . . . . .	167
Гомоюнов М. И., Лукоянов Н. Ю., Плаксин А. Р. Об эквивалентности минимаксных и вязкостных решений наследственных уравнений Гамильтона–Якоби . . . . .	170
Горохова И. В. Особые управления принципа максимума в задачах оптимизации систем Гурса–Дарбу . . . . .	173
Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Метод $v$ -замены времени в задачах оптимального управления . . . . .	178
Долгий Ю. Ф., Чупин И. А. Применение метода декомпозиции при построении управлений для манипуляторов . .	181
Изместьев И. В., Ухоботов В. И. Об одной задаче импульсного преследования с изменяющейся динамикой . . . .	185
Козлов А. А. Равномерная глобальная достижимость линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами . . . . .	188

Коржавина М. С. Устойчивость существования глобальных решений первой краевой задачи для управляемого полулинейного параболического уравнения . . . . .	192
Лебедев П. Д., Успенский А. А. Неподвижные точки при построении сингулярных множеств решений в задачах управления по быстродействию . . . . .	196
Лукьянов В. В. Дифференцируемость функции быстродействия линейной докритической системы на поверхностях переключения . . . . .	199
Максимов В. И. О гарантированном управлении при изменении части фазовых координат . . . . .	201
Мастерков Ю. В. О существовании магистральных процессов в задачах планирования . . . . .	205
Петров Н. Н., Можегова Е. С. Об одной задаче преследования двух убегающих во временных шкалах . . . . .	207
Плаксин А. Р. Субградиенты функционала оптимального результата в задачах оптимального управления системами нейтрального типа . . . . .	210
Родина Л. И., Черникова А. В. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели динамики популяции . . . . .	214
Самсонок О. Н. Представление BV-решений управляемого процесса выметания . . . . .	217
Серков Д. А. Пошаговое построение оптимального движения и неупреждающие мультиселекторы . . . . .	219
Субботина Н. Н., Крупенников Е. А. Об усреднении аппроксимаций решений для задачи динамической реконструкции управлений . . . . .	223
Сурков П. Г. О динамическом восстановлении входа в системе дробного порядка при измерении части фазовых координат . . . . .	226
Ушаков В. Н., Ершов А. А. Линейная интерполяция программного управления по параметру . . . . .	230
Ушаков В. Н., Ершов А. А., Ушаков А. В. Некоторые задачи наведения управляемых систем на целевые множества в евклидовых пространствах . . . . .	232
Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости существенно нелинейного волнового уравнения . . . . .	233

Шабуров А. А. Задача управления гармоническим осциллятором малой массы с дешевым управлением в среде без сопротивления . . . . .	237
Щелчков К. А. Об одной нелинейной задаче сближения с дискретным управлением . . . . .	240
<b>Общая топология . . . . .</b>	<b>242</b>
Sharipov A. S., Topvoldiyev F. F. On the properties of invariants of the surfaces isometric on sections . . . . .	242
Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. О полукольце непрерывных частичных числовых функций, рассматриваемом с расширенным сложением. II . . . . .	246
Грызлов А. А. О плотных множествах произведений . . . . .	249
Кощеева А. К. Новая константа в табличных логиках . . . . .	250
Ражабов Э. О. О геометрии орбит конформных векторных полей . . . . .	253
Шарипов А. С., Кеунимжаев М. К. Об инвариантах поверхностей, изометричных по сечениям . . . . .	255
<b>Математическое моделирование . . . . .</b>	<b>259</b>
Litvinova K. V. Transverse vibrations of viscoelastic beams of variable length, taking into account the action of damping forces . . . . .	259
Martynov S. I. Anisotropy of the magneto-thermophoretic force acting on magnetic particles in a fluid . . . . .	261
Абгарян Г. В. Об одной задаче дифракции в прямоугольной волноводной структуре . . . . .	264
Антоновская О. Г. К исследованию аperiodической устойчивости интервально неопределенных систем . . . . .	266
Анфалова А. А. Анализ и прогноз степени дифференциации населения по уровню доходов и расходов . . . . .	268
Асхатов Р. М., Кашапов Л. Н., Кашапов Н. Ф., Чебакова В. Ю. Numerical simulation of processes of electrolyte interaction with a metal electrode . . . . .	271
Баранов В. Н., Родионов В. И., Родионова А. Г. О банаховом пространстве правильных функций нескольких переменных . . . . .	275

Бастрыков Е. С. Поиск аномалий в числовых рядах на основе исторических данных . . . . .	278
Великань В. С. Параллелизация алгоритма сборки СЛАУ разрывного метода конечных элементов для двумерной краевой задачи . . . . .	279
Головастов Р. А. Методы анимирования поверхностей в 3d max . . . . .	281
Горохова В. Ф., Магазев А. А. Оценка эффективности и оптимизация систем кибербезопасности на основе стохастического моделирования . . . . .	282
Думкин Р. А., Клюкин Д. А., Хамидуллин Р. Р. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния ствола артиллерийского орудия методом конечных элементов в пространственной осесимметричной постановке . . . . .	285
Калинин А. В., Тюхтина А. А. Неклассические задачи математической физики в теории квазистационарных электромагнитных процессов . . . . .	288
Караваев А. С., Копысов С. П. Метод композиции решения контактной задачи с трением деформируемых тел . . . . .	291
Кашапов Л. Н. Нестационарное моделирование процесса плазменно-электролитной полировки нержавеющей стали 17-4 PH . . . . .	294
Клюкин Д. А. Исследование напряженно-деформированного состояния и колебаний ствола автоматической пушки при стрельбе очередями . . . . .	297
Каюмов Ш., Марданов А. П., Хаитов Т. О., Каюмов А. Б. Построение двумерной математической модели и вычислительных алгоритмов задач фильтрации структурированных флюидов в двухслойном пласте . . . . .	301
Кокурин М. М., Семёнова А. В., Абду Рауф Ч. М. Задача восстановления коэффициентов SEIR-подобной эпидемиологической модели с учётом различного вида погрешностей в эпидемиологической статистике . . . . .	306
Кочурова И. Д. Алгоритм решения задачи оптимизации конструкции заряда с целью повышения дульной скорости снаряда . . . . .	310

Краснопёров И. Н. Оценивание параметров нелинейных регрессионных моделей, описывающих динамику ударной волны . . . . .	313
Култышев С. Ю. О построении простой математической модели реального нейрона . . . . .	316
Липанов А. М., Русяк И. Г., Тененев В. А., Суфиянов В. Г., Королев С. А. Результаты численного моделирования внутренней и внешней баллистики артиллерийского выстрела с применением визуальных технологий . . . .	319
Литвинова К. В. Исследование продольных колебаний бесконечного неоднородного тонкого стержня при помощи метода Римана . . . . .	322
Майков Д. В. Моделирование метаногенеза для случая последовательной переработки субстрата в метантенках с различной температурной средой . . . . .	326
Мансуров Р. Р. Оптимизация внутри- и внешнебаллистических параметров активно-реактивного снаряда с целью повышения дальности стрельбы . . . . .	329
Мартыненко С. И. Вычислительные технологии для численного решения задач механики сплошных сред . . . . .	332
Недожогин Н. С., Копысов С. П. Алгоритмическая и программная реализация итерационного решения СЛАУ при совместных вычислениях на CPU и GPU . . . . .	336
Павлов А. В. Построение оптимальной разделяющей гиперплоскости для линейного классификатора . . . . .	340
Переварюха А. Ю. Моделирование инвазивных популяционных процессов с осцилляциями . . . . .	342
Перевозицкова Д. А. Анализ и моделирование количественных показателей общеобразовательных организаций Удмуртской Республики с учетом демографической динамики . . . . .	346
Поторочин М. Д. Математическое моделирование процессов внутренней баллистики с учетом флегматизатора и теплообмена . . . . .	349
Русаков С. В. Модель речного стока, основанная на гидрологических данных . . . . .	352
Русских В. Н. Моделирование движения управляемого барражирующего боеприпаса . . . . .	356

Селезнева А. В., Копысов С. П. Автоматизация конечно-элементных вычислений при решении прикладных задач	359
Селезнёва А. С. Применение методов цифровизации для изучения демографических характеристик населения	363
Сидорова А. А., Тонков Л. Е. Об одном алгоритме связывания в сопряженной задаче о движении твердого тела в несжимаемой жидкости	366
Сметанин Ю. М. Решение задачи SAT посредством операций пересечения и дополнения конститuentных множеств	368
Сметанин Ю. М., Сметанина Л. П., Латыпова Д. М. Автоматизация решения логических задач	372
Тахиров Ж. О., Боборахимова М. И. О популяционной динамике в речной экологии	376
Тененев В. А., Шаура А. С. Балансировка обратного маятника на омниколесной платформе	378
Тукмачёв Н. А. Разработка интеллектуальной экспертной системы оценки достоверности измерений при наличии повторных измерений	382
Тюхтина А. А. Задачи о создании электромагнитных полей заданной конфигурации в рамках квазистационарных приближений для системы уравнений Максвелла	385
Хазияхметов Р. Т. Анализ эффективности методов преобуславливания	387
Шишкин В. А. Математическое моделирование стратифицированных систем	390
Шурмина М. С. Разработка информационно-аналитической системы классификации временных рядов нейронными сетями глубокого обучения	393

---

---

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ**

**On asymptotic properties of solutions to  
quasi-linear differential equations**

**I. V. Astashova**

*Moscow, Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Plekhanov Russian University of Economics  
e-mail: ast.diffiety@gmail.com*

Consider the equation

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^{(j)} = p(x)|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad (1)$$

where  $k > 1$ ,  $n \geq 2$ , the functions  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , and  $p$  are continuous for  $x \geq 0$ . In [5, Ch.1] uniform estimates for solution to (1) with the same domain are presented. In [3] an oscillation criterion for equation (1) is proved. In order to obtain these results, the linear operator producing the left-hand side of (1) is represented in a quasi-derivative form with the coefficients satisfying some special conditions. With the help of the same method, some qualitative and asymptotic properties of solutions to equation (1) are proved in this paper.

**Theorem 1** (see [4]). *Under the conditions*

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-j-1} |a_j(x)| dx < \infty, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\text{and } \int_0^{\infty} x^{(n-1)(k+1)} |p(x)| dx < \infty,$$

for any  $C_1, \dots, C_{n-1}$  there exists a solution  $y$  to equation (1) such that

$$u(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j \xi_j(x) + o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

where the functions  $\xi_j$  form a fundamental system of solutions to equation (1) with  $p \equiv 0$  and satisfy

$$\xi_j = \frac{x^j}{j!} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty.$$

**Theorem 2.** *If continuous functions  $a_0, \dots, a_{n-1}$  satisfy (2) and a continuous function  $p$  satisfies, for some integer  $m \in \{0, \dots, n-1\}$ , the condition*

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-1+(k-1)m} |p(x)| dx < \infty, \quad (3)$$

then for any  $C \neq 0$  there exists a solution  $y$  to (1) satisfying, as  $x \rightarrow \infty$ ,

$$y^{(j)}(x) \sim \frac{C m! x^{m-j}}{(m-j)!},$$

for all  $j \in \{0, \dots, m\}$ , and, for all  $j \in \{m+1, \dots, n-1\}$ ,

$$y^{(j)}(x) = o(x^{m-j}) \quad \text{and} \quad \int_0^{\infty} s^{j-m-1} |y^{(j)}(s)| ds < \infty.$$

In [6] the problem of asymptotic equivalence of equations

$$y^{(n)} + p(x) |y|^k \operatorname{sgn} y = f(x), \quad (4)$$

$$z^{(n)} + p(x) |z|^k \operatorname{sgn} z = 0 \quad (5)$$

with  $n \geq 2$ ,  $k > 1$ , and continuous functions  $p$  and  $f$  is studied. In particular, the following result is proved.

**Theorem 3.** *Suppose the function  $f(x)$  in equation (4) satisfies the condition*

$$|f(x)| \leq C e^{-\beta x}, \quad C > 0, \quad \beta > 0, \quad (6)$$

*and  $p(x)$  is a bounded continuous function. Then for any solution  $y$  to equation (4) tending to zero as  $x \rightarrow \infty$ , there exists a unique solution  $z$  to equation (5) such that*

$$|y(x) - z(x)| = O(e^{-\beta x}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (7)$$

*and vice versa, for any solution  $z$  to equation (5) tending to zero as  $x \rightarrow \infty$ , there exists a unique solution  $y$  to equation (4) such that condition (7) holds.*

Consider an example obtained by the same method as in [7].

**Proposition.** *For any  $n \geq 12$  there exists  $k > 1$  such that the equation*

$$y^{(n)} + (-1)^{n-1} |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n \geq 2, \quad k > 1,$$

*has a solution  $y$  satisfying, for all  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,*

$$y^{(j)}(x) = (x - x_0)^{-\alpha-j} h_j(\log(x - x_0)), \quad \alpha = \frac{n}{k-1},$$

*with periodic positive non-constant functions  $h_j$  and an arbitrary real  $x_0$ .*

**Corollary.** *If  $n \geq 12$  and the function  $f(x)$  satisfies (6), then there exist  $k > 1$  and a solution  $y$  to the equation*

$$y^{(n)} + (-1)^{n-1} |y(x)|^k \operatorname{sgn} y = f(x),$$

*satisfying the condition*

$$|y(x) - (x - x_0)^{-\alpha} h(\log(x - x_0))| = O(e^{-\beta x}), \quad x \rightarrow \infty,$$

*with periodic positive non-constant functions  $h$  defined on  $\mathbb{R}$ .*

**Remark.** In Theorem 1, a stronger result is obtained that in [1] for the case  $a_0, \dots, a_{n-1} = 0$ , but under a stronger constraint on  $p$ . Part of the results of Theorem 2 can be obtained from [2, Corollary 8.2] as a special case of results obtained by quite different methods for a more general equation.

The work is supported by Russian Science Foundation, project No. 20-11-20272, <https://rscf.ru/project/20-11-20272/>.

1. *Kiguradze I.T.* On the oscillation of solutions to the equation  $d^m/dt^m + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$  // Sb. Math. 1964. Vol. 65, no. 2, pp. 172–187.
2. *Kiguradze I.T., Chanturia T.A.* Asymptotic properties of solutions to nonautonomous ordinary differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993.
3. *Astashova I.V.* On existence of non-oscillatory solutions to quasi-linear differential equations // Georgian Math. J. 2007. Vol. 14, pp. 223–238.
4. *Astashova I.V.* On the asymptotic behavior at the infinity of solutions to quasi-linear differential equations // Math. Bohem. 2010, no. 135, pp. 373–382.
5. *Astashova I.V.* Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations // In: I. V. Astashova (ed.), *Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition*. Moscow: UNITY-DANA. 2012, pp. 22–290. (in Russian)
6. *Astashova I.* On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. Vol. 63, pp. 31–38.
7. *Astashova I.V., Vasilev M.Y.* On nonpower-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type higher-order differential equations // Differential and Difference Equations with Applications. S. Pinelas et al. (eds.). 2020. Vol. 333 of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer Cham, pp. 361–372.

## Fractional Kolmogorov operator and desingularizing weights

**D. Kinzebulatov**

*Québec, Université Laval*

e-mail: damir.kinzebulatov@mat.ulaval.ca

The subject of this talk is the fractional Kolmogorov operator

$$\Lambda = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} + b \cdot \nabla, \quad 1 < \alpha < 2$$

with singular vector field  $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , called a drift. This operator plays a fundamental role in probability theory where it arises as the

generator of symmetric  $\alpha$ -stable process with a drift. In contrast to diffusion processes,  $\alpha$ -stable process has long range interactions.

The fractional Kolmogorov operator has been the subject of intensive study over the past few decades. There is now a well developed theory of this operator with the vector field  $b$  belonging to the corresponding Kato class which contains the vector fields  $b$  with  $|b| \in L^p$ ,  $p > \frac{d}{\alpha-1}$ , and provides the standard two-sided bound on the heat kernel  $e^{-t\Lambda}(x, y)$  in terms of the heat kernel  $e^{-t(-\Delta)^{\alpha/2}}(x, y)$  of the unperturbed operator  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$  [1].

(Note that the value  $p = \frac{d}{\alpha-1}$  is optimal on the scale of  $L^p$  spaces.)

In this talk we consider the fractional Kolmogorov operator with a drift that is so singular that it drastically changes the behaviour of the heat kernel. In particular, it makes the standard lower bound invalid, and renders the standard upper bound off the mark.

**Theorem.** *Let  $d \geq 3$ , and*

$$b(x) = -\kappa|x|^{-\alpha}x, \quad \kappa > 0. \quad (1)$$

*Then*

$$e^{-t\Lambda}(x, y) \approx e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}(x, y)\psi_t(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0,$$

*where the continuous weight  $0 \leq \psi_t(y) \leq 2$  vanishes at  $y = 0$  as  $|y|^\beta$ ,  $\beta > 0$ . The order of vanishing  $\beta$  ( $< \alpha$ ) depends explicitly on the value of the multiple  $\kappa > 0$  and tends to  $\alpha$  as  $\kappa \uparrow \infty$ .*

(Notation  $a(z) \approx b(z)$  means that  $c^{-1}b(z) \leq a(z) \leq cb(z)$  for some constant  $c > 1$  and all admissible  $z$ .)

Note that the “repelling” Hardy-type drift (1) is “almost” in  $L^{\frac{d}{\alpha-1}}$ .

The order of vanishing  $\beta$  is defined by

$$\beta \frac{d + \beta - 2}{d + \beta - \alpha} \frac{\gamma(d + \beta - 2)}{\gamma(d + \beta - \alpha)} = \kappa,$$

where

$$\gamma(\alpha) := \frac{2^\alpha \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} - \frac{\alpha}{2})}.$$

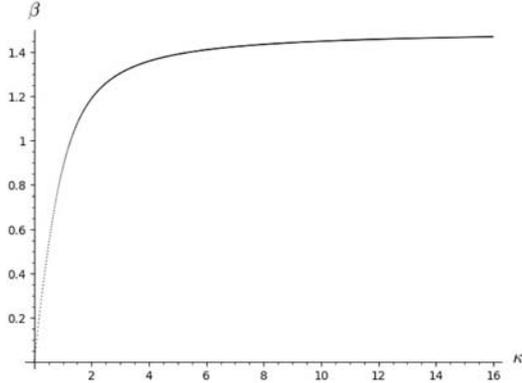


Figure 1: The function  $\kappa \mapsto \beta$  for  $d = 3$  and  $\alpha = \frac{3}{2}$ .

Direct calculations show that  $\beta \in ]0, \alpha[$  exists, and that  $|x|^\beta$  is a Lyapunov's function of the formal adjoint operator  $\Lambda^* = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} - \nabla \cdot b$ , i.e.  $\Lambda^*|x|^\beta = 0$ .

The key step in proving the theorem is the weighted Nash initial estimate

$$0 \leq e^{-t\Lambda}(x, y) \leq Ct^{-\frac{d}{\alpha}}\psi_t(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0.$$

Its proof uses the method of desingularizing weights based on ideas set forth by J. Nash [5]: it depends on the “desingularizing”  $(L^1, L^1)$  bound on the weighted semigroup  $\psi_t e^{-t\Lambda} \psi_t^{-1}$ .

It should be added the construction of the heat kernel in this context is non-trivial since the standard perturbation-theoretic methods are unavailable. We will need a vector-valued analogue of Stroock-Varopoulos inequalities in order to control the gradient of solution to the corresponding parabolic equation.

We will also discuss the supercritical case  $0 < \alpha \leq 1$  where  $b \cdot \nabla$  can no longer be considered as a perturbation of  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ .

The results of this talk is an ongoing collaboration with K.R. Madou (Laval), Yu.A. Semënov (Toronto) and K. Szczypkowski (Wrocław) [2, 3, 4].

1. *Bogdan K., Jakubowski T.* Estimates of heat kernel of fractional Laplacian perturbed by gradient operators // *Comm. Math. Phys.* 2007. Vol. 271, pp. 179–198.
2. *Kinzebulatov D., Madou K.R., Semënov Yu.A.* On the supercritical fractional diffusion equation with Hardy-type drift // Preprint, arXiv: 2112.06329.
3. *Kinzebulatov D., Semënov Yu.A.* Fractional Kolmogorov operator and desingularizing weights // *Publ. RIMS Kyoto*, to appear (arXiv: 2005.11199).
4. *Kinzebulatov D., Semënov Yu.A., Szczypkowski K.* Heat kernel of fractional Laplacian with Hardy drift via desingularizing weights // *J. London Math. Soc.*, to appear (arXiv: 1904.07363).
5. *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // *Amer. Math. J.* 1958. Vol. 80, pp. 931–954.

## On two-point boundary value problem for the matrix Riccati equation with parameter

**I. I. Makovetsky**

*Mogilev, Belarusin-Russian University*

e-mail: imi.makzi@gmail.com

Consider a Riccati equation of the following form:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda(A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t)) \equiv G(t, X, \lambda), \quad (1)$$

where  $A, B, Q, F \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $I = [0, \omega]$ ,  $\omega > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

We study a two-point boundary-value problem for (1) in case of

$$MX(0, \lambda) + NX(\omega, \lambda) = 0, \quad (2)$$

where  $M$  and  $N$  are real  $n \times n$  matrices.

Equation (1) is prominent in the differential equation theory and its applications [1–9]. Similar problems were considered with the aid of qualitative methods in [1, 4–7] and on the basis of constructive methods in [3, 8–11].

The present work is a continuation of [10] and deals with a constructive analysis of problem (1), (2) on the basis of the method presented in [3, ch. 1].

We studied the issues of convergence, the rate of convergence of the algorithm (4).

We introduce the notations:

$$D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \quad \alpha = \max_{t \in I} \|A(t)\|, \quad \beta = \max_{t \in I} \|B(t)\|,$$

$$h = \max_{t \in I} \|F(t)\|, \quad \delta = \max_{t \in I} \|Q(t)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \mu = \max(\|M\|, \|N\|),$$

$$\gamma = \|(M + N)^{-1}\|, \quad \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_{t \in I} \|X(t, \lambda)\|,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho}{a_0\rho^2 + a_1\rho + a_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2a_0\rho + a_1}, \quad \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

$$a_0 = \gamma\mu\delta\omega, \quad a_1 = \gamma\mu(\alpha + \beta)\omega, \quad a_2 = \gamma\mu\omega h, \quad q = \varepsilon(2a_0\rho + a_1),$$

where  $\rho > 0$ ,  $\|X\|_{\mathbb{C}}$  is the norm in finite-dimensional Banach algebra  $\mathcal{B}(n)$  of continuous  $n \times n$  matrices-functions;  $\|\cdot\|$  is the corresponding norm of matrixes, for example, any of norms given in [11, p. 21].

The problem (1), (2) is equivalent to the matrix integral equation

$$\begin{aligned} X(t, \lambda) &= (M + N)^{-1} \times \\ &\times \left\{ M \int_0^t G(\tau, X(\tau, \lambda), \lambda) d\tau - N \int_t^\omega G(\tau, X(\tau, \lambda), \lambda) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

**Theorem.** *Let  $\det(M + N) \neq 0$ . Then for  $|\lambda| < \varepsilon_0$  the solution of problem (1), (2) exists in the region  $D_\rho$ , it is unique and can be presented as a uniform limit of a sequence of matrix functions determined by the recurrent integrated relationship*

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t, \lambda) &= (M + N)^{-1} \left\{ M \int_0^t G(\tau, X_k(\tau, \lambda), \lambda) d\tau - \right. \\ &\left. - N \int_t^\omega G(\tau, X_k(\tau, \lambda), \lambda) d\tau \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

where  $X_0(t, \lambda)$  is arbitrary  $\mathbb{C}(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ -class matrix, which belongs to the sphere  $\|X_0\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ . Herewith the matrix functions  $X_m(t, \lambda)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) it also satisfy to condition (2).

By using induction for  $k$ , one can show readily that members of sequence  $\{X_k(t, \lambda)\}_0^\infty$ , belong to the sphere  $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ . The sequence converges uniformly to the solution of (3).

Also received estimates

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q^k}{1 - q} \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

We have from (5) for  $k = 0, X_0 = 0$

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{\|X_1\|_{\mathbb{C}}}{1 - q}. \quad (6)$$

From (4) for  $X_0 = 0$  we obtain an estimate for  $X_1$ :

$$\|X_1\|_{\mathbb{C}} \leq \gamma\mu\omega\varepsilon h. \quad (7)$$

Using (7) and (6) we have

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{\gamma\mu\omega\varepsilon h}{1 - q}.$$

**Remark.** The conditions for the unique solvability of problem (1),(2) are expressed in terms of its initial data. Algorithm (4) contains simple computational operations and is therefore convenient for possible applications. The corresponding estimates are obtained in terms of the problem.

1. *Erugin N.P.* Reading Book on the General Course of Differential Equations. Minsk: Nauka and Technica, 1979.
2. *Zubov V.I.* Lectures on the Control Theory, Moscow: Nauka, 1975.
3. *Laptinsky V.N.* Constructive Analysis of Controlled Oscillating Systems, Minsk: Institute of Mathematics, NAS of Belarus, 1998.
4. *Larin V.B.* Control of Walking Apparatuses, Kiev: Naukova Dumka, 1980.

5. *Paraev Yu.I.* Lyapunov and Riccati Equations. Tomsk: State University, 1989.
6. *Roytenberg Ia.N.* Automatic Control. Moscow: Nauka, 1978.
7. *Samoilenko A.M., Laptinsky V.N., Kenjebaev K.K.* Constructive Research Approaches of Periodic and Multipoint Boundary Value Problems, Kiev: Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, 1999.
8. *Laptinsky V.N., Makovetsky I.I., Pugin V.V.* Matrix differential equations of Lyapunov and Riccati, Mogilev: BRU, 2012.
9. *Egorov A.I.* Riccati equations. Minsk: Solon-Press. 2017.
10. *Laptinsky V.N., Makovetsky I.I.* On the two-point boundary-value problem for the Riccati matrix differential equation // Central European Journal of Mathematics. 2005. Vol. 3, pp. 143–154.
11. *Laptinsky V.N., Makovetsky I.I.* On Solvability of the Two-Point Boundary-Value Problem for the Nonlinear Lyapunov Equation // Herald of the Mogilev State University. 2003. No. 2-3 (15), pp. 176–181.
12. *Demidovich B.P.* Lectures on the Mathematical Theory of Stability. Moscow: Nauka, 1967.

## On the robust controllability analysis of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed systems with delay

**C. A. Naligama**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus*

e-mail: naligama\_ch\_19@student.grsu.by

Let  $p \triangleq \frac{d}{dt}$  be a differential operator,  $h = \text{const} > 0$ ,  $e^{-ph}$  be a delay operator:  $e^{-ph}v(t) = v(t - h)$ ,  $e^{-jph}v(t) = v(t - jh)$ . The following Three-time-scale Singularly Perturbed Linear Time-invariant System with Multiple Commensurate Delays in the slow state vari-

ables (TSPLTISD) is considered in the matrix-operator form:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}(e^{-ph})}{A_{21}(e^{-ph})} & A_{12} & A_{13} \\ \frac{\varepsilon_1}{A_{31}(e^{-ph})} & \frac{A_{22}}{\varepsilon_1} & \frac{A_{23}}{\varepsilon_1} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2} & \frac{A_{32}}{\varepsilon_2} & \frac{A_{33}}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\varepsilon_1} \\ \frac{B_3}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} u(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

where  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_3}$ , with initial conditions:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0). \quad (2)$$

Here  $A_{i1}(e^{-ph}) \triangleq \sum_{j=0}^l A_{i1j} e^{-jph}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , are matrix operators;

$A_{i1j}$ ,  $j = \overline{0, l}$ ,  $A_{i2}$ ,  $A_{i3}$ ,  $B_i$ ,  $i = \overline{1, 2, 3}$ , are constant matrices of appropriate dimensions;  $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$ ;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  are the slow, fast and fastest variables, respectively;  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_3}$ ,  $\varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0)$  is a piecewise continuous  $n_1$ -vector function;  $u \in U$ ,  $U$  is a set of piecewise continuous  $r$ -vector functions for  $t \geq 0$ .

**Definition 1.** For a given  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ , TSPLTISD (1), (2) is considered to be *completely controllable* if for any fixed initial conditions of the TSPLTISD (1) there exist a moment  $t_1 < +\infty$ ,  $t_1 > (n_1 + n_2 + n_3)h$ , and a piecewise continuous control  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , such that for this control and corresponding solution  $(x(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2), y(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2), z(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2))$ ,  $t \geq 0$ , of the system (1) following identities are valid:  $(x(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2), y(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2), z(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)) \equiv 0$ ,  $u(t) \equiv 0$ ,  $t \geq t_1$ .

If there exists numbers,  $\varepsilon_1^* > 0, \varepsilon_2^* > 0$ , for which TSPLTISD (1) is completely controllable for any  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$  and  $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$ , it is said that the complete controllability is *robust with respect to the parameters*  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

By the matrix parameters of (1)  $A(\varepsilon, e^{-\lambda h})$ ,  $B(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , let us define

$$N(\varepsilon, \lambda, e^{-\lambda h}) \triangleq \left[ \lambda I_{n_1+n_2+n_3} - A(\varepsilon, e^{-\lambda h}), B(\varepsilon) \right] = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$P(\varepsilon, z) \triangleq \left[ B(\varepsilon), A(\varepsilon, z)B(\varepsilon), \dots, A^{n-1}(\varepsilon, z)B(\varepsilon) \right],$$

where  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n = n_1 + n_2 + n_3$ . Let  $\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  be the spectrum of (1).

**Theorem 1.** For fixed  $\varepsilon_1 > 0$  and  $\varepsilon_2 > 0$  system (1) is completely controllable if and only if:

- 1) there exist  $z \in \mathbb{C}$  such that  $\text{rank } P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) = n_1 + n_2 + n_3$ ,
- 2)  $\text{rank } N(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, z) = n_1 + n_2 + n_3 \forall \lambda : e^{-\lambda h} = z$  and for  $z$  not satisfying 1).

For  $\det A_{33} \neq 0$  and  $\det[A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}] \neq 0$ , as discussed in [1], TSPLTISD (1) can be decomposed into the following  $n_1$ -dimensional degenerate system with delay (slow subsystem, DS), the  $n_2$ -dimensional  $\varepsilon_1$ -Boundary Layer System ( $\varepsilon_1$ -BLS) without delay and the  $n_3$ -dimensional  $\varepsilon_2$ -Boundary Layer System ( $\varepsilon_2$ -BLS) without delay:

$$\dot{x}_s(t) = A_s \left( e^{-ph} \right) x(t) + B_s u(t), \quad x_s \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\frac{d\hat{y}(\tau_{\varepsilon_1})}{d\tau_{\varepsilon_1}} = A_{f_{\varepsilon_1}} \hat{y}(\tau_{\varepsilon_1}) + B_{f_{\varepsilon_1}} u_{f_{\varepsilon_1}}(\tau_{\varepsilon_1}), \quad \hat{y} \in \mathbb{R}^{n_2}, \tau_{\varepsilon_1} = \frac{t}{\varepsilon_1},$$

$$\frac{d\hat{z}(\tau_{\varepsilon_2})}{d\tau_{\varepsilon_2}} = A_{f_{\varepsilon_2}} \hat{z}(\tau_{\varepsilon_2}) + B_{f_{\varepsilon_2}} u_{f_{\varepsilon_2}}(\tau_{\varepsilon_2}); \quad \hat{z} \in \mathbb{R}^{n_3}, \tau_{\varepsilon_2} = \frac{t}{\varepsilon_2}.$$

Definitions and conditions for complete the controllability of the DS,  $\varepsilon_1$ -BLS,  $\varepsilon_2$ -BLS are obtained similar to [2].

**Theorem 2.** The DS of (1) is completely controllable if and only if

- 1) there exists  $z \in \mathbb{C}$  such that  $\text{rank } P_s(z) = \text{rank} [B_s, A_s(z)B_s, \dots, A_s^{n-1}(z)B_s] = n_1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n = n_1$ .

- 2)  $\text{rank } N_s(\lambda, z) = [\lambda I_{n_1} - A_s(z), B_s] = n_1 \forall \lambda : e^{-\lambda h} = z$  and for  $z$  not satisfying 1).

**Theorem 3.** The  $\varepsilon_1$ -BLS of the system (1) is completely controllable if and only if

$$\text{rank } P_{f_{\varepsilon_1}} = \text{rank} [B_{f_{\varepsilon_1}}, A_{f_{\varepsilon_1}} B_{f_{\varepsilon_1}}, \dots, A_{f_{\varepsilon_1}}^{n-1} B_{f_{\varepsilon_1}}] = n_2, \quad n = n_2.$$

**Theorem 4.** The  $\varepsilon_2$ -BLS of the system (1) is completely controllable if and only if

$$\text{rank } P_{f_{\varepsilon_2}} = \text{rank} [B_{f_{\varepsilon_2}}, A_{f_{\varepsilon_2}} B_{f_{\varepsilon_2}}, \dots, A_{f_{\varepsilon_2}}^{n-1} B_{f_{\varepsilon_2}}] = n_3, \quad n = n_3.$$

**Theorem 5.** *Let the DS of the TSPLTISD (1) be completely controllable, i.e. conditions of Theorem 2 are satisfied, the  $\varepsilon_1$ -Boundary layer system of the TSPLTISD (1) be completely controllable, i.e. the condition of the Theorem 3 is satisfied and the  $\varepsilon_2$ -Boundary layer system of the TSPLTISD (1) be completely controllable, i.e. the condition of the Theorem 4 is satisfied. Then, there exist  $\varepsilon_1^* \in (0, \varepsilon_1^0]$  and  $\varepsilon_2^* \in (0, \varepsilon_2^0]$  such that the TSPLTISD (1) is completely controllable for all  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$  and  $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$ , i.e. the complete controllability is robust with respect to the small parameters  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .*

**Sketch of Proof.** For sufficiently small parameters  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , TSPLTISD (1) can be decomposed into the exact slow, fast and fastest subsystems by the appropriate nonsingular transformation [1, 3], without compromising the qualitative behaviours of the solutions of the original system. As per the results of the Theorem 2 of [3] it can be deduced that for  $\det A_{33} \neq 0$ ,  $\det[A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}] \neq 0$ , and  $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll \mu = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ll 1$ , and for sufficiently small  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ , the decoupled exact subsystems are  $O(\mu)$  close to the DS,  $\varepsilon_1$ -BLS,  $\varepsilon_2$ -BLS of the system (1). Thus, it is substantiated that the degenerate system and the boundary layer systems represent asymptotic decomposition of the original TSPLTISD (1).

Further, the proof is carried out similarly to the proof of Theorem 9 [2] and uses the decomposition of the spectrum of the TSPLTISD (1) [4], the invariance of the spectrum with respect to a nondegenerate transformation, Theorems 2–4, and the preservation of the fullness of the rank of the matrix under nondegenerate transformations and small additive perturbations.

1. *Naligama C.A., Tsekhan O.B.* Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegenerate transformation // Vesnik GrDU Imja Janki Kupaly. Ser. 2 Matjematyka. 2021. Pp. 27–36.
2. *Tsekhan O.B.* Complete Controllability Conditions for Linear Singularly Perturbed Time-Invariant Systems with Multiple Delays via Chang-Type Transformation // Axioms. 2019. 8(2):71. <https://doi.org/10.3390/axioms8020071>.
3. *Naligama C.A., Tsekhan O.B.* Asymptotic approximations of a decoupling transformation for three-time scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay // Vesnik GrDU Imja Janki Kupaly. Ser. 2 Matjematyka. 2022. Pp. 25–36.

4. *Naligama C.A.* On the spectrum decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed systems with state delays // XIII Belarusian Mathematical Conference: Proceedings of the International Scientific Conference, Minsk, November 22–25, 2021: in 2 parts. Minsk: Belarusian Science, 2021. Part 1. Pp. 55–56.

## Impulsive differential equations with mixed maxima and redefinition vector

T. K. Yuldashev

*Tashkent, National University of Uzbekistan*

e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

**Abstract.** *A nonlocal inverse boundary value problem for a first order impulsive system of ordinary differential equations with nonlinear mixed maxima and redefinition vector is investigated. The boundary value problem is given by the integral condition and is studied by nonlinear impulsive condition and additional condition. The existence and uniqueness of solution of the inverse boundary value problem are proved. In the proof of the theorem the method of successive approximations in combination it with the method of compressing mapping is used. The continuous dependence of the solutions on the right-hand side of the boundary condition is showed.*

One of the interesting field of the theory of functional-differential equations is the differential equations with maxima. The qualitative theory of differential equations with maxima has singularities on the theoretical investigations. The differential equations with mixed maxima we write in the following form:

$$x'(t) = f(t, x(t), \max \{x(\tau) \mid \tau \in [h_1(t) : | : h_2(t)]\}), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

where  $[h_1(t) : | : h_2(t)] = [\min \{h_1(t); h_2(t)\}; \max \{h_1(t); h_2(t)\}]$ . We suppose that there exist some points  $t_i \in (0, T)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , at which  $h_1(t) = h_2(t)$ . Then on the interval

$$\Omega_1^p = [0, t_1] \cup [t_2, t_3] \cup [t_4, t_5] \cup \dots \cup [t_{p-1}, t_p]$$

the differential equation with mixed maxima (1) has the form

$$x'(t) = f(t, x(t), \max \{x(\tau) \mid \tau \in [h_1(t); h_2(t)]\}). \quad (2)$$

On the complement interval  $\Omega_2^p = [t_1, t_2] \cup [t_3, t_4] \cup [t_5, t_6] \cup \dots \cup [t_p, T]$  the differential equation with mixed maxima (1) has the form

$$x'(t) = f(t, x(t), \max \{x(\tau) \mid \tau \in [h_2(t); h_1(t)]\}). \quad (3)$$

The set of solutions of the differential equation with mixed maxima (1) on the interval  $[0, T]$  coincides with the union of sets of the solutions of two differential equations (2) and (3) on the intervals  $\Omega_1^p$  and  $\Omega_2^p$ , respectively. At the points  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{p-1}, t_p$  the solutions of differential equation (1) with mixed maxima have discontinuities depending from the posed problem for (2) and (3).

Many problems in modern sciences, technology and economics are described by differential equations, the solution of which is functions with first kind discontinuities at fixed or non-fixed times. Such differential equations are called differential equations with impulse effects. In recent years the interest in the studying of differential equations with nonlocal boundary value conditions is increasing. Differential equations with mixed maxima have singularities in solvability [1].

In this paper we consider the questions of existence and uniqueness of solution of the nonlocal boundary value problem for an impulsive system of differential equations with mixed maxima and redefinition matrix. This paper is further development of the works [2, 3].

So, on the segment  $[0, T]$  for  $t \neq t_i, i = 1, 2, \dots, p$ , we consider the following first order system of nonlinear differential equations

$$x'(t) = f(t, x(t), \max \{x(\tau) \mid \tau \in [\lambda_1(t, x(t)) : \lambda_2(t, x(t))]\}) \quad (4)$$

with nonlocal boundary value condition

$$Ax(0) + \int_0^T K(s) x(s) ds = B, \quad (5)$$

nonlinear impulsive effect

$$x(t_i^+) - x(t_i^-) = I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (6)$$

and additional condition

$$x(\bar{t}) = C, \quad \bar{t} \in (0, T), \quad \bar{t} \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad C = \text{const}, \quad (7)$$

where  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$ ;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is given matrix;  $B \in \mathbb{R}^n$  is vector of redefinition;  $K(s)$  is given  $n \times n$ -dimensional matrix function such that  $\det Q(t) \neq 0$ , where  $Q(t) = A + \int_0^t K(s) ds$ ;  $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $I_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  are given functions;  $x(t_i^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_i + h)$ ,  $x(t_i^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} x(t_i - h)$  are right-hand sided and left-hand sided limits of function  $x(t)$  at the point  $t = t_i$ , respectively;  $0 \leq \lambda_1(t), \lambda_2(t) \leq T$ .

**Statement.** *To find a pair  $\{x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n); B \in \mathbb{R}^n\}$ , first of which for all  $t \in [0, T]$ ,  $t \neq t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , satisfies the differential equation (4), nonlocal integral condition (5), for  $t = t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$  satisfies the nonlinear limit condition (6) and additional condition (7).*

Let the function  $x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$  is a solution of the nonlocal boundary value problem (4)–(6). Then by integration of the equation (4) on the interval  $t \in (0, t_{i+1}]$  and taking (5) into account, we obtain

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x, y) ds + \sum_{0 < t_i < t} I_i(x(t_i)). \quad (8)$$

We subordinate the function  $x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$  in (8) to satisfy the boundary value condition (5):

$$x(t) = Q^{-1}(t) \cdot B + \sum_{0 < t_i < t} G(t, t_i) I_i(x(t_i)) + \quad (9)$$

$$+ \int_0^t G(s) f(s, x(s), \max\{x(\tau) | \tau \in [\lambda_1(s, x(s)) : \lambda_2(s, x(s))]\}) ds$$

for  $t \in (t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , where

$$G(t) = \begin{cases} Q^{-1}(t) \left( A + \int_0^t K(s) ds \right), & 0 \leq s \leq t, \\ -Q^{-1}(t) \int_t^T K(s) ds, & t < s \leq T. \end{cases}$$

By virtue of the condition (7), from the presentation (9) we obtain

$$B = Q(\bar{t}) C - \sum_{0 < t_i < \bar{t}} G(t_i) I_i(x(t_i)) - \quad (10)$$

$$- \int_0^T G(s) f(s, x(s), \max \{x(\tau) | \tau \in [\lambda_1(s, x(s)) : \lambda_2(s, x(s))]\}) ds.$$

By substitution (10) into (9), we obtain the nonlinear functional-integral equation, which we will investigate in this paper.

1. *Yuldashev T.K.* Limit value problem for a system of integro-differential equations with two mixed maxima // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seria: Fiziko-matematicheskie nauki. 2008. Vol. 1, no. 16, pp. 15–22 (in Russian).
2. *Yuldashev T.K., Fayziev A.K.* On a nonlinear impulsive differential equations with maxima // Bulletin of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Uzbekistan. 2021. Vol. 4, no. 6, pp. 42–49.
3. *Yuldashev T.K., Fayziev A.K.* On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima // Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2022. Vol. 13, no. 1, pp. 36–44.

## Дискретизация функционалов Ляпунова – Красовского для линейных систем с запаздыванием

**И. В. Александрова, А. И. Белов**

*Санкт-Петербург,*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

e-mail: i.v.aleksandrova@spbu.ru, st062146@student.spbu.ru

В работе предложен новый конструктивный критерий экспоненциальной устойчивости для линейных стационарных систем с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $h \geq 0$  — запаздывание. В основе критерия лежит метод функционалов Ляпунова–Красовского с заданной производной [1]. Ключевым объектом, определяющим такие функционалы, является *матрица Ляпунова, ассоциированная с положительно-определенной матрицей  $W$* , — функциональная матрица, представляющая собой решение дифференциального матричного уравнения

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1, \quad \tau > 0,$$

удовлетворяющее дополнительно алгебраическому условию

$$A_0^T U(0) + U(0)A_0 + A_1^T U(h) + U^T(h)A_1 = -W$$

и свойству симметрии  $U(-\tau) = U^T(\tau)$  при всех  $\tau \geq 0$ . Известно [1], что матрица Ляпунова существует и единственна, если выполнено *условие Ляпунова* — отсутствие у системы (1) собственных чисел, расположенных на комплексной плоскости симметрично относительно начала координат.

В недавней статье [2] доказан конструктивный конечный критерий экспоненциальной устойчивости системы (1), основанный на матрице Ляпунова. Анализ устойчивости в нем сводится к проверке положительной определенности одной блочной матрицы, блоки которой представляют собой значения матрицы Ляпунова в различных точках отрезка  $[0, h]$ . Основным недостатком критерия является тот факт, что размерность матрицы, соответствующей необходимому и достаточному условию устойчивости, на практике часто оказывается довольно высокой даже для простых систем, что послужило отправной точкой для создания ряда других критериев [3, 4]. В них блочная матрица, положительную определенность которой требуется проверить, является более сложной для построения, однако ее размерность ниже. Отметим, что важным элементом доказательства перечисленных критериев является анализ поведения функционалов на функциях множества  $S = \left\{ \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi\|_h = \|\varphi(0)\| = 1 \right\}$ , введенного в данном контексте в работе [5]. Здесь  $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  — пространство кусочно-непрерывных начальных функций с заданной на нем равномерной нормой  $\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|$ , где

$\|\cdot\|$  — евклидова норма. Под записью  $x_t$  понимается функция  $\theta \rightarrow x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ .

Предлагаемый в настоящей работе подход основан на объединении метода функционалов с заданной производной и метода дискретизации функционалов Ляпунова–Красовского общего вида, предложенного автором К. Gu [6]. Введем функционал

$$v_1(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U^T(h + \tau)A_1\varphi(\tau)d\tau + \quad (2)$$

$$+ \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\tau_1)A_1^T U(\tau_1 - \tau_2)A_1\varphi(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 + \int_{-h}^0 \varphi^T(\tau)W\varphi(\tau)d\tau,$$

обладающий вдоль решений системы (1) свойством

$$\frac{dv_1(x_t)}{dt} = -x^T(t - h)Wx(t - h), \quad t \geq 0.$$

**Лемма** ([2]). *Если система (1) неустойчива и выполнено условие Ляпунова, то существует функция  $\tilde{\varphi} \in S$  и постоянная  $a_1 > 0$  такие, что  $v_1(\tilde{\varphi}) \leq -a_1$ .*

Идея дискретизации функционала (2) заключается в следующем: отрезок  $[-h, 0]$  разбивается на  $N$  равных частей точками  $\theta_p = -p\Delta$ ,  $p = \overline{0, N}$ , где  $\Delta = h/N$ , а выражения  $U^T(h + \tau)A_1$  и  $A_1^T U(\tau_1 - \tau_2)A_1$  приближаются кусочно-линейными матричными функциями согласно этому разбиению. Преобразования, проведенные в статье [6], приводят к следующему выражению для приближенного функционала:

$$v_1^{(N)}(\varphi) = \int_0^1 (\varphi^T(0)\Psi^T(\alpha)) \begin{pmatrix} U(0) & \mathcal{Q}_N \\ \mathcal{Q}_N^T & \mathcal{R}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha +$$

$$+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)W\varphi(\theta)d\theta \geq \int_0^1 (\varphi^T(0)\Psi^T(\alpha)) \mathcal{A}_N \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha.$$

Здесь  $\Psi(\alpha)$  — специальный вектор, определяемый функцией  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N &= \begin{pmatrix} U(0) & \mathcal{Q}_N \\ \mathcal{Q}_N^T & \mathcal{R}_N + \mathcal{W}_N \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Q}_N &= (U^T(N\Delta)A_1; \dots U^T(\Delta)A_1; U(0)A_1), \\ \mathcal{R}_N &= \left\{ A_1^T U((j-i)\Delta) A_1 \right\}_{i,j=0}^N, \quad \mathcal{W}_N = \frac{1}{\Delta} \text{diag}(W, W, \dots, W). \end{aligned}$$

Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** Система (1) экспоненциально устойчива в том и только том случае, когда выполнено условие Ляпунова и матрица  $\mathcal{A}_{N^*}$  положительно определена. Здесь  $N^* = \lceil c/a_1 \rceil$ , где

$$c = 2(\|A_0\| + \|A_1\|)\|A_1\|h^2 \left( 1 + \frac{\|A_1\|h}{3} \right) \max_{\tau \in [0, h]} \|U(\tau)\|.$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых, проект МК-2301.2022.1.1.

1. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhäuser, 2013.
2. *Gomez M., Egorov A.V., Mondié S.* Lyapunov matrix based necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems // Automatica. 2019. Vol. 108. Art. no. 108475.
3. *Bajodek M., Gouaisbaut F., Seuret A.* Necessary and sufficient stability condition for time-delay systems arising from Legendre approximation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021 (submitted for publication). URL: <https://hal.laas.fr/hal-03435028>
4. *Alexandrova I.V.* A finite Lyapunov matrix-based stability criterion via piecewise linear approximation // IFAC-PapersOnLine. 2022 (submitted for publication).
5. *Жабко А.П., Медведева И.В.* Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 9–20.
6. *Gu K.* Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time delay systems // International Journal of Control. 1997. Vol. 68, pp. 923–934.

# Об экспоненциальной устойчивости дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами

А. С. Баландин

*Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет*  
e-mail: balandin-anton@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - (S\dot{x})(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \geq s \geq 0, \quad (1)$$

в следующих предположениях и обозначениях:

$$(Sy)(t) = \sum_{k=1}^K a_k(t)(S_h^k y)(t), \quad (S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geq s, \\ 0, & t-h < s, \end{cases}$$

$$(Ty)(t) = \sum_{j=0}^J b_j(t) \left( S_h^j y \right) (t),$$

$h > 0$ ,  $a_k$  — ограниченные измеримые периодические функции с периодом  $h$ ;  $b_j$  — суммируемые периодические функции с периодом  $h$ ;  $f$  — локально суммируемая функция.

Как известно [1, с. 84, теорема 1.1], уравнение (1) с заданным начальным условием  $x(s)$  однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций и его решение представимо в виде:

$$x(t) = X(t, s)x(s) + \int_s^t C(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $X$  — фундаментальное решение,  $C$  — функция Коши. Полагая  $X(t, s) = C(t, s) = 0$  при  $t < s$ . Исследование устойчивости уравнения (1) сводится к изучению асимптотических свойств функций  $X$  и  $C$ .

Пусть  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\}$ .

**Определение.** Уравнение (1) назовём *экспоненциально устойчивым*, если для некоторых  $N, \gamma > 0$  функция Коши имеет следующую оценку:

$$|C(t, s)| \leq N e^{-\gamma(t-s)} \quad \text{при почти всех } (t, s) \in \Delta. \quad (3)$$

Следующая теорема устанавливает простую связь между функциями  $X$  и  $C$ .

**Теорема 1.** При почти всех  $(t, s) \in \Delta$  функция Коши и фундаментальное решение связаны соотношением

$$C(t, s) - \sum_{k=1}^K a_k(s) C(t, s + kh) = X(t, s).$$

Обозначим

$$B(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}, \quad P_a(\zeta, z) = \sum_{k=1}^K a_k(\zeta) z^k, \quad \zeta \in [0, h],$$

$$P_b(\zeta, z) = \sum_{j=0}^J b_j(\zeta) z^j, \quad G(\zeta + s, z) = \exp \left\{ \int_s^{\zeta+s} \frac{P_b(\tau, z)}{1 - P_a(\tau, z)} d\tau \right\}.$$

**Теорема 2.** Функция Коши уравнения (1) имеет экспоненциальную оценку (3) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (а) существует  $r > 1$  такое, что при почти всех  $s \in [0, h]$  все корни уравнений  $P_a(s, z) = 1$  лежат вне круга  $B(r)$ ;
- (б) все корни уравнения  $zG(h, z) = 1$  лежат вне единичного круга  $|z| \leq 1$ .

**Следствие 1.** Если функция Коши уравнения (1) имеет оценку (3), то аналогичная оценка справедлива и для фундаментального решения:

$$|X(t, s)| \leq M e^{-\gamma(t-s)}, \quad (t, s) \in \Delta.$$

Заметим, что обратное неверно: из экспоненциальной оценки на фундаментальное решение не вытекает оценка (3). Соответствующий пример построен в [2].

Частный случай теоремы 2 для постоянных  $a_k$  был получен в работе [3]. Обозначим

$$P_a(z) = \sum_{k=1}^K a_k z^k, \quad B_j = \frac{1}{h} \int_0^h b_j(t) dt, \quad P_b(z) = \sum_{j=0}^J B_j z^j.$$

**Следствие 2.** Пусть  $a_k(t) \equiv a_k = \text{const}$ . Функция Коши уравнения (1) имеет экспоненциальную оценку (3) тогда и только тогда, когда все корни уравнений  $P_a(z) = 1$ ,  $z \exp \left\{ \frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)} \right\} = 1$  лежат вне единичного круга  $|z| \leq 1$ .

Применим теорему 2 к следующему уравнению

$$\dot{x}(t) - a(t)(S_1 \dot{x})(t) = -bx(t) - c(S_1 x)(t) + f(t), \quad (4)$$

где  $a(t) = \alpha \cos(2\pi t)$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Введём в системе координат  $Ouvw$  поверхность

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} v = -\text{Im} \left( \sqrt{1 - u^2 e^{2i\varphi}} \right) \varphi - \text{Re} \left( \sqrt{1 - u^2 e^{2i\varphi}} \right) \varphi \text{ctg} \varphi, \\ w = \text{Re} \left( \sqrt{1 - u^2 e^{2i\varphi}} \right) \frac{\varphi}{\sin \varphi}, \quad u \in (0, 1), \quad \varphi \in (0, \pi), \end{array} \right\}$$

где у функции  $\sqrt{1 - u^2 e^{2i\varphi}}$  берётся ветвь, на которой значению  $\varphi = 0$  соответствует  $\sqrt{1 - u^2}$ . Поверхность  $\Gamma$  и плоскость  $v + w = 0$  ограничивают область  $D$ .

**Следствие 3.** Уравнение (4) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда точка  $(\alpha, b, c)$  принадлежит  $D$ .

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Баландин А.С., Малыгина В.В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия высших учебных заведений. Математика. 2007. № 7. С. 17–27.
3. *Малыгина В.В., Баландин А.С.* Об экспоненциальной устойчивости уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Динамические системы. 2020. Т. 10 (38), № 1. С. 51–69.

## Распределение значений показателя Перрона по решениям линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами

**Е. А. Барабанов**

*Минск, Институт математики НАН Беларуси*  
e-mail: bar@im.bas-net.by

**В. В. Быков**

*Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова*  
e-mail: vvbykov@gmail.com

Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  через  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, через  $\mathcal{M}_n$  — его подкласс, состоящий из систем, коэффициенты которых ограничены на полуоси, а через  $x(\cdot; \xi)$  — решение системы (1) с начальным вектором  $x(0; \xi) = \xi \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$  расширенную числовую прямую с естественным порядком и порядковой топологией.

Нижним показателем Перрона ненулевого решения  $x(\cdot)$  системы (1) называется [1] величина

$$\pi[x(\cdot)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|, \quad (2)$$

а функция начального вектора  $\pi_A: \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , определяемая равенством  $\pi_A(\xi) = \pi[x(\cdot; \xi)]$ , — показателем Перрона системы (1). Приведём некоторые известные свойства показателя Перрона, показывающие его принципиальные отличия от показателя Ляпунова, определение которого получается заменой в (2) нижнего предела верхним.

А.М. Ляпуновым установлено, что число различных показателей Ляпунова системы из  $\mathcal{M}_n$  не превосходит её размерности  $n$ . О. Перрон обнаружил [1], что для нижних показателей это утверждение неверно. Для диагональных систем из  $\mathcal{M}_n$  количество различных значений показателя Перрона не превосходит  $2^n - 1$  [2] и может быть любым таким натуральным числом [3].

У недиагональных систем множество значений показателей Перрона может быть устроено гораздо сложнее: в работе [4] построена система, нижние показатели решений которой заполняют целый отрезок, а в работе [5] доказано, что множество  $S$  является множеством значений показателей Перрона некоторой системы  $A \in \mathcal{M}_n$  тогда и только тогда, когда  $S$  — ограниченное суслинское множество, содержащее свою точную верхнюю грань.

Несмотря на указанные отличия в строении множеств характеристических и нижних показателей систем (1) множества Лебега сужений этих показателей на аффинные подпространства имеют определённое сходство. Так, Н.А. Изобовым установлено [2, 6], что для системы  $A \in \mathcal{M}_n$  и произвольного аффинного подпространства  $\Pi_k$  размерности  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) в  $\mathbb{R}^n$  множество  $P(\Pi_k) \equiv \{\xi \in \Pi_k \setminus \{\mathbf{0}\} : \pi(\xi) < \sup_{\zeta \in \Pi_k \setminus \{\mathbf{0}\}} \pi(\zeta)\}$  имеет нулевую  $k$ -мерную меру Лебега, т.е.

$$\text{mes } P(\Pi_k) = 0. \quad (3)$$

Другими словами, множество показателей Перрона решений с начальными векторами из аффинной плоскости  $\Pi_k$  содержит свой супремум, и для почти всех по мере Лебега начальных векторов

из  $\Pi_k$  решения, из них выходящие, имеют показатель Перрона, равный этому супремуму.

Легко показывается [7], что множество  $P(\Pi_1)$  является  $G_{\delta\sigma}$ -множеством, а функция  $\pi_A$  — функцией второго класса Бэра. Эти утверждения неулучшаемы [7]: для любого  $n \geq 2$  существует такая система  $A \in \mathcal{M}_n$ , что для некоторой прямой  $\Pi_1$  множество  $P(\Pi_1)$  — точное  $G_{\delta\sigma}$ -множество, а функция  $\pi_A$  — функция точного второго класса Бэра.

А.Г. Гаргянц [8] обнаружил, что свойство (3), вообще говоря, не имеет места для систем из  $\widetilde{\mathcal{M}}_n \setminus \mathcal{M}_n$  при  $n \geq 2$ . Он также установил [9], что свойство (3) имеет место для всех систем  $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ , коэффициенты которых растут медленнее любой экспоненты:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|A(t)\| \leq 0$ .

Ставится задача теоретико-множественного описания для каждого натурального  $n$  класса функций  $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{\pi_A : A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$ .

В [10] доказано, что для любого  $n \geq 2$  класс  $\widetilde{\mathcal{P}}_n$  содержит все непрерывные функции  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие условию

$$f(c\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4)$$

Этот результат перенесён в [11] на функции, полунепрерывные сверху.

Полное описание класса  $\widetilde{\mathcal{P}}_n$  для любого  $n \geq 2$  даёт следующая теорема.

**Теорема.** *Функция  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  принадлежит классу  $\widetilde{\mathcal{P}}_n$  при  $n \geq 2$ , если и только если она удовлетворяет условию (4) и для любого  $r \in \mathbb{R}$  прообраз  $f^{-1}([-\infty, r])$  является  $G_\delta$ -множеством. Класс  $\widetilde{\mathcal{P}}_1$  состоит из всех постоянных функций  $\mathbb{R}^1 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .*

1. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Vol. 31, no. 5, pp. 748–766.
2. Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 4. С. 469–477.
3. Барабанов Е.А. Достижимость оценки числа нижних показателей линейной дифференциальной диагональной системы // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 12. С. 1069–1072.

4. *Изобов Н.А.* О множестве нижних показателей положительной меры // Дифференц. уравнения, 1968, Т. 4, № 6. С. 1147–1149.
5. *Барабанов Е.А.* Структура множества нижних показателей Перрона на линейной дифференциальной системе // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1843–1853.
6. *Изобов Н.А.* О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2168–2170.
7. *Барабанов Е.А.* Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 3. С. 200–203.
8. *Гаргяниц А.Г.* К вопросу о типичности и существенности значений показателя Перрона неограниченных линейных систем // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1505–1506.
9. *Гаргяниц А.Г.* О метрической типичности старшего показателя Перрона на решениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 8. С. 1011–1017.
10. *Гаргяниц А.Г.* К вопросу о распределении значений показателей Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 11. С. 1567.
11. *Фоминых Е.И., Касабуцкий А.Ф.* О распределении значений показателя Перрона решений линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Тезисы докладов Междунар. науч. конф. Гродно, 15–18 мая 2018 г. Т. 1. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2018. С. 58–59.

# Априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках решения нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения конвекции–диффузии

З. В. Бештокова

*Ставрополь, Северо-Кавказский федеральный университет,  
Северо-Кавказский центр математических исследований  
e-mail: zarabaeva@yandex.ru*

## 1. Постановка нелокальной краевой задачи и априорная оценка в дифференциальной форме

В цилиндре  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$ , основанием которого является  $p$ -мерный прямоугольный параллелепипед  $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$  с границей  $\Gamma, \bar{G} = G \cup \Gamma$ , рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} u(l_\alpha, x', \tau) + \\ + \int_0^t \rho(t, \tau) u(l_\alpha, x', \tau) d\tau - \mu_{-\alpha}(x, t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} u - \mu_{+\alpha}(x, t), & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (3)$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x, t) u,$$

$$0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1,$$

$$\begin{aligned} |r_\alpha(x, t)|, |k_{x_\alpha}(x, t)|, |r_{x_\alpha}(x, t)| &\leq c_2, \\ |q_\alpha(x, t)|, |\rho(t, \tau)|, |\beta_{\pm\alpha}(x, t)| &\leq c_2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$c_1, c_2 = \text{const} > 0, \quad Q_T = G \times (0 < t \leq T].$$

В дальнейшем предполагаем, что коэффициенты уравнения и граничных условий (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения  $u(x, t)$  в цилиндре  $\bar{Q}_T$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (4), тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$\|u\|_0^2 \leq M \left( \int_0^t \left( \|f\|_0^2 + \int_{G'} \left( \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2 \right) dx' \right) d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \right),$$

где  $M$  зависит только от входных данных задачи (1)–(3).

## 2. Устойчивость и сходимость разностной схемы.

В замкнутой области  $\bar{Q}_T$  введем равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x \in \bar{\omega}_h, t \in \bar{\omega}_\tau\},$$

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m, m\tau = T\}.$$

На сетке  $\bar{\omega}_{h\tau}$  задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации  $O(|h| + \tau)$  [1]:

$$y_{\bar{t}} = \Lambda(\tilde{t})y + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha, 0} = \beta_{-\alpha} y_{N_\alpha} + \sum_{s=0}^j \rho_{s,j} y_{N_\alpha}^s \tau - \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ -a_{+\alpha} y_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha} = \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha} - \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad (6)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (7)$$

где

$$\Lambda(\tilde{t}) = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha(\tilde{t}), \quad \Lambda_\alpha(\tilde{t})y_{(\alpha)} = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + r_\alpha^+ y_{x_\alpha} + r_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha} - d_\alpha y,$$

$$y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha} \quad y_{x_\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau}, \quad y = y^j, \quad \check{y} = y^{j-1},$$

$$\begin{aligned}
r_\alpha &= r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad |r_\alpha| = r_\alpha^+ - r_\alpha^-, \\
r_\alpha^+ &= 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0, \quad r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0, \\
x^{-0.5\alpha} &= (x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p), \\
\tilde{t} &= (j + 0.5)\tau = t_j + 0.5\tau = t_{j+0.5}, \quad t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p} = \left(j + \frac{\alpha}{p}\right)\tau, \\
a_\alpha &= k_\alpha(x^{-0.5\alpha}, \tilde{t}_j), \quad d_\alpha = q_\alpha(x_i, \tilde{t}_j), \quad \varphi_i = f(x_i, \tilde{t}_j),
\end{aligned}$$

$\tau, h$  — шаги сетки.

**Теорема 2.** Если выполнены условия (4), то в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи (5)–(7) при малом  $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2)$  справедлива априорная оценка

$$\|y^j\|^2 \leq M \left( \sum_{j'=1}^j \left( \|\varphi^{j'}\|^2 + \mu_1^{j'2} + \mu_2^{j'2} \right) \tau + \|y^0\|^2 \right) \quad (8)$$

на каждом временном слое в сеточной норме  $L_2(G)$ , где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от  $|h|$  и  $\tau$ .

Таким образом, доказаны единственность и устойчивость решения разностной задачи (5)–(7) по начальным данным и правой части в сеточной норме  $L_2(G)$  на слое.

Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи (1)–(3),  $y(x_i, t_j) = y_i^j$  — решение разностной задачи (5)–(7). Обозначим через  $z_i^j = y_i^j - u_i^j$  погрешность аппроксимации, где  $u_i^j = u(x_i, t_j)$ . Тогда, подставляя  $y = z + u$  в (5)–(7), получим задачу для  $z$ :

$$z_{\tilde{t}} = \Lambda(\tilde{t})z + \Psi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} a_{-\alpha}^{(+1\alpha)} z_{x_\alpha, 0} = \beta_{-\alpha} z_{N_\alpha} + \sum_{s=0}^j \rho_{1,s,j} z_{N_\alpha}^s \tau - \nu_{-\alpha}, & x = 0, \\ -a_{+\alpha} z_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha} = \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}, & x = l_\alpha, \end{cases} \quad (10)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (11)$$

где  $\Psi = O(|h| + \tau)$ ,  $\nu_{-\alpha} = O(|h| + \tau)$ ,  $\nu_{+\alpha} = O(|h| + \tau)$  — погрешности аппроксимации на решении задачи (1)–(3).

Применяя оценку (8) к решению задачи (9)–(11), получим

$$\|z^j\|^2 \leq M \sum_{j'=1}^j \left( \|\psi^{j'}\|^2 + \nu_1^{j'^2} + \nu_2^{j'^2} \right) \tau, \quad (12)$$

где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от  $|h|$  и  $\tau$ .

Из априорной оценки (12) следует сходимость схемы (5)–(7) со скоростью  $O(|h| + \tau)$  в сеточной норме  $L_2(G)$ .

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
2. Андреев В.Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8, № 6. С. 1218–1231.

## Разностные методы решения нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения параболического типа общего вида с переменными коэффициентами

**З. В. Бештокова**

*Ставрополь, Северо-Кавказский федеральный университет,  
Северо-Кавказский центр математических исследований  
e-mail: zarabaeva@yandex.ru*

### 1. Постановка задачи

В цилиндре  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$ , основанием которого является  $p$ -мерный прямоугольный параллелепипед  $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$  с границей  $\Gamma$ ,  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \\ = \gamma_{-\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_{-\alpha} u - \mu_{-\alpha}(x, t), & x_\alpha = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ -k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \\ = \gamma_{+\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_{+\alpha} u - \mu_{+\alpha}(x, t), & x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (3)$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x, t) u,$$

$$\begin{aligned} 0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1, \quad 0 \leq \gamma_{\pm\alpha}(x, t) \leq c_1, \\ |r_\alpha(x, t)|, |k_{x_\alpha}(x, t)|, |r_{x_\alpha}(x, t)| \leq c_2, \\ |q_\alpha(x, t)|, |\gamma_{\pm\alpha}(x, t)|, |\beta_{\pm\alpha}(x, t)| \leq c_2, \\ c_1, c_2 = \text{const} > 0, \quad Q_T = G \times (0 < t \leq T]. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем предполагаем, что коэффициенты уравнения и граничных условий (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения  $u(x, t)$  в цилиндре  $\overline{Q}_T$ .

## 2. Локально-одномерная схема (ЛОС)

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению  $Ox_\alpha$  с шагом  $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ :

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha},$$

$$\bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

$$h_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ \frac{h_\alpha}{2}, & i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

По аналогии с [1] на отрезке  $[0, T]$  также введём равномерную сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$  с шагом  $\tau = T/j_0$ . Каждый из отрезков  $[t_j, t_{j+1}]$  разобьём на  $p$  частей, введя точки

$t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau \frac{\alpha}{p}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$ , и обозначим через  $\Delta_\alpha$  полуинтервал  $\left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$ , где  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ .

На каждом полуинтервале  $\Delta_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , будем последовательно решать задачи

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} (\gamma_{-\alpha} + 0.5h_\alpha) \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} + \bar{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ (\gamma_{+\alpha} + 0.5h_\alpha) \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} + \bar{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad (6)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (7)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} = \varkappa_\alpha \left( a_\alpha y_{x_\alpha}^{(\alpha)} \right)_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} - d_\alpha y^{(\alpha)},$$

$$\Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} = \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha, 0}^{(\alpha)} - \beta_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)} y^{(\alpha)}, \quad x_\alpha = 0,$$

$$\Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} = -\varkappa_{+\alpha} a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha}^{(\alpha)} - \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)} y^{(\alpha)}, \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{1 + R_\alpha}, \quad R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha |r_\alpha|}{k_\alpha} - \text{разностное число Рейнольдса,}$$

$$r_\alpha^+ = 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0, \quad r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0, \quad b_\alpha^+ = \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}, \quad b_\alpha^- = \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha},$$

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad a^{(1\alpha)} = a_{i_\alpha+1}, \quad a_\alpha = k_\alpha(x_{i_\alpha-1/2}, \bar{t}), \quad \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = f_\alpha(x, \bar{t}),$$

$$\bar{h}_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ \frac{h_\alpha}{2}, & i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases} \quad d_\alpha = q_\alpha(x_{i_\alpha}, \bar{t}), \quad \bar{t} = t^{j+\frac{1}{2}},$$

$$\bar{\mu}_{-\alpha} = \mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha, 0}, \quad \bar{\mu}_{+\alpha} = \mu_{+\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha, N_\alpha}, \quad \mu_{\pm\alpha} = \mu_{\pm\alpha}(t_j),$$

$$\varkappa_{-\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{0.5h_\alpha |r_\alpha^{(0)}|}{k_\alpha^{(0.5)}}}, \quad r_\alpha^{(0)} \leq 0, \quad \varkappa_{+\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{0.5h_\alpha |r_\alpha^{(N_\alpha)}|}{k_\alpha^{(N_\alpha-0.5)}}}, \quad r_\alpha^{(N_\alpha)} \geq 0,$$

$$\frac{1}{p} y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}.$$

**Теорема 1.** Если выполнены условия (4), то локально-одномерная схема (5)–(7) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения разностной задачи (5)–(7) при  $\tau \leq \tau_0$  справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq M \left[ \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ \left. + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left( \mu_{-\alpha}^2(0, x', t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(l_\alpha, x', t_{j'}) \right) H/\bar{h}_\alpha \right],$$

где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $h_\alpha$  и  $\tau$ ,

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p).$$

**Теорема 2.** Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в  $\bar{Q}_T$  решение  $u(x, t)$  и существуют непрерывные в  $\bar{Q}_T$  производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}$ ,  $\frac{\partial^3 k}{\partial x_\alpha x_\beta^2}$ ,  $\frac{\partial^2 r}{\partial x_\alpha^2}$ ,  $\frac{\partial^2 q}{\partial x_\alpha^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}$ , где  $1 \leq \alpha, \beta \leq p$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Тогда схема (5)–(7) сходится к решению задачи (1)–(3) со скоростью  $O(|h|^2 + \tau)$ , так что при достаточно малом  $\tau$  имеет место оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leq M(|h|^2 + \tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_0,$$

где  $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$ .

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
2. Андреев В.Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968. Т. 8, № 6. С. 1218–1231.

# Регуляризация многоточечной краевой задачи для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий

А. Н. Бондарев

Могилёв, Белорусско-Российский университет

e-mail: alex-bondarev@tut.by

Для обобщённого дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C_1(t)XC_2(t) + XB(t) + F(t) \equiv G(t, X) \quad (1)$$

рассматривается краевая задача с условием

$$\sum_{s=1}^k M_s X(t_s) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega, \quad (2)$$

где  $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $A, B, C_1, C_2, F$  — непрерывные по  $t \in I$  матричнозначные функции соответствующих размерностей,  $M_s$  — заданные постоянные  $(n \times n)$ -матрицы,  $I = [0, \omega]$ .

С помощью конструктивного метода регуляризации [1] эта задача исследуется в конечномерной банаховой алгебре  $\mathfrak{B}(n)$  непрерывных матричнозначных функций с нормой

$$\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t)\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — какая-либо фиксированная матричная норма, например, любая из норм, приведённых в [2, с. 21]. Рассматривается случай слабого вырождения краевых условий

$$\sum_{s=1}^i M_s = 0, \quad (3)$$

где число  $i$  фиксировано и может принимать любое значение от 2 до  $k$ .

Введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j \int_{t_j}^{t_i} A(\tau) d\tau - \sum_{r=i+1}^k M_r, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \alpha = \max_{t \in I} \|A(t)\|, \\
\beta &= \max_{t \in I} \|B(t)\|, \quad h = \max_{t \in I} \|F(t)\|, \quad \delta_l = \max_{t \in I} \|C_l(t)\| \quad (l = 1, 2), \\
m_s &= \|M_s\| \quad (s = \overline{1, k}), \quad \tilde{m}_1 = \sum_{j=1}^{i-1} m_j, \quad \tilde{m}_2 = \sum_{r=i+1}^k m_r, \\
\varepsilon &= \alpha + \delta_1 \delta_2 + \beta, \\
q &= \gamma \sum_{j=1}^{i-1} m_j \left\{ \frac{1}{2} \alpha \varepsilon [(t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2] + (\varepsilon - \alpha)(t_i - t_j) \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \gamma \varepsilon \tilde{m}_1 [(t_i - t_1)^2 + (t_k - t_i)^2] + \gamma \varepsilon \tilde{m}_2 (t_k - t_1), \\
N &= \gamma h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} \alpha m_j [(t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2 + (t_i - t_j)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \alpha \tilde{m}_1 [(t_i - t_1)^2 + (t_k - t_i)^2] + \tilde{m}_2 (t_k - t_1) \right\}.
\end{aligned}$$

**Теорема.** Пусть выполнено условие (3), а также  $\det \Phi \neq 0$ ,  $q < 1$ . Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима, при этом для её решения  $X = X(t)$  справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{N}{1 - q}. \quad (4)$$

Следуя методике, используемой в [3], сначала получено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2):

$$\begin{aligned}
X(t) &= \Phi^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} M_j \left[ \int_{t_j}^t \left( \int_{t_j}^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) G(\tau, X(\tau)) d\tau - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_t^{t_i} \left( \int_{\tau}^{t_i} A(\sigma) d\sigma \right) G(\tau, X(\tau)) d\tau - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{t_j}^{t_i} (G(\tau, X(\tau)) - A(\tau)X(\tau)) d\tau \right] - \sum_{r=i+1}^k M_r \int_{t_r}^t G(\tau, X(\tau)) d\tau \right\}. \quad (5)
\end{aligned}$$

При исследовании разрешимости уравнения (5) применен принцип сжимающих отображений (см., например, [4, с. 605]). Согласно этому принципу, на основании условий теоремы уравнение (5) однозначно разрешимо в пространстве  $C(I, \mathbb{R}^{n \times m})$ . Для получения соотношения (4) выполнены оценки по норме в уравнении (5).

Решение задачи (1), (2) строится классическим методом последовательных приближений типа [4, с. 605]. Применительно к уравнению (5) соответствующий алгоритм имеет вид

$$\begin{aligned}
 X_p(t) = \Phi^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} M_j \left[ \int_{t_j}^t \left( \int_{t_j}^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) G(\tau, X_{p-1}(\tau)) d\tau - \right. \right. \\
 \left. \left. - \int_t^{t_i} \left( \int_{\tau}^{t_i} A(\sigma) d\sigma \right) G(\tau, X_{p-1}(\tau)) d\tau - \right. \right. \\
 \left. \left. - \int_{t_j}^{t_i} (G(\tau, X_{p-1}(\tau)) - A(\tau)X_{p-1}(\tau)) d\tau \right] - \right. \\
 \left. - \sum_{r=i+1}^k M_r \int_{t_r}^t G(\tau, X_{p-1}(\tau)) d\tau \right\}, \quad p = 1, 2, \dots .
 \end{aligned} \tag{6}$$

В качестве начального приближения принимается произвольная функция  $X_0 \in C(I, \mathbb{R}^{n \times m})$ .

Установлено, что последовательность  $\{X_r\}_0^\infty$ , определяемая алгоритмом (6), сходится равномерно по  $t \in I$  к решению интегрального уравнения (5), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \leq \frac{q^r}{1 - q} \|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \dots .$$

Оценка области локализации решения  $X(t)$ , определяемая на основе алгоритма (6), имеет вид

$$\|X\|_C \leq \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1 - q}. \tag{7}$$

Из (7) при  $X_0 \equiv 0$  получено соотношение, из которого следует оценка (4).

1. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 423–427.
4. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

## О сравнении решений некоторых дискретных и непрерывных краевых задач

А. В. Васильев, В. Б. Васильев, А. А. Ходырева

Белгород, Белгородский государственный университет  
e-mail: 756914@bsu.edu.ru, vbv57@inbox.ru, 711012@bsu.edu.ru

Работа посвящена развитию исследования дискретных краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в направлении, намеченном в [1, 2].

Пусть  $\mathbb{Z}^2$  — целочисленная решетка на плоскости. Обозначим  $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$  первый квадрант на плоскости,  $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$ . Введем пространство функций дискретного аргумента  $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$ , и обозначим  $\mathbb{T}^2$  квадрат  $[-\pi, \pi]^2, h > 0, \tilde{h} = h^{-1}$ . Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате, как периодические функции, определенные на всей плоскости  $\mathbb{R}^m$  с основным квадратом периодов  $\mathbb{T}^2$ .

Для функций  $u_d(\tilde{x})$  можно определить дискретное преобразование Фурье  $\tilde{u}_d(\xi)$  [3], и функция  $\tilde{u}_d(\xi)$  будет периодической функций в  $\mathbb{R}^2$  с основным квадратом периодов  $\tilde{h}\mathbb{T}^2$ .

Вводится дискретный аналог пространства Шварца  $S(h\mathbb{Z}^2)$  и обозначение

$$\zeta^2 = h^{-2}((e^{-ih \cdot \xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih \cdot \xi_2} - 1)^2).$$

Пространство  $H^s(h\mathbb{Z}^2)$  состоит из дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства  $S(h\mathbb{Z}^2)$  по норме

$$\|u_d\|_s = \left( \int_{h\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Пространство  $H^s(K_d)$  состоит из дискретных функций из пространства  $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ , чьи носители содержатся в  $\overline{K_d}$ . Норма в пространстве  $H^s(K_d)$  индуцируется нормой пространства  $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ .

Если  $\tilde{A}_d(\xi)$  — измеримая периодическая функция в  $\mathbb{R}^2$  с основным кубом периодов  $h\mathbb{T}^2$ , мы называем ее символом.

**Определение.** Дискретным псевдодифференциальным оператором  $A_d$  с символом  $\tilde{A}_d(\xi)$  в дискретном квадранте  $K_d$  называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{h\mathbb{T}^2} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x} - \tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d.$$

Нас интересует разрешимость и аппроксимационные свойства дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in K_d, \quad (1)$$

в пространстве  $H^s(K_d)$  с граничными условиями

$$\sum_{\tilde{x}_1 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) h = f_d(\tilde{x}_2), \quad \sum_{\tilde{x}_2 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) h = g_d(\tilde{x}_1), \quad (2)$$

$$\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) h^2 = 0.$$

Дискретная задача (1), (2) имеет континуальный аналог, именно

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \quad (3)$$

$$\int_0^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_1 = f(x_2), \quad \int_0^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_2 = g(x_1), \quad (4)$$

$$\int_K u(x) dx = 0,$$

где  $A$  — псевдодифференциальный оператор с символом  $A(\xi)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

и допускающим волновую факторизацию [1] относительно  $K$  с индексом  $\varkappa$ , таким, что  $\varkappa - s = 1 + \delta$ ,  $|\delta| < 1/2$ . Однозначная разрешимость задачи (3), (4) была исследована в [2].

Специальный подбор дискретных функций  $f_d, g_d$  и дискретного псевдодифференциального оператора  $A_d$  приводит к следующему результату.

**Теорема.** Пусть  $f, g \in H^{s+1/2}(\mathbb{R})$ . Тогда дискретная краевая задача (1), (2) при достаточно малых  $h$  имеет единственное решение с априорной оценкой

$$\|u_d\|_s \leq \text{const}(\|f_d\|_{s+1/2} + \|g_d\|_{s+1/2})$$

с постоянной, не зависящей от  $h$ .

Если  $f, g \in S(\mathbb{R})$ ,  $\varkappa > 1$ , то справедлива следующая оценка для решений  $u$  и  $u_d$  континуальной задачи (3), (4) и ее дискретного аналога (1), (2)

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq C(f, g)h^\beta,$$

где постоянная  $C(f, g)$  зависит от функций  $f, g$ , а  $\beta > 0$  может быть произвольным.

Некоторые оценки сравнения в дискретном полупространстве были получены в [4].

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ, проект № FZWG-2020-0029.

1. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010.

2. *Vasil'ev V.B.* On some new boundary value problems in nonsmooth domains // J. Math. Sci. 2011. Vol. 173, no. 2, pp. 225–230.
3. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal. 2018. Vol. 23, no. 3, pp. 492–506.
4. *Васильев В.Б., Тарасова О.А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах // Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 174. С. 12–19.

## Априорные оценки решения одной краевой задачи

**А. В. Васильев, В. Б. Васильев, Н. В. Эберлейн**

*Белгород, Белгородский государственный университет*  
e-mail: 756914@bsu.edu.ru, vbv57@inbox.ru, 649377@bsu.edu.ru

Пространство Соболева–Слободецкого  $H^s(\mathbb{R}^2)$  — это гильбертово пространство с нормой

$$\|f\|_s = \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi \right)^{1/2},$$

где  $\tilde{f}$  обозначает преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Если  $D \subset \mathbb{R}^2$  — область, то  $H^s(D)$  — это подпространство  $H^s(\mathbb{R}^2)$ , состоящее из функций с носителями в  $\overline{D}$ .

Пусть  $A(\xi)$  — измеримая функция, определенная на  $\mathbb{R}^2$ . Псевдодифференциальным оператором  $A$  в области  $D$  с симво-

лом  $A(\xi)$  называется следующий оператор

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix \cdot \xi} A(\xi) \tilde{u}(\xi) d\xi, \quad x \in D.$$

В пространстве Соболева–Слободецкого  $H^s(C_+^a)$  [1] рассматривается следующая задача: найти функцию

$$U(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in C_+^a, \\ u_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \end{cases}$$

такую, что  $u_+ \in H^s(C_+^a), u_- \in H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$ , удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} (Au_+)(x) = 0, & x \in C_+^a, \\ (Au_-)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\}$ ,  $\Gamma = \partial C_+^a$ ,  $A$  — эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом  $A(\xi)$ ,

$$c_1 \leq |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2.$$

К уравнениям (1) добавляются следующие граничные условия:

$$\theta \cdot u_+|_{\partial C_+^a} + \omega \cdot u_-|_{\partial C_+^a} = \mu, \quad \eta \cdot \left( \frac{\partial u_+}{\partial n} \right) \Big|_{\partial C_+^a} + \gamma \cdot \left( \frac{\partial u_-}{\partial n} \right) \Big|_{\partial C_+^a} = \nu, \quad (2)$$

где  $\theta, \omega, \eta, \gamma$  — комплексные числа, принимающие различные значения на сторонах угла  $\partial C_+^a$ ,  $\mu \in H^{s-1/2}(\Gamma), \nu \in H^{s-3/2}(\Gamma)$  — заданные на  $\Gamma$  функции.

Подобная задача рассматривалась в [2] в предположении, что символ  $A(\xi)$  допускает волновую факторизацию [1] относительно конуса  $C_+^a$  с индексом  $\varkappa$  таким, что  $\varkappa - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$ , и была сведена к некоторой системе одномерных линейных интегральных уравнений.

Полученная система линейных интегральных уравнений в случае  $\varkappa = \alpha/2$  и предположения однородности степени  $\alpha/2$  элементов волновой факторизации допускает дальнейшую редукцию

к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей  $\mathcal{A}(\lambda)$ . Элементы матрицы  $\mathcal{A}(\lambda)$  строятся по элементам волновой факторизации и преобразования Меллина. Необходимым и достаточным для существования единственного решения задачи (1),(2) является условие

$$\inf |\det \mathcal{A}(\lambda)| > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda = 1/2. \quad (3)$$

Приводимый ниже результат связан со сделанными предположениями.

**Теорема.** *При выполнении условия (3) имеет место оценка*

$$\|U\|_s \leq \operatorname{const}(\|\mu\|_{s-1/2} + \|\nu\|_{s-3/2}).$$

Стоит отметить, что возможен другой выбор граничных условий для задачи линейного сопряжения [3], и в этом случае априорные оценки могут быть получены аналогично.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ, проект № FZWG-2020-0029.

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010.
2. *Vasilyev V.B.* On some transmission problems in a plane corner // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. Vol. 63, pp. 291–301.
3. *Vasilyev V.B., Eberlein N.V.* On solvability conditions for a certain conjugation problem // Axioms. 2021. Vol. 10, no. 234, pp. 1–11.

## О бэровской классификации локальной топологической энтропии автономных динамических систем

**А. Н. Ветохин**

*Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова*

e-mail: anveto27@yandex.ru

Следуя [1, стр. 274], приведем необходимое в дальнейшем определение локальной топологической энтропии. Пусть  $(X, d)$  —

локально компактное метрическое пространство, а  $f: X \rightarrow X$  — непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой  $d$  определим на  $X$  дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $f^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , —  $i$ -я итерация отображения  $f$ ,  $f^0 \equiv \text{id}_X$ . Зафиксируем точку  $x_0 \in X$ , для всяких  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r > 0$  и  $\rho > 0$  обозначим через  $N_d(f, r, n, x_0, \rho)$  максимальное число точек в шаре  $B_d(x_0, \rho) = \{x \in X : d(x_0, x) < \rho\}$ , попарные  $d_n^f$ -расстояния между которыми больше, чем  $r$ . Тогда *локальную энтропию* отображения  $f$  в точке  $x_0$  определяют формулой

$$h_d(f, x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x_0, \rho), \quad (1)$$

Отметим, что если метрику  $d$  заменить на эквивалентную ей метрику  $d'$ , то значение величины (1) не изменится. Пределы в формуле (1) существуют, так как величина  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x_0, \rho)$  не возрастает с уменьшением  $\rho$  и не убывает с уменьшением  $r$ .

По метрическому пространству  $\mathcal{M}$ , непрерывному отображению

$$f: \mathcal{M} \times X \rightarrow X \quad (2)$$

и точке  $x_0 \in X$  образуем функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), x_0). \quad (3)$$

В докладе для любого семейства (2) изучается функция (3) с точки зрения бэровской классификации функций. Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве  $\mathcal{M}$  называются непрерывные функции, и для всякого натурального числа  $p$  функциями  $p$ -го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций  $(p-1)$ -го класса.

**Теорема 1.** *Для любого отображения (2) и любого  $x_0 \in X$  функция (3) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве  $\mathcal{M}$ .*

Отметим, что из этого результата в силу теоремы Бэра [2, гл. IX, § 39, VI] вытекает, что для любого отображения (2) в полном метрическом пространстве  $\mathcal{M}$  найдется всюду плотное множество  $G$  типа  $G_\delta$  такое, что сужение функции  $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), x_0)$  на множество  $G$  непрерывно. Возникает естественный вопрос о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (3) в зависимости от выбора точки  $x_0$ .

На множестве последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , где  $x_k \in \{0, 1\}$ , введем метрику

$$d_{\Omega_2}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 2^{-\min\{i: x_i \neq y_i\}}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через  $\Omega_2$ . Отметим, что пространство  $\Omega_2$  гомеоморфно множеству Кантора на отрезке  $[0, 1]$  с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой.

Построим метрические пространства  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$ . Точками пространства  $\mathcal{B}$  являются, по определению, всевозможные (счетные) последовательности  $\mu = (\mu_k)_{k=1}^\infty$  натуральных чисел. Расстояние между двумя точками  $\mu$  и  $\nu$  определяется формулой

$$d_{\mathcal{B}}(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu; \\ \frac{1}{\min\{k: \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Отметим, что пространство  $\mathcal{B}$  гомеоморфно множеству иррациональных чисел на отрезке  $[0, 1]$  с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. Следуя работе [3], точками пространства  $\mathcal{C}$  назовем всевозможные пары  $(x, i)$ , где  $x \in \Omega_2$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , а расстояние между двумя точками  $(x, i)$  и  $(y, j)$  определим формулой

$$d_{\mathcal{C}}((x, i), (y, j)) = \begin{cases} d_{\Omega_2}(x, y), & \text{если } i = j; \\ 1, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В докладе [4, стр. 190–192] построено отображение (2) из  $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$  в  $\mathcal{C}$  такое, что для любой точки  $x_0$  пространства  $\mathcal{C}$  функция (3) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве  $\mathcal{B}$ .

**Теорема 2.** Если  $M = \mathcal{B}$ ,  $X = C$ , то найдется такое отображение (2), что для каждого  $i = 1, \dots, 4$  функция

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), ((0, 0, 0, \dots), i))$$

принадлежит  $(i - 1)$ -му бэровскому классу  $i = 1, \dots, 4$  и не принадлежит  $(i - 2)$ -му бэровскому классу  $i = 2, \dots, 4$ .

1. Кatok А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
3. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии семейства динамических систем, определенных на произвольном метрическом пространстве // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 8. С. 1005–1013.
4. Ветохин А.Н. Бэровский класс локальной топологической энтропии динамических систем // Сборник Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (1901–1973) (24-е совместное заседание Московского математического общества и Семинара имени И. Г. Петровского). Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ, 2021.

## О матричной форме теории обобщенных степеней Берса

Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарёва

Калуга, Калужский государственный университет  
им. К.Э. Циолковского

e-mail: gladyshev.yua@yandex.ru, losh-elena@yandex.ru

Впервые метод многократного интегрирования константы с определенными весовыми функциями с целью построения решений определенного класса линейных дифференциальных уравнений был предложен итальянским математиком Бельтрами [1]. Далее американский математик Л. Берс под названием обобщенные

степени (ОС) использовал эту конструкцию [2] для построения определенного развития теории функции комплексного переменного (ТФКП). Были даны приложения этой теории к решению уравнений газодинамики [3]. Это обобщение было проведено строго в рамках комплексного анализа, что ограничивало дальнейшее ее развитие. В работах [1] представлена другая матричная форма, что позволило обобщить метод ОС на случай систем уравнений с любым числом переменных. В последнее время была предложена еще одна форма метода — параметрическая [4, 5]. Основная задача сообщения — показать, что метод ОС можно использовать для построения решений задач квантовой электродинамики, оставаясь в рамках двумерной постановки.

Введем операторы вида

$$d_1 = a_1(x) \frac{d}{dx}, \quad d_2 = a_2(x) \frac{d}{dx}, \quad (1)$$

где  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  — положительные и непрерывные функции переменного  $x$ . Для простоты первоначально предположим, что операторы действуют в пространстве бесконечно дифференцируемых функций  $C^\infty$ . В дальнейшем, следуя Л. Берсу, операторы  $d_1$ ,  $d_2$  будем называть *присоединенными* друг к другу. Введем матричный оператор  $D$  и векторы  $V$ ,  $C$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_2 \\ d_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

при условии  $v_1, v_2 \in C^\infty$ , а  $c_1, c_2$  — константы.

В качестве правых обратных операторов  $I_1, I_2$ , следуя [2], возьмем простейший случай — интегральные операторы с переменным верхним пределом

$$I_1 = \int_{x_0}^x \frac{d\eta}{a_1(\eta)}, \quad I_2 = \int_{x_0}^x \frac{d\eta}{a_2(\eta)}, \quad (3)$$

при

$$d_1 I_1 = 1, \quad d_2 I_2 = 1. \quad (4)$$

Так как операторы  $d_1, d_2$  имеют непустые ядра, ибо  $d_1 c_1 = 0$ ,  $d_2 c_2 = 0$ , то все требования, необходимые для построения ОС,

выполнены. Определим ОС как

$$Z^{(n)}(x, x_0)C = \begin{cases} \begin{pmatrix} X_1^{(2i)}(x, x_0)c_1 \\ X_2^{(2i)}(x, x_0)c_2 \end{pmatrix}, & n = 2i, \\ \begin{pmatrix} X_1^{(2i+1)}(x, x_0)c_2 \\ X_2^{(2i+1)}(x, x_0)c_1 \end{pmatrix}, & n = 2i + 1, \end{cases} \quad (5)$$

где компоненты вектора  $Z^{(n)}C$  определены как

$$\begin{aligned} X_1^{(2i)}(x, x_0)c_1 &= (2i)!(I_1 I_2)^i c_1, \\ X_2^{(2i)}(x, x_0)c_2 &= (2i)!(I_2 I_1)^i c_2, \\ X_1^{(2i+1)}(x, x_0)c_2 &= (2i + 1)!I_1(I_2 I_1)^i c_2, \\ X_2^{(2i+1)}(x, x_0)c_1 &= (2i + 1)!I_2(I_1 I_2)^i c_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Из построения и свойств (3), (4) следует

$$DZ^{(n)}C = nZ^{(n-1)}C, \quad DX^{(0)}C = 0. \quad (7)$$

В некоторых случаях, например, когда  $a_1, a_2$  — степенные функции, степени достаточно просто находятся простым повторным интегрированием. В силу линейности операторов можно говорить о многочленах и при определенной норме о рядах, представленных как линейная комбинация ОС

$$V_n = \sum_{i=0}^n X^{(i)}C_i, \quad V = \sum_{i=0}^{\infty} X^{(i)}C_i. \quad (8)$$

Например, как указывал Берс [2], запишем функции

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \lambda^{2i}}{(2i)!} Z^{(2i)}(x, x_0)C = (\text{Cos } \lambda Z(x, x_0))C, \quad (9)$$

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \lambda^{2i+1}}{(2i + 1)!} Z^{(2i+1)}(x, x_0)C = (\text{Sin } \lambda Z(x, x_0))C. \quad (10)$$

Матричный и символический характер символов  $\text{Sin}$ ,  $\text{Cos}$  выделен заглавной буквой. Аналогичным образом можно записать гиперболические функции. Ряд классов специальных функций, например, цилиндрические функции, представимы в виде (9), (10).

Очевидно, справедливы соотношения

$$D \text{Sin } \lambda ZC = \lambda \text{Cos } \lambda ZC, \quad D \text{Cos } \lambda ZC = -\lambda \text{Sin } \lambda ZC.$$

В ряде работ [5, 6] методы ОС были использованы в теории специальных функций. Было проведено обобщение теории ОС на случай, когда функции порождающей пары имеют конечное число точек разрыва первого рода. Метод ОС нашел приложение при решении задач теории переноса в многослойных средах.

1. *Гладышев Ю.А.* Формализм Бельтрами–Берса и его приложения в математической физике. Калуга: КГПУ им. К.Э Циолковского, 1997.
2. *Bers L., Gelbart A.* On a class of differential equations in mechanics of continua // *Mathematics Quarterly of Applied Mathematics*. 194301. Pp. 168–188.
3. *Берс Л.* Математические основы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИИЛ, 1961.
4. *Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А.* Об использовании метода параметрических обобщенных степеней для построения решений одного класса дифференциальных уравнений // *Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна»*, 22–26 января 2022. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2022. С. 67–71.
5. *Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А.* Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши–Римана // *Материалы 21-й международной саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения»*, 31 января 2022 – 4 февраля 2022. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 99–102.
6. *Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А.* О некоторых новых методах решения краевых задач теории переноса в неоднородных твердых пластинах и оболочках // *Вестник Калужского университета*. 2017. № 2. С. 1–11.

# Аналог условия Ляпунова для однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

А. П. Жабко, И. В. Александрова

*Санкт-Петербург,*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

e-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru, i.v.aleksandrova@spbu.ru

Для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений известно условие Ляпунова существования и единственности решения матричного уравнения Ляпунова  $A^T V + V A = W$  в виде симметрической матрицы  $V$  для любой симметрической матрицы  $W$ . Это условие формулируется в терминах собственных чисел матрицы  $A$ . В данной работе рассматриваются системы однородных дифференциальных уравнений и предлагается вариант условия Ляпунова, играющий аналогичную роль.

Рассмотрим условие разрешимости уравнения в частных производных

$$\left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T f(x) = -W(x) \quad (1)$$

в виде однородной порядка  $k > 1$  функции  $V(x)$ , если функции  $f(x)$  и  $W(x)$  суть однородные функции порядков  $\mu > 1$  и  $l = k + \mu - 1$  соответственно. Разрешимость уравнения (1) можно интерпретировать как условие существования функции Ляпунова для вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2)$$

Положим  $t_0 = 0$ . Далее будем считать функции  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  положительно однородными и непрерывно дифференцируемыми функциями, а функцию  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — положительно однородной, непрерывной и положительно определенной. Тогда существует единственное непрерывно дифференцируемое по своим аргументам решение  $x(t, x^0)$  системы (2).

В работе [1] показано, что если система (2) асимптотически устойчива, то функция  $V(x)$ , удовлетворяющая перечисленным условиям, существует и положительно определена. Если система (2) не является асимптотически устойчивой, то уравнение (1) не обязательно разрешимо. Однако в случае разрешимости функция  $V(x)$  заведомо не является положительно определенной. В качестве аналога условия Ляпунова для однородных систем ОДУ предлагается следующее условие.

**Определение 1.** Будем говорить, что система (2) удовлетворяет условию Ляпунова для однородных систем ОДУ, если для любой положительно однородной функции  $W(x)$  порядка  $l = k + \mu - 1$  ( $k > 1$ ,  $\mu > 1$ ) существует решение уравнения (1) в виде положительно однородной порядка  $k > 1$  функции  $V(x)$ .

**Утверждение 1.** Если система (2) имеет равновесное решение  $x(t, x^0) \equiv x^0 \neq 0$  или периодическое решение ( $x(t + T, x^0) \equiv x(t, x^0)$  для любого  $t \geq 0$  при некотором  $T > 0$ ), то она не удовлетворяет условию Ляпунова.

Далее рассмотрим вопрос о единственности решения уравнения (1). Пусть  $V_1(x)$  и  $V_2(x)$  — произвольные решения этого уравнения. Тогда вдоль решений системы (2) эти функции удовлетворяют соотношению

$$V_i(x(t, x^0)) - V_i(x^0) = - \int_0^t W(x(s, x^0)) ds, \quad i = 1, 2.$$

Введем функцию  $V(x) = V_1(x) - V_2(x)$ . Очевидно, что

$$\left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T f(x) \equiv 0.$$

**Утверждение 2.** Пусть система (2) удовлетворяет условию Ляпунова в смысле определения 1. Если для некоторой точки  $\tilde{x}^0 \neq 0$  выполнено условие  $f(\tilde{x}^0) = g(\|\tilde{x}^0\|)\tilde{x}^0$ , причем  $g(\|\tilde{x}^0\|) \neq 0$ , то  $V(\tilde{x}^0) = 0$ .

**Утверждение 3.** Пусть система (2) удовлетворяет условию Ляпунова в смысле определения 1. Если для некоторого решения

$x(t, \hat{x}^0)$  системы (2) выполнено условие  $x(T, \hat{x}^0) = \alpha \hat{x}^0$ , где  $T > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , то  $V(x(t, \gamma \hat{x}^0)) = 0$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \geq 0$ . В частности,  $V(\hat{x}^0) = 0$ .

Рассмотрим теперь произвольное решение  $x(t, x^0)$  системы (2). Пусть интервал существования решения есть  $t \in (a, b)$ . Возможны следующие альтернативы:

1. Существует последовательность  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = a$  (или  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = b$ ) такая, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} x(t_j, x^0) = 0$ ;

2. Существует последовательность  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = a$  (или  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = b$ ) такая, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} x(t_j, x^0) = \omega \neq 0$ ;

3. Существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow a} \|x(t, x^0)\| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow b} \|x(t, x^0)\| = \infty.$$

Поскольку функция  $f(x)$  определена в  $\mathbb{R}^n$ , то в случае выполнения альтернатив 1 и 2 имеем  $a = -\infty$  или  $b = +\infty$ . Последовательное рассмотрение всех трех альтернатив приводит к следующему результату.

**Теорема.** Если система (2) удовлетворяет условию Ляпунова, то для любой положительно однородной функции  $W(x)$  порядка  $l = k + \mu - 1$  ( $k > 1$ ,  $\mu > 1$ ) существует единственное решение уравнения (1), которое представляет собой однородную функцию порядка  $k > 1$ .

Отметим, что в случае выполнения альтернативы 3 существенным для доказательства является переход к вспомогательной системе

$$\frac{dy}{d\tau} = f(y) - (y, f(y)) \cdot y, \quad (3)$$

осуществленный с помощью подстановок  $y(t) = x(t)/\|x(t)\|$  и

$$\tau = \int_0^t \|x(s, x^0)\|^{\mu-1} ds.$$

Здесь функция  $y(t)$  является проекцией решения  $x(t)$  системы (2) на сферу  $\|x\| = 1$  в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . При этом общее

решение системы (3) может трактоваться как динамическая система, заданная на компактном множестве.

Важно заметить, что условие Ляпунова в смысле определения 1 нашло применение при построении функционалов Ляпунова–Красовского для однородных дифференциально-разностных систем [2]. Интересные результаты об устойчивости решений таких систем при любых значениях запаздываний получены с помощью однородных функций Ляпунова в статье [3].

Работа частично поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых, проект МК-2301.2022.1.1.

1. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973.
2. *Zhabko A.P., Alexandrova I.V.* Complete type functionals for homogeneous time delay systems // *Automatica*. 2021. Vol. 125, art. no. 109456.
3. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // *Сибирский математический журнал*. 2012. Т. 53, № 3.

## Регуляризация задачи Валле–Пуассена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка

**А. И. Кашпар**

*Могилёв, Белорусско-Российский университет*

e-mail: alex.kashpar@tut.by

Исследуется краевая задача [1]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{S}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{S}_2(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \quad (2)$$

где  $(t, \mathbf{X}) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $I = [0, \omega]$ ;  $\mathbf{F} \in \mathbb{C}(D, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $D = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in I, \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1, \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\}$ ,  $0 <$

$\tilde{\rho}_i \leq \infty$ ,  $\mathbf{Y} \doteq d\mathbf{X}/dt$ ;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  — заданные вещественные матрицы; функция  $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$  удовлетворяет относительно  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  в области  $D$  условию Липшица (локально).

В данной работе, являющейся продолжением и обобщением [1], с помощью конструктивного метода [2] задача (1), (2) изучается в конечномерной банаховой алгебре  $\mathcal{B}(n)$  непрерывных матриц-функций с нормой  $\|\mathbf{X}\|_C = \max_{t \in I} \|\mathbf{X}(t)\|$ , где  $\|\cdot\|$  — норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, одна из норм, приведенных в [3, с. 21].

Вместо задачи (1), (2) рассматривается эквивалентная ей задача

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y}, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \mathbf{S}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{S}_2(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}. \quad (4)$$

Введём следующие обозначения:

$$\tilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{S}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{S}_2(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad h = \max_{t \in I} \|\mathbf{F}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0})\|,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad h_1 = \max_{t \in I} \|\mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0})\|,$$

$$s_i = \max_{t \in I} \|\mathbf{S}_i(t)\|, \quad h_2 = \max_{t \in I} \|\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0})\|,$$

$$\lambda_{\mathbf{U}} = \max_{0 \leq s \leq \tau \leq \omega} \|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|, \quad \lambda_{\mathbf{V}} = \max_{0 \leq s \leq \tau \leq \omega} \|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\|,$$

$$G = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in [0, \omega], \|\mathbf{X}\| \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\| \leq \rho_2\},$$

$$\tilde{G} = \{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C \leq \rho_2\},$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(s_1s_2 + L_1), \quad p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(s_1s_2 + L_1),$$

$$q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3L_2, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2L_2,$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_U(\tau, s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad \mathbf{K}_V(s, \tau) = \mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau),$$

где  $0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$  — интегральные матрицы уравнений  $d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$ ,  $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$ , ( $\mathbf{U}(0) = \mathbf{V}(0) = \mathbf{E}$ ),  $\mathbf{E}$  — единичная матрица;

$$\mathbf{P}_{UV}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau) d\tau,$$

$$\mathbf{Q}_{UV}(t) = \mathbf{U}(t) (\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})) \mathbf{V}(t);$$

$\Phi$  — линейный оператор,

$$\Phi\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t);$$

$L_i = L_i(\rho_1, \rho_2)$ , ( $i = 1, 2$ ) — постоянные Липшица для  $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$  в области  $G$ ;  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  — интегральные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\Phi^{-1} \times \\ &\times \left( \int_0^\omega \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s)\tilde{\mathbf{F}}(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s)) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds d\tau \right) \mathbf{V}(\varphi) d\varphi, \\ \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbf{U}(t)\Phi^{-1} \times \\ &\times \left( \int_0^\omega \int_\tau^t \mathbf{K}_U(\tau, s)\tilde{\mathbf{F}}(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s)) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds d\tau \right) \mathbf{V}(t). \end{aligned}$$

**Лемма 1.** Для того чтобы в случае однозначной обратимости оператора  $\Phi$  пара функций  $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$  представляла собой решение задачи (3), (4), необходимо и достаточно, чтобы эти функции являлись решением системы интегральных уравнений

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{UV}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}_{UV}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \quad (6)$$

С помощью модификации [2, § 3.4] обобщенного принципа сжимающих отображений [4, с. 94] доказана

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия

$$p_1\rho_1 + q_1\rho_2 + h_1 \leq \rho_1, \quad p_2\rho_1 + q_2\rho_2 + h_2 \leq \rho_2, \quad (7)$$

$$p_1 + q_2 < 1. \quad (8)$$

Тогда задача (5), (6) однозначно разрешима на множестве  $\tilde{G}$ , при этом справедлива оценка

$$\mathbf{Z} \leq (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}. \quad (9)$$

**Теорема.** Пусть оператор  $\Phi$  однозначно обратим и выполнены условия (7), (8). Тогда задача (3), (4) однозначно разрешима в области  $G$ , при этом справедлива оценка (9).

Для построения решения данной задачи разработан алгоритм классического типа, например, [5, с. 605], применительно к системе (5), (6).

1. Кашпар А.И., Лаптинский В.Н. Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 5. С. 570–583.
2. Лаптинский В.Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
4. Красносельский М.А. [и др.] Приближённое решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

# Оценка скорости стабилизации решений уравнения модифицированного ньютоновского гравитационного потенциала в неограниченной области

А. А. Клячин

Волгоград, Волгоградский государственный университет  
e-mail: aleksey.klyachin@volsu.ru

В работе [1] рассматривалось уравнение теории модифицированной ньютоновской динамики (MOND) и был установлен принцип максимума для его решений в неограниченной области. В частности, принцип максимума позволяет доказать существование предела ограниченного решения на бесконечности. Однако, больший интерес представляет не качественное поведение решений, а возможность дать какую либо количественную оценку отличия решения от предельного значения в терминах расстояния от некоторого центра. В настоящем докладе мы представляем соответствующий результат при определенных ограничениях на исследуемое решение.

Уравнения поля MOND приводят к модифицированной нелинейной версии уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \left( \frac{|\nabla u| \nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = g(x), \quad (1)$$

где  $g(x)$  — заданная в  $\mathbf{R}^3$  непрерывная функция, равная нулю вне некоторой ограниченной области  $D$ . Пусть  $u(x)$  — ограниченное в  $\mathbf{R}^3$  решение уравнения (1). Введем обозначение  $R_0 = \sup_{x \in D} |x|$ .

Получение основного результата опирается на использование функций вида

$$u(|x|) = \int_{R_0}^{|x|} \left( \frac{C_1^2 + C_1 \sqrt{C_1^2 + 4s^{2n-2}}}{2s^{2n-2}} \right)^{1/2} ds + C_2,$$

которые удовлетворяют уравнению (1) для любых постоянных  $C_1, C_2$ .

**Теорема.** Пусть  $u(x)$  — ограниченное решение уравнения (1) в области  $\mathbf{R}^3 \setminus D$ . Предположим, что  $\sup_{\mathbf{R}^3 \setminus D} |\nabla u| < +\infty$ . Тогда решение  $u(x)$  имеет предел

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = u_0,$$

причем

$$\max_{|x|=t} |u(x) - u_0| \leq \frac{c}{\ln \frac{t}{R_0}},$$

где постоянная  $c > 0$  не зависит от  $t$ .

1. *Klyachin A.A., Khoperskov A.V.* Maximum principle for solutions of the modified Newtonian gravitational potential equation in an unbounded domain // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения», 30 мая 2021 – 5 июня 2021. Геленджик – Краснодар. Кубанский гос. ун-т, 2021. С. 55–57.

## Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау

Д. Д. Кондакова, А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

*Ярославль, Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова*

e-mail: kondakovadd@mail.ru, anat\_kulikov@mail.ru,  
kulikov\_d\_a@mail.ru

Рассматривается периодическая краевая задача для двух версий обобщенного слабодиссипативного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$u_t = \alpha u - (d + ic)u|u|^2 - (f + ih)u|u|^4 - ibu_{xx}, \quad (1)$$

$$u_t = \alpha u - (d + ic)uV(u) - (f + ih)uV^2(u) - ibu_{xx}, \quad (2)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (3)$$

Здесь  $u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$  — комплекснозначная функция,  $d, c, f, h \in \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$  и, если  $f = 0$ , то  $d > 0$ ,  $\alpha = \pm 1, b > 0$ . Последние условия обеспечивают диссипативность в смысле нормы в пространстве  $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$  обеих краевых задач: (1), (3) и (2), (3).

$$\text{Наконец, } V(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u|^2 dx.$$

Краевая задача (1), (3) имеет счетный набор однопараметрических семейств решений по  $t$  решений

$$S_n(\varphi_n) : u_n(t, x) = \eta \exp(i\sigma_n t + i\varphi_n + inx), \quad (4)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\sigma_n = bn^2 - c\eta^2 - h\eta^4$ , а  $\eta$  — положительный корень уравнения

$$f\eta^4 + d\eta^2 - \alpha = 0,$$

если такой корень существует. Наконец,  $\varphi_n$  — произвольная действительная постоянная.

Изучен вопрос об устойчивости и локальных бифуркациях бегущих волн (4). Так, в частности, они устойчивы, если  $b > 2Q$ ,  $Q = c\eta^2 + 2h\eta^4$ , и они неустойчивы, если  $b < 2Q$ .

При  $b = b_* = 2Q$  реализуется критический случай в задаче об устойчивости одномерного инвариантного многообразия  $S_n(\varphi_n)$ .

Пусть  $b = b(\varepsilon) = b_* - \gamma\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр (т.е.  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n), 0 < \varepsilon_n \ll 1$ ),  $\gamma = \pm 1$ . При так выбранном  $b$  у краевой задачи (1), (3) в окрестности одномерных инвариантных многообразий  $S_n(\varphi_n)$  при соответствующем выборе  $\gamma$  существуют двумерные инвариантные торы  $T_n(\varepsilon)$ .

Получен ответ об устойчивости бифурцирующих инвариантных торов. Приведены асимптотические формулы для решений, их формирующих.

Для обоснований сформулированных утверждений используются методы инвариантных многообразий и нормальных форм в модифицированных вариантах, которые позволяют их использовать при анализе динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Кроме краевой задачи (1), (3) была рассмотрена краевая задача (2), (3). Отметим, что уравнение (2) принято называть нелокальным уравнением Гинзбурга–Ландау.

Дополним краевую задачу (2), (3) начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \quad (5)$$

Показано, что начально-краевая задача (2), (3), (5) глобально разрешима (решение существует при всех  $t > 0$ ), если  $f(x)$  принадлежит подходящему пространству Соболева  $\mathbb{H}_2$ , т.е.  $f(x)$  имеет период  $2\pi$  и  $f(x) \in \mathbb{W}_2^2[0, 2\pi]$ .

Для решений начально-краевой задачи (2), (3), (5) существует глобальный аттрактор в смысле определения из монографии [1] (см. гл. 1).

Соответствующие результаты для обеих краевых задач в частном случае  $f = h = 0$  опубликованы в работах [2, 3].

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

1. *Tetam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1997.
2. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 2. С. 1290–1299.
3. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау // Автомат. и телемех. 2021. № 2. С. 94–110.

# Обобщенное вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау. Устойчивость и локальные бифуркации одномодовых состояний равновесия

Д. А. Куликов

Ярославль, Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова  
e-mail: kulikov\_d\_a@mail.ru

Частный случай комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$u_t = u - (l + ic)u|u|^2 + (d + ib)u_{xx},$$

если  $c = 0, b = 0$  ( $l, d > 0$ ) получил название «вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау» (ВУГЛ, см., например, [1]). Его естественное обобщение может быть записано в следующем виде:

$$u_t = u - u|u|^{2p} + du_{xx}, \quad (1)$$

где  $p \in \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел), а  $u = u(t, x)$  — комплекснозначная функция. При  $p = 1$  получаем стандартный вариант ВУГЛ. Дополним уравнение (1) периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Уравнение (1) и краевые условия (2) записаны в нормированном виде после замен

$$t \rightarrow \gamma_1 t, \quad x \rightarrow \gamma_2 x, \quad u \rightarrow \gamma_3 u, \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0.$$

При всех  $p \in \mathbb{N}$  краевая задача (КЗ) (1), (2) может иметь однопараметрическое семейство одномодовых состояний равновесия

$$S_n(h) : u(t, x) = u_n(x) = \eta_n \exp(inx + ih),$$

где  $n = 0, \pm 1, \dots, \pm n_0$ ,  $h$  — произвольная действительная постоянная,  $\eta_n = (1 - dn^2)^{1/(2p)}$ . Такие состояния равновесия существуют при тех  $d, n$ , для которых  $1 - dn^2 > 0$ . Решения с номером  $n = 0$  существуют при всех  $d$ .

Предполагается изложить результаты анализа устойчивости состояний равновесия  $S_n$  в метрике фазового пространства решений КЗ (1), (2), а также провести анализ локальных бифуркаций одномерных инвариантных многообразий  $S_n(h)$  при смене ими устойчивости. Для  $p = 1, 2$  эти вопросы были изучены в работах [2, 3].

Справедливо утверждение.

**Теорема 1.** Семейство решений с номером  $n$  — локальный аттрактор, если  $d < d_n$  и все решения этого семейства неустойчивы, если  $d \geq d_n$ . Здесь

$$d_n = \frac{2}{(4 + 2p)n^2 - 1}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Семейство решений с номером  $n = 0$  — локальный аттрактор при любых значениях  $d$ .

Пусть

$$d_n(\varepsilon) = d_n(1 - \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad 0 < \varepsilon_0 \ll 1.$$

Справедливо утверждение.

**Теорема 2.** Существует  $\varepsilon_n > 0$  такое, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$  в окрестности состояний равновесия  $S_n(h)$  существует двухпараметрическое семейство состояний равновесия  $M_2(n, \varepsilon)$ , которые формируют неустойчивые двумерные инвариантные многообразия КЗ (1), (2).

Для решений, его формирующих, справедливы асимптотические формулы

$$u_n(x, \varepsilon) = \eta_n(\varepsilon) \exp(inx + ih_1) \left( 1 + \varepsilon^{1/2} \xi \cos(x + h_2) + o(\varepsilon) \right), \quad (3)$$

где  $\eta_n(\varepsilon) = (1 - d_n(\varepsilon)n^2)^{1/(2p)}$ ,  $\xi = \sqrt{\frac{2}{3(1 + 4n^2)}}$ . Наконец,  $h_1, h_2$  — произвольные действительные постоянные.

Обоснование результатов основано на использовании методов теории бесконечномерных динамических систем: методов инвариантных (интегральных) многообразий и нормальных форм.

Сочетание этих методов позволило задачу о бифуркациях состояний равновесия  $S_n(h)$  свести к анализу скалярного дифференциального уравнения

$$z' = -\frac{2\varepsilon}{1+4n^2}z + 3z^3, \quad z = z(t). \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение (4) принято называть нормальной формой или укороченной нормальной формой (см., например, [4]). При выводе дифференциального уравнения (4) использовался бесконечномерный аналог известного метода (алгоритма) Крылова–Боголюбова. Его применение позволяет получать асимптотические формулы для решений изучаемой краевой задачи (1), (2), в частности, уточнить асимптотические формулы (3).

Дифференциальное уравнение (4) имеет два неустойчивых (седловых) ненулевых состояния равновесия

$$E_{\pm}(n) : z_{\pm}(t) = z_{\pm} = \pm\xi\sqrt{\varepsilon}.$$

Нулевое состояние равновесия дифференциального уравнения (4) асимптотически устойчиво. Доказательство теоремы 2, в частности, включает фрагмент, в котором показано, что состоянию равновесия  $E_+(n)$  соответствует семейство состояний равновесия  $M_2(n, \varepsilon)$  КЗ (1), (2), а состоянию равновесия  $E_-(n)$  соответствует тоже самое многообразие  $M_2(n, \varepsilon)$ . Тем самым показано, что при всех  $p \in \mathbb{N}$  для краевой задачи (1), (2) характерны докритические бифуркации.

1. Aronson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Reviews of modern physics. 2002. Vol. 74, pp. 99–143.
2. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Состояния равновесия вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестник МИФИ. 2017. Т. 6, № 6. С. 496–502.
3. Куликов Д.А. Обобщенный вариант вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестник МИФИ. 2020. Т. 9, № 4. С. 329–337.
4. Гукенгеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.

# Конструктивный анализ линейной интегро-дифференциальной задачи периодического типа

**В. Н. Лаптинский**

*Могилёв, Белорусско-Российский университет*

e-mail: lavani@tut.by

Исследуется задача отыскания  $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$  из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (1)$$

$$\int_0^\omega A(\tau)x(\tau)d\tau = - \int_0^\omega f(\tau)d\tau, \quad (2)$$

$$\int_0^\omega \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \quad (3)$$

где  $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $f \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Psi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $\mu_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;  $I = [0, \omega]$ ,  $\omega > 0$ ; (1), (2) представляют собой периодическую краевую задачу в постановке по методу регуляризации [1], [2, гл. 3]; (3) при  $k = \infty$  является интегральным условием типа [3, с. 264], более широкий круг таких условий описан в [4, гл. IX, § 5]. Вводятся также матрицы  $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ , возможно, базисного типа [2, гл. 4], подчинённые условию  $\Phi_i(0) = \Phi_i(\omega)$ .

В данной работе метод [2, гл. 4] развит на основе [5, 6] применительно к задаче (1)–(3). Сначала определяется принципиальная структура искомого решения. Пусть эта задача разрешима. Для возможных решений класса  $\mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$  системы (3) с помощью подхода [5, 6] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение типа [2, гл. 4]

$$x(t) = y(t) + \int_0^\omega Q(t, \tau)y(\tau)d\tau + q(t), \quad (4)$$

где  $y(t)$  — вспомогательная функция, аналогичная [2, гл. 4], вырожденное ядро  $Q(t, \tau)$  представлено через  $\Phi_i(t)$ ,  $\Psi_i(t)$  на основе

алгоритма

$$Q_{j+1}(t, \tau) = Q_j(t, \tau) - \left[ \Phi_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t, s) \Phi_{j+1}(s) ds \right] \times \\ \times \left( \widetilde{\Psi_{j+1} R_{j+1}} \right)^{-1} \left[ \Psi_{j+1}(\tau) + \int_0^\omega \Psi_{j+1}(s) Q_j(s, \tau) ds \right], \quad j = \overline{0, k-1},$$

тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку  $I$ .

Функция  $y(t)$  поэтапно в рамках соответствующего алгоритма доопределяется с сохранением произвола при построении функций  $Q_m(t, \tau)$ ,  $q_m(t)$  так, что  $Q_0(t, \tau) = 0$ ,  $q_0(t) = 0$ ,  $Q(t, \tau) = Q_k(t, \tau)$ ,  $q(t) = q_k(t)$ ,  $y(t) = y_k(t)$ ,

$$R_{j+1}(t) = \Phi_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t, \tau) \Phi_{j+1}(\tau) d\tau,$$

$$q_{j+1}(t) = q_j(t) + \delta_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t, \tau) \delta_{j+1}(\tau) d\tau,$$

где

$$\delta_{j+1}(t) = \Phi_{j+1}(t) \left( \widetilde{\Psi_{j+1} R_{j+1}} \right)^{-1} \left( \mu_{j+1} - \int_0^\omega \Psi_j(\tau) q_j(\tau) d\tau \right),$$

при этом предполагается

$$\det \widetilde{\Psi_{j+1} R_{j+1}} \neq 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \quad (5)$$

Соотношение (4) принимается за основу как представление типа [2, гл. 4] решения задачи (1)–(3). С помощью [2, гл. 3] установлено, что эта задача в представлении (4) при выполнении условий (5) и

$$\det \tilde{A} \neq 0, \quad (6)$$

эквивалентна интегральной задаче

$$y(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t, \tau) A(\tau) \left[ y(\tau) + \int_0^\omega Q(\tau, z) y(z) dz \right] d\tau - \\ - \int_0^\omega Q(t, \tau) y(\tau) d\tau + F(t), \quad (7)$$

где

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1} \int_0^\omega A(\sigma) d\sigma, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\tilde{A}^{-1} \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma, & 0 \leq t < \tau \leq \omega, \end{cases}$$

$$F(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t, \tau) [A(\tau)q(\tau) + f(\tau)] d\tau - q(t) - \tilde{A}^{-1} \int_0^\omega f(\tau) d\tau.$$

Приняты следующие обозначения:

$$\alpha = \max_{t \in I} \|A(t)\|, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}\|, \quad b = \max_{t \in I} \int_0^\omega \|Q(t, \tau)\| d\tau, \\ q = \frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \omega^2 (1 + b) + b, \quad \sigma = \max_{t \in I} \|q(t)\|, \quad h = \max_{t \in I} \|F(t)\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — любая из норм, приведенных в [7, с. 21].

**Лемма.** При выполнении условия  $q < 1$  интегральная задача (7) однозначно разрешима, при этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq h/(1 - q).$$

**Теорема.** Пусть выполнены условия (5), (6), а также  $q < 1$ . Тогда решение задачи (1)–(3) в представлении (4) существует и единственно, при этом справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq (1 + b)h/(1 - q) + \sigma.$$

Для построения решения используется классический метод последовательных приближений, например, [3, с. 605].

**Замечание.** Применение метода Гаусса к системе (3) на основе

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \Phi_i(t) c_i + y(t)$$

приводит к её решению типа (4) с более сложным алгоритмом построения векторов  $c_i$ .

1. *Лаптинский В.Н.* К методам регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений // Междунар. матем. конф. «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2021. С. 98–100.
2. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 1998.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
4. *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскнер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. *Лаптинский В.Н.* К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Гродно: ГрГУ, 2004. Ч. 1. С. 81–82.
6. *Лаптинский В.Н.* Об одной задаче теории векторных пространств // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2008. Ч. 3. С. 65–66.
7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

## Об аппроксимации показателя Изобова

**Е. К. Макаров**

*Минск, Институт математики НАН Беларуси*

e-mail: jcm@im.bas-net.by

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов  $A$  такой, что  $\|A(t)\| \leq M < +\infty$  для всех  $t \geq 0$ . Обозначим матрицу Коши системы (1) через  $X_A$ , а ее старший показатель через  $\lambda_n(A)$ . Вместе с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей возмущений  $Q$  такой, что

$$\|Q(t)\| \leq N_Q \exp(-\sigma t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где  $\sigma > 0$ . Обозначим старший показатель системы (2) через  $\lambda_n(A + Q)$ .

Пусть  $\mathfrak{M}_\sigma(A)$  — множество всех возмущений  $Q$ , удовлетворяющих условию (3) и имеющих соответствующую размерность. Любое  $Q \in \mathfrak{M}_\sigma$  называется *сигма-возмущением*, а число  $\nabla_\sigma(A) := \sup\{\lambda_n(A + Q) : Q \in \mathfrak{M}_\sigma(A)\}$  называется [1; 2, с. 214] *старшим сигма-показателем* системы (1). В [1] доказано, что сигма-показатель может быть вычислен с помощью следующего алгоритма:

$$\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\xi_m(\sigma)}{m},$$

$$\xi_m(\sigma) = \max_{i < m} (\ln \|X_A(m, i)\| + \xi_i(\sigma) - \sigma i), \quad \xi_1 = 0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Известно [2, с. 216], что  $\nabla_\sigma(A)$  является выпуклой монотонно убывающей функцией на  $[0, +\infty[$ , причем  $\nabla_\sigma(A) = \lambda_n(A)$  для всех  $\sigma > \sigma_0(A)$ , где  $\sigma_0(A) \leq 2M$  — некоторое положительное число.

Альтернативное представление для величины  $\xi_m(\sigma)$  было предложено в [3]. Пусть  $\mathcal{D}(m)$  — множество всех непустых множеств  $d \subset \{1, \dots, m-1\} \subset \mathbb{N}$ . Будем предполагать, что для каждого  $d \in \mathcal{D}(m)$  элементы  $d$  нумеруются в порядке возрастания, так что  $d_1 < d_2 < \dots < d_s$  и  $d = \{d_1, d_2, \dots, d_s\}$ , где  $s = |d|$  — это число элементов множества  $d$ . Пусть также  $\|d\| := d_1 + \dots + d_s$  для  $d \in \mathcal{D}(m)$  и  $\|d\| := 0$  для  $d = \emptyset$ . Кроме того, для удобства мы предполагаем, что  $d_0 = 0$  и  $d_{s+1} = m$  для каждого  $d \in \mathcal{D}(m) := \mathcal{D}(m) \cup \{\emptyset\}$ . Заметим, что мы не включаем эти дополнительные элементы в множество  $d$ . При указанных предположениях, определим величину  $\Xi(m, d)$  равенством

$$\Xi(m, d) := \sum_{i=0}^s \ln \|X_A(d_{i+1}, d_i)\|,$$

где  $m \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \mathcal{D}(m)$  и  $s := |d|$ . Согласно [3] выполнено равенство

$\xi_m(\sigma) = \max_{d \in \mathcal{D}_0(m)} (\Xi(m, d) - \sigma \|d\|)$ , и поэтому

$$\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \max_{d \in \mathcal{D}_0(m)} (\Xi(m, d) - \sigma \|d\|). \quad (4)$$

Для построения возмущений  $Q$ , обеспечивающих значения  $\lambda_n(A + Q)$ , близкие к  $\nabla_\sigma(A)$ , полезно знать некоторые (или все) последовательности  $d(m) \in \mathcal{D}_0(m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , такие, что

$$\nabla_\sigma(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} (\Xi(m, d(m)) - \sigma \|d(m)\|). \quad (5)$$

**Предложение 1** (см. [1; 2, с. 215]). *Если  $b \in \mathcal{D}_0(m)$  удовлетворяет условию  $\xi_m(\sigma) = \Xi(m, b) - \sigma \|b\|$ , то для каждого  $i \in \{1, \dots, s\}$  выполнено неравенство*

$$b_{i+1} - b_i \geq \frac{\sigma}{2M} b_i,$$

где  $b = \{b_1, \dots, b_s\}$ ,  $s = |b|$ .

Основываясь на теории характеристических векторов (см. [4]) можно предположить, что некоторую информацию о последовательностях  $d(m)$  в (5) можно получить, зная величины угловых коэффициентов опорных прямых к графику  $\nabla_\sigma(A)$ . Поскольку результатов такого рода пока нет, здесь мы рассматриваем некоторую упрощенную версию задачи. Для этого мы ограничим число точек разбиения  $d_i$  в (4) на каждом отрезке  $[0, m]$  некоторым числом  $k \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $\mathcal{D}^k(m) \subset \mathcal{D}(m)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  — множество всех  $d \in \mathcal{D}(m)$ , таких, что  $|d| \leq k$ . Положим также  $\mathcal{D}_0^k(m) := \mathcal{D}^k(m) \cup \{\emptyset\}$ .

**Определение.** Число

$$\nabla_\sigma^k(A) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \max_{d \in \mathcal{D}_0^k(m)} (\Xi(m, d) - \sigma \|d\|).$$

будем называть *k-точечной аппроксимацией* для  $\nabla_\sigma(A)$ .

**Предложение 2.** *Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  справедливы следующие утверждения.*

$$1) \nabla_\sigma(A) \geq \nabla_\sigma^k(A) \geq \lambda_n(A) \text{ при всех } \sigma > 0.$$

- 2)  $\nabla_\sigma^k(A)$  — выпуклая монотонно убывающая функция на  $[0, +\infty[$  такая, что  $\nabla_\sigma(A) = \lambda_n(A)$  для всех  $\sigma > \sigma_0(A)$ .  
 3) Если  $b \in \mathcal{D}_0^k(m)$  удовлетворяет условию

$$\Xi(m, b) - \sigma \|b\| = \max_{d \in \mathcal{D}_0^k(m)} (\Xi(m, d) - \sigma \|d\|), \quad (6)$$

то выполнено неравенство  $\sigma \|b\| \leq 2Mt$ .

Для каждого  $\sigma > 0$  обозначим множество всех  $b \in \mathcal{D}_0^k(m)$ , удовлетворяющих условию (6), через  $\mathcal{B}_\sigma^k(m)$ . Положим

$$V_\sigma(A) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \min_{b \in \mathcal{B}_\sigma^k(m)} \frac{\|b\|}{m}, \quad T_\sigma(A) = \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \max_{b \in \mathcal{B}_\sigma^k(m)} \frac{\|b\|}{m}.$$

Множество угловых коэффициентов опорных прямых, проведенных к графику некоторой выпуклой функции  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  в точках  $(s, f(s))$ , где  $s \in [0, +\infty[$ , обозначим через  $\mathcal{S}_s(f)$ .

**Теорема.** Множество  $\mathcal{S}_\sigma(\nabla_\sigma^k(A))$  при любых  $\sigma > 0$  совпадает с отрезком  $[V_\sigma(A), T_\sigma(A)]$ .

1. Изобов Н.А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1186–1192.
2. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
3. Макаров Е.К., Марченко И.В., Семерикова Н.В. Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 215–224.
4. Макаров Е.К. О взаимосвязи между характеристическими функциями и слабыми характеристическими показателями // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 3. С. 393–399.

# Регуляризация периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати

О. А. Маковецкая

Могилев, Белорусско-Российский университет

e-mail: olya.makzi@gmail.com

Изучается краевая задача типа [1]

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A(t)X + XB(t) + \\ &+ Q_1(t)XQ_2(t)XQ_3(t) + F(t, X) \equiv S(t, X), \end{aligned} \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где  $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A, B, Q_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$ . Предполагается, что матрица-функция  $F(t, X)$  в области  $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$  удовлетворяет относительно  $X$  условию Липшица (локально);  $F(t, 0) \neq 0$ ,  $I = [0, \omega]$ ,  $\omega > 0$ ,  $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$ .

С помощью конструктивного метода [2, гл. 3] краевая задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре  $\mathcal{B}(n)$  непрерывных матриц-функций с нормой  $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_{t \in I} \|X(t)\|$ . Согласно методу [3], решение этой задачи разыскивается в виде

$$X(t) = C + Y(t), \quad (3)$$

где  $C$  — постоянная матрица,  $Y(t)$  — матрица, подчиненная условиям

$$Y(0) = Y(\omega), \quad \int_0^{\omega} [A(\tau)Y(\tau) + Y(\tau)B(\tau)] d\tau = 0.$$

Отметим, что метод [3] разработан применительно к линейной периодической задаче.

Обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho\}, \quad D = \{X(t) : \|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho\},$$

$$M = \int_0^\omega A(\tau) d\tau, \quad N = - \int_0^\omega B(\tau) d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi\|^{-1}, \quad \alpha = \max_{t \in I} \|A(t)\|, \quad \beta = \max_{t \in I} \|B(t)\|,$$

$$\delta_i = \max_{t \in I} \|Q_i(t)\|, \quad h = \max_{t \in I} \|F(t, 0)\|,$$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &= \gamma\delta\omega \left[ 1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right] \rho^2 + \\ &+ \gamma\omega \left[ L + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + L)\omega \right] \rho + \gamma\omega h \left[ 1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right], \end{aligned}$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\omega(\delta\rho^2 + L\rho + h),$$

$$\varphi_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)\omega^2 [\delta\rho^2 + (\alpha + \beta + L)\rho + h],$$

$$q(\rho) = \gamma\delta\omega [(\alpha + \beta)\omega + 2] \rho + \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + L)\omega^2 + \gamma L\omega,$$

где  $\delta = \delta_1\delta_2\delta_3$ ,  $0 < \rho < \tilde{\rho}$ ,  $L = L(\rho) > 0$  — постоянная Липшица для  $F(t, X)$  в области  $D_\rho$ ,  $\Phi$  — линейный оператор, определенный равенством  $\Phi Z = MZ - ZN$ ;  $\|\cdot\|$  — подходящая норма матриц в  $\mathcal{B}(n)$ , например, любая из норм, приведенных в [4, с. 21].

**Теорема 1.** Пусть матрицы  $M, N$  не имеют общих характеристических чисел, а также выполнены следующие условия:  $\varphi(\rho) \leq \rho$ ,  $q(\rho) < 1$ . Тогда в области  $D_\rho$  решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо в виде (3), при этом справедливы оценки  $\|C\| \leq \varphi_1(\rho)$ ,  $\|Y\|_{\mathbb{C}} \leq \varphi_2(\rho)$ .

Эта теорема доказывается с помощью модификации [2, гл.3] обобщенного принципа сжимающих отображений [5, с. 94] применительно к эквивалентной интегральной задаче

$$\begin{aligned} C = -\Phi^{-1} \int_0^\omega [Q_1(\tau)(C + Y(\tau))Q_2(\tau)(C + Y(\tau))Q_3(\tau) + \\ + F(\tau, C + Y(\tau))] d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

$$Y(t) = \Phi^{-1} \int_0^{\omega} [K_A(t, \tau)S(\tau, C + Y(\tau)) + K_B(t, \tau)] d\tau, \quad (5)$$

где

$$K_H(t, \tau) = \begin{cases} \int_0^{\tau} H(\sigma) d\sigma, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\int_{\tau}^{\omega} H(\sigma) d\sigma, & 0 \leq t < \tau \leq \omega, \end{cases} \quad H = \{A, B\}.$$

Для построения решения системы матричных интегральных уравнений (4), (5) предлагается алгоритм в дифференциальной форме

$$\frac{dY_{k+1}(t)}{dt} = S(t, C_k + Y_k(t)), \quad (6)$$

$$Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$\int_0^{\omega} [A(\tau)Y_k(\tau) + Y_k(\tau)B(\tau)] d\tau = 0, \quad (8)$$

где в качестве начального приближения  $C_0, Y_0$  приняты постоянные матрицы, определяемые из условия (7) для приближения  $C_1, Y_1$ , при этом  $Y_0 = 0$ , матрица  $C_0$  определяется из уравнения

$$C_0 = -\Phi^{-1} \int_0^{\omega} [Q_1(\tau)C_0Q_2(\tau)C_0Q_3(\tau) + F(\tau, C_0)] d\tau,$$

при этом  $X_k(t) = C_k + Y_k(t)$ . С помощью регуляризаторов, используемых в [6], на основе (6)–(8) получены рекуррентные интегральные соотношения типа [6] для вычисления матриц  $C_i, Y_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда в области  $D_\rho$  решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентными интегральными соотношениями и удовлетворяющих условиям (7), (8).

1. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — existence and uniqueness // *Journ. Mathem. Anal. and Appl.* 1992. Vol. 167, pp. 505–515.
2. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 1998.
3. *Лаптинский В.Н.* Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений // *Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* 1990. № 5. С. 25–30.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости М.: Наука, 1967.
5. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
6. *Лаптинский В.Н., Маковецкая О.А.* Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати // *Дифференц. уравнения.* 2018. Т. 54, № 7. С. 937–946.

## Оператор Коши и задачи управления для функционально-дифференциальных систем

**В. П. Максимов**

*Пермь, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет  
e-mail: maksimov@econ.psu.ru*

Предлагаемый подход к задачам управления существенно использует идеи и результаты теории Абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ), построенной Н.В. Азбелевым и Л.Ф. Рахматуллиной и систематически изложенной в [1, 2]. АФДУ — это уравнение  $\mathcal{L}y = f$  с оператором  $\mathcal{L}$ , действующим из банахова пространства  $\mathbf{D}$ , изоморфного прямому произведению  $\mathbf{V} \times R^n$ , где  $\mathbf{V}$  — некоторое банахово пространство. Основная идея приложений теории АФДУ состоит в подходящем выборе пространства  $\mathbf{D}$  при рассмотрении конкретных новых задач. Такой выбор позволяет, оставаясь в рамках

общей теории, применять стандартные схемы и утверждения при рассмотрении задач, которые ранее требовали индивидуального подхода и специальных конструкций. Такой подход продемонстрировал свою эффективность при изучении широких классов актуальных задач, см. [2]. Здесь мы следуем концепции АФДУ при рассмотрении задач управления.

Пусть  $\mathcal{J} = \{\Lambda, Y\} : \mathbf{B} \times R^n \rightarrow \mathbf{D}$  — линейный изоморфизм и  $\mathcal{J}^{-1} = [\delta, r]$ . Нормы в пространствах  $\mathbf{B} \times R^n$  и  $\mathbf{D}$  определены равенствами

$$\| \{z, \beta\} \|_{\mathbf{B} \times R^n} = \| z \|_{\mathbf{B}} + | \beta |, \quad \| x \|_{\mathbf{D}} = \| \delta x \|_{\mathbf{B}} + | r x |.$$

При таком определении норм изоморфизм  $\mathcal{J}$  является изометрическим.

Оператор  $\mathcal{L} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$  предполагается ограниченным. Имеет место разложение

$$\mathcal{L}y = Q\delta y + A\gamma y.$$

Здесь  $Q = \mathcal{L}\Lambda : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$  — главная часть, а  $A = \mathcal{L}Y : R^n \rightarrow \mathbf{B}$  — конечномерная часть оператора  $\mathcal{L}$ . Ниже предполагается, что оператор  $Q$  обратим.

Рассмотрим абстрактную задачу управления относительно заданной системы линейных целевых функционалов

$$\mathcal{L}y = Fu, \quad ry = 0, \quad \ell y = \beta. \quad (1)$$

Здесь управление  $u$  принадлежит сепарабельному гильбертову пространству  $\mathbf{H}$ ,  $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B}$  — линейный ограниченный оператор, цель управления — достижение заданного векторного значения  $\beta \in R^N$  линейным ограниченным вектор-функционалом  $\ell : \mathbf{D} \rightarrow R^N$  на траектории системы  $\mathcal{L}y = Fu$  с условием  $ry = 0$ . Любое управление  $u$  порождает единственную траекторию  $y = CFu$ , где  $C : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$  — оператор Коши (оператор Грина главной краевой задачи  $\mathcal{L}y = f, ry = 0$ ).

Обозначим  $\ell_j, j = 1, \dots, N$ ,  $j$ -ю компоненту вектор-функционала  $\ell$ . Пусть  $m_j = \ell_j CF$ , сохраним это обозначение и для элемента, порождающего функционал  $m_j$ :  $m_j u = \langle m_j, u \rangle_{\mathbf{H}}$ . Пусть, далее,  $w_{jk} = \langle m_j, m_k \rangle_{\mathbf{H}}$ .

**Теорема 1.** *Задача (1) разрешима при любом  $\beta \in R^N$  тогда и только тогда, когда обратима  $(N \times N)$ -матрица  $W = \{w_{jk}\}$ .*

Рассмотрим абстрактную задачу управления с линейными ограничениями на управление

$$\mathcal{L}y = Fu, \quad ry = 0, \quad \ell y = \beta, \quad \Lambda u \leq \gamma, \quad (2)$$

где  $\Lambda = \text{col}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_1})$  — линейный ограниченный вектор-функционал из  $\mathbf{H}$  в  $R^{N_1}$ . Множество  $S$  всех  $\beta \in R^N$ , для которых разрешима задача (2), называется *множеством достижимости*. Ниже предлагается способ построения внутренних (нижних по включению) оценок множества  $S$ .

Определим вектор-функционал  $M: \mathbf{H} \rightarrow R^N$  равенством  $Mu = \text{col}(m_1u, \dots, m_Nu)$ . По определению, значения этого вектор-функционала совпадают со значениями целевого вектор-функционала на траекториях системы, порождаемых управлением  $u$ . Зафиксируем систему векторов  $\{\mu_1, \dots, \mu_K\}$ ,  $\mu_i \in R^N$ , и линейно независимую систему  $\{u_1, \dots, u_\sigma\}$  элементов пространства  $\mathbf{H}$ .

Каждому вектору  $d = \text{col}(d_1, \dots, d_\sigma)$  поставим в соответствие управление

$$u_d = \sum_{j=1}^{\sigma} d_j \cdot u_j. \quad (3)$$

Рассмотрим конечную совокупность задач линейного программирования

$$z_i \equiv \mu'_i \cdot Mu_d \rightarrow \max, \quad \Lambda u_d \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, K \quad (4)$$

относительно неизвестных  $d_1, \dots, d_\sigma$ . Пусть  $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{K_1}}$  — подмножество набора  $\{\mu_i\}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , для каждого элемента которого соответствующая задача (4) имеет решение

$$d^{i_j} = \text{col}(d_1^{i_j}, \dots, d_\sigma^{i_j}), \quad j = 1, \dots, K_1.$$

Каждое такое решение при его подстановке в (3) определяет программное управление, которое дает достижимое значение целевого вектор-функционала  $\rho^{i_j}$ . Обозначим через  $P \subset R^N$  множество всех выпуклых комбинаций таких точек  $\rho^{i_j}$ ,  $j = 1, \dots, K_1$ .

**Теорема 2.** *Множество  $P$  дает нижнюю по включению оценку множества достижимости  $S$ .*

Ключевую роль в приведенных построениях играет оператор Коши, свойства которого для различных классов функционально-дифференциальных систем исследуются в [3–7].

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22–21–00517, <https://rscf.ru/project/22-21-00517/>.

1. *Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F.* Theory of linear abstract functional differential equations and applications // *Memoirs of Different. Equat. and Math. Physics.* 1996. Vol. 8, pp. 1–2.
2. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. New York, Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2007.
3. *Maksimov V.P.* The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki.* 2019. Vol. 29, no. 1, pp. 40–51.
4. *Максимов В.П.* К вопросу о построении и оценках матрицы Коши для систем с последствием // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2019. Т. 25, № 3. С. 153–162.
5. *Максимов В.П.* Об одном классе линейных непрерывно-дискретных систем с дискретной памятью // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2020. Т. 30, № 3. С. 385–95.
6. *Максимов В.П.* О построении программных управлений в задаче о достижимых значениях целевых функционалов для динамических моделей экономики с дискретной памятью // *Прикладная математика и вопросы управления.* 2020. № 3. С. 89–104.
7. *Максимов В.П.* О внутренних оценках множеств достижимости для непрерывно-дискретных систем с дискретной памятью // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2021. Т. 27, № 3. С. 141–151.

# Об асимптотических свойствах функции Коши дифференциального уравнения нейтрального типа

В. В. Малыгина

Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет

e-mail: mavera@list.ru

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^K a_k \dot{x}(t - kh) = \sum_{j=0}^J b_j x(t - jh), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

где  $h > 0$ ,  $K \in \mathbb{N}$ ,  $J \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_k, b_j \in \mathbb{R}$ .

Чтобы однозначно определить решение уравнения (1), функции  $x$  и  $\dot{x}$  при отрицательных значениях аргумента доопределим начальными функциями  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно (не предполагая непрерывной «стыковки»  $x(0) = \varphi(0)$  и условия  $\psi = \dot{\varphi}$ ).

Обозначим через  $S_h$  оператор сдвига, действующий в пространствах функций, заданных на полуоси  $\mathbb{R}_+$ , и определяемый условиями

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t - h), & t - h \geq 0, \\ 0, & t - h < 0. \end{cases}$$

Введем операторы  $S$  и  $T$  равенствами

$$Sy = \sum_{k=1}^K a_k (S_h^k y), \quad Ty = \sum_{j=0}^J b_j (S_h^j y)$$

и наряду с уравнением рассмотрим неоднородное операторное уравнение

$$(I - S)\dot{x} = Tx + f \quad (2)$$

относительно абсолютно непрерывной на каждом конечном отрезке функции  $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  с суммируемым на каждом конечном

отрезке внешним возмущением  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Уравнение (1) с заданными функциями  $\varphi$  и  $\psi$  можно переписать в виде (2), если положить

$$f(t) = \sigma(t) = \sum_{k=1}^K a_k \psi(t - kh) \chi_k(t) + \sum_{j=1}^J b_j \varphi(t - jh) \chi_j(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где  $\chi_n(t)$  — характеристическая функция множества  $(-\infty, nh)$ .

Как известно (см., напр., [1, с. 84]), уравнение (2) с произвольными значениями  $x(0) \in \mathbb{R}$  и локально суммируемым внешним возмущением  $f$  однозначно разрешимо, и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s)f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где функция  $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *фундаментальным решением*, а  $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — *функцией Коши* уравнения (2).

Введем определения устойчивости для уравнения (1). Подчеркнем, что, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, начальные условия для уравнения (1) задаются не в одной точке  $t = 0$ , а на множестве  $[-\omega, 0]$ , где  $\omega = \max\{Kh, Jh\}$ .

Функции  $\varphi$  и  $\psi$  входят в пространство  $L_1[-\omega, 0]$ , но могут быть заданы в более узком линейном пространстве, снабженном собственной нормой. Это означает выбор аналогичного подпространства пространства  $L_1[0, \omega]$  применительно к введенной выше функции  $\sigma$ . Таким образом, свойства устойчивости решения уравнения *связаны с выбором множества начальных функций на промежутке  $[0, \omega]$* , и этот факт должен найти отражение в определениях устойчивости.

Пусть  $\mathfrak{X} \subseteq L_1[0, \omega]$  — банахово пространство измеримых на промежутке  $[0, \omega]$  функций. Определим семейство  $\{K_t\}_{t \geq 0}$  линейных непрерывных на пространстве  $\mathfrak{X}$  функционалов формулой

$$K_t(\sigma) = \int_0^t Y(t-s)\sigma(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

**Определение 1.** Назовем уравнение (1)  $\mathbb{X}$ -устойчивым, если  $\sup_{t \geq 0} |X(t)| < \infty$  и  $\sup_{t \geq 0} \|K_t\| < \infty$ .

Если, исследуя асимптотическую устойчивость, иметь в виду и *точечную*, и *равномерную* сходимости функционалов  $K_t$ , то следует ввести два определения.

**Определение 2.** Назовем уравнение (1) *асимптотически  $\mathbb{X}$ -устойчивым*, если  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} K_t(\sigma) = 0$  при любом  $\sigma \in \mathbb{X}$ .

**Определение 3.** Назовем уравнение (1) *сильно асимптотически  $\mathbb{X}$ -устойчивым*, если  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|K_t\| = 0$ .

**Определение 4.** Назовем уравнение (1) *экспоненциально  $\mathbb{X}$ -устойчивым*, если существуют такие  $N, \gamma > 0$ , что для всех  $t \geq 0$  справедливы оценки  $|X(t)| \leq Ne^{-\gamma t}$  и  $\|K_t\| \leq Ne^{-\gamma t}$ .

Исследуем устойчивость уравнения (1) для случая  $\mathbb{X} = L_p[0, \omega]$ .

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p \leq \infty$ . Уравнение (1)  $L_p$ -устойчиво тогда и только тогда, когда  $\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+\omega} |Y(s)|^q ds < \infty$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Теорема 2.** Уравнение (1)  $L_1$ -устойчиво тогда и только тогда, когда  $\sup_{t \geq 0} |Y(t)| < \infty$ .

**Теорема 3.** Пусть  $1 < p \leq \infty$ . Уравнение (1) *сильно асимптотически  $L_p$ -устойчиво*, если и только если  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\omega} |Y(s)|^q ds = 0$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Теорема 4.** Уравнение (1) *сильно асимптотически  $L_1$ -устойчиво* тогда и только тогда, когда  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$ .

**Теорема 5.** Функция Коши уравнения (1) обладает свойством  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$  тогда и только тогда, когда она имеет экспоненциальную оценку  $|Y(t)| \leq Ne^{-\gamma t}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Таким образом, для уравнений нейтрального типа вида (1) сохранилось свойство функции Коши, хорошо известное для ОДУ и ФДУ запаздывающего типа: если функция Коши стремится к нулю, то только по экспоненциальному закону!

**Теорема 6.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ . Уравнение (1) экспоненциально  $L_p$ -устойчиво тогда и только тогда, когда для функции Коши справедлива экспоненциальная оценка.

**Следствие.** Если уравнение (1) экспоненциально  $L_{p_0}$ -устойчиво хотя бы при одном  $p_0 \geq 1$ , то оно экспоненциально  $L_p$ -устойчиво при всех  $p \geq 1$ .

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание FSNM-2020-0028.

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М: Наука, 1991.

## Устойчивость простейшей непрерывно-дискретной системы

М. В. Мулюков

Пермь, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет, Пермский национальный  
исследовательский политехнический университет  
e-mail: mulykoff@gmail.com

Непрерывно-дискретной (гибридной) системой функционально-дифференциальных уравнений называется система уравнений, содержащие как непрерывные компоненты, так и дискретные. В большинстве работ, посвящённых асимптотической устойчивости гибридных систем, применяются методы, использование которых позволяет надеяться получить лишь достаточные признаки асимптотической устойчивости: метод функционалов

Ляпунова–Красовского [1], методы, основанные на применении принципа неподвижной точки [2], теоремы Боля–Перрона [3, 4].

Рассчитывать получить необходимые и достаточные признаки устойчивости можно для сравнительно узкого класса линейных автономных гибридных систем. Рассмотрим одного представителя этого класса

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + ax(t) + by(n) = 0, & t \in [n, n+1), \\ y(n+1) + cy(n) + dx(n) = 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1)$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Легко видеть, что первое уравнение системы (1) является обыкновенным дифференциальным уравнением на полуинтервале  $[n, n+1)$ . Как показано в работах [5, 6] асимптотическая устойчивость систем такого типа сводится к вопросу об асимптотической устойчивости системы разностных уравнений.

Пусть  $a \neq 0$ .

Обратим оператор Коши обыкновенного дифференциального уравнения системы (1) на полуинтервале  $[n, n+1)$ :

$$x(t) = -\frac{b}{a}y(n) + \left(x(n) + \frac{b}{a}y(n)\right)e^{-a(t-n)}; \quad (2)$$

$$\text{Обозначим } u(n) = \begin{Bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{Bmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -e^{-a} & \frac{b(1-e^{-a})}{a} \\ d & c \end{pmatrix}.$$

В силу (2) вектор-функция  $u$  удовлетворяет системе разностных уравнений

$$u(n+1) + Au(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3)$$

Если  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(n)\| = 0$ .

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(n)\| = 0$ . Тогда существуют  $M, \sigma > 0$  такие, что  $|x(n)| < Me^{-\sigma n}$  и  $|y(n)| < Me^{-\sigma n}$ . Согласно (2) на  $[n, n+1)$  справедлива оценка  $|x(t)| \leq M_1 e^{-\sigma n}$ , где  $M_1 = M(|b| |1 - e^{-a}| / |a| + e^{-a})$ .

Таким образом,

$$\left\| \{x(t), y(t)\} \right\| \leq \max\{M, M_1\} e^{-\sigma n} \leq \max\{M, M_1\} e^{-\sigma(t-1)}. \quad (4)$$

Если  $a = 0$ , то обращение оператора Коши обыкновенного дифференциального уравнения системы (1) на полуинтервале  $[n, n+1)$  принимает вид:  $x(t) = x(n) - by(n)(t-n)$ , поэтому вектор-функция  $u$  тоже удовлетворяет системе (3) однако матрица коэффициентов принимает вид:  $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ d & c \end{pmatrix}$ . Оценка (4) справедлива, если положить  $M_1 = M(|b| + 1)$ .

Итак, система (1) асимптотически устойчива в том и только том случае, если асимптотически устойчива система (3).

Как известно, система разностных уравнений асимптотически устойчива в том и только том случае, если все корни её характеристического многочлена

$$F(z) = \det(Iz + A) = z^2 + z \operatorname{Sp}A + \det A$$

лежат внутри единичного круга.

В свою очередь, оба корня квадратного трёхчлена

$$F(z) = z^2 + pz + q$$

(где  $p, q$  — вещественные коэффициенты) лежат внутри единичного круга в том и только том случае, если  $|p| - 1 < q < 1$  [7].

Итак, доказано следующее утверждение.

**Теорема.** *Для того, чтобы система (1) была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\begin{cases} -1 < ce^{-a} + bd \frac{1-e^{-a}}{a} < 1 - |c - e^{-a}|, & \text{при } a \neq 0, \\ -1 < c + bd < 1 - |c - 1|, & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

Отметим, что устойчивость системы (1) возможна при условии  $|c| > 1$  и  $a < 0$ . Например, при  $c = e^{-a} > 1$  условия теоремы выполняются если величина  $(-bd)$  принадлежит непустому интервалу

$$\left( (c+1) \ln c; \frac{(c^2+1) \ln c}{c-1} \right).$$

Иными словами, изначально неустойчивые по отдельности уравнения (дифференциальное и разностное) могут быть одновременно стабилизированы за счёт взаимосвязи между их решениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00517, <https://rscf.ru/project/22-21-00517/>.

1. *Fridman E.* Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach // J. Math. Anal. Appl. 2002. No. 273, pp. 24–44.
2. *De la Sen M.* Total Stability Properties Based on Fixed Point Theory for a Class of Hybrid Dynamic Systems // Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications. Volume 2009, article ID 826438.
3. *Simonov P.M.* On the stability of a system of two linear hybrid functional differential systems with aftereffect // Russian Universities Reports. Mathematics. 2020. Vol. 25, issue 131, pp. 299–306.
4. *Bravyi E., Maksimov V., Simonov P.* Some Economic Dynamics Problems for Hybrid Models with Aftereffect // Mathematics. 2020. No. 8(10), 1832.
5. *Marchenko V.M., Loiseau J.-J.* On the Stability of Hybrid Difference-Differential Systems // Differential Equations. 2009. Vol. 45, no. 5, pp. 743–756.
6. *Марченко В.М., Борковская И.М.* Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. Минск: БГТУ. 2012. № 6 (179). С. 7–10.
7. *Кандаков А.А., Чудинов К.М.* Об устойчивости автономных разностных уравнений четвертого порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 39, № 4. С. 5–10.

## Инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности

**О. А. Нарманов**

*Ташкент, Ташкентский университет информационных технологий*

e-mail: [otabek.narmanov@mail.ru](mailto:otabek.narmanov@mail.ru)

Методы группового анализа широко используются для ис-

следования уравнений в частных производных и для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работах [1, 2] рассматриваются вопросы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений в частных производных на основе известных инфинитезимальных симметрий. Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для одномерного уравнения теплопроводности использована в работе [3].

Нахождению групп симметрий дифференциальных уравнений и их применениям для исследований посвящены многочисленные работы [3, 4, 5].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (k_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q(u). \quad (1)$$

где  $u = u(x_1, x_2, t) \geq 0$  — температурная функция,  $k_i(u) \geq 0$ ,  $Q(u)$  — функции от температуры  $u$ . Функция  $Q(u)$  описывает процесс тепловыделения, если  $Q(u) > 0$ , и процесс теплопоглощения, если  $Q(u) < 0$ . Исследования показывают, что коэффициенты теплопроводности  $k_1(u), k_2(u)$  в достаточно широком диапазоне изменения параметров могут быть описаны степенной функцией температуры, т.е. имеют вид  $k(u) = u^\sigma$ .

Рассмотрим случай  $k_1(u) = k_2(u) = u^{-1}$ ,  $Q(u) = 0$ . В этом случае уравнение (1) имеет следующий вид:

$$u_t = u^{-1} \Delta u + (\nabla u)^2. \quad (2)$$

где  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$  — оператор Лапласа,  $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\}$  — градиент функции  $u$ .

Как показано в работе [4], следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (2):

$$X_1 = t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}, X_2 = (x_1^2 - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 4x_1 u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3)$$

**Теорема.** *Инвариантными решениями уравнения (2) относительно группы преобразований, порожденной векторными полями*

ми (3), являются функции

$$u = \frac{t}{x_2^2} V(\xi),$$

где  $V(\xi)$  — общее решение дифференциального уравнения

$$V - 2 = \xi^2 \left( \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{V^2} \right).$$

1. Ли С., Шефферс Г. Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 1. Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. Москва–Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.
2. Нарманов О.А. Инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, вып. 1. С. 1994–1997.
3. Narmanov O.A. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2018. Vol. 6, pp. 373–381.
4. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирицевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференциальные уравнения, 1983. Т. 19, № 7. С. 1215–1223.
5. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

## Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах

**А. И. Перов, И. Д. Коструб**

*Воронеж, Воронежский государственный университет*

e-mail: anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru

В комплексной банаховой алгебре  $\mathbb{B}$  рассмотрим линейное

дифференциальное уравнение

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_n \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

с постоянными коэффициентами, причем  $\mathbf{a}_0$  обратим.

**Теорема 1.** *Дифференциальное уравнение при любых начальных условиях*

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_1, \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}(0) = \mathbf{c}_n,$$

где  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n \in \mathbb{B}$ , имеет единственное решение. Это решение определено на всей числовой прямой и является аналитическим.

Если по методу Эйлера искать решение дифференциального уравнения в виде  $\exp(t\mathbf{a})$  ( $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{B}$ ), то мы приходим к алгебраическому уравнению  $n$ -й степени, называемому *характеристическим*:

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{x}^n + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{x} + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Произвольная система элементов  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{B}$  *лежит в общем положении*, если обратима матрица Вандермонда из  $\mathbb{B}^{n \times n}$

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-1} & \xi_2^{n-1} & \dots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — система корней алгебраического уравнения, то

$$\mathbf{A} = V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \xi_n \end{pmatrix} V^{-1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

где  $\mathbf{A} \in \mathbb{B}^{n \times n}$  — сопровождающая матрица Фробениуса.

**Теорема 2.** *Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — корни характеристического уравнения, лежащие в общем положении. Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n e^{t\xi_j} \mathbf{d}_j$ , где  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n \in \mathbb{B}$  — произвольные постоянные.*

Произвольные постоянные пишутся справа от экспоненты — в некоммутативном случае это важно.

Решение  $\mathbf{k}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$  дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{k}}(0) = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{k}^{(n-2)}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{k}^{(n-1)}(0) = \mathbf{a}_0^{-1},$$

называется *функцией Коши*. По нему однозначно восстанавливается дифференциальное уравнение, т.е. коэффициенты  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Для этого решения известны различные представления: в виде степенного ряда

$$\mathbf{k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k \frac{\mathbf{t}^{n+k-1}}{(n+k-1)!},$$

где  $\mathbf{c}_k$  взяты из разложения  $(\mathbf{1} + \mu \mathbf{p}_1 + \mu^n \mathbf{p}_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k \mu^k$  ( $|\mu| < \rho, \mathbf{0} < \rho < \infty$  — радиус сходимости конечного степенного ряда). Или в виде интеграла типа Коши, причем интегрирующей функцией является резольвента  $n$ -го порядка при соответствующем выборе контура интегрирования  $\partial\sigma$ :

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} e^{t\lambda} (\mathbf{a}_0 \lambda^n + \mathbf{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \lambda + \mathbf{a}_n)^{-1} d\lambda.$$

В условиях теоремы 2 имеем

$$\mathbf{k}(t) = \sum_{j=1}^n e^{t\xi_j} \mathbf{c}_{jn},$$

где  $\mathbf{c}_{jn}$  — элементы последнего столбца матрицы  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{jk})_{j,k=1}^n$ , являющейся обратной к матрице Вандермонда.

Три формулы для  $\mathbf{k}(t)$  справедливы для произвольной банаховой алгебры  $\mathbb{B}$ . Если же она является коммутативной, то последняя формула принимает явный вид

$$\mathbf{k}(t) = \sum_{j=1}^n e^{t\xi_j} \prod_{k \neq j} (\xi_j - \xi_k)^{-1}.$$

Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 19-01-00732.

1. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1968.
2. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964.
5. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
6. Perov A.I., Kostrub I.D. About one square equation // Scientific Light. 2019. Vol. 1, no. 1, pp. 33–34.
7. Перов А.И., Коструб И.Д. Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491, № 1. С. 73–77.
8. Курбатов В.Г., Курбатова И.В. Вычислительные методы спектральной теории. Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2019.
9. Перов А.И., Коструб И.Д. Теорема Сильвестра, матрица Вандермонда и некоммутативные формулы Вьета // Тезисы конференции СТММ-2020, 15–19 июня 2020. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. С. 98–101.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
11. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. Исчисление конечных разностей. М.: ИЛ, 1962.

## Об особенностях применения $W$ –метода к сингулярным функционально- дифференциальным уравнениям

В. П. Плаксина, И. М. Плаксина

Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет  
e-mail: vpplaksina@list.ru, impl@list.ru

В работе обсуждается выбор пространства решений и вид

начальных условий задачи

$$\delta x = Tx, \quad rx = \alpha, \quad (1)$$

где линейный дифференциальный оператор второго порядка  $\delta$  содержит несуммируемый в точке  $t = 0$  коэффициент; оператор  $T$  линеен и вполне непрерывен в пространстве решений задачи (1); линейный вектор-функционал  $r = (r_1, r_2)$  определяет начальные условия в точке  $t = 0$ ;  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ .

Пусть  $z \in L^p[0, 1]$ . В соответствии с  $W$ -методом рассмотрим однозначно разрешимую вспомогательную задачу

$$\delta x = z, \quad rx = \alpha \quad (2)$$

и ее решение

$$x = \Lambda z + U\alpha, \quad (3)$$

где  $U = (u_1, u_2)$ ,  $u_i \in \ker \delta$ ,  $i = 1, 2$ .

Вектор-функционал  $r$  найдем из условий [1, с. 102]

$$\Lambda\delta = I - Ur, \quad rU = I, \quad r\Lambda = 0, \quad (4)$$

где  $I$  – тождественный оператор в соответствующих пространствах. Для этого запишем уравнение задачи (2) в виде

$$\delta x \equiv \frac{W}{u_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{u_1^2}{W} \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{u_1} \right) \right) = z,$$

где  $W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{vmatrix}$ . Тогда функционалы  $r_i$  определяются равенствами

$$r_i x = \int_0^1 \frac{u_i(s)}{W(s)} z(s) ds - (-1)^{i+1} \frac{\begin{vmatrix} u_i(b) & x(b) \\ \dot{u}_i(b) & \dot{x}(b) \end{vmatrix}}{W(b)},$$

или соответствующими предельными условиями

$$r_i x = (-1)^{i+1} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\begin{vmatrix} u_i(t) & x(t) \\ \dot{u}_i(t) & \dot{x}(t) \end{vmatrix}}{W(t)}, \quad i = 1, 2.$$

Например, при  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = \frac{1}{t}$  задача (2) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} = z, \quad t \in (0, 1], \quad (5)$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0+} (x(t) + t\dot{x}(t)) = \alpha_1, \\ - \lim_{t \rightarrow 0+} t^2\dot{x}(t) = \alpha_2. \end{cases} \quad (6)$$

При переходе от вспомогательной задачи (2) к основной задаче (1) элементы фундаментальной системы решений меняются, и использование ранее полученных функционалов становится невозможным. Например, рассмотрим задачу для уравнения

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} = \frac{1}{n}\dot{x} \left( t^{\frac{3n-1}{2n-1}} \right), \quad t \in (0, 1] \quad (7)$$

с краевыми условиями (6). Это уравнение имеет решение  $x = c_1 t^{-1+\frac{1}{n}} + c_2$ , которое не удовлетворяет краевым условиям (6). Таким образом, задача (7), (6) не является однозначно разрешимой для произвольных  $\alpha_1, \alpha_2$  даже при малых возмущениях оператора  $\delta$ .

Предлагается рассматривать задачу (1) на пространстве функций, которое может не содержать элементы фундаментальной системы решений соответствующего уравнения. Начальные условия задачи (1) предлагается формулировать исходя из свойств оператора  $A$ . Например, для уравнения  $\ddot{x} + \frac{k}{t}\dot{x} = Tx$  в качестве пространства решений можно выбрать пространство  $W^{2,p}$  функций  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , таких что  $x, \dot{x}$  абсолютно непрерывны на  $[0, 1]$ ,  $\ddot{x} \in L^p[0, 1]$ . В качестве начальных условий предлагается выбрать  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Такая методика была применена, например, в работах [2]–[6].

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Плаксина И.М.* О разрешимости и знакопостоянстве решения сингулярного функционально-дифференциального уравнения //

Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева, 17–19 мая 2017. Пермь: Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2017. С. 201–207.

3. *Плаксина И.М.* О применимости  $W$ -метода Н. В. Азбелева к сингулярному дифференциальному уравнению, заданному на положительной полуоси // Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, 15–19 июня 2020. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. С. 106–108.
4. *Плаксина И.М.* К вопросу о фредгольмовости и разрешимости одной сингулярной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16, № 4. С. 1150–1152.
5. *Плаксина И.М.* О разрешимости сингулярного функционально-дифференциального уравнения с регулярным вполне непрерывным оператором // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, № 5-2. С. 2639–2640.
6. *Плаксина И.М.* О разрешимости сингулярной задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения с отклонением специального вида // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 123. С. 539–546.

## О применении обобщенного оператора Чезаро к исследованию разрешимости одного функционально-дифференциального уравнения

**И. М. Плаксина**

*Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет  
e-mail: impl@list.ru*

Пусть  $L^p = L^p[0, 1]$  — пространство функций  $z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

для которых  $\|z\|_{L^p}^p \equiv \int_0^1 |z(t)|^p dt < +\infty$ ;  $D_0^p[0, 1] = D_0^p$  – пространство функций  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , таких что  $\dot{x} \in L^p$  и  $x(0) = 0$ .

Рассмотрим на пространстве  $D_0^p$  функционально-дифференциальное уравнение со специальным отклонением аргумента вида

$$(t^\alpha x(t))' = \frac{k}{t^\beta} x(t^\gamma), \quad t \in [0, 1], \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0. \quad (1)$$

Значение функции  $\frac{k}{t^\beta} x(t^\gamma)$  при  $t = 0$  выводится из определения пространства  $D_0^p$ .

Уравнения, аналогичные (1), рассматривались, например, в работах [1, 2, 3].

Перейдем к интегральной записи уравнения (1). Положим  $z(t) = \frac{1}{t^\alpha} (t^\alpha x(t))'$ . Пусть  $z \in L^p$ . Тогда  $x(t) = \int_0^t \frac{s^\alpha}{t^\alpha} z(s) ds$ , причем [4]  $x \in D_0^p$ . Уравнение (1) принимает вид

$$z(t) = k \int_0^{t^\gamma} \frac{s^\alpha}{t^{\alpha\gamma + \alpha + \beta}} z(s) ds. \quad (2)$$

Обобщенный оператор Чезаро  $A$  вида

$$(Az)(t) = \int_0^{t^\gamma} \frac{s^\alpha}{t^{\alpha\gamma + \alpha + \beta}} z(s) ds$$

рассматривается на пространстве  $L^p$ .

В работе получены эффективные признаки полной непрерывности и ограниченности оператора  $A$  в пространстве  $L^p$ . Эти признаки применены для получения эффективных условий однозначной разрешимости уравнения (1) в пространстве  $D_0^p$ .

$$\text{Определим вспомогательные константы } m_1 = \frac{(\alpha + \beta)p - 1}{p - 1}, \\ m_2 = \frac{(\alpha + \beta)p - 1}{p - 1} + \frac{1}{p - 1} \left( \frac{p - 1}{\alpha p + p - 1} \right)^{p-1}, \quad m_3 = \frac{1 - (\alpha + \beta)p}{p} +$$

$\frac{1}{\alpha} \left( \frac{p}{\alpha p + p - 1} \right)^{p-1}$ . Через  $\rho(A)$  обозначим спектральный радиус оператора  $A$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\gamma > m_1$ .

Тогда:

- а) оператор  $A$  вполне непрерывен в пространстве  $L^p$ ;
- б) если  $\gamma > m_2$ , то  $\rho(A) < 1$ , причем  $\rho(A) = 0$  при  $\gamma \geq 1$ .

Условия полной непрерывности оператора  $A$  получены с помощью теоремы 6.3 [5, с. 111].

**Лемма 2.** Пусть  $\gamma = m_1$ .

Тогда:

- а) оператор  $A$  как действующий в пространстве  $L^p$  ограничен;
- б) если  $\gamma > m_3$ , то  $\rho(A) < 1$ .

Оценка спектрального радиуса получена с помощью теста Шура [6, с. 33], [7].

**Лемма 3.** Пусть  $\gamma < m_1$ .

Тогда оператор  $A$  неограничен на пространстве  $L^p$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma > m_1$ .

Пусть, далее, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а)  $\gamma \geq 1$ ;
- б)  $|k| < \left( \frac{\alpha p + p - 1}{p - 1} \right)^{(p-1)/p} (\gamma(p - 1) - (\alpha + \beta)p + 1)^{1/p}$  и

$m_2 < \gamma < 1$ .

Тогда уравнение (1) имеет только тривиальное решение.

**Теорема 2.** Пусть справедливы следующие условия:

- а)  $\gamma = m_1$ ;
- б)  $\gamma > m_3$ ;

в)  $|k| < \left( \frac{\alpha p + p - 1}{p} \right)^{(p-1)/p} \left( \alpha \gamma + \alpha + \beta - \frac{1}{p} \right)^{1/p}$ .

Тогда уравнение (1) имеет только тривиальное решение.

1. *Pylypenko V., Rontó A.* On Singular Solutions of Linear Functional Differential Equations with Negative Coefficients // Journal of Inequalities and Applications. Volume 2008. doi:10.1155/2008/384910.
2. *Шиндяпин А.И.* О краевой задаче для одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 3. С. 450–455.
3. *Плакцина И.М.* О применимости W–метода к сингулярному функционально-дифференциальному уравнению второго порядка // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, 8–12 июня 2015. Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2015. С. 115–117.
4. *Плакцина И.М.* Об одной модальной сингулярной задаче // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. Выпуск 1(1). С. 19–23.
5. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
6. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах  $L^2$ . М.: Наука, 1985.
7. *Абдуллаев А.Р., Плакцина И.М.* Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора // Изв. вузов. Математика. 2015. № 2. С. 3–9.

## О свойстве открытости спектра Ляпунова линейной дифференциальной системы

С. Н. Попова, М. В. Федорова

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*  
e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com, fedoro.masha2013@yandex.ru

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с кусочно непрерывной и ограниченной на  $\mathbb{R}$  матрицей коэффициентов  $A(\cdot)$ . Полный спектр показателей Ляпунова [1, с. 63] системы (1) обозначим через  $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$ . Всюду считаем, что полный спектр показателей Ляпунова этой и каждой рассматриваемой ниже системы  $n$ -го порядка принадлежит множеству  $\mathbb{R}_{\leq}^n$  упорядоченных по неубыванию наборов  $n$  чисел. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где матрица возмущений  $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  также предполагается кусочно непрерывной и ограниченной. Для этой системы определен полный спектр показателей Ляпунова  $\lambda(A+Q) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$ . Систему (2) отождествим с матрицей возмущений  $Q(\cdot)$ . Множество всех возмущенных систем вида (2) обозначим через  $\mathcal{Q}$ . Пусть  $\mathcal{Q}_\delta$  — его подмножество, отвечающее возмущениям  $Q(\cdot)$ , для которых справедлива оценка  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|Q(t)\| < \delta$  с фиксированным  $\delta > 0$ . Обозначим

$\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \doteq \{\lambda(A+Q): Q(\cdot) \in \mathcal{Q}_\delta\}$  — спектральное множество класса возмущенных систем  $\mathcal{Q}_\delta$ . Рассмотрим также множество  $\mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A)) \doteq \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{\leq}^n: \max_{j=1, \dots, n} |\mu_j - \lambda_j(A)| < \varepsilon\}$  —  $\varepsilon$ -окрестность полного спектра системы (1) относительно метрики, порожденной  $l_\infty$ -нормой пространства  $\mathbb{R}^n$  в его подмножестве  $\mathbb{R}_{\leq}^n$ .

**Определение 1.** Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *устойчивым* [2, с. 23], если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A))$ , то есть отображение  $Q(\cdot) \mapsto \lambda(A+Q)$  непрерывно в точке  $Q(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Определение 2.** Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *открытым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $\mathcal{O}_\delta(\lambda(A)) \subset \lambda(\mathcal{Q}_\varepsilon)$ , то есть отображение  $Q(\cdot) \mapsto \lambda(A+Q)$  открыто в точке  $Q(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Таким образом, свойство устойчивости полного спектра показателей Ляпунова означает, что малые аддитивные возмущения матрицы коэффициентов  $A(\cdot)$  системы (1) приводят к малому изменению спектра, а свойство открытости означает, что малая окрестность полного спектра показателей системы (1) может быть накрыта спектральным множеством  $\lambda(\mathcal{Q}_\varepsilon)$  с малым  $\varepsilon > 0$ .

Заметим, что свойство устойчивости полного спектра показателей Ляпунова системы (1) достаточно хорошо изучено (см., например, [1, 2]), чего нельзя сказать о свойстве открытости. Цель работы — исследование свойства открытости полного спектра показателей Ляпунова. Были доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Если полный спектр показателей Ляпунова системы (1) устойчив, то он открыт.*

**Замечание.** Обратное утверждение в общем случае неверно.

**Теорема 2.** *Всякая система вида (1) обладает открытым полным спектром показателей Ляпунова.*

Кроме того, исследовалось свойство открытости полного спектра Ляпунова для систем, лежащих в оболочке Бебутова [3] системы вида (1) с равномерно непрерывными и ограниченными на  $\mathbb{R}$  коэффициентами. Оболочка Бебутова системы (1) — это совокупность систем

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где  $\widehat{A}(\cdot) \in \mathfrak{R}(A(\cdot))$ , а  $\mathfrak{R}(A(\cdot))$  — замыкание (в топологии равномерной сходимости на отрезках) множества сдвигов

$$\{A_s(\cdot) \doteq A(\cdot + s) : s \in \mathbb{R}\}$$

матрицы  $A(\cdot)$  системы (1). Метрика в  $\mathfrak{R}(A)$  задается равенством

$$\rho(\widetilde{A}, \widehat{A}) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \min\{\|\widetilde{A}(t) - \widehat{A}(t)\|, |t|^{-1}\}.$$

**Теорема 3.** *Если полный спектр показателей Ляпунова системы  $A(\cdot)$  устойчив, то каждая система  $\widehat{A}(\cdot) \in \mathfrak{R}(A)$  обладает открытым полным спектром показателей Ляпунова.*

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010) и РФФИ (проект 20-01-00293).

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
2. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
3. *Бебутов М.В.* О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюллетень Московского государственного университета. 1941. Т. II, вып. 3. С. 1–52.

## Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами

**А. В. Равчеев**

*Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова*

e-mail: rav4eev@mail.ru

Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с непрерывными коэффициентами.

**Определение 1.** *Характеристическим показателем* вектор-функции  $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданной на неограниченном подмножестве  $P$  полуоси  $\mathbb{R}_+$ , называется величина (полагаем  $\ln 0 = -\infty$ )

$$\lambda[f] = \overline{\lim}_{P \ni t \rightarrow +\infty} \ln \|f(t)\|^{1/t},$$

**Определение 2.** *Показателями Ляпунова* системы (1) называются величины [1]

$$\lambda_i(A) = \inf_{L \in G_i(S(A))} \sup_{x \in L} \lambda[x], \quad i = \overline{1, n},$$

где  $S(A)$  — пространство решений системы (1), а  $G_i(V)$  — множество  $i$ -мерных подпространств векторного пространства  $V$ .

В наших обозначениях показатели Ляпунова нумеруются, в отличие от [1], в порядке неубывания.

**Определение 3.** Набор  $\Lambda(A) \equiv (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$  называется *спектром показателей Ляпунова* системы (1).

Поскольку мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными, их показатели Ляпунова являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой  $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ , которая наделяется порядковой топологией.

Для заданных метрического пространства  $M$  и функции  $\theta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  рассмотрим класс  $\mathcal{Q}_n^\theta[A](M)$  непрерывных по совокупности переменных функций  $Q: \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , удовлетворяющих условиям:

$$1) \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\mu \in M} \|Q(t, \mu)\| e^{\theta(t)t} < \infty;$$

2) для всяких  $k = \overline{1, n}$ ,  $\mu \in M$ , выполняется неравенство

$$\lambda_k(A(\cdot) + Q(\cdot, \mu)) \geq \lambda_k(A).$$

Отметим, что для любой системы  $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$  класс  $\mathcal{Q}_n^\theta[A](M)$  не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит матрица  $Q \equiv 0$ .

Рассматривается задача полного дескриптивно-множественного описания для каждого  $n \geq 2$  и метрического пространства  $M$  класса

$$\Pi \mathcal{Q}_n^\theta(M) = \left\{ (\Lambda(A), \Lambda(A + Q)) \mid A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n, Q \in \mathcal{Q}_n^\theta[A](M) \right\}.$$

Указанную задачу можно рассматривать как обобщение примера Перрона [2, § 1.4] на случай неограниченных коэффициентов.

**Определение 4.** Функция  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  принадлежит классу  $(*, G_\delta)$  [3, с. 224], если для любого  $r \in \mathbb{R}$  прообраз  $f^{-1}([r, +\infty])$  луча  $[r, +\infty]$  является  $G_\delta$ -множеством метрического пространства  $M$ .

В частности, класс  $(*, G_\delta)$  является подклассом второго класса Бэра [3, с. 248].

Решение поставленной задачи содержит следующая

**Теорема.** Для каждого метрического пространства  $M$ , натурального числа  $n \geq 2$  и непрерывной функции  $\theta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  пара  $(l, f)$ , где  $l = (l_1, \dots, l_n) \in (\overline{\mathbb{R}})^n$  и  $f = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow (\overline{\mathbb{R}})^n$ , принадлежит классу  $\Pi Q_n^\theta(M)$  тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1)  $l_1 \leq \dots \leq l_n$ ;
- 2)  $f_1(\mu) \leq \dots \leq f_n(\mu)$  для любого  $\mu \in M$ ;
- 3)  $f_i(\mu) \geq l_i$  для всех  $\mu \in M$  и  $i = \overline{1, n}$ ;
- 4) для любого  $i = \overline{1, n}$  функция  $f_i(\cdot): M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  принадлежит классу  $(*, G_\delta)$ .

**Замечание.** Аналог этой теоремы для случая систем с ограниченными коэффициентам установлен в работе [4].

Приведённая теорема показывает, что все теоретически возможные пары спектров исходной и параметрически возмущённой систем (при дополнительном условии, что все показатели возмущённой системы не меньше, чем у исходной) можно получить в классе возмущений, убывающих быстрее всякой экспоненты. Эта ситуация является специфичной для класса систем с неограниченными коэффициентами, поскольку показатели Ляпунова систем с ограниченными коэффициентами инвариантны относительно возмущений, убывающих быстрее любой экспоненты [2, § 8.1].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В.В. Быкову за постановку задачи и внимание к работе.

1. *Миллионщиков В.М.* Формулы для показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та прикл. математики им. И.Н. Веква. Тбилиси, 1987. Т. 22. С. 150–178.
2. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
3. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
4. *Барабанов Е.А., Быков В.В.* Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 31–43.

# О решениях одной переопределенной системы уравнений в частных производных на полосе

М. А. Рахимова

*Худжанд, Таджикский государственный университет права,  
бизнеса и политики*

e-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru

Многие задачи математической физики приводят к переопределенным системам уравнений с частными производными [2]. Например, к таким системам относятся системы уравнений магнетогидродинамики, термоупругости и др. Переопределенным системам уравнений с частными производными посвящено огромное количество работ [3]. Для систем двух уравнений с одной неизвестной функцией от двух независимых переменных в основном изучены вопросы локальной разрешимости. Относительно задач о решениях во всей плоскости имеются небольшое количество работ.

Рассмотрим переопределенную систему двух уравнений с частными производными

$$\begin{cases} u_x = a(x, y)u + f(x, y), \\ u_y = b(x, y)u + g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

коэффициенты и правые части которой определены на полосе  $(x, y) \in \Pi = \{(\xi, \eta) : -\infty < \xi < +\infty, \alpha < \eta < \beta\}$ . Для системы (1) будем изучать задачу о решениях, определенных в  $\Pi$  и принадлежащих классу  $P_N(\Pi)$  — класс функций, растущих при  $|x| \rightarrow \infty$  не быстрее, чем  $|x|^N$ . Будем предполагать, что коэффициенты  $a, b$  непрерывны и ограничены на  $\Pi$ ;  $f, g$  непрерывны и принадлежат классу  $P_N(\Pi)$ . Пусть существуют частные производные  $a_y, b_x, f_y, g_x$ , принадлежащие  $L_{1,loc}(\Pi)$ , и выполнены необходимые и достаточности условия совместности системы (1) [1, 8]

$$a_y = b_x, \quad \forall (x, y) \in \Pi, \quad (2)$$

$$f_y - g_x + ag - bf = 0 \quad \forall (x, y) \in \Pi. \quad (3)$$

По коэффициенту  $a(x, y)$  системы определяем функцию

$$\alpha(y, \xi, \eta) = \frac{1}{\xi - \eta} \int_{\eta}^{\xi} a(t, y) dt.$$

Эта функция является ограниченной при  $\xi \neq \eta$ . Поэтому для каждого  $y \in \mathbb{R}$  существуют нижние и верхние пределы

$$a_+ = \lim_{\xi - \eta \rightarrow \infty, \xi > \eta \geq 0} \alpha(y, \xi, \eta), \quad a^+ = \overline{\lim}_{\xi - \eta \rightarrow \infty, \xi > \eta \geq 0} \alpha(y, \xi, \eta),$$

$$a_- = \lim_{\xi - \eta \rightarrow \infty, \xi < \eta \leq 0} \alpha(y, \xi, \eta), \quad a^- = \overline{\lim}_{\xi - \eta \rightarrow \infty, \xi < \eta \leq 0} \alpha(y, \xi, \eta).$$

Положим

$$a^* = \max\{a^+, a^-\}, \quad a_* = \min\{a_+, a_-\}.$$

Относительно задачи о решениях системы (1) из класса  $P_N$  справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты и правые части системы (1) удовлетворяют условиям (2) и (3). Пусть выполнено неравенство  $a_* > 0$ . Тогда система (1) в классе  $P_N(\Pi)$  имеет единственное решение и это решение определяется формулой

$$u(x, y) = - \int_x^{+\infty} f(t, y) e^t \int^x a(\tau, y) d\tau dt.$$

**Теорема 2.** Пусть коэффициенты и правые части системы (1) удовлетворяют условиям (2) и (3). Пусть выполнено неравенство  $a^* < 0$ . Тогда система (1) в классе  $P_N(\Pi)$  имеет единственное решение и это решение определяется формулой

$$u(x, y) = - \int_{-\infty}^x f(t, y) e^t \int^x a(\tau, y) d\tau dt.$$

Теоремы 1 и 2 доказываются методом, изложенным в [1].

1. *Байзаев С., Рахимова М.А.* Об ограниченных решениях одного класса переопределённых систем уравнений в частных производных // Учёные записки ХГУ, серия естественные и экономические науки. 2016. № 3 (38). Нури маърифат. С. 8–15.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
3. *Михайлов А.Г.* Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986.

## Разрешимость и построение решения периодической краевой задачи для обобщённой системы матричных дифференциальных уравнений Риккати

**Д. В. Роголев**

*Могилёв, Белорусско-Российский университет*

e-mail: d-rogolev@tut.by

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\frac{dX}{d} = G_1(t, X, Y), \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = G_2(t, X, Y), \quad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \quad (3)$$

где

$$G_1(t, X, Y) = A_1(t)X + XB_1(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + \\ + YS_3(t)X + F_1(t),$$

$$G_2(t, X, Y) = A_2(t)Y + YB_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + \\ + XP_3(t)Y + F_2(t);$$

с коэффициентами класса  $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $(t, X, Y) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $I = [0, \omega]$ ,  $\omega > 0$ .

Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати и их обобщения играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений. Система типа (1), (2) впервые появилась, по-видимому, в теории дифференциальных игр (см., например, [1]). Из этой системы в случае постоянных коэффициентов следует система, аналогичная [1].

Обозначения:

$$\begin{aligned}
 D &= \{(t, X, Y) : t \in I, \|X\| \leq \rho_1, \|Y\| \leq \rho_2\}, \\
 \tilde{A}_i(\omega) &= \int_0^\omega A_i(\tau) d\tau, \quad \gamma_i = \|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha_i = \max_{t \in I} \|A_i(t)\|, \\
 \beta_i &= \max_{t \in I} \|B_i(t)\|, \quad \delta_j = \max_{t \in I} \|S_j(t)\|, \quad \mu_j = \max_{t \in I} \|P_j(t)\|, \\
 h_i &= \max_{t \in I} \|F_i(t)\|, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \\
 q_{11} &= \gamma_1 \left[ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + (\delta_2 + \delta_3) \rho_2) + \right. \\
 &\left. + \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + (\delta_2 + \delta_3) \rho_2) \right], \quad q_{12} = \gamma_1 \delta_2 \rho_1 \omega \left( \frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right), \\
 q_{21} &= \gamma_2 \mu_1 \rho_2 \omega \left( \frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right), \\
 q_{22} &= \gamma_2 \left[ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 (\alpha_2 + \beta_2 + (\mu_1 + \mu_3) \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) + \right. \\
 &\left. + \omega (\beta_2 + (\mu_1 + \mu_3) \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \right],
 \end{aligned}$$

где  $\rho_1, \rho_2 > 0$ .

На основе применения метода [3, гл. 3] задача (1)–(3) рассматривается в конечномерной банаховой алгебре  $\mathfrak{B}(n)$  непрерывных матриц-функций с нормой  $\|T\|_C = \max_{t \in I} \|T(t)\|$ , где  $\|\cdot\|$  — определённая норма матриц в этой алгебре,  $T \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ . Предлагаемая работа является продолжением и обобщением работ [1, 2].

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1)  $\det \tilde{A}_i \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ),

$$2) \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 [(\alpha_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + (\delta_2 + \delta_3) \rho_1 \rho_2 + h_1] + \right. \\ \left. + \omega (\beta_1 \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + (\delta_2 + \delta_3) \rho_1 \rho_2 + h_1) \right\} \leq \rho_1,$$

$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 [(\alpha_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + (\mu_1 + \mu_3) \rho_1 \rho_2 + h_2] + \right. \\ \left. + \omega (\beta_2 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + (\mu_1 + \mu_3) \rho_1 \rho_2 + h_2) \right\} \leq \rho_2,$$

3)  $q_{11} < 1$ ,  $\det(E - A) > 0$ , где  $E = \text{diag}(1, 1)$ ,  $A = (q_{ij})$ .  
Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в области  $D$ .

Для построения решения данной задачи разработан алгоритм, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{dX_{k+1}}{dt} = G_1(t, X_k, Y_k), \quad (4)$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt} = G_2(t, X_k, Y_k), \quad (5)$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \quad Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где в качестве начального приближения  $X_0, Y_0$  приняты постоянные матрицы, определяемые на основе (4), (5) при  $k = 0$  из соответствующих условий (6) для приближения  $X_1(t), Y_1(t)$ ,

$$\int_0^\omega G_1(\tau, X_0, Y_0) d\tau = 0, \quad \int_0^\omega G_2(\tau, X_0, Y_0) d\tau = 0.$$

С помощью левостороннего регуляризатора [4]

$$\int_0^\omega A(\tau) Z(\tau) d\tau = \int_0^\omega A(\tau) d\tau \cdot Z(t) - \int_0^t \left( \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dZ(\tau) + \\ + \int_t^\omega \left( \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dZ(\tau),$$

где  $A = \{A_1, A_2\}$ ,  $Z = \{X, Y\}$ , на основе (4)–(6) получены рекуррентные интегральные соотношения

$$X_k(t) = \tilde{A}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left( \int_0^\tau A_1(\sigma) d\sigma \right) G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_t^\omega \left( \int_\tau^\omega A_1(\sigma) d\sigma \right) G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau - \\
& - \int_0^\omega [G_1(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_1(\tau)X_k(\tau)] d\tau \Big\}, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_k(t) = & \tilde{A}_2^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left( \int_0^\tau A_2(\sigma) d\sigma \right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau - \right. \\
& - \int_t^\omega \left( \int_\tau^\omega A_2(\sigma) d\sigma \right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau - \\
& \left. - \int_0^\omega [G_2(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_2(\tau)Y_k(\tau)] d\tau \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)
\end{aligned}$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (7), (8).

1. *Jodar L.* Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games // *Applied Mathematics Letters*, 1990. Vol. 3, no 4, pp. 9–12.
2. *Лаптинский В.Н., Роголев Д.В.* Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати // *Дифференц. уравнения*. 2011. Т. 47, № 10. С. 1412–1420.
3. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 1998.
4. *Лаптинский В.Н., Роголев Д.В.* О разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати // *Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія)*. 2010, № 1 (35). Могилёв: МГУ, 2010. С. 12–23.

# О точном построении функции Коши для дифференциального уравнения с линейным запаздыванием

А. Н. Румянцев

Пермь, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет  
e-mail: arumyanzev@gmail.com

В докладе развивается ранее предложенный подход к точному построению матрицы Коши для дифференциальных уравнений с запаздыванием [1, 2]. Предметом рассмотрения в докладе является дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] &= 0, \quad t \in [0, T], \\ x(\xi) &= 0, \quad \xi < 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $p$  — многочлен с рациональными коэффициентами,  $h$  — линейная функция с рациональными коэффициентами,  $h(t) < t$ ,  $t \in [0, T]$ . Предлагается один способ точного построения функции Коши для уравнения (1). Приводится иллюстрирующий пример.

1. *Maksimov V.P., Rumyantsev A.N.* Reliable computing experiment in the study of generalized controllability of linear functional differential systems. Mathematical modeling: Problems, Methods, Applications. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001, pp. 91–98.
2. *Максимов В.П.* К вопросу о построении и оценках матрицы Коши для систем с последствием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 153–162.

# Об экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения с комплексным коэффициентом и переменным распределённым запаздыванием

Т. Л. Сабатулина

Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

e-mail: tlsabatulina@list.ru

Исследование функционально-дифференциальных уравнений с комплексным коэффициентом позволяет устанавливать признаки устойчивости для систем уравнений. Для уравнения с сосредоточенным запаздыванием был получен простой достаточный признак экспоненциальной устойчивости. В данной работе представлен аналогичный результат для уравнения с распределённым запаздыванием.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + k \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} x(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

где  $k \in \mathbb{C}$ , функция  $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \omega]$  локально суммируема, функция  $\tau: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, T]$  измерима по Лебегу, функция  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  локально суммируема.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию  $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющую (1) почти всюду на  $\mathbb{R}_+$ . Как известно [1, с. 84, теорема 1.1], уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = C(t, 0)x(0) + \int_0^t C(t, s)f(s) ds,$$

где функция  $C(t, s)$  называется *функцией Коши* уравнения (1). В

силу данного представления, исследование устойчивости уравнения (1) сводится к изучению асимптотических свойств функции Коши.

Пусть  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\}$ .

**Определение.** Уравнение (1) называется *равномерно экспоненциально устойчивым*, если существуют  $M, \gamma > 0$  такие, что при всех  $(t, s) \in \Delta$  справедлива оценка

$$|C(t, s)| \leq M e^{-\gamma(t-s)}.$$

Для уравнения (1) оказывается верным следующий легко проверяемый признак устойчивости.

**Теорема 1.** Пусть выполняется неравенство

$$\left( \operatorname{Re} k\omega^2 - \frac{1}{2\frac{T}{\omega} + 1} \right)^2 + (\operatorname{Im} k\omega^2)^2 < \frac{1}{\left(2\frac{T}{\omega} + 1\right)^2}. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) равномерно экспоненциально устойчиво.

**Следствие.** Пусть выполняется неравенство

$$(\operatorname{Re} k\omega^2 - 1)^2 + (\operatorname{Im} k\omega^2)^2 < 1.$$

Тогда уравнение

$$\dot{x}(t) + k \int_{t-h(t)}^t x(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

равномерно экспоненциально устойчиво.

Если в неравенстве (2) положить  $k = \frac{a}{\omega}$  и перейти к пределу при  $\omega \rightarrow 0$ , то получим известный результат (см. [2]) для уравнения с сосредоточенным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) + ax(t - \tau(t)) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

**Теорема 2.** Пусть выполняется неравенство

$$\left( \operatorname{Re} kT - \frac{1}{2} \right)^2 + (\operatorname{Im} kT)^2 < \frac{1}{4}.$$

Тогда уравнение (3) равномерно экспоненциально устойчиво.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Grossman S.E.* Stability in  $n$ -dimensional differential-delay equations // *J. Math. Anal. Appl.* 1972. Vol. 40, pp. 541–546.

## Модифицированные условия Разумихина для неавтономных систем с запаздыванием и оценки сходимости решений

Н. О. Седова

Ульяновск, Ульяновский государственный университет  
e-mail: sedovano@ulsu.ru

В работе изучаются условия различных видов устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа в терминах функций Ляпунова–Разумихина. В частности, получены результаты об асимптотической, равномерной асимптотической, равномерной экспоненциальной устойчивости. При этом используются «неклассические» функции, которые не обязательно являются знакоопределенными (могут обращаться в ноль не только в начале координат), а условия на производную в силу уравнения формулируются таким образом, что она может менять знак вдоль решения уравнения.

Используемые ниже обозначения по большей части стандартные:  $R^+ = [0, +\infty)$ ,  $R^n$  —  $n$ -мерное пространство векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  с нормой  $|x|$ ,  $C = C([-r, 0], R^n)$  — банахово пространство с супремум-нормой  $\|\cdot\|$  ( $r > 0$ ); для непрерывной функции  $x(t) \in C([t_0 - r, t_0 + \beta], R^n)$  ( $t_0 \in R^+$ ,  $\beta > 0$ ) элемент  $x_t \in C$  для каждого  $t \in [t_0, t_0 + \beta)$  определяется равенством  $x_t(s) = x(t + s)$ ,  $-r \leq s \leq 0$ ,  $\dot{x}(t)$  обозначает правостороннюю производную.

Рассмотрим систему, динамика которой описывается функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad (1)$$

где функционал  $X: R^+ \times C \rightarrow R^n$  удовлетворяет предположениям из [1], гарантирующим существование, единственность и продолжимость решений для каждой начальной точки  $(t_0, \varphi_0) \in R^+ \times C$ . Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию  $x_{t_0} = \varphi_0$ , обозначается  $x(t; t_0, \varphi_0)$ . В частности, из условия  $X(t, 0) \equiv 0$  следует существование нулевого решения.

Скалярную функцию  $V(t, x) \in C^1([-r, +\infty) \times R^n, R^+)$ , такую, что  $V(t, 0) = 0$  для всех  $t \in R^+$ , назовем функцией Ляпунова. Ее производной в силу уравнения (1) называется функционал  $V' \in C(R^+ \times C, R)$ , определяемый соотношением

$$V'(t, \varphi) = \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial x_i} X_i(t, \varphi).$$

Специфика использования конечномерных функций для анализа свойств устойчивости систем с запаздыванием состоит, как известно, в том, что производная функции Ляпунова оценивается не во всей окрестности начала координат, а лишь в ее части, содержащейся в множестве вида  $\Omega_t(V, \eta) = \{\varphi \in C : V(t+s, \varphi(s)) \leq \eta(V(t, \varphi(0))), -r \leq s \leq 0\}$  для некоторой функции  $\eta \in \mathcal{K}$  такой, что  $\eta(u) > u$  для  $u > 0$ . Идея такой модификации требований к производной была одновременно предложена Н.Н. Красовским и Б.С. Разумихиным [2, 3]. Впоследствии условия, определяющие часть окрестности нуля для оценки производной, получили название «условий Разумихина». Эти условия, с одной стороны, упрощают практическую проверку соответствующих требований, гарантирующих тот или иной вид устойчивости. С другой стороны, отсутствие оценки производной функции Ляпунова вдоль всего решения затрудняет оценку скорости убывания самой функции, а стало быть, и оценку скорости сходимости решений. Поэтому для уравнений с запаздыванием такие оценки строятся в основном на основе функционалов Ляпунова–Красовского. Однако в последние годы аналогичные результаты с использованием функций также стали появляться (см., например, [4]). При этом рассматриваются главным образом автономные или линейные уравнения.

В данной работе оценки сходимости решений уравнения (1) основаны на следующей лемме:

**Лемма.** Предположим, что существуют  $\bar{a} > 0$ ,  $\underline{a} \in R$ , а также функции  $\eta \in K$ ,  $V \in C^1(R^+ \times R^n, R^+)$  и  $p \in C([-r, +\infty), R)$ , такие, что:

1.  $\eta(u) \geq e^{\bar{a}u}$  для  $u > 0$ ;
2. для всех  $t \in [-r, +\infty)$  и всех  $s \in [0, r]$  выполняются неравенства  $\underline{a} \leq \int_t^{t+s} p(\theta) d\theta \leq \bar{a}$ ;
3.  $V'(t, \varphi) \leq -p(t)V(t, \varphi(0))$  при всех  $t \in R^+$  и  $\varphi \in \Omega_t(V, \eta)$ .

Тогда для произвольного решения  $x(t) = x(t; t_0, \varphi_0)$  уравнения (1) при всех  $t \geq t_0$  выполняется неравенство

$$V(t, x(t)) \leq \max_{-r \leq s \leq 0} V(t_0 + s, \varphi_0(s)) e^{-(\int_{t_0}^t p(\theta) d\theta + a)},$$

где  $a = \min\{0, \underline{a}\}$ .

При некоторых дополнительных ограничениях на функции  $V$  и  $p$  получены достаточные условия различных видов устойчивости нулевого решения уравнения (1), в частности, равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости. Рассматривается, в том числе, случай, когда функция Ляпунова может быть только знакопостоянной, не обязательно положительно определенной.

1. Седова Н.О. К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // *АиТ*. 2011. № 9. С. 74–86.
2. Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последствием // *ПММ*. 1956. Т. 20, № 4. С. 513–518.
3. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // *ПММ*. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.
4. Efimov D., Aleksandrov A. On estimation of rates of convergence in Lyapunov–Razumikhin approach // *Automatica J.* 2020. IFAC 116. 108928, 7 p.

# Определение и свойства нелинейных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости

И. Н. Сергеев

Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова

e-mail: igniserg@gmail.com

Для области  $G$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , содержащей  $r_0$ -окрестность нуля, рассмотрим нелинейную, вообще говоря, систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty). \quad (1)$$

Через  $S_*(f)$  будем обозначать множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через  $x_f(\cdot, x_0)$  — то из них, которое удовлетворяет начальному условию  $x_f(0, x_0) = x_0$ .

**Определение 1.** Перечислим три основных [1] функционала  $K(t, u)$  где  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , соответствующих показателям

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho \quad (2)$$

и отвечающих за следующие свойства решений:

1) *колеблемость* ( $\varkappa = \nu$ ), если  $K(t, u) = N(t, u)$  — умноженное на  $\pi$  число нулей на промежутке  $[0, t]$  функции  $P_1 u$ , а  $P_1$  — ортогональный проектор на фиксированную прямую, причём если хотя бы один из нулей *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной), то считаем  $N(t, u) = +\infty$ ;

2) *вращаемость* ( $\varkappa = \theta$ ), если  $K(t, u) = \Theta(t, u) \equiv |\varphi(t, P_2 u)|$  — модуль ориентированного угла  $\varphi(t, P_2 u)$  (непрерывного по  $t$ , с начальным условием  $\varphi(0, P_2 u) = 0$ ) между вектором  $P_2 u(t)$  и начальным вектором  $P_2 u(0)$ , а  $P_2$  — ортогональный проектор на фиксированную плоскость, причём если  $P_2 u(\tau) = 0$  хотя бы при одном  $\tau \in [0, t]$ , то считаем  $\Theta(t, u) = +\infty$ ;

3) *блуждаемость* ( $\varkappa = \rho$ ), если

$$K(t, u) = P(t, u) \equiv \int_0^t |(u(\tau)/|u(\tau)|)'| d\tau, \quad u(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за *неориентированную* (в отличие от описанной выше, *ориентированной*) и *частотную вращаемость* [1], *поворачиваемость  $k$ -го ранга* [2] и *плоскую вращаемость* [3].

**Определение 2.** С каждым функционалом из определения 1 свяжем:

а) [1] *слабый нижний линейный* показатель (2) решения  $x \in S_*(f)$ , определённого на всей полуоси  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\check{\kappa}^\circ(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} K(t, Lx); \quad (3)$$

б) [4] *слабый нижний сферический* показатель (2) задачи Коши для системы (1) с начальным значением  $x_0 \in G$

$$\check{\kappa}_s^\circ(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} K(t, Lx_{f_s}(\cdot, x_0)), \quad (4)$$

где  $|x_0| < r_0$ ,  $P_x^\perp$  — проектор на гиперплоскость, ортогональную вектору  $x \in \mathbb{R}^n$ , а  $f_s(t, x) \equiv P_x^\perp \cdot f(t, x)$  — правая часть *сферической* системы;

в) [5] *слабый нижний радиальный* показатель (2) задачи Коши для системы (1) с начальным значением  $x_0 \in G$

$$\check{\kappa}_r^\circ(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \lim_{\mu \rightarrow +0} K(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)); \quad (5)$$

г) [6] *слабый нижний шаровой* показатель (2) системы (1)

$$\check{\kappa}_b^\circ(f) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \lim_{x_0 \rightarrow 0} K(t, Lx_f(\cdot, x_0)); \quad (6)$$

д) *сильные нижние* показатели: *линейный*  $\check{\kappa}^\bullet(x)$ , *сферический*  $\check{\kappa}_s^\bullet(f, x_0)$ , *радиальный*  $\check{\kappa}_r^\bullet(f, x_0)$  и *шаровой*  $\check{\kappa}_b^\bullet(f)$  — соответственно, по тем же формулам (3)–(6), в каждой из которых нижний предел при  $t \rightarrow +\infty$  и точная нижняя грань по  $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$  взяты в другом порядке;

е) *слабый и сильный верхние* показатели: *линейные*  $\hat{\kappa}^\circ(x)$ ,  $\hat{\kappa}^\bullet(x)$ , *сферические*  $\hat{\kappa}_s^\circ(f, x_0)$ ,  $\hat{\kappa}_s^\bullet(f, x_0)$ , *радиальные*  $\hat{\kappa}_r^\circ(f, x_0)$ ,  $\hat{\kappa}_r^\bullet(f, x_0)$  и *шаровые*  $\hat{\kappa}_b^\circ(f)$ ,  $\hat{\kappa}_b^\bullet(f)$  — соответственно, по тем же

формулам (3)–(6), в которых все нижние пределы при  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\mu \rightarrow +0$  и  $x_0 \rightarrow 0$  заменены верхними;

ж) *точные* или *абсолютные* показатели — при совпадении значений нижнего и верхнего (в их обозначении опускаем галочку и крышечку) или слабого и сильного (опускаем пустой и полный кружочки) показателей.

Переходы к сферической системе или к задачам Коши с начальными значениями на данном луче оправданы тем, что решения нелинейной системы (1) могут оказаться определёнными не на всей полуоси времени (из-за выхода их фазовых кривых на границу области  $G$ ). И хотя они выглядят довольно искусственно, уже в линейном случае их оправдывает

**Теорема 1.** *Если система (1) линейна, то каждый показатель (2) любого её решения  $x \in \mathcal{S}_*(f)$  удовлетворяет равенствам*

$$\tilde{\chi}_s^*(f, x(0)) = \tilde{\chi}_r^*(f, x(0)) = \tilde{\chi}^*(x) \quad \text{при } \sim = \vee, \wedge \text{ и } * = \circ, \bullet.$$

В работах [1, 7] приведен полный набор соотношений между линейными показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений. Различные сферические и радиальные показатели оказываются не более упорядоченными между собой, чем их линейные аналоги, как показывает

**Теорема 2.** *Если некоторое соотношение (равенство или неравенство) между линейными показателями реализуется хотя бы на одном решении какой-либо линейной системы (3), то это же соотношение между одноименными сферическими, а также радиальными показателями реализуется и на соответствующей задаче Коши для той же системы.*

Шаровые показатели любой системы осуществляют оценки снаружи всего множества их радиальных аналогов для той же системы, а в линейном случае — ещё и линейных аналогов, что и подтверждают

**Теорема 3.** *Для любой системы (1) каждый показатель (2) удовлетворяет неравенствам*

$$\hat{\chi}_b^*(f) \leq \inf_{0 \neq x_0 \in G} \hat{\chi}_r^*(f, x_0) \leq \sup_{0 \neq x_0 \in G} \hat{\chi}_r^*(f, x_0) \leq \hat{\chi}_b^*(f), \quad * = \circ, \bullet.$$

**Теорема 4.** Если система (1) – линейна и  $G = \mathbb{R}^n$ , то каждый показатель (2) удовлетворяет неравенствам

$$\hat{\varkappa}_b^*(f) \leq \inf_{x \in S_*(f)} \varkappa^*(x) \leq \sup_{x \in S_*(f)} \hat{\varkappa}^*(x) \leq \hat{\varkappa}_b^*(f), \quad * = \circ, \bullet.$$

Для нелинейных (и даже автономных) систем шаровые и радиальные показатели слабо связаны с линейными и сферическими, о чём и говорят

**Теорема 5.** При  $n = 2$  и  $G = \mathbb{R}^2$  существует такая автономная система (1), что все решения  $x_+ \in S_*(+f)$  и  $x_- \in S_*(-f)$  определены на всей полуоси  $\mathbb{R}_+$ , а все показатели (2) точны, абсолютны и при любом  $x_0 \neq 0$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} +\infty = \varkappa(x_+) &> \varkappa_s(+f, x_0) = \varkappa_s(-f, x_0) > \\ &> \varkappa(x_-) = \varkappa_r(\pm f, x_0) = \varkappa_b(\pm f) = 0. \end{aligned}$$

**Теорема 6.** При  $n = 2$  и  $G = \mathbb{R}^2$  существует такая автономная система (1), что все решения  $x_+ \in S_*(+f)$  и  $x_- \in S_*(-f)$  определены на всей полуоси  $\mathbb{R}_+$ , а все показатели (2) точны, абсолютны и при любом  $x_0 \neq 0$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} 0 = \varkappa(x_+) &< \varkappa_s(+f, x_0) = \varkappa_s(-f, x_0) < \\ &< \varkappa(x_-) = \varkappa_r(\pm f, x_0) = \varkappa_b(\pm f) = 1. \end{aligned}$$

1. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
2. *Сергеев И.Н.* Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1353–1361.
3. *Сергеев И.Н.* Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348.
4. *Сергеев И.Н.* Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 6. С. 839–840.
5. *Сергеев И.Н.* Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 11. С. 1560–1562.

6. *Сергеев И.Н.* Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 6. С. 859–861.
7. *Сергеев И.Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183.

## Вольтерровы функциональные уравнения в теории оптимизации распределенных систем

**В. И. Сумин**

*Нижегород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского;*

*Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина*

e-mail: v\_sumin@mail.ru

В [1] было предложено при изучении распределенных оптимизационных задач использовать *вольтерровы функциональные уравнения* (ВФУ)

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad (1)$$

$$t \equiv \{t_1, \dots, t_n\} \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m(\Pi),$$

где  $\Pi \subset \mathbf{R}^n$  и  $f(\cdot, \cdot, \cdot): \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$  заданы;  $v(\cdot) \in \mathbf{D} \subset L_k^s$  — управление;  $A: L_p^m \rightarrow L_q^l$  — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе  $T$  подмножеств  $\Pi$  в том смысле, что для любого  $H \in T$  сужение  $A[z]|_H$  не зависит от значений  $z|_{\Pi \setminus H}$  (это обобщение известного определения А.Н. Тихонова оператора типа Вольтерра; элементы  $T$  назовем вольтерровыми множествами оператора  $A$ );  $p, q, k \in [1, +\infty]$ . К ВФУ (1) с богатыми  $T$  обращением главной части приводятся разнообразные *начально-краевые задачи* (НКЗ) для эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др.); как правило, управление  $v(\cdot)$  в (1) соответствует распределенному управлению в НКЗ и/или управлению в начальных

условиях НКЗ, а наличие в НКЗ управлений на границе или в старших коэффициентах основного уравнения означает, что в эквивалентном ВФУ (1) управляем  $A$ . ВФУ (1) — удобная эквивалентная форма записи НКЗ: переход к ВФУ-описанию НКЗ адекватен многим проблемам оптимизации и, возможно, позволяет достичь разумного компромисса между естественным стремлением к общности теоретических построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием получить результаты в удобной для приложений форме — с другой (о различных применениях ВФУ-описаний НКЗ см., например, обзоры [2, 3, 4, 5]). Перечислим лишь некоторые результаты, так или иначе связанные с проблемой *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР) НКЗ и полученные автором лично или в соавторстве (заметим: целый ряд интересных результатов по теме (различные ВФУ-описания НКЗ, условия глобальной разрешимости, численные методы оптимизации, функционально-операторные игры и др.) получил А.В. Чернов (см., например, обзоры [2, 3])).

Предположим, некоторая управляемая НКЗ рассматривается на фиксированном множестве  $\Pi$  изменения независимых переменных, а соответствующая оптимизационная задача такова, что интерес представляют только глобальные, то есть определенные на всем  $\Pi$ , решения НКЗ из выбранного класса  $W$  функций на  $\Pi$ . Пусть  $\mathcal{R}$  — множество тех управлений из класса допустимых, каждому из которых отвечает единственное в  $W$  решение рассматриваемой НКЗ. При выводе *необходимых условий оптимальности* (НУО), при обосновании численных методов решения задач оптимального управления и во многих других случаях важным является вопрос о достаточных условиях, при которых те или иные возмущения (вариации) не выводят допустимые управления из  $\mathcal{R}$ , то есть вопрос о достаточных условиях УСГР данной НКЗ. Так, при выводе НУО недостаток информации об УСГР по возмущению управления вынуждает считать управляемую НКЗ сингулярной в смысле Ж.-Л. Лионса [6] и переходить от классического случая «управление  $\rightarrow$  состояние» к рассмотрению оптимизационных задач в классе пар «управление, состояние», когда «управление» и «состояние» равноправны; при этом построения в сингулярном случае часто оказываются намного более сложными, чем аналогичные построения в несингулярном (см., на-

пример, вывод НУО типа принципа максимума в сингулярных и несингулярных модельных задачах оптимизации в [6, гл. 1, 2]).

ВФУ-описание позволило предложить общую схему получения конструктивных условий УСГР для широкого класса НКЗ с самыми различными управляющими воздействиями. Схема использует продолжение локальных решений ВФУ до глобального вдоль цепочки вольтерровых множеств

$$H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_r = \Pi.$$

Заметим, что различные разновидности таких цепочек оказались весьма полезным инструментом как в теории оптимального управления, так и в собственно теории операторов (например, при изучении семейств квазинильпотентных операторов, которое по необходимости требует построение теории УСГР ВФУ).

Теоремы УСГР нашли применение прежде всего при изучении вопросов варьирования и дифференцирования функционалов и операторов распределенных задач оптимизации и, как следствие, при построении теории НУО для таких задач с ограничениями (функциональными, фазовыми и др.). Заметим, что переход от НКЗ к ВФУ (1) удобен при выводе НУО (например, принципа максимума) уже потому, что при этом дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы НКЗ, действующие в пространствах  $C_k$  или  $W_p^l$ , заменяются на операторы (часто — интегральные), действующие в, как правило, более удобных для построения «сопряженной задачи» данного НУО лебеговых пространствах. При этом сопряженная задача также имеет вид некоторого ВФУ и не обязательно переписывается в дифференциальной (интегро-дифференциальной) форме, так или иначе подобной форме первоначальной управляемой НКЗ.

ВФУ-описание НКЗ позволило: решить ряд задач вывода «сингулярных НУО», указанных в [6] как нерешенные и представляющие интерес; выявить некоторые общие закономерности вырождения и условий оптимальности так называемых «особых управлений» принципа максимума и других НУО. Теоремы УСГР позволили для широкого класса задач оптимизации с ограниченным множеством допустимых значений управления дать обоснование применению градиентных методов в пространствах типа  $L_\infty$  при произвольных порядках роста каратеодориевских

«правых частей» НКЗ по «фазовым» и управляющим переменным (часто применяемое дифференцирование функционалов по управлению в пространствах типа  $L_2$  требует, вообще говоря, линейных порядков роста).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00199.

1. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1056–1059.
2. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: Тр. Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 2014). Екатеринбург: ИММ УрО РАН; УРФУ, 2015. С. 293–300.
3. *Sumin V.* Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32, pp. 759–764.
4. *Сумин В.И.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения и распределенные задачи оптимизации // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 124. С. 745–756.
5. *Сумин В.И.* Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, № 132. С. 422–440.
6. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.

# Корректность задачи Коши для дифференциального уравнения с многозначными импульсными воздействиями

**О. В. Филиппова**

*Тамбов, Тамбовский государственный университет*

*им. Г.Р. Державина*

e-mail: philippova.olga@rambler.ru

В докладе исследуется параметрическая устойчивость решений задачи Коши для системы дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий в фиксированные моменты времени. В эти моменты решение имеет разрыв, величина которого принадлежит значению заданного многозначного отображения, которое зависит от значения решения в момент воздействия. Иными словами, рассматривается процесс, состояние которого претерпевает мгновенные изменения, величина которых может варьироваться в некоторой замкнутой области, которая в свою очередь определяется текущим состоянием процесса. Получены условия непрерывной зависимости решений (в соответствующей метрике пространства кусочно абсолютно непрерывных функций) от параметра. Используются методы, аналогичные методам работы [1], и введенное в [1] понятие совокупной априорной ограниченности решений.

Отметим, что для обыкновенных дифференциальных уравнений условия непрерывной зависимости решений от начальных условий и других параметров получены в работах J. Kurzweil, Z. Vorel, М.Ф. Бокштейна, Н.Н. Петрова, Е.С. Жуковского и других авторов (см., например, [2]). Задача о непрерывной зависимости от параметров решений дифференциальных включений и систем управления исследована В.И. Благодатских, А.Ф. Филипповым, А.И. Булгаковым (см. [3] и библиографию этой работы).

Пусть  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное пространство с нормой  $|\cdot|$ ;  $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$  — множество непустых компактов пространства  $\mathbb{R}^n$ ;  $\Xi$  — метрическое пространство;  $B_\Xi(y, \delta)$  — открытый шар с центром в точке  $y \in \Xi$  радиуса  $\delta > 0$ .

Пусть  $a < t_1 < \dots < t_p < b$  — конечный набор точек. Обозначим через  $\tilde{C}^n[a, b]$  множество всех непрерывных на каждом из интервалов  $[a, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_p, b]$  ограниченных функций  $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , имеющих пределы справа в точках  $t_k, k = 1, 2, \dots, p$ , с нормой  $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)|: t \in [a, b]\}$ .

Пусть отображение  $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет условиям:

- 1) при каждом фиксированном  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$  функция  $f(\cdot, x, \xi)$  измерима по Лебегу;
- 2) при почти всех  $t \in [a, b]$  отображение  $f(t, \cdot, \cdot)$  непрерывно;
- 3) для каждого ограниченного множества  $W \subset \mathbb{R}^n \times \Xi$  существует суммируемая функция  $m_W: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  такая, что при почти всех  $t \in [a, b]$  и всех  $(x, \xi) \in W$  выполняется неравенство  $|f(t, x, \xi)| \leq m_W(t)$ .

Будем предполагать, что многозначные отображения  $I_k: \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$  непрерывны по Хаусдорфу при всех  $k = 1, 2, \dots, p; x \in \mathbb{R}^n$ . Пусть задан вектор  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с параметром  $\xi \in \Xi$  при наличии импульсных воздействий:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \xi), \quad (1)$$

$$x(t_k + 0) - x(t_k) \in I_k(x(t_k), \xi), \quad k = 1, \dots, p, \quad (2)$$

$$x(a) = x_0. \quad (3)$$

**Определение 1.** Под *решением задачи (1)–(3) на отрезке  $[a, \tau]$*  понимается функция  $x \in \tilde{C}^n[a, \tau]$ , удовлетворяющая при всех  $t \in [a, \tau]$  включению

$$x(t) \in x_0 + \int_a^t f(s, x(s), \xi) ds + \sum_{k \in [a, \tau]} I_k(x(t_k), \xi) \chi_{(t_k, b]}(t),$$

где  $\chi_{(t_k, b]}$  — характеристическая функция интервала  $(t_k, b]$ .

**Определение 2.** Решение  $x$  задачи (1)–(3) на отрезке  $[a, \tau]$  будем называть *продолжаемым*, если найдется такое решение  $x_1$  на отрезке  $[a, \tau_1]$  ( $\tau_1 \in (\tau, b]$ ), что  $x_1(t) = x(t)$  при всех  $t \in [a, \tau]$ .

**Определение 3.** Будем говорить, что решение  $x$  на интервале  $[a, c)$  ( $c \in (a, b)$ ) *непродолжаемо*, если не существует такого решения  $x_1$  на интервале  $[a, c_1]$  ( $c_1 \in (c, b]$ ), что  $x_1(t) = x(t)$  при всех  $t \in [a, c)$ .

Решение задачи (1)–(3) на всем  $[a, b]$  будем считать *непродолжаемым*.

Обозначим  $H(x_0, \tau, \xi)$  — множество всех решений системы (1)–(3) на отрезке  $[a, \tau]$  ( $\tau \in (a, b]$ );  $H(x_0, \xi)$  — множество всех непродолжаемых решений системы (1)–(3) на отрезке  $[a, b]$ .

**Определение 4.** Множество  $H(x_0, \xi)$  *априорно ограничено в точке*  $(\hat{x}_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$  (см. [1]), если найдется такое число  $\mathbf{r} > 0$ , что для всякого  $\tau \in (a, b]$  не существует  $x \in H(\hat{x}_0, \tau, \xi_0)$ , для которого выполняется неравенство  $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, \tau]} > \mathbf{r}$ .

**Определение 5.** Пусть  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K \subset \Xi$ . Множество  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  *априорно ограничено в совокупности на множестве*  $S \times K$ , если оно априорно ограничено в каждой точке множества  $S \times K$  и константа  $\mathbf{r} > 0$  в определении 4 является общей для всех точек из множества  $S \times K$ .

**Теорема.** Пусть множество  $H(x_0, \xi)$  *априорно ограничено в точке*  $(\hat{x}_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ . Тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что множество  $H(x_0, \xi)$  *априорно ограничено в совокупности на множестве*  $B_{\mathbb{R}^n}(\hat{x}_0, \varepsilon) \times B_{\Xi}(\xi_0, \varepsilon)$ , и множество  $H(x_0, \tau, \xi)$  *непусто для любых*  $\tau \in (a, b]$ ,  $x_0 \in B_{\mathbb{R}^n}(\hat{x}_0, \varepsilon)$  и  $\xi \in B_{\Xi}(\xi_0, \varepsilon)$ .

В работе получены оценки отклонения в пространстве кусочно-непрерывных функций множества решений задачи Коши от любой наперед заданной функции. Доказана теорема о непрерывной зависимости решений от параметров и начальных условий, которая имеет приложения, связанные с корректностью математических моделей реальных процессов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00610 А.

1. Булгаков А.И., Филиппова О.В. Импульсные функционально-дифференциальные включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2014. Т. 1, № 43. С. 3–48.

2. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1523–1537.
3. *Булгаков А.И., Панасенко Е.А., Сергеева А.О.* О непрерывной зависимости множеств фазовых траекторий системы с фазовыми ограничениями по управлению от параметров // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16, № 1. С. 55–57.

## Об областях $D$ -разбиения пространства параметров линейных разностных уравнений

К. М. Чудинов

*Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет  
e-mail: cyril@list.ru*

Область применения разработанного Ю.И. Неймарком метода  $D$ -разбиения продолжает расширяться в XXI веке. Известны примеры удачного применения метода в исследовании разностных уравнений. Здесь рассмотрим несколько установленных в течение нескольких последних лет свойств  $D$ -разбиений пространства параметров линейного автономного разностного уравнения  $k$ -го порядка общего вида

$$\sum_{i=0}^k a_i x(n-i) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Мы хотим обратить внимание на 3 свойства  $D$ -разбиения уравнения (1): 1) возможность понижения порядка уравнения при исследовании устойчивости, 2) описание разбиения областей разбиения с помощью многочленов Чебышева, 3) линейчатость разбиения.

1. В работе [1] показано, что вопрос об экспоненциальной устойчивости уравнения (1) эффективно сводится к аналогично-

му вопросу для уравнения более низкого порядка: уравнение (1) экспоненциально устойчиво, если и только если  $|a_k| < |a_0|$  и экспоненциально устойчивым является уравнение

$$\sum_{i=0}^{k-1} b_i x(n-i) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где  $b_k = \frac{a_0 a_i - a_k a_{k-i}}{a_0^2 - a_k^2}$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ . Областью экспоненциальной устойчивости уравнения (1) является область  $D$ -разбиения, содержащая начало координат. Каждой точке вне замыкания этой области соответствует неустойчивое уравнение. Точкам на границе области соответствуют как устойчивые по Ляпунову уравнения, так и неустойчивые. Вопрос о разделении этих точек требует отдельного исследования, которое проведено полностью для уравнений до третьего порядка включительно [2].

2. В [1] для описания  $D$ -разбиения использовалось разделение соответствующего уравнению (1) характеристического уравнения на уравнения относительно действительных и мнимых частей. Тот же прием использовался в работе [3], где было отмечено, что области  $D$ -разбиения некоторых видов уравнения (1) аналитически через многочлены Чебышева. В частности, гиперповерхности  $D$ -разбиения уравнения (1) в случае  $k = 3$  имеют вид

$$a_2 = a_0 \pm (a_1 + a_3); \quad \begin{cases} a_2 = a_0(s^2 - 1) - (a_1 + a_3)s, \\ a_1 - a_3 = 2a_0s, \quad s \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Это параметрическое описание поверхностей  $D$ -разбиения представляет границы областей разбиения в виде объединения отрезков прямых линий. Такие границы  $D$ -разбиения получили название *линейчатых* в соответствии с названием поверхностей, образованных движением прямой.

3. Важность линейчатости границ  $D$ -разбиения впервые была показана М.В. Мулюковым. В работе [4], посвященной исследованию областей устойчивости линейных автономных дифференциальных систем с последствием, существенно развит метод  $D$ -разбиений и при этом обнаружено, что принципиальную

роль в эффективном выделении области устойчивости уравнения среди областей  $D$ -разбиения (что в общем случае представляется весьма трудной задачей) играет возможность разбить границы поверхностей разбиения на сечения, каждое из которых состоит из конечного или счетного множества отрезков и полупрямых. В соответствии с этим определим линейчатость  $n$ -мерных областей следующим образом.

**Определение.** Назовем множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$  *линейчатым*, если его можно представить как объединение сечений семейством гиперплоскостей, каждое из которых является (в своей гиперплоскости) пересечением конечного или счетного множества  $(n - 1)$ -мерных полупространств.

Применяя использованный в работе [3] подход к описанию  $D$ -разбиения пространства параметров *произвольного* уравнения (1), можно выразить границы областей в виде линейных комбинаций от многочленов Чебышева. Отсюда получаем следующий результат.

**Теорема.** *Области  $D$ -разбиения пространства параметров уравнения (1) линейчатые.*

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание FSNM-2020-0028.

1. *Кандаков А.А., Чудинов К.М.* Эффективный критерий устойчивости дискретной динамической системы // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 4. С. 88–103.
2. *Нигматуллин Р.М., Кипнис М.М.* Свойства дискретных систем третьего порядка на границе их областей устойчивости // Фундаментальные исследования. 2015. № 9. С. 39–43.
3. *Кандаков А.А.* Линейчатое представление областей устойчивости некоторых классов разностных уравнений // Прикладная математика и вопросы управления. 2019. № 3. С. 40–53.
4. *Мулюков М.В.* Устойчивость двухпараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2018. Т. 51. С. 79–122.

# Тензорные инварианты динамических систем с конечным числом степеней свободы с диссипацией

**М. В. Шамолин**

*Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова*

e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Получены тензорные инварианты для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким многообразиям. Вводимые силовые поля делают системы с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные. Известно [1, 2], что наличие достаточного количества инвариантов позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Для систем, обладающих притягивающими предельными множествами, коэффициенты инвариантов должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [3, 4]. Проведем необходимые рассуждения для систем с тремя степенями свободы. Рассматриваемая динамическая система на касательном расслоении  $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) (z_2^2 + z_1^2) + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = -f_3(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \\ \quad - f(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = -f_3(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - \\ \quad - f(\alpha) \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f(\alpha), \end{array} \right. \quad (1)$$

при наличии также шестого уравнения

$$\dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \quad (2)$$

Здесь  $\Gamma_k(\alpha)$ ,  $k = 1, 3$ ,  $\Gamma_2(\beta_1)$ ,  $\Gamma_{22}^1(\beta_1)$  — коэффициенты аффинной связности многообразия  $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ ;  $f(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$  — функции, определяющие новые кинематические соотношения на касательном расслоении;  $F_3(\alpha)$ ,  $\delta(\alpha)$ ,  $F_s^1(\alpha)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , — функции, определяющие внешнее силовое поле с диссипацией переменного знака [2, 3]. Примем также условия:  $F_1^1(\alpha) \equiv F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha)$ .

Для полного интегрирования системы (1), (2) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых тензорных инвариантов. Однако при некоторых условиях после замены переменных  $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ ,  $z_* = z_2/z_1$ , система (1), (2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z} = \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) z z_3 + z F^1(\alpha), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = \pm z \sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha) \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (4)$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \quad (5)$$

Видно, что для интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых инварианта системы (3), один — системы (4) и дополнительный инвариант, «привязывающий» (5) (т.е. всего *четыре*). Пусть для некоторого  $\kappa \in \mathbf{R}$  выполнено равенство

$$\begin{aligned} \frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) &= \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \\ \tilde{\Delta}(\alpha) &= \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{aligned} \quad (6)$$

а для некоторых  $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , — равенства

$$\begin{aligned} F_3(\alpha) &= \lambda_3^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_3^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha); \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_3(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие (6) назовем «геометрическим», а условия из группы (7) — «энергетическими». При этом  $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda^1$ .

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (6) и (7). Тогда система (3)–(5) обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами [5, 6].

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если  $\kappa = -1$ ,  $\lambda^1 = \lambda_3^1$ , явный вид ключевого интеграла таков:

$$\begin{aligned} \Theta_1(z_3, z; \alpha) &= G_1 \left( \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2 + z^2) + (b - \lambda^1)z_3\delta(\alpha)f_3(\alpha) - \lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)f_3(\alpha)} = C_1. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (3) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2 \left( \Delta(\alpha), \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (9)$$

Первый интеграл для системы (4) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}, \quad (10)$$

а дополнительный первый интеграл, «привязывающий» (5):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const.} \quad (11)$$

**Теорема 2.** Если для систем вида (3)–(5) выполняются геометрическое и энергетические свойства (6), (7), то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие четыре инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами:

$$\rho_1(z_3, z; \alpha) dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(z_3, z; \alpha) =$$

$$= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\} \frac{u_3^2 + u^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0}{u};$$

$$\rho_2(z_3, z; \alpha) dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha, \quad \rho_2(z_3, z; \alpha) =$$

$$= \Delta(\alpha) \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\} \exp \left\{ - \int \frac{(b + u_3)du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\};$$

$$\rho_3(z_*; \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_*^2}} dz_* \wedge d\beta_1$$

(после замены независимого переменного в системе (4));

$$\rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) dz_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

$$\rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\} \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2),$$

но зависящие с первыми интегралами (8)–(11).

1. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 1. С. 117–148.
2. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. М.: ЛЕНАНД, 2019.
3. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности. М.: ЛЕНАНД, 2021.
4. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495, № 1. С. 84–90.

5. *Шамолин М.В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 497, № 1. С. 23–30.
6. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79, № 3. С. 307–316.

## **О качественных характеристиках точек равновесия и циклов непрерывно-дискретных систем**

**М. Г. Юмагулов**

*Уфа, Башкирский государственный университет*

e-mail: yum\_mg@mail.ru

**С. В. Акманова**

*Магнитогорск, Магнитогорский государственный технический  
университет*

e-mail: author3@email.org

Многие задачи, возникающие в различных приложениях, приводят к динамическим моделям, содержащим одновременно фазовые переменные и уравнения как с непрерывным, так и с дискретным временем. Такие модели часто называют непрерывно-дискретными или гибридными. Интерес к исследованию различных классов непрерывно-дискретных систем (НДС) постоянно возрастает (см., например, [1, 2]).

При изучении НДС одними из основных являются подходы, базирующиеся на переходе от исходной системы к равносильной (в естественном смысле) динамической системе с непрерывным временем или динамической системе с дискретным временем. В первом случае возникают дифференциальные уравнения с переключениями, что вызывает сложности качественного характера. Во втором случае возникают дискретные системы; при таком подходе теряется информация о поведении исходной НДС в промежутках между моментами переключения.

В настоящей статье обсуждаются некоторые вопросы качественного характера, связанного со вторым из указанных подходов. А именно обсуждаются вопросы о точках равновесия и циклах НДС, об их устойчивости, о сценариях локальных бифуркаций, при этом в качестве бифуркационного параметра выбирается шаг дискретизации.

Рассматривается НДС

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k)), & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$  — векторы, характеризующие поведение соответственно непрерывной и дискретной части динамической системы; моменты времени  $t_k$  задают равномерную сетку с шагом  $h > 0$ :  $0 = t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_1 + h < \dots < t_{k+1} = t_k + h < \dots$ . Участвующие в системе (1) функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  являются непрерывно дифференцируемыми и порождают операторы  $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$  и  $g: R^n \times R^m \rightarrow R^m$ . Функционирование системы (1) осуществляется по стандартной схеме.

Обозначим через  $U_h: R^n \times R^m \rightarrow R^n$  оператор сдвига по траекториям системы  $x' = f(x, y)$  за время от  $t = 0$  до  $t = h$ . Оператор  $U_h$  ставит в соответствие вектору  $(x_0, y_0) \in R^n \times R^m$  вектор  $x_1 = x(h) \in R^n$ ; здесь  $x(t)$  — решение задачи Коши

$$x' = f(x, y_0), \quad x(0) = x_0.$$

Таким образом, имеем  $U_h(x_0, y_0) = x_1$ .

Перейдём от НДС (1) к дискретной динамической системе (ДДС) вида

$$\begin{cases} x_{k+1} = U_h(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = g(U_h(x_k, y_k), y_k), & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) фиксирует значения решений исходной системы (1) в моменты времени  $t = 0$ ,  $t = h$ ,  $t = 2h$  и т.д., но при этом теряется информация о поведении решения исходной системы в промежутках  $0 < t < h$ ,  $h < t < 2h$  и т.д.

На первом этапе проводится исследование взаимосвязи точек равновесия ДДС (2) и решений исходной НДС (1). Здесь устанавливаются следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Каждой точке равновесия  $(x^*, y^*)$  ДДС (2) соответствует  $h$ -периодическое решение  $x = \varphi_0(t)$ ,  $y = y^*$  НДС (1) такое, что  $\varphi_0(0) = \varphi_0(h) = x^*$ .*

Так как в моменты переключения  $t = t_k$  поведение НДС (1) перестраивается, то возникает естественный вопрос о том, будет ли существующая в условиях теоремы 1 функция  $x = \varphi_0(t)$  непрерывно дифференцируемой при всех  $t$ . Здесь ответ положительный.

В важном частном случае, когда дифференциальное уравнение в системе (1) является скалярным, утверждение теоремы 1 уточняется.

**Теорема 2.** *Если  $n = 1$ , то точка равновесия  $(x^*, y^*)$  ДДС (2) является и точкой равновесия исходной НДС (1).*

Рассмотрим теперь вопрос о взаимосвязи циклов ДДС (2) и решений исходной НДС (1).

**Теорема 3.** *Пусть ДДС (2) имеет цикл периода  $q$  ( $q \geq 2$ ):*

$$\underbrace{(x_0^*, y_0^*), (x_1^*, y_1^*), \dots, (x_{q-1}^*, y_{q-1}^*)}_{\dots}, \underbrace{(x_0^*, y_0^*), (x_1^*, y_1^*), \dots, (x_{q-1}^*, y_{q-1}^*)}_{\dots}, \dots$$

Тогда НДС (1) имеет  $qh$ -периодическое решение

$$x = \varphi_0(t), \quad y = y_j^*, \quad j = 0, 1, \dots, q - 1,$$

так что  $\varphi_0(0) = x_0^*$ ,  $\varphi_0(h) = x_1^*$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_0((q - 1)h) = x_{q-1}^*$ .

Отметим, что существующая в условиях теоремы 3 функция  $x = \varphi_0(t)$  уже не обязательно непрерывно дифференцируема при всех  $t$ : гладкость может нарушаться в моменты переключения  $t = t_k$ .

НДС (1) и соответствующая ей ДДС (2) зависит от шага  $h$ , который можно рассматривать как параметр соответствующих уравнений. При изменении этого параметра могут изменяться такие качественные характеристики точек равновесия или циклов как устойчивость, гиперболичность, топологический тип и др. В

этой связи возникает вопрос о возможных при этом сценариях бифуркаций. На втором этапе изучения характеристик взаимосвязи НДС (1) и ДДС (2) анализируется вопрос о том, как локальные бифуркации в окрестностях точек равновесия и циклов ДДС (2) отражаются на динамике НДС (1). Рассматриваются основные сценарии бифуркаций: кратного равновесия, удвоения периода и Андронова-Хопфа.

1. *Hou L., Michel A.N.* Unifying theory for stability of continuous, discontinuous, and discrete-time dynamical systems // *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 2007. Vol. 1, no. 2, pp. 154–172.
2. *Максимов В.П.* Непрерывно-дискретные динамические модели // *Уфимский математический журнал*. 2021. Т. 13, № 3. С. 97–106.

## **О качественном поведении решений ограниченной задачи трех тел в окрестности прямолинейной точки либрации $L_3$**

**М. Г. Юмагулов**

*Уфа, Башкирский государственный университет*  
e-mail: yum\_mg@mail.ru

**О. Н. Беликова**

*Сибай, Сибайский филиал (институт) БашГУ*  
e-mail: bekiova-oksana@yandex.ru

**Д. Худойбердиев**

*Самарканд (Узбекистан), Самаркандский госуниверситет*  
e-mail: khudoyberdiyev.1996@mail.ru

Одной из наиболее интересных задач небесной механики является плоская ограниченная задача трех тел (ПОЗТТ). В ней рассматривается система, состоящая из трех материальных точек  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M$ , при этом масса тела  $M$  пренебрежимо мала по сравнению с массами тел  $M_0$  и  $M_1$  так что тело  $M$  практически не оказывает никакого влияния на тела  $M_0$  и  $M_1$ , но само ими притягивается и движется в плоскости движения тел  $M_0$  и  $M_1$ .

В настоящей работе рассматривается ПОЗТТ в следующей постановке (см., например, [1, 2]). Пусть  $m_0 = 1 - \mu$  и  $m_1 = \mu$  — массы тел  $M_0$  и  $M_1$ ; величину  $\mu$  ( $0 < \mu < 1$ ) обычно называют *параметром масс*. Движение тела  $M$  малой массы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'' - 2y' = \rho(\varepsilon, t)[x - F(x, y, \mu)], \\ y'' + 2x' = \rho(\varepsilon, t)[y - yG(x, y, \mu)]; \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $\rho(\varepsilon, t) = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos t}$ ,  $\varepsilon$  — эксцентриситет ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ),

$$F(x, y, \mu) = \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{r_2^3}, \quad G(x, y, \mu) = \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3};$$

здесь  $r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2}$ . При  $\varepsilon = 0$  имеем круговую ПОЗТТ, а при  $0 < \varepsilon < 1$  — эллиптическую ПОЗТТ.

Известно, что ПОЗТТ имеет пять точек равновесия, которые называют *точками либрации* системы (1). Они подразделяются на прямолинейные (эйлеровы)  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  и треугольные (лагранжевы)  $L_4$  и  $L_5$  точки либрации (рис. 1).

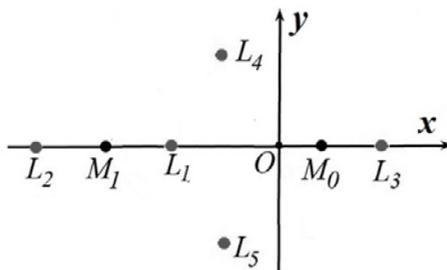


Рис. 1: Точки либрации системы (1) (O — центр масс тел  $M_0$  и  $M_1$ )

Имеется много работ, посвященных исследованию различных аспектов поведения тела  $M$  малой массы в окрестностях точек либрации (см., например, [1–3] и имеющуюся там библиографию). В настоящей работе обсуждаются некоторые вопросы,

связанные с изучением поведения тела  $M$  малой массы в окрестности прямолинейной точки либрации  $L_3$ . Рассматривается один из наиболее актуальных случаев, когда масса тела  $M_0$  существенно превосходит массу тела  $M_1$ , т.е. параметр  $\mu$  является малым. При рассмотрении эллиптической задачи предполагается также, что эксцентриситет  $\varepsilon$  является малым.

Приведем основные этапы исследования. На первом этапе изучается круговая задача, т.е. в (1) полагается  $\varepsilon = 0$ . Путем введения новых переменных  $u_1 = x$ ,  $u_2 = y$ ,  $u_3 = x' - y$ ,  $u_4 = y' + x$ , перейдем от (1) к равносильной гамильтоновой системе

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= u_2 + u_3, \\ u_2' &= -u_1 + u_4, \\ u_3' &= u_4 - F(u_1, u_2, \mu), \\ u_4' &= -u_3 - u_2 G(u_1, u_2, \mu) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

с гамильтонианом

$$H(u_1, u_2, u_3, u_4; \mu) = \frac{u_3^2 + u_4^2}{2} + u_2 u_3 - u_1 u_4 - \Omega(u_1, u_2; \mu);$$

здесь  $\Omega(u_1, u_2; \mu) = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$ .

Показано, что система (2) при малых  $\mu > 0$  имеет точку равновесия  $u^*(\mu) = (x^*(\mu), 0, 0, x^*(\mu))$ , где  $x^*(\mu) = 1 + \frac{5}{12}\mu + O(\mu^2)$ . Это постоянное решение  $u^*(\mu)$  системы (2) соответствует прямолинейной точке либрации  $L_3$  системы (1).

Далее изучаются спектральные характеристики матрицы Якоби  $B(\mu)$  правой части системы (2), вычисленной в точке равновесия  $u^*(\mu)$ . Показано, что собственные значения этой матрицы представимы в виде

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \pm \sqrt{\frac{21}{8}\mu + O(\mu)}, \quad \lambda_{3,4}(\mu) = \pm i \left( 1 + \frac{7}{8}\mu + O(\mu^2) \right).$$

На основе этих результатов строится центральное многообразие системы (2) в окрестности точки равновесия  $u^*(\mu)$  и показывается, что на нем фазовый портрет нелинейной системы (2) имеет тип «центр».

На втором этапе полученные результаты используются при изучении эллиптической задачи в предположении, что эксцентриситет  $\varepsilon > 0$  является малым. Здесь основное внимание уделяется задаче о параметрическом резонансе и, в частности, задаче построения резонансных кривых в плоскости  $\Pi$  параметров  $\mu$  и  $\varepsilon$ . При этом используются результаты, полученные в [4, 5].

1. *Себедей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
3. *Meyer K., Hall G., Offin D.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. 2nd ed. New York: Springer, 2009.
4. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 3. С. 178–195.
5. *Юмагулов М.Г., Фазлытдинов М.Ф.* Приближенные формулы и алгоритмы построения центральных многообразий динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2020. № 1. С. 34–51.

---

---

**ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ**

**On stabilization of bilinear control  
state-dependent impulsive dynamical systems**

**T. S. Bykova, V. A. Zaitsev**

*Izhevsk, Udmurt State University*

e-mail: tsbykova@gmail.com, verba@udm.ru

Consider a bilinear control state-dependent impulsive dynamical system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + uBx(t), \quad x(t) \notin \mathcal{Z}, \quad (1)$$

$$\Delta x(t) = Dx(t), \quad x(t) \in \mathcal{Z}. \quad (2)$$

Here  $t \in [0, +\infty)$ ;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  is a state;  $A, B, D$  are real constant  $n \times n$ -matrices;  $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n$  is a resetting set;  $\Delta x(t) = x(t^+) - x(t)$ ,  $x(t^+) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x(t + \varepsilon)$ ,  $x(t) \in \mathcal{Z}$ ;  $u \in \mathbb{R}$  is a control. The differential equation (1) determines the continuous-time dynamics of the impulsive system, and the difference equation (2) defines the resetting law [1, p. 12]. We suppose that the control in (1) is constructed as state feedback

$$u = \hat{u}(x), \quad (3)$$

so the closed-loop system has the form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \hat{u}(x(t))Bx(t), \quad x(t) \notin \mathcal{Z}, \quad (4)$$

$$\Delta x(t) = Dx(t), \quad x(t) \in \mathcal{Z}. \quad (5)$$

We will assume that the function (3) is continuous. the solution to (4) with the initial condition  $x(0) = x_0$  is jointly continuous in  $t$  and

in the initial state  $x_0$  between resetting events [1, p. 12]. Concerning the set  $\mathcal{Z}$ , we assume that: (a) if  $x \in \mathcal{Z}$ , then  $x + Dx = (I + D)x \notin \mathcal{Z}$ . In addition, we assume, for any trajectory  $x(t)$  of (4), that: (b) if at time  $t$  the trajectory  $x(t) \in \overline{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$ , then there exists  $\varepsilon > 0$  such that for all  $0 < \delta < \varepsilon$  we have  $x(t + \delta) \notin \mathcal{Z}$ . It follows from these assumptions that for a particular initial condition  $x(0) = x_0$ , the resetting times  $\tau_k(x_0) = t_k$  are distinct and well defined. From condition (a), it follows, in particular, that  $0 \notin \mathcal{Z}$ .

System (1), (2) has the zero solution  $\xi(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, +\infty)$ . Definitions of stability (asymptotic stability etc.) of the zero solution to the impulsive system (1), (2) have the standard form (see, e.g., [1, Section 2.3]). We study the problem of global asymptotic stabilization of the zero solution to system (1), (2): one needs to construct a continuous state feedback control law (3) with  $\hat{u}(0) = 0$  such that the zero solution of the closed-loop system (4), (5) is globally asymptotically stable.

First, consider the free impulsive dynamical system

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \notin \mathcal{Z}, \quad (6)$$

$$\Delta x(t) = Dx(t), \quad x(t) \in \mathcal{Z}. \quad (7)$$

Denote  $F := D + I$ . Suppose that the following condition holds:

(i) There exists a matrix  $P = P^T > 0$  such that

$$x^T(A^T P + PA)x \leq 0, \quad x \notin \mathcal{Z},$$

$$x^T(F^T P F - P)x \leq 0, \quad x \in \mathcal{Z}.$$

Then, by [1, Theorem 2.1], the zero solution of the free system (6), (7) is Lyapunov stable (non-asymptotically).

**Theorem.** *Suppose that condition (i) holds and the following condition holds:*

(ii) *The set*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \doteq & \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \mathcal{Z}, x^T(A^T P + PA)x = x^T(B^T P + PB)x = 0\} \cup \\ & \cup \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \mathcal{Z}, x^T(F^T P F - P)x = 0\} \end{aligned}$$

*contains no positively invariant set other than the set  $\{0\}$ .*

Then state feedback (3) with the control law

$$\widehat{u}(x) = -x^T(B^T P + PB)x$$

globally asymptotically stabilizes the zero solution of system (1), (2).

The theorem generalizes the well-known results on stabilization for bilinear systems without impulses (i.e., when  $\mathcal{Z} = \emptyset$ ).

The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-01265-22-00, project FEWS-2020-0010.

1. *Haddad W., Chellaboina V., Nersesov S.* Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control. Princeton; Oxford: Princeton University Press, 2006.

## Generalized solutions of differential equations with Lie algebra structure

**B. M. Miller**

*Moscow, IITP RAS, and Monash University, VIC, Melbourne,  
Australia*

e-mail: bmiller@iitp.ru

Consider the system described by the differential equation, which is affine in an unbounded control

$$\dot{X}(t) = B(X(t), t)w(t), \tag{1}$$

with control  $w \in K$ , where  $K \in R^m$  is a convex cone. The control  $w(t)$  corresponds to the controls which are unbounded in the norm but restricted in the integral sense so that  $w(t)$  satisfies the constraint

$$\int_0^T \|w(t)\| dt \leq M < \infty,$$

with some constant  $M$ .

The equation in (1) is affine with respect to a control variable  $w(t)$ . This type of controls admits the generalized inputs such as  $\delta$ -functions which could produce the jumps of phase variable  $X(t)$  [1]. The general representation of solution is given by Theorem 2.14 [2].

Suppose that  $f(x)$  and  $g(x)$  are two smooth vector-fields in  $R^n$ .

**Definition 1.** The *product* or the *Lie bracket*  $[f, g]$  of two smooth vector-fields in  $R^n$  will be defined as

$$[f, g](x) = f'_x(x)g(x) - g'_x(x)f(x),$$

where  $f'_x(x), g'_x(x)$  are  $(n \times n)$  matrices of partial derivatives of the vector-field components. If  $[f, g] = 0$ , then the pair of the vector-fields  $f, g$  will be called *commutative*.

**Theorem 1.** In the commutative case that is if the columns of matrix function  $B(x, t)$  satisfies  $[B_i, B_j] = 0$  for all  $i, j$  the general solution of the system

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^N B_i(X(t))w_i(t) \quad (2)$$

with the initial condition  $X(0) = x_0$ , admits the representation

$$X(t) = \Phi_N(\xi_N(t), \Phi_{N-1}(\xi_{N-1}(t), \dots, \Phi(\xi_1(t), x_0) \dots)), \quad (3)$$

where  $\xi_k = \int_0^t w_k(s)ds$ , and  $\Phi_k(t, y)$  is the solution of the differential equation

$$\dot{y}(t) = B_k(y(t)), \quad y(0) = y.$$

The same representation one can be obtained if the columns of matrix function  $B(x, t)$  are in involution.

**Definition 2.** The set of the vector-fields  $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$  will be called *involution* if the Lie brackets of any  $f_i, f_j$  are the linear combinations of  $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$ , i.e. there exists the set of constants  $\{c_{i,j}^k, i, j, k = 1, \dots, N\}$  such that

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^N c_{i,j}^k f_k. \quad (4)$$

The set  $\{c_{i,j}^k, i, j, k = 1, \dots, N\}$  will be called *the set of structural constants* of the Lie algebra  $\mathcal{L}\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$  generated by vector-fields  $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$ .

**Theorem 3.** *If the columns of matrix function  $B(x, t)$  are in involution the general solution of (2) admits representation (3), where functions  $\vec{\xi}(t) = \{\xi_i(t)\}$  corresponding to controls  $\vec{w}(t) = \{w_i(t)\}$  are the solution of the system*

$$L(\vec{\xi})\dot{\vec{\xi}}(t) = \vec{w}(t), \quad \vec{\xi}(0) = 0,$$

where analytical functions  $L^{i,j}$  depend on the structural constants of the Lie algebra  $\mathcal{L}\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ .

To obtain the representation like (3) in a general case, when functions  $\{f_i\}$  are in involution (see Def. 2), we need the following

**Lemma 1.** *Let  $\Phi_i(\xi, y) \in R^N$ , where  $\xi \in R^1, y \in R^N$ , be a solution of the differential equation*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_i(\xi, y) = f_i(\Phi_i(\xi, y))$$

with the initial condition

$$\Phi_i(0, y) = y.$$

Suppose that the set of functions  $\{f_i, i = 1, \dots, N\}$  satisfies (4), so they are in involution. Then for any  $i, j = 1, \dots, N$  we have the relation

$$\frac{\partial \Phi_i(\xi, y)}{\partial y} f_j(y) = \sum_{k=1}^N \gamma_{ij}^k(\xi) f_k(\Phi_i(\xi, y)),$$

where  $\gamma_{ij}^k(\xi)$  are the analytical functions depending on the structural constants of the Lie algebra  $\mathcal{L}\{f_1, \dots, f_N\}$  only.

The detailed derivations of further relations are in [1, pp. 178–185] and in [2, pp. 236–244]. Some examples of these methods applied to systems with involution properties are given in the above monographs.

1. *Miller B.M., Rubinovich E.Ya.* Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishres, 2003.
2. *Miller B.M., Rubinovich E.Ya.* Optimization of Dynamical Systems with Impulse Controls and Shocks. M.: LENAND, 2019. (in Russian)

## The stability of completely controllable systems

**A. Ya. Narmanov, G. M. Abdishukurova**

*Tashkent, National University of Uzbekistan*

e-mail: narmanov@yandex.ru, abdishukurova.guzal93@yandex.ru

Let us consider the control system

$$\dot{x} = f(x, u), x \in M, u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

where  $M$  is a connected smooth (class  $C^\infty$ ) manifold of dimension  $n$ , for each  $u \in U$  the vector the field  $f(\cdot, u)$  is smooth of class  $C^\infty$ , and the mapping  $f: M \times U \rightarrow TM$  is continuous,  $U$  is compact set.

Admissible controls for the system (1) are piecewise constant functions  $u: [0, T] \rightarrow U$ , where  $0 < T < \infty$ . We say that from a point  $x_1 \in M$  one can get to a point  $x_2 \in M$  in time  $T$  if there exists a trajectory  $x: [0, T] \rightarrow M$  of system (0.1) such that  $x(0) = x_1$  and  $x(T) = x_2$ .

The set of points  $M$  from which one can get to  $\eta \in M$  will be called the set controllability with the target point  $\eta$  and denote by  $G_\eta$ . By definition, we put  $\eta \in G_\eta$  for for  $\eta \in M$ .

Let  $M$  be a smooth manifold of dimension  $n$ ,  $D$  be the family of smooth vector fields defined on the manifold  $M$ . The family  $D$  may contain a finite or infinite number of smooth vector fields.

For a point  $x \in M$ , by  $t \rightarrow X^t(x)$  we denote the integral curve of the vector of the field  $X$  passing through the point  $x$  at  $t = 0$ .

**Definition 1.** The orbit  $L(x)$  of a family  $D$  of vector fields passing through a point  $x$  is defined as the set of points  $y$  from  $M$  for which

there are real numbers  $t_1, t_2, \dots, t_k$  and vector fields  $X_1, X_2, \dots, X_k$  from  $D$  (where  $k$  is an arbitrary natural number) such that

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)).$$

It was proved in [2, 3] that each orbit of a family of smooth vector fields has a differential structure with respect to which it is a smooth submanifold immersed in  $M$ .

**Definition 2.** An orbit  $L$  is called proper if the canonical injection  $i: L \rightarrow M$  is an injection, that is, when the topology of the leaf coincides with the induced topology from  $M$ .

Control system (1) generates a family of vector fields

$$D = \{f(\cdot, u) : u \in U\}. \quad (2)$$

Consequently, the set  $G_\eta$  is a subset of the orbit  $L(\eta)$  of the family  $D$  for every  $\eta \in M$ .

**Definition 3.** We say that system (1) is controllable from the point  $\eta$  if  $G_\eta = L(\eta)$ .

**Definition 4.** We say that system (1) is completely controllable on  $L(\eta_0)$  if  $G_\eta = L(\eta_0)$  for every  $\eta \in L(\eta_0)$  where  $\eta_0 \in M$ .

Let  $L = L(\eta_0)$  be some orbit of the family  $D$ , and system (1) is completely controllable on  $L$ . Consider the question of under what conditions completely controllable system (1) on  $L(\eta_0)$  will be completely controllable on orbits  $L(\eta_0)$  if the point  $\eta$  is sufficiently close to  $\eta_0$ .

In the case when the orbit  $L$  is a compact set, this question was solved in [4]. By using Reeb stability theorem following theorem was proved in [4].

**Theorem 1.** *Let  $L_0$  is a compact leaf of a foliation  $F$  with a finite holonomy group. Then, if system (1) is completely controllable on  $L_0$ , then it is completely controllable on leaves sufficiently close to  $L_0$ .*

By Reeb's theorem, if  $L_0$  is a compact leaf with a finite holonomy group, then for every open set  $V$  containing  $L_0$  there exists an open invariant set  $U$  such that  $L_0 \subset U \subset V$ ,  $U$  consists of compact leaves.

Thus, Reeb's theorem allows one to obtain a sufficient condition for the local stability of a completely controllable system in the case when  $L_0$  is compact.

As examples show, this theorem is not true if  $L_0$  is a non-compact leaf or  $L_0$  is a compact leaf whose holonomy group is not a finite group.

**Definition 5.** A control system (1) is called normally-locally controllable (in short,  $N$ -locally controllable) near a point  $p \in L(\eta)$ , if for any  $T > 0$  there exists a neighborhood  $V$  of the point  $p$  in  $L(\eta)$ , such that from each point of the set  $V$  one can reach the point  $p$  in time less than  $T$ .

**Definition 6.** We say that system (1) is completely controllable (or  $N$ -locally controllable) on an invariant set  $S \subset M$ , if it is completely controllable (or  $N$ -locally controllable) on each leaf from  $S$ .

Let  $L_0$  be a proper leaf of  $F$ . Suppose that for each point  $x \in L_0$  there exists a number  $r = r_x > 0$  such that for each horizontal curve

$$h: [0, 1] \rightarrow U_r = \{y \in M : \rho(y, L_0) < r\}$$

starting at  $x$ , and for each path  $v: [0, 1] \rightarrow L_0$  starting at  $x = h(0)$  (vertical path), there exists a continuous mapping (vertical-horizontal homotopy)  $\psi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  such that  $\psi(t, 0) = v(t)$  for  $t \in [0, 1]$ ,  $\psi(0, s) = h(s)$  for  $s \in [0, 1]$ .

Under this condition it takes place [1].

**Theorem 2.** Let  $\dim A_x(D) = n - 1$  for all  $x \in M$ , and  $F$  is a transversally orientable foliation,  $L_0$  be a relatively compact proper leaf with a finitely generated fundamental group. Then, if the holonomy group of the leaf  $L_0$  is trivial. If system (1) is  $N$ -locally controllable on  $\overline{L_0}$  (closure in  $M$ ), then there exists an invariant neighborhood  $V$  of the leaf  $L_0$  such that system (1) is completely controllable on each leaf from  $V$ .

Now let us return to the case  $\dim A_x(D) = k$  for all  $x \in M$ , where  $0 < k < n$ . In this case,  $F$  is a  $k$ -dimensional foliation. Suppose that the foliation  $F$  is a Riemannian foliation with respect to the Riemannian metric  $g$ . The following result was obtained in [1].

**Theorem 3.** *Let  $(M, g)$  be a complete Riemannian manifold and  $L_0$  is relatively compact leaf of the foliation  $F$ . Then, if system (1) is  $N$ -locally controllable on  $\bar{L}_0$  (the closure of  $L_0$ ) then there exists an invariant neighborhood  $V$  of the leaf  $L_0$  such that on each leaf of  $V$  the system (1) is completely controllable.*

1. *Narmanov A.* Stability of completely controllable systems // Differ. Equations. 2000. Vol. 36, no. 10, pp. 1475–1483.
2. *Stefan P.* Accessibility and Foliations with singularities // Bulletin of the A.M.S. 1974. Vol. 80, no. 6, pp. 1142–1145.
3. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 79, pp. 177–199.
4. *Gauthier J., Bornard G.* An openness condition for the controllability of nonlinear systems // J. Control and Optimization. 1982. Vol. 20, no. 6, pp. 708–714.

## On block eigenvalues assignment by linear state feedback for block linear control systems

**V. A. Zaitsev, I. G. Kim**

*Izhevsk, Udmurt State University*

e-mail: verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

Let  $P_s = P_s(\mathbb{C})$  be a set of  $s$ -order square complex matrices that commute in pairs;  $M_{p,q}(P_s)$  be the set of matrices partitioned into  $p \times q$  blocks each belonging to  $P_s(\mathbb{C})$ ;  $M_p(P_s) := M_{p,p}(P_s)$ . The matrices in  $M_{p,q}(P_s)$  are complex  $ps \times qs$ -matrices.

Given a matrix  $A \in M_m(P_s)$ , we consider matrices  $\Lambda \in P_s(\mathbb{C})$  such that there exists a matrix  $X \in M_{m,1}(P_s)$ , of full rank, satisfying

$$AX = X\Lambda.$$

$\Lambda$  is called a *block eigenvalue* of the matrix  $A$ , and  $X$ , of full rank, is the corresponding *block eigenvector* of the matrix  $A$  [1].

The well-known important result is that *the eigenvalues of  $\Lambda$  are eigenvalues of  $A$*  [2]. A set of block eigenvalues of a matrix is a *complete set* if the set of all the eigenvalues of these block eigenvalues is the set of eigenvalues of the matrix [2].

By the *formal determinant* of a matrix  $F \in M_r(P_s)$  we mean the matrix  $\det F$  which we obtain by developing the determinant of  $F$ , considering the (commuting) blocks as elements. By  $\text{Det } G$  we denote the determinant of a matrix  $G$ . It is known [3] that

$$\text{Det } F = \text{Det}(\det F).$$

Consider a block linear control system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x &\in \mathbb{C}^{ns}, & u &\in \mathbb{C}^s, \\ A &\in M_n(P_s), & B &\in M_{n,1}(P_s). \end{aligned} \quad (1)$$

Suppose that the controller in system (1) is constructed as linear state feedback

$$u = Qx, \quad Q \in M_{1,n}(P_s). \quad (2)$$

The closed-loop system has the form

$$\dot{x} = (A + BQ)x, \quad x \in \mathbb{C}^{ns}. \quad (3)$$

For control systems defined by differential equation systems of high orders, the block matrix eigenvalues assignment problems by means of state and output feedback were studied in [4]. For system (1), consider a block eigenvalues assignment problem by linear state feedback (2).

We will say that, for linear control system (1), *the complete set of block eigenvalues is arbitrary assignable by linear state feedback* (2), if for any matrices  $\Lambda_j \in P_s(\mathbb{C})$ ,  $j = \overline{1, n}$ , there exists a matrix  $Q \in M_{1,n}(P_s)$  such that the complete set of block eigenvalues of the matrix  $A + BQ$  of the closed-loop system (3) is  $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ .

**Theorem.** For linear control system (1), the complete set of block eigenvalues is arbitrary assignable by linear state feedback (2) if and only if

$$\text{rank} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = ns.$$

The theorem generalizes well-known results for the scalar (i.e., for  $s = 1$ ) eigenvalue assignment problem by linear state feedback.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-01-00293, and by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-01265-22-00, project FEWS-2020-0010.

1. *Vitória J.* Block eigenvalues of block compound matrices // Linear Algebra and its Applications. 1982. Vol. 47, pp. 23–34.
2. *Dennis J.E. (Jr.), Traub J.F., Weber R.P.* The algebraic theory of matrix polynomials // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1976. Vol. 13, no. 6, pp. 831–845.
3. *Ingraham M.H.* A note on determinants // Bull. Amer. Math. Soc. 1937. Vol. 43, no. 8, pp. 579–580.
4. *Zaitsev V., Kim I.* Matrix eigenvalue spectrum assignment for linear control systems by static output feedback // Linear Algebra and its Applications. 2021. Vol. 613, pp. 115–150.

## Одновременная многократная поимка группы убегающих

**А. И. Благодатских**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: aiblag@mail.ru

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma$   $n + m$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и  $m$  убегающих  $E_1, \dots, E_m$  с законами движения и начальными условиями

$$\begin{aligned} P_i : \quad \dot{x}_i &= A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E_j : \quad \dot{y}_j &= A(t)y_j + v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad j \in I(m), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_i, y_j \in \mathbb{R}^k$ ,  $A(t)$  — непрерывная на  $[t_0, \infty)$  квадратная матрица порядка  $k$ ,  $U(t) \in \text{compr}(\mathbb{R}^k)$  — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа на  $[t_0, \infty)$ , множество  $I(q) = \{1, \dots, q\}$  для всех  $q \geq 1$ .

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на  $[t_0, \infty)$  со значениями из множества  $U(t)$  будем называть *допустимыми*.

Пусть  $\sigma$  — некоторое разбиение

$$t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_q < \dots$$

интервала  $[t_0, \infty)$ , не имеющее конечных точек сгущения.

**Определение 1.** *Кусочно-программной стратегией убегающих  $E_j$ , соответствующей разбиению  $\sigma$ , будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие  $\theta_q, x_i(\theta_q), y_j(\theta_q)$  допустимое управление  $v(t)$ , определенное для  $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ , то есть для всех  $q = 0, 1, 2, \dots$*

$$v(t) = v(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y_j(\theta_q)), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}).$$

Здесь и далее, если  $\theta_{q+1}$  не определен ( $\theta_q$  — последняя точка разбиения  $\sigma$ ), то считаем  $\theta_{q+1} = \infty$ .

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих выбирает одно и то же управление  $v(t)$ .

**Определение 2.** *Кусочно-программной контрстратегией преследователей  $P_i$ , соответствующей разбиению  $\sigma$ , будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие  $\theta_q, x_i(\theta_q), y_j(\theta_q)$  и допустимому управлению  $v(s)$ ,  $s \in [\theta_q, \theta_{q+1})$  убегающих  $E_j$  допустимые управления  $u_i(t)$ , определенные для  $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ , то есть для всех  $q = 0, 1, 2, \dots$*

$$u_i(t) = u_i(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y_j(\theta_q), v(s), s \in [\theta_q, \theta_{q+1})), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}).$$

Для каждого  $q = 1, 2, \dots, n$  определим множество

$$\Omega(q) = \{\{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q, i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n)\}.$$

**Определение 3.** В игре  $\Gamma$  возможна  $b$ -кратная поимка (нестрогая одновременная  $b$ -кратная поимка), если существует конечный момент  $T_0$  такой, что для любых разбиения  $\sigma$  и кусочно-программной стратегии убегающих  $E_j$ , существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей  $P_i$ , что найдутся множество  $\Lambda \in \Omega(b)$ , номера  $j_\alpha \in I(m)$  и моменты  $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$  (момент  $\tau \in [t_0, T_0]$ ),  $\alpha \in \Lambda$ , для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha) \left( x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau) \right) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

**Определение 4.** В игре  $\Gamma$  возможна одновременная  $b$ -кратная поимка, если существует конечный момент  $T_0$  такой, что для любых разбиения  $\sigma$  и кусочно-программной стратегии убегающих  $E_j$ , существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей  $P_i$ , что найдутся множество  $\Lambda \in \Omega(b)$ , номера  $j_\alpha \in I(m)$  и момент  $\tau \in [t_0, T_0]$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при  $b = 1$  определения поимок совпадают (в этом случае будем говорить, что в игре  $\Gamma$  возможна поимка). Если  $b \geq 2$ , то возможность  $b$ -кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной  $b$ -кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной  $b$ -кратной поимки.

Введем обозначения:  $S(a, b)$  — шар в  $\mathbb{R}^k$  с центром в точке  $a$  радиуса  $b$ ;  $O$  — квадратная нуль-матрица порядка  $k$ ,  $\mathbf{0}$  — начало координат в  $\mathbb{R}^k$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A(t) \equiv O$  (задача простого преследования),  $m = 1$  (одного убегающего),  $U(t) \equiv S(\mathbf{0}, 1)$  (с максимальными по модулю скоростями игроков равными 1). Тогда для осуществления одновременной  $b$ -кратной поимки необходимо и достаточно, чтобы  $Y_1^0 \in \text{Intco}\{X_p^0, p \in K\}$  для всех множеств  $K \in \Omega(n - b + 1)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A(t) \equiv O$  (задача простого преследования),  $m \geq 2$  (группы убегающих),  $U(t) \equiv S(\mathbf{0}, 1)$  (с максимальными

ми по модулю скоростями игроков равными 1). Тогда для осуществления одновременной  $b$ -кратной поимки достаточно, чтобы для каждого  $i \in I(n)$  нашлся такой номер  $j_i \in I(m)$ , что  $0 \in \text{Intco}\{X_p^0 - Y_{j_p}^0, p \in K\}$  для всех множеств  $K \in \Omega(n - b + 1)$ .

**Пример 1.** В  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим игру  $\Gamma_1$   $2 + 2q$  ( $q \geq 1$ ) лиц: преследователей  $P_1, \dots, P_{1+2q}$  ( $n = 1 + 2q$ ) и убегающего  $E_1$  ( $m = 1$ ) вида (1), где  $A(t) \equiv O$ ,

$$U(t) \equiv S\left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right), X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{1+2q} \\ \sin \frac{2\pi i}{1+2q} \end{pmatrix},\right. \\ \left. i \in I(1+2q), Y_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\right.$$

Отметим, что  $X_1^0, \dots, X_{1+2q}^0$  образуют правильный  $(1+2q)$ -угольник с центром в  $Y_1^0$ . При  $b = 1, \dots, q$  условие, указанное в теореме 1, выполнено, а при  $b \geq q + 1$  — не выполнено. Из теоремы 1 следует

**Утверждение 1.** В игре  $\Gamma_1$  возможна одновременная  $q$ -кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.

**Пример 2.** В  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим игру  $\Gamma_2$  5 лиц: преследователей  $P_1, P_2, P_3$  ( $n = 3$ ) и убегающих  $E_1, E_2$  ( $m = 2$ ) вида (1), где  $A(t) \equiv O$ ,  $U(t) \equiv S((0, 0)^T, 1)$ ,

$$X_1^0 = (0, 10)^T, X_2^0 = (-1, -10)^T, X_3^0 = (1, -10)^T, \\ Y_1^0 = (-10, 0)^T, Y_2^0 = (10, 0)^T.$$

Отметим, что

$$Y_1^0 \notin \text{Intco}\{X_1^0, X_2^0, X_3^0\} \quad \text{и} \quad Y_2^0 \notin \text{Intco}\{X_1^0, X_2^0, X_3^0\}.$$

Это означает, что если рассмотреть аналогичную игру с одним убегающим или с двумя убегающими, каждый из которых имеет

свое независимое управление ( $v_1$  и  $v_2$ ), то в ней поимка невозможна (см. теорему 1). В игре  $\Gamma_2$  при  $b = 1$  условие, указанное в теореме 2, выполнено, например,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\in \text{Intco}\{X_1^0 - Y_1^0, X_2^0 - Y_2^0, X_3^0 - Y_1^0\} = \\ &= \text{Intco}\left\{\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

**Утверждение 2.** В игре  $\Gamma_2$  возможна поимка.

В докладе планируется привести и другие условия разрешимости дифференциальных игр вида (1), а также соответствующие им примеры.

1. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: УдГУ, 2009.
2. *Blagodatskikh A.I., Petrov N.N.* Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // *Dynamic Games and Applications*. 2019. Vol. 9, no. 3, pp. 594–613.

## Оптимальные по быстрдействию траектории с неограниченной кривизной

**А. С. Бортаковский**  
*Москва, МАИ*  
 e-mail: asbortakov@mail.ru

Рассматривается задача быстродействия для управляемой динамической системы пятого порядка, описывающей плоское движение с ограниченным ускорением. Траектории движения предлагаемой модели отличаются от путей Маркова-Дубинса [1, 2], траекторий машин Айзекса, Ридса-Шеппа [3], Зеликина-Борисова [4], Бердышева [5] неограниченной кривизной, т.е. допускаются повороты на месте. Такая модель точнее описывает

возможности некоторых видов дорожных машин и летательных аппаратов. Угловая скорость модели меняется непрерывно, тем самым исключаются скачки угловой скорости, характерные для траекторий машины Дубинса. Описаны оптимальные по быстродействию траектории движения предлагаемой модели. Приведены примеры кратчайших траекторий, попадающих в заданное терминальное положение (цель).

**Постановка задачи.** Пусть на промежутке времени  $[0, T]$  движение системы управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \sin(\gamma(t)), & \dot{y}(t) &= v(t) \cos(\gamma(t)), & \dot{v}(t) &= u(t), \\ \dot{\gamma}(t) &= \omega(t), & \dot{\omega}(t) &= \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x, y$  — плоские координаты положения объекта управления;  $\gamma$  — угол направления движения (вперед), отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс;  $v, u$  — линейные скорость и ускорение,  $\omega, \varepsilon$  — угловые скорость и ускорение соответственно. Управление осуществляется выбором ускорений  $u$  и  $\varepsilon$ , удовлетворяющих ограничениям  $|u(t)| \leq U, |\varepsilon(t)| \leq \mathcal{E}$ , где  $U$  и  $\mathcal{E}$  — заданные максимальные значения ускорений.

Начальное состояние системы задано

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad \omega(0) = \omega_0. \quad (2)$$

Конечное состояние может задаваться по-разному, в зависимости от постановки задачи. Для задачи попадания в точечную цель фиксировано только конечное положение  $(x_T, y_T)$  объекта управления

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T; \quad (3)$$

для задачи попадания в цель с заданным конечным направлением движения к равенствам (3) добавляется условие  $\gamma(T) = \gamma_T$ , и, быть может, еще условие  $\omega(T) = 0$ ; для задачи остановки объекта в заданном положении к равенствам (3) добавляется требование  $v(T) = 0$ . Возможны и другие комбинации конечных условий, в частности, когда конечное состояние  $(x(T), y(T), v(T), \gamma(T), \omega(T))$  фиксировано.

Требуется найти наименьшее время  $T$  и оптимальный процесс, на котором это время достигается, т.е. решить задачу быстрогодействия.

В постановке задачи возможны дополнительные условия, отражающие особенности прикладных задач. Это естественное ограничение линейной скорости:  $v(t) \in [0, V]$  при  $t \in [0, T]$ , где  $V$  — заданная величина максимальной линейной скорости. Менее естественно выглядят ограничения  $V_- \leq v(t) \leq V_+$ , где  $V_- \leq 0$ ,  $V_+ \geq 0$ , допускающее отрицательные значения линейной скорости. Такие значения скорости формально следует понимать как движение назад (задний ход).

**Состав оптимальных траекторий.** Применяя принцип максимума Понтрягина, определяем, что оптимальные траектории состояются из участков движения с кусочно-постоянными ускорениями  $u(t) \in \{0, \pm U\}$  и  $\varepsilon(t) \in \{0, \pm \mathcal{E}\}$ , причем нулевые значения ускорений являются особыми управлениями. Траектория системы (1) при постоянных ускорениях находится аналитически. Плоские координаты выражаются через интегралы Френеля, а кривизна траектории является дробно-линейной функцией

$$\kappa(t) = \frac{\omega(t)}{v(t)} = \frac{\omega_0 + \varepsilon t}{v_0 + ut}.$$

Таким образом, оптимальная траектория составляется из типовых участков, каждый из которых представляет собой: либо дугу спирали ( $S$ ), когда кривизна изменяется, либо отрезок ( $L$ ), если кривизна нулевая, либо точку ( $P$ ) в случае бесконечной кривизны, когда машина разворачивается на месте и  $\omega(t) \neq 0$ ,  $v(t) = 0$ . В частности, возможно движение по окружности, когда кривизна постоянна и отлична от нуля, например при  $\omega_0 = 0$  и  $v_0 = 0$  или при  $\varepsilon = 0$ ,  $u = 0$ ,  $\omega_0 \neq 0$  и  $v_0 \neq 0$ . Если  $v(t) = \text{const} \neq 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , то кривизна линейная, а траектория является клотоидой.

**Оптимальные траектории, попадающие в точечную цель.** Рассмотрим решение наиболее простой задачи — наискорейшего достижения точечной цели (3) из нулевого начального состояния (2). Угловая скорость — не ограничена, движение назад исключено ( $v(t) \geq 0$ ), а линейная скорость либо ограничена  $v(t) \leq V$ , либо нет.

Оптимальные траектории в зависимости от положения цели имеют вид либо  $PSSL$ , либо  $PSS$ . В первом случае последний участок оптимальной траектории прямолинейный. Такая цель считается *дальней*. Во втором случае — цель *ближняя*, а последний участок — криволинейный. При этом не исключаются случаи, когда отсутствует тот или иной участок, например, поворот на месте ( $P$ ). Дальняя траектория определяется двумя параметрами, а ближняя — тремя. Поэтому минимизация по моментам переключения ускорений выполняется довольно просто. Сложнее показать, что полученные при минимизации параметров траектории удовлетворяют принципу максимума.

**Заключение.** Предложена модель плоского движения объекта управления, обобщающая известную модель Маркова–Дубинса. Эта модель имеет более широкий набор оптимальных траекторий, в частности, траектории с участками торможения, повороты на месте, движение задним ходом. Несмотря на разнообразие поведения, решения уравнений движения находятся аналитически, что существенно упрощает построение оптимальных траекторий. Эта модель может быть использована в многочисленных приложениях, в которых применяется модель Маркова–Дубинса.

1. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. 1889. Сер. 2. Т. 1. С. 250–276.
2. *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American Mathematics. 1957. Vol. 79, no. 3, pp. 497–516.
3. *Reeds J.A., Shepp L.A.* Optimal Paths for a Car that Goes Both Forwards and Backwards // Pacific J. Math. 1990. Vol. 145, no. 2, pp. 367–393.
4. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2002. Т. 90. С. 5–189.
5. *Бердышев Ю.И.* Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 26–35.

# **$C$ -гарантированное решение линейно-квадратичной многокритериальной позиционной динамической задачи при неопределенности**

**О. М. Вишнякова**

*Псков, Псковский государственный университет*

e-mail: olvish@mail.ru

Под *линейно-квадратичной многокритериальной позиционной динамической задачей при неопределенности* понимается упорядоченный набор

$$\langle \Sigma, \mathcal{U}, \mathcal{Z}, \mathcal{J}(U, Z, t_0, x_0) \rangle. \quad (1)$$

Изменение управляемой динамической системы  $\Sigma$  описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + u + z \quad (2)$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x_0$ . Фазовый  $n$ -вектор  $x \in R^n$ , управляющее воздействие ЛПР  $u \in R^n$ , неопределенность  $z \in R^n$  и элементы  $n \times n$  матрицы  $A(t)$  предполагаются непрерывными на отрезке  $[t_0, \vartheta]$ . Пару  $(t, x)$  называют *позицией*;  $(t_0, x_0)$  — *начальная позиция*. Заканчивается процесс в момент времени  $\vartheta > t_0$ , причем рассматривается случай, когда момент  $\vartheta$  фиксирован. Множество стратегий ЛПР

$$\mathcal{U} = \{U \div u(t, x) : u(t, x) = P(t)x, \forall P(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]\}.$$

множество неопределенностей

$$\mathcal{Z} = \{Z \div z(t, x) : z(t, x) = Q(t)x, \forall Q(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]\}.$$

Динамика задачи разворачивается следующим образом. ЛПР выбирает и использует свою конкретную стратегию  $U \div u(t, x)$  из множества  $\mathcal{U}$ . Независимо от его выбора, на управляемую систему  $\Sigma$  действует неопределенность  $Z \div z(t, x)$ ,  $Z \in \mathcal{Z}$ .

Затем строится решение однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами

$$\dot{x} = (A(t) + P(t) + Q(t))x, \quad x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

при  $u(t) = u(t, x)$ ,  $z(t) = z(t, x, u)$ , формируются реализации  $u(t) = u(t, x(t)) = P(t)x$  выбранной ЛПР стратегии  $U$  и реализация  $z(t) = z(t, x(t), u(t, x(t))) = Q(t)x$  действующей на  $\Sigma$  неопределенности  $Z$ . На полученных непрерывных тройках

$$\{x(t), u(t), z(t) : t \in [t_0, \vartheta]\}$$

определен векторный критерий

$$J(U, Z, t_0, x_0) = (J_1(U, Z, t_0, x_0), \dots, J_N(U, Z, t_0, x_0)),$$

компоненты которого заданы квадратичными функционалами

$$\begin{aligned} J_i(U, Z, t_0, x_0) &= x'(\vartheta)R_i x(\vartheta) + \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta} (u'(t)D_i u(t) + z'(t)L_i z(t)) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где постоянные  $n \times n$  матрицы  $R_i, D_i, L_i, (i \in \mathbf{N})$  предполагаются симметричными. Набор критериев (4) оценивает функционирование ЛПР с помощью отношения предпочтения по заданному конусу  $\mathbf{C} \subset \mathbf{R}^N$ . Для двух векторов  $J^1, J^2 \in \mathbf{R}^N$ :

$$J^1 \leq_C J^2 \Leftrightarrow J^2 - J^1 \in \mathbf{C}, \quad J^1 \not\leq_C J^2 \Leftrightarrow J^2 - J^1 \notin \mathbf{C}.$$

**Определение.** Пара  $(U^C, \mathcal{J}^C) \in \mathcal{U} \times \mathbf{R}^N$  называется  $C$ -гарантированным решением задачи (1), если для заданного пространственного, замкнутого, выпуклого, острого конуса  $C$  существует неопределенность  $Z_C \in \mathcal{Z}$  такая, что  $\mathcal{J}^C = \mathcal{J}(U^C, Z_C, t_0, x_0)$  для любых  $U \in \mathcal{U}$ ,  $Z \in \mathcal{Z}$ ,  $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbf{R}^N$  будет выполняться:

$$\mathcal{J}(U^C, Z, t_0, x_0) \not\leq_C \mathcal{J}(U^C, Z_C, t_0, x_0);$$

$$\mathcal{J}(U^C, Z_C, t_0, x_0) \not\leq_C \mathcal{J}(U, Z_C, t_0, x_0);$$

при этом  $N$ -вектор  $\mathcal{J}(U^C, Z_C, t_0, x_0)$  назовем  $C$ -гарантией в задаче (1) с начальной позицией  $(t_0, x_0)$ .

Введем вспомогательную антагонистическую игру со скалярной функцией выигрыша  $J_\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{J}_i$ . Обозначим

$$R(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i R_i, \quad D(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i D_i, \quad L(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i L_i,$$

где вектор  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in C^*$ .

Для нахождения пары  $(U^C, Z_C)$  применим метод динамического программирования [2] и утверждения из [1].

**Утверждение.** Пусть для выпуклого, острого конуса  $C \in \mathbf{R}^N$  существует постоянный вектор  $\alpha \in C^*$ , такой, что матрица  $D(\alpha)$  определена отрицательно ( $D(\alpha) < 0$ ), а матрица  $L(\alpha)$  определена положительно ( $L(\alpha) > 0$ ), а также система

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1 + 2\Theta_1 A(t) - \Theta_1 D^{-1}(\alpha)\Theta_1 - \\ - 2\Theta_1 L^{-1}(\alpha)\Theta_2 + \Theta_2 L^{-1}(\alpha)\Theta_2 = \mathbf{0}_{n \times n}, \\ \dot{\Theta}_2 + 2\Theta_2 A(t) + \Theta_1 D^{-1}(\alpha)\Theta_1 - \\ - 2\Theta_2 D^{-1}(\alpha)\Theta_1 - \Theta_2 L^{-1}(\alpha)\Theta_2 = \mathbf{0}_{n \times n}, \end{cases}$$

с граничными условиями  $\Theta_1(\vartheta) = \Theta_1(\vartheta) = R(\alpha)$  имеет продолжимое на интервал  $[0, \vartheta]$  решение  $\Theta_1(t)$ ,  $\Theta_2(t)$ . Тогда пара  $(U^C, Z_C)$ , где  $U^C \doteq -D^{-1}(\alpha)\Theta_1(t)x$ ,  $Z^C \doteq -L^{-1}(\alpha)\Theta_2(t)x$ , является  $C$ -седловой точкой, порождающей  $C$ -гарантированное решение задачи (1) при любом выборе начальной позиции  $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbf{R}^n$ .

1. Вишнякова О.М. Гарантированное по конусу решение многокритериальной задачи // Материалы XVIII Международной научно-методической конференции «Математика в ВУЗе», сентябрь 2005, Великий Новгород. С-Пб., 2005. С. 102–103.
2. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова Думка, 1994.
3. Жуковский В.И. Исходы и риски в многокритериальных задачах. М., 2004.

# Об эквивалентности минимаксных и вязкостных решений наследственных уравнений Гамильтона–Якоби

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com, nyul@imm.uran.ru,

a.r.plaksin@gmail.com

Работа посвящена развитию минимаксного (см., например, [1]) и вязкостного (см., например, [2]) подходов к понятию обобщенного решения наследственных уравнений Гамильтона–Якоби (см., например, [3, 4], а также [5]), возникающих в задачах оптимального управления и дифференциальных играх для систем с запаздыванием.

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h > 0$  и  $T > 0$ . Через  $G$  обозначим множество пар  $(t, x(\cdot))$  таких, что  $t \in [0, T]$  и  $x(\cdot) \in C([-h, t], \mathbb{R}^n)$ , где  $C([-h, t], \mathbb{R}^n)$  — множество непрерывных функций  $x: [-h, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . На множестве  $G$  введем метрику

$$\rho((t, x(\cdot)), (\tau, y(\cdot))) \triangleq |t - \tau| + \max_{\xi \in [-h, T]} \|x(\xi \wedge t) - y(\xi \wedge \tau)\|,$$

где  $(t, x(\cdot)), (\tau, y(\cdot)) \in G$ ,  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \wedge b \triangleq \min\{a, b\}$  для всех  $a, b \in \mathbb{R}$ . Положим  $G_0 \triangleq \{(t, x(\cdot)) \in G: t < T\}$ . Для  $(t, x(\cdot)) \in G_0$  рассмотрим множество  $\text{Lip}(t, x(\cdot))$  функций  $z(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ , которые удовлетворяют условию  $z_t(\cdot) = x(\cdot)$  и являются липшицевыми на  $[t, T]$ , где  $z_t(\cdot) \in C([-h, t], \mathbb{R}^n)$  — сужение функции  $z(\cdot)$  на промежуток  $[-h, t]$ , то есть  $z_t(\xi) \triangleq z(\xi)$  для всех  $\xi \in [-h, t]$ .

Функционал  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$  называется [3, 4] (см. также [5]) *ci*-дифференцируемым в точке  $(t, x(\cdot)) \in G_0$ , если существуют такие  $\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}$  и  $\nabla \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ , что для каждой функции  $z(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$  при всех  $\tau \in [t, T]$  имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \varphi(\tau, z_\tau(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) = \\ & = \partial_t \varphi(t, x(\cdot))(\tau - t) + \langle \nabla \varphi(t, x(\cdot)), z(\tau) - x(t) \rangle + o(\tau - t), \end{aligned}$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $o(\cdot)$  может зависеть от  $z(\cdot)$  и удовлетворяет условию  $o(\delta)/\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$ . Величины  $\partial_t \varphi(t, x(\cdot))$  и  $\nabla \varphi(t, x(\cdot))$  называются *си*-производными  $\varphi$  в точке  $(t, x(\cdot))$ .

Рассмотрим наследственное уравнение Гамильтона–Якоби

$$\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) + H(t, x(\cdot), \nabla \varphi(t, x(\cdot))) = 0, \quad \forall (t, x(\cdot)) \in G_0. \quad (1)$$

Искомым здесь является функционал  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ , гамильтониан  $H$  задан и удовлетворяет следующим предположениям:

- (i) Функционал  $G \times \mathbb{R}^n \ni ((t, x(\cdot)), s) \mapsto H(t, x(\cdot), s) \in \mathbb{R}$  непрерывен.
- (ii) Существует число  $c_H > 0$  такое, что для всех  $(t, x(\cdot)) \in G$  и  $s, r \in \mathbb{R}^n$

$$|H(t, x(\cdot), s) - H(t, x(\cdot), r)| \leq c_H(1 + \max_{\xi \in [-h, t]} \|x(\xi)\|) \|s - r\|.$$

Следуя [4] (см. также [5]), дадим определения обобщенного решения уравнения (1) в минимаксном [1] и вязкостном [2] смыслах. Через  $\Phi$  обозначим множество функционалов  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающих следующим свойством: каковы бы ни были точка  $(t, x(\cdot)) \in G$  и последовательность  $\{(t^{(k)}, x^{(k)}(\cdot))\}_{k=1}^{\infty} \subset G$ , если

$$|t - t^{(k)}| + \|x(t) - x^{(k)}(t^{(k)})\| + \int_{-h}^T \|x(\xi \wedge t) - x^{(k)}(\xi \wedge t^{(k)})\| d\xi \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ , и существует число  $\alpha > 0$  такое, что  $\|x^{(k)}(\xi)\| \leq \alpha$  для всех  $\xi \in [-h, t^{(k)}]$  и  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\varphi(t^{(k)}, x^{(k)}(\cdot)) \rightarrow \varphi(t, x(\cdot))$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Определение 1.** Функционал  $\varphi \in \Phi$  назовем *минимаксным решением* уравнения (1), если для любых  $(t, x(\cdot)) \in G_0$  и  $s \in \mathbb{R}^n$  найдется функция  $z(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$  такая, что

$$\|\dot{z}(\tau)\| \leq c_H(1 + \max_{\xi \in [-h, \tau]} \|z(\xi)\|)$$

при почти всех  $\tau \in [t, T]$ , и для каждого  $\tau \in [t, T]$  справедливо равенство

$$\varphi(\tau, z_\tau(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) = \langle s, z(\tau) - x(t) \rangle - \int_t^\tau H(\xi, z_\xi(\cdot), s) d\xi.$$

Рассмотрим *ci*-субдифференциал функционала  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $(t, x(\cdot)) \in G_0$ :

$$D^- \varphi(t, x(\cdot)) \triangleq \left\{ (p_0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \forall z(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot)) \right. \\ \left. \liminf_{\tau \downarrow t} \frac{\varphi(\tau, z_\tau(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) - p_0(\tau - t) - \langle p, z(\tau) - x(t) \rangle}{\tau - t} \geq 0 \right\}.$$

Аналогичным образом с заменой операций « $\liminf$ » на « $\limsup$ » и знаков « $\geq$ » на « $\leq$ » определим *ci*-супердифференциал  $D^+ \varphi(t, x(\cdot))$ .

**Определение 2.** Функционал  $\varphi \in \Phi$  назовем *вязкостным решением* уравнения (1), если для любых  $(t, x(\cdot)) \in G_0$ ,  $(p_0, p) \in D^- \varphi(t, x(\cdot))$  и  $(q_0, q) \in D^+ \varphi(t, x(\cdot))$  имеют место неравенства

$$p_0 + H(t, x(\cdot), p) \leq 0, \quad q_0 + H(t, x(\cdot), q) \geq 0.$$

Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** Пусть выполнены предположения (i) и (ii). Тогда функционал  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$  является минимаксным решением уравнения (1) в том и только том случае, когда  $\varphi$  — вязкостное решение этого уравнения.

В качестве следствия этой теоремы и результатов из [4, 5] получены достаточные условия существования и единственности вязкостных решений задач Коши для уравнения (1) и краевого условия  $\varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot))$ , где  $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$  и  $\sigma: C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  — заданный функционал.

Доказательство теоремы проведено по схеме из [1, теорема 4.3]. При этом установлено подходящее свойство *ci*-субдифференциала, которое служит аналогом свойства субдифференциала из [6]. Сложности, связанные с возможной некомпактностью

ограниченных замкнутых множеств в пространстве  $G$ , преодолены путем применения вариационного принципа из [7] со специальным образом построенным «калибровочным функционалом», конструкция которого восходит к [8] (см. также [5]).

1. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Basel: Birkhäuser, 1995.
2. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1, pp. 1–42.
3. *Kim A.V.* Functional differential equations. Application of  $i$ -smooth calculus. Dordrecht: Springer, 1999.
4. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011.
5. *Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R.* Path-dependent Hamilton–Jacobi equations: the minimax solutions revised // Appl. Math. Optim. 2021. Vol. 84, no. 1, pp. S1087–S1117.
6. *Субботин А.И.* Об одном свойстве субдифференциала // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 9. С. 1315–1330.
7. *Li Y., Shi S.* A generalization of Ekeland’s  $\epsilon$ -variational principle and its Borwein–Preiss smooth variant // J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol. 246, no. 1, pp. 308–319.
8. *Zhou J.* Viscosity solutions to first order path-dependent HJB equations // ArXiv:2004.02095. 2020.

## Особые управления принципа максимума в задачах оптимизации систем Гурса–Дарбу

**И. В. Горохова**

*Нижегород, НГТУ им. Р.Е. Алексеева*

e-mail: i\_lisach@mail.ru

В теории оптимизации распределенных систем *необходи-*

мые условия оптимальности (НУО) особых управлений (ОУ) поточечного принципа максимума (ППМ) изучались в основном для управляемых систем Гурса–Дарбу и близких к ним (см., например, обзор и библиографию в [1]). При этом для систем Гурса–Дарбу рассматривались, как правило, терминальные задачи оптимизации. Опишем некоторые результаты применения общей схемы [1] изучения ОУ ППМ к задаче оптимизации достаточно общего вида для нелинейной системы Гурса–Дарбу

$$\begin{aligned} x''_{t^1 t^2}(t) &= g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)), \\ t &\equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi \equiv [0, 1]^2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1), \quad t^1 \in [0, 1]; \quad x(0, t^2) = \varphi_2(t^2), \quad t^2 \in [0, 1], \quad (2)$$

где  $g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v): \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\varphi_i(t^i): [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  ( $i = 1, 2$ ) заданы,  $u(t): \Pi \rightarrow V \subset \mathbf{R}^m$  — управление,  $V$  ограничено ( $\mathbf{R}^n$  — пространство  $n$ -векторов-столбцов). Предполагаем:  $g(t, l, v)$  дважды дифференцируема по  $l$  при каждом  $v$  для почти всех  $t$  и вместе с производными  $g'_l, g''_{ll}$   $L$ -измерима по  $t$  при любых  $\{l, v\}$ , непрерывна по  $\{l, v\}$  для почти каждого  $t$  и ограничена на любом ограниченном множестве;  $\varphi_i$  абсолютно непрерывна,  $\varphi_i(0) = 0$  и  $\varphi'_i \in L^\infty([0, 1])$  ( $i = 1, 2$ ); допустимы измеримые  $u(\cdot)$ . При таких условиях естественно рассматривать решения (1)–(2) из класса  $AC_\infty^n \equiv AC_\infty^n(\Pi)$  абсолютно непрерывных  $n$ -вектор-функций с ограниченными смешанной и первыми производными. Гарантирована единственность такого решения для каждого допустимого  $u(\cdot)$ . Пусть  $\Omega$  — множество тех допустимых  $u(\cdot)$ , для каждого из которых существует решение  $x_u(\cdot) \in AC_\infty^n$  задачи (1)–(2), а  $\Phi[\cdot]: AC_1^n \rightarrow \mathbf{R}$  — дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше функционал на пространстве  $AC_1^n$  абсолютно непрерывных на  $\Pi$   $n$ -вектор-функций  $x(\cdot)$  (имеющих суммируемые смешанную и первые производные) с нормой  $\|x\| \equiv \|x\|_{C^n(\Pi)} + \|x'_{t^1}\|_{L_1^n(\Pi)} + \|x'_{t^2}\|_{L_1^n(\Pi)} + \|x''_{t^1 t^2}\|_{L_1^n(\Pi)}$ . Рассмотрим задачу

$$J[u] \equiv \Phi[x_u] \rightarrow \max, \quad u \in \Omega, \quad (3)$$

понимая ее как задачу нахождения  $L_1^n \equiv L_1^n(\Pi)$ -локального максимума.

Положим

$$A_0[z](t) \equiv \int_0^{t^1} \int_0^{t^2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$A_1[z](t) \equiv \int_0^{t^2} z(t^1, \xi) d\xi, \quad A_2[z](t) \equiv \int_0^{t^1} z(\xi, t^2) d\xi,$$

$$A[z](t) \equiv \{A_0[z](t), A_1[z](t), A_2[z](t)\}, \quad t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi, \quad z \in L_1^n.$$

Формула  $x(t) = \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + A_0[z](t)$ ,  $t \in \Pi$ , устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между классом функций  $x(\cdot) \in AC_\infty^n$  со свойством (2) и классом  $L_\infty^n$  функций  $z(\cdot)$ , позволяет переписать задачу оптимизации (1)–(3) в эквивалентной форме

$$z(t) = f(t, A[z](t), u(t)), \quad t \in \Pi, \quad (4)$$

$$J[u] \equiv F[z_u] \rightarrow \max, \quad u \in \Omega, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f(t, l, v) &\equiv f(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv \\ &\equiv g(t, l_0 + \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2), l_1 + \varphi_1'(t^1), l_2 + \varphi_2'(t^2), v) \end{aligned}$$

и рассматриваемое над  $L_\infty^n$  уравнение (4) — эквивалентная функционально-операторная переформулировка задачи (1)–(2),  $z_u$  — отвечающее управлению  $u(\cdot)$  глобальное решение (4),

$$\begin{aligned} x_u(t) &= \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + A_0[z_u](t), \quad t \in \Pi, \\ F[z] &\equiv \Phi[\varphi_1(\cdot) + \varphi_2(\cdot) + A_0[z](\cdot)], \quad z \in L_1^n. \end{aligned}$$

Пусть  $u_0 \in \Omega$  — некоторое фиксированное управление,  $x_0 \equiv x_{u_0}$ ,  $z_0 \equiv z_{u_0}$ ;  $S : L_1^n \rightarrow L_1^n$  — оператор, задаваемый формулой  $S[z](t) \equiv z(t) - f'_i(t)A[z](t)$ ,  $f'_i(t) \equiv f'_i(t, A[z_0](t), u_0(t))$ ,  $z \in L_1^n$ ,  $t \in \Pi$ ;  $F'(z_0)$  — производная Фреше функционала  $F : L_1^n \rightarrow \mathbf{R}$  в точке  $z_0$ ,  $\omega \in L_\infty^n$  — функция Рисса для  $F'(z_0) \in (L_1^n)^*$ ;

$$\begin{aligned} \Delta_w f(t) &\equiv f(t, A[z_0](t), w) - f(t, A[z_0](t), u_0(t)), \quad t \in \Pi, \quad w \in V; \\ \pi(t, w, \xi) &\equiv \langle \xi, \Delta_w f(t) \rangle, \quad t \in \Pi, \quad w \in V, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — стандартное скалярное произведение в  $\mathbf{R}^n$ . Сформулируем ППМ: *если  $u_0(\cdot)$  решение (1)–(3), то для каждого  $w \in V$  при почти всех  $\tau \in \Pi$  выполняется неравенство*

$$\pi(\tau, w, \psi(\tau)) \leq 0,$$

где  $\psi \in L_\infty^n$  — решение сопряженного уравнения

$$S^*[\psi](t) \equiv \psi(t) - A^*[\{f'_i(\cdot)\}^* \psi(\cdot)](t) = \omega(t), t \in \Pi.$$

ППМ можно считать НУО первого порядка при игольчатом варьировании управления. Действительно, пусть:  $\Sigma$  — совокупность всех наборов  $\sigma \equiv \{\tau, w\}$ , в каждом из которых  $w$  — какой-то элемент  $V$ ,  $\tau \in \Pi$  — некоторая правильная точка Лебега функции  $\pi(\cdot, w, \psi(\cdot))$ ;  $\mathcal{H}$  — семейство всех пар  $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\}$ , в каждой из которых  $\sigma \equiv \{\tau, w\} \in \Sigma$ , а  $\varepsilon$  — такое положительное число, что множество  $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon\Pi$  принадлежит  $\Pi$ . Каждому  $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$  отвечает допустимое управление  $u_h(t) \equiv \{w, t \in \Pi_\varepsilon(\tau); u_0(t), t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\}$ , а каждому набору параметров варьирования  $\sigma \equiv \{\tau, w\} \in \Sigma$  — семейство функций  $\{u_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$ , простейшая одноточечная игольчатая варианта (ПОИВ) управления  $u_0$ . Положим  $\Delta_u J \equiv J[u] - J[u_0]$ ,  $u \in \Omega$ . Для любого  $\sigma \equiv \{\tau, w\} \in \Sigma$  существует равный  $\pi(\tau, w, \psi(\tau))$  предел  $\delta J(\sigma) \equiv \delta J(\tau, w) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-2} \Delta_{u_h} J)$ , который естественно назвать первой вариацией функционала  $J$  на варианте  $\{u_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$ . Очевидное НУО  $\delta J(\sigma) \leq 0$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , управления  $u_0(\cdot)$  и есть ППМ.

Положим  $\mathcal{M} \equiv \{t, w\} \in \Pi \times V: \pi(t, w, \psi(t)) = 0\}$ . Если  $u_0(\cdot)$  — решение (1)–(3), то при почти любом  $t \in \Pi$  значение  $u_0(t)$  принадлежит сечению  $\mathcal{M}(t) \equiv \{w \in V: \{t, w\} \in \mathcal{M}\}$  множества  $\mathcal{M}$ . Говорим, что ППМ вырождается на  $u_0(\cdot)$  и называем  $u_0(\cdot)$  ОУ ППМ, если мера множества  $\Pi_* \equiv \{t \in \Pi: \mathcal{M}(t) \neq \{u_0(t)\}\}$  положительна. Рассмотрим случай *полного вырождения* ППМ, когда  $\text{mes } \Pi_* = \text{mes } \Pi$  и при почти каждом  $t \in \Pi$  сечение  $\mathcal{M}(t)$  совпадает с  $V$ . Используя игольчатое варьирование, введем в этом случае понятие сильного вырождения ППМ на ОУ.

Предел  $\delta^{\gamma-1} J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\gamma} \Delta_{u_h} J$ , если он существует при некотором  $\gamma > 2$ , назовем *вариацией порядка  $\gamma-1$  функционала  $J$*

на ПОИВ  $\{u_h(\cdot)\}_{h \in \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$ ; соответственно НУО вида  $\delta^{\gamma-1} J(\sigma) \leq 0$  ( $\sigma \in \Sigma$ ) назовем *НУО порядка  $\gamma - 1$  управления  $u_0(\cdot)$  при простейшем одноточечном игольчатом варьировании*. Назовем ОУ ППМ  $u_0(\cdot)$  *сильно вырожденным ОУ для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования* и будем говорить, что ППМ *сильно вырождается на ОУ  $u_0(\cdot)$* , если тождественно зануляется вариация 2-го порядка:  $\delta^2 J(\sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \in \Sigma$ .

В [2] для частного случая задачи оптимизации (1)–(3), когда функционал  $\Phi$  определен и дважды непрерывно дифференцируем по Фреше над существенно более широким чем  $AC_1^n(\Pi)$  пространством непрерывных функций  $C^n(\Pi)$ , были сформулированы достаточные условия сильного вырождения ОУ ППМ (см. [2, Теорема 1]) и НУО сильно вырожденных ОУ ППМ (см. [2, Теорема 2 (НУО третьего порядка)]). Справедливо следующее утверждение (результат получен совместно с В.И. Суминым).

**Теорема.** *Теоремы [2] верны и в рассматриваемом здесь случае.*

Чтобы распространить этот результат на случай неполного вырождения ППМ на ОУ, нужно применить описанный в [1] более общий способ одноточечного игольчатого варьирования, чем простейшее игольчатое.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00199.

1. *Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Т. 20, № 3. С. 70–80.
2. *Горохова И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 122. С. 278–284.

# Метод $v$ -замены времени в задачах оптимального управления

**А. В. Дмитрук**

*Москва, ЦЭМИ РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова*

e-mail: optcon@mail.ru

**Н. П. Осмоловский**

*Варшава, Институт системных исследований ПАН*

e-mail: Nikolai.Osmolovskii@ibspan.waw.pl

Задачи с фазовыми ограничениями привлекали внимание специалистов с самого начала развития теории оптимального управления. При этом, как хорошо известно, обобщение принципа максимума Понтрягина на эти задачи было сопряжено со значительными трудностями, поскольку здесь мы имеем дело с бесконечным (континуальным) числом ограничений неравенства, а необходимые условия экстремума в них содержат меру. Известные способы доказательства принципа максимума (ПМ) технически довольно сложны и вряд ли доступны широкому кругу читателей, кроме узкого круга специалистов. Поэтому вопрос о более простом и ясном доказательстве остается актуальным.

Стандартный способ получения ПМ состоит во введении т.н. *игольчатых вариаций* управления, предложенных Э. Макшейном и применявшихся В.Г. Болтянским и Л.С. Понтрягиным для т.н. *понтрягинской* задачи, не содержащей фазовых ограничений. Однако при наличии таких ограничений обычные игольчатые вариации вряд ли возможно использовать, ибо уже производная соответствующей траектории  $x(t)$  по ширине иголки будет разрывной функцией. Более удобным (и технически простым, но нетривиальным) аналогом игольчатых вариаций являются т.н. *вариации  $v$ -замены времени*. Они были предложены А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиным еще в 1965 году и систематически использовались ими для доказательства ПМ в общей задаче оптимального управления, включающей как фазовые, так и смешанные ограничения.

Идея  $v$ -замены состоит в переходе от исходного времени  $t$  к новому времени  $\tau$ , при котором исходное время  $t = t(\tau)$  становится еще одной фазовой переменной, подчиненной уравнению  $dt/d\tau = v(\tau)$ , где  $v(\tau) \geq 0$  есть произвольная измеримая ограниченная функция, которая трактуется как еще одно управление. Принципиальный момент состоит здесь в том, что эта замена *не взаимно-однозначна* (там, где  $v(\tau) = 0$ ), и по этой причине малые вариации управления  $v(\tau)$  порождают немалые (т.н. *понтрягинские*) вариации исходного управления  $u(t)$ . Реализация этого приема в общем случае требует, однако, привлечения глубоких фактов теории функций действительного переменного.

В конце 1990-х годов А.А. Милотин предложил использовать упрощенный вариант  $v$ -замены, с *кусочно-постоянной* функцией  $v(\tau)$ . Этим способом он доказал ПМ для общей задачи с концевыми ограничениями, но без фазовых. В случае кусочно-постоянной функции  $v(\tau)$  ее вариации порождают по сути дела те же игольчатые вариации исходного управления  $u(t)$ , но с некоторым отличием от последних. Оно состоит в том, что мы *не заменяем* оптимальное управление на малом отрезке около базовых точек пакета, а *расшиваем* эти точки, вставляя в эти места малые отрезки с произвольными наперед заданными значениями управления. Поскольку этих точек несколько, в итоге получаем пакет игольчатых вариаций. Такие «вставные» иголки имеют преимущества по сравнению с обычными: а) оптимальное управление может быть произвольной измеримой ограниченной функцией, тогда как в случае игольчатых вариаций надо требовать его кусочной непрерывности (иначе не получим гладкой зависимости траектории от ширины иголки), и б)  $v$ -замена дает гладкую управляемую систему, определенную в целой окрестности оптимального процесса, тогда как игольчатые вариации приводят к задаче, функции которой определены лишь на окрестности нуля в неотрицательном ортанте конечномерного пространства, соответствующем ширинам иголок в данном пакете (см. [2]). Последнее обстоятельство представляется нам весьма существенным.

Применение кусочно-постоянной  $v$ -замены к задаче с фазовыми ограничениями позволяет свести эту задачу к вспомогательной (т.н. *присоединенной*) задаче в *конечномерном простран-*

стве, аргументами которой служат произвольно выбранные значения управления на участках постоянства функции  $v(\tau)$ , а также начальное значение фазовой переменной. Наличие фазовых ограничений приводит к тому, что в этой конечномерной задаче имеется бесконечное число ограничений неравенства, т.е. это не есть обычная гладкая задача. Однако условия оптимальности (локального минимума) для такой задачи известны (см., например, [3]); их специфика лишь в том, что они содержат меру, сосредоточенную на множестве индексов (моментов времени) активных неравенств. Применяя эти условия к присоединенной  $v$ -задаче и переписывая их в терминах исходной задачи, мы получаем множество соответствующих наборов множителей Лагранжа, которое является непустым компактом в некоторой топологии (обычной топологии по конечномерным множителям и слабой-\* относительно меры). Каждый элемент этого компакта (т.е. набор множителей Лагранжа) обеспечивает выполнение принципа максимума на конечном множестве выбранных значений управления и времени, соответствующем данной  $v$ -замене [4, 5].

В задачах, где присутствуют смешанные ограничения, уже недостаточно одних обобщенных игольчатых вариаций, надо добавить еще и *равномерно малые вариации* управления (для получения условия стационарности по управлению), поэтому присоединенная задача ставится уже в бесконечномерном пространстве [6].

Итак, для каждой кусочно-постоянной функции  $v(\tau)$  мы имеем свою присоединенную задачу и свой компакт, состоящий из наборов множителей Лагранжа. Компакты, порожденные всевозможными  $v$ -заменами, частично упорядочены по включению (ибо чем «богаче»  $v$ -замена, тем «беднее» соответствующий компакт), и в силу их непустоты образуют центрированную систему. Взяв любой элемент из их пересечения, мы получаем единое условие оптимальности — набор множителей Лагранжа, для которого ПМ выполнен при всех значениях управления и времени.

Для задач со смешанными ограничениями описанная схема имеет то преимущество по сравнению с применением скользящих режимов [1], что в последнем приходится доказывать весьма сложную теорему о корректности расширения (овыпукления)

управляемой системы при введении скользящих режимов, тогда как метод  $v$ -вариаций этого не требует.

1. А.А. Миллютин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Мехмат МГУ, 2004. <https://kafedra-opu.ru/node/139>.
2. Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. О доказательстве принципа максимума Понтрягина с помощью игольчатых вариаций // Фундам. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 5. С. 49–74.
3. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. A General Lagrange Multipliers Theorem and Related Questions // Control Systems and Mathematical Methods in Economics. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer. 2018. Vol. 687, pp. 165–194.
4. Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Вариации типа  $v$ -замены времени в задачах с фазовыми ограничениями // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 76–92.
5. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Proof of the maximum principle for a problem with state constraints by the  $v$ -change of time variable // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B. 2019. Vol. 24, no. 5, pp. 2189–2204.
6. Дмитрук А.В. Вариации  $v$ -замены времени в задачах оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями // Известия РАН, сер. мат. (представлена к печати).

## Применение метода декомпозиции при построении управлений для манипуляторов

Ю. Ф. Долгий, И. А. Чупин

Екатеринбург, Уральский Федеральный университет  
e-mail: jury.dolgy@urfu.ru, mr.tchupin@yandex.ru

Трехзвенник является важной частью многозвенных манипуляторов. Он реализует транспортные функции роботов, рабо-

чие функции которых связаны с ориентирующими движениями схвата, закрепленного на последнем звене.

Рассматривается трехзвенный манипулятор, состоящий из трех абсолютно твердых тел, совершающих движения параллельно горизонтальной плоскости и соединенных цилиндрическими шарнирами. Первое звено при помощи цилиндрического шарнира связано с неподвижным основанием, а на конце третьего звена неподвижно закреплен схват, в котором находится перемещаемый объект (груз). Размерами схвата пренебрегаем и моделируем его материальной точкой.

При описании движений схвата применяется декартовая система координат  $Oxy$  расположенная в горизонтальной плоскости, начало  $O$  которой совпадает с точкой крепления первого звена с основанием. Для манипуляционного робота в качестве обобщенных координат будем использовать углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ . Здесь  $\varphi_1$  — угол между осью  $Ox$  инерциальной системы координат и прямой  $OO_1$ , соединяющей центры цилиндрических шарниров первого звена, определяет абсолютный поворот первого звена. Угол  $\varphi_2$  между прямыми  $OO_1$  и  $O_1O_2$ , соединяющей центры цилиндрических шарниров второго звена  $O_1$  и  $O_2$ , определяет поворот второго звена относительно первого. Угол  $\varphi_3$  между прямыми  $O_1O_2$  и  $O_2O_3$ , соединяющей центр цилиндрического шарнира третьего звена с точкой схвата  $O_3$ , определяет поворот третьего звена относительно второго.

Декартовы координаты схвата определяются формулами

$$x = L_1 \cos(\varphi_1) + L_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + L_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \quad (1)$$

$$y = L_1 \sin(\varphi_1) + L_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + L_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \quad (2)$$

где  $L_1 = |OO_1|$ ,  $L_2 = |O_1O_2|$ ,  $L_3 = |O_2O_3|$  — расстояния между точками звеньев.

Кинетическая энергия робота определяется формулой

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (J_1 + (m_2 + m_3) L_1^2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (J_2 + m_3 L_2^2) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)^2 + L_1 (m_2 a_2 + m_3 L_2) \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos(\varphi_2) + \\ & + m_3 a_3 (L_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + L_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos(\varphi_3)) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3), \end{aligned}$$

где  $J_1, J_2, J_3$  — осевые моменты инерции звеньев относительно точек  $O, O_1, O_2$  соответственно,  $m_2$  — масса второго звена,  $m_3$  — масса третьего звена со схватом и грузом,  $a_2 = |O_1C_2|$ ,  $a_3 = |O_2C_3|$ , где точки  $C_2, C_3$  определяют положения центров масс второго звена и третьего звена со схватом и грузом соответственно.

Манипулятор управляется при помощи трех независимых приводов, расположенных в шарнирах  $O, O_1, O_2$  и создающих моменты  $M_1, M_2, M_3$  соответственно. Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  схват находится в начальном положении покоя  $x(0) = x^0, y(0) = y^0$ . Требуется привести его в конечное положение  $x(\vartheta) = x^k, y(\vartheta) = y^k$  с нулевой скоростью  $\dot{x}(\vartheta) = 0, \dot{y}(\vartheta) = 0$ , где  $\vartheta$  — время движения схвата манипулятора. Связи декартовых координат начального и конечного положений схвата и соответствующих обобщенных координат манипулятора  $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0$  и  $\varphi_1^k, \varphi_2^k, \varphi_3^k$  определяются формулами (1), (2). При решении задачи можно использовать релейные [1] или импульсные управления [2].

В настоящей работе при построении релейных управлений применим метод декомпозиции, накладывая на управляющие моменты ограничения

$$|M_1(t)| \leq \mu_1, |M_2(t)| \leq \mu_2, |M_3(t)| \leq \mu_3.$$

Используя процедуры замораживания связей, сложный поворот манипулятора разложим на три простые поворота.

При первом повороте  $\varphi_2 = \varphi_2^0, \varphi_3 = \varphi_3^0$  и угол  $\varphi_1$  меняется от  $\varphi_1^0$  до  $\varphi_1^k$ . В конечных положениях скорости нулевые. Этот поворот описывается дифференциальным уравнением

$$\tilde{J}_1(\varphi_2^0, \varphi_3^0) \ddot{\varphi}_1 = M_1(t),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(\varphi_2^0, \varphi_3^0) = & J_1 + J_2 + J_3 + 2m_3a_3(L_1 \cos(\varphi_2^0 + \varphi_3^0) + L_2 \cos(\varphi_3^0)) + \\ & + m_2L_1^2 + m_3(L_1^2 + L_2^2) + 2L_1(m_2a_2 + m_3L_2) \cos(\varphi_2^0). \end{aligned}$$

Используя принцип максимума Понтрягина находим время опти-

мального поворота

$$\vartheta_1 \left( \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \varphi_1^k \right) = 2 \sqrt{\frac{\tilde{J}_1 \left( \varphi_2^0, \varphi_3^0 \right) \left| \varphi_1^k - \varphi_1^0 \right|}{\mu_1}}.$$

При втором повороте  $\varphi_1 = \varphi_1^k$ ,  $\varphi_3 = \varphi_3^0$  и угол  $\varphi_2$  меняется от  $\varphi_2^0$  до  $\varphi_2^k$ . В конечных положениях скорости нулевые. Этот поворот описывается дифференциальным уравнением

$$\tilde{J}_2 \left( \varphi_3^0 \right) \ddot{\varphi}_2 = M_2(t),$$

где  $\tilde{J}_2 \left( \varphi_3^0 \right) = J_2 + J_3 + m_3 L_2^2 + 2m_3 a_3 \cos \left( \varphi_3^0 \right)$ . Используя принцип максимума Понтрягина, находим время оптимального поворота

$$\vartheta_2 \left( \varphi_2^0, \varphi_3^0, \varphi_2^k \right) = 2 \sqrt{\frac{\tilde{J}_2 \left( \varphi_3^0 \right) \left| \varphi_2^k - \varphi_2^0 \right|}{\mu_2}}.$$

При третьем повороте  $\varphi_1 = \varphi_1^k$ ,  $\varphi_2 = \varphi_2^k$  и угол  $\varphi_3$  меняется от  $\varphi_3^0$  до  $\varphi_3^k$ . В конечных положениях скорости нулевые. Этот поворот описывается дифференциальным уравнением

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 = M_3(t).$$

Используя принцип максимума Понтрягина находим время оптимального поворота

$$\vartheta_3 \left( \varphi_3^0, \varphi_3^k \right) = 2 \sqrt{\frac{J_3 \left| \varphi_3^k - \varphi_3^0 \right|}{\mu_3}}.$$

Время полного поворота определяется формулой

$$\begin{aligned} \vartheta \left( \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \varphi_1^k, \varphi_2^k, \varphi_3^k \right) &= \\ &= \vartheta_1 \left( \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \varphi_1^k \right) + \vartheta_2 \left( \varphi_2^0, \varphi_3^0, \varphi_2^k \right) + \vartheta_3 \left( \varphi_3^0, \varphi_3^k \right). \end{aligned}$$

Решается задача оптимального выбора значений параметров  $\varphi_1^0$ ,  $\varphi_2^0$ ,  $\varphi_3^0$ ,  $\varphi_1^k$ ,  $\varphi_2^k$ ,  $\varphi_3^k$ .

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22-21-00714, <https://rscf.ru/project/22-21-00714/>.

1. Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989.
2. Долгий Ю.Ф., Чупин И.А. Импульсные управления двухзвенным манипуляционным роботом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 77–90.

## Об одной задаче импульсного преследования с изменяющейся динамикой

**И. В. Измestьев, В. И. Ухоботов**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН,  
Челябинск, Челябинский государственный университет  
e-mail: j748e8@gmail.com, ukh@csu.ru*

Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{z} = -a(t)(\theta(t, \tau) + (1 - \theta(t, \tau))\dot{\phi}(t))u + b(t)v, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq p. \quad (1)$$

Здесь  $p$  — заданный момент окончания игры;  $t_0$  — начальный момент времени; функции  $\phi \in \mathbb{R}$  и  $u \in \mathbb{R}^n$  являются управлением первого игрока;  $v$  — управление второго игрока;  $a(t)$  и  $b(t)$  — неотрицательные скалярные функции, причем функция  $a(t)$  непрерывна на полуоси  $(-\infty, p]$ , а функция  $b(t)$  суммируема на каждом отрезке полуоси  $(-\infty, p]$ ;

$$\theta(t, \tau) = 0 \text{ при } \tau \leq t, \quad \theta(t, \tau) = 1 \text{ при } t < \tau.$$

В момент  $t_0$  первый игрок выбирает момент изменения динамики  $\tau \in [t_0, \tau_{\max}]$ , где  $\tau_{\max} < p$  задано. Момент изменения динамики заранее не известен второму игроку.

Управление второго игрока — это произвольная функция  $v: (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая ограничению  $\|v\| \leq 1$ .

Управление первого игрока — это пара функций  $\phi(t) \in \mathbb{R}$  и  $u: [t_0, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . На выбор функции  $\phi(t)$  наложено импульсное

ограничение [1]:

$$\mu(t) = \mu(\tau) - \int_{\tau}^t |d\phi(r)| \geq 0, \quad (2)$$

где  $\mu(\tau) \geq 0$  — начальный запас ресурсов (считаем, что  $\mu(t_0) = \mu(\tau)$ , поскольку при  $t < \tau$  функция  $\phi(t)$  не влияет на управляемый процесс (1)), который первый игрок может использовать для формирования функции  $\phi(t)$ . Функция  $u$  удовлетворяет неравенству  $\|u(t, z)\| \leq 1$ .

Движение, порожденное выбранными на отрезке  $[t_0, \tau]$  управлениями, определим как равномерный предел последовательности ломаных Эйлера, у которых диаметр разбиения стремится к 0 [2, с. 45–46].

При выборе функции  $\phi(t)$  первый игрок в отдельные моменты времени может проводить ее коррекцию следующим образом. Момент коррекции  $q_0$  совпадает с моментом времени  $\tau$ . В момент коррекции  $q_i \in [\tau, p]$ ,  $i \geq 0$ , зная реализовавшиеся  $\|z(q_i)\|$ ,  $\mu(q_i)$ , первый игрок выбирает абсолютно непрерывную неубывающую функцию  $\phi: [q_i, p] \rightarrow \mathbb{R}$  и число  $\Delta_i \geq 0$  такие, что

$$\mu(t) = \mu(q_i) - \Delta_i - \int_{q_i}^t \dot{\phi}_i(r) dr \geq 0 \quad \text{при} \quad q_i < t \leq p.$$

Зафиксируем разбиение

$$\omega: q_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(k+1)} = p, \quad d(\omega) = \max_{0 \leq j \leq k} (t^{(j+1)} - t^{(j)}),$$

и построим ломаную

$$\begin{aligned} z_{\omega}(t^{(0)}) &= z(q_i + 0) = z(q_i) - \Delta_i a(q_i) u(q_i, z(q_i)), \\ z_{\omega}(t) &= z_{\omega}(t^{(j)}) - \left( \int_{t^{(j)}}^t a(r) \dot{\phi}(r) dr \right) u(t^{(j)}, z(t^{(j)})) + \\ &+ \left( \int_{t^{(j)}}^t b(r, \tau) dr \right) v(t^{(j)}, z(t^{(j)})), \quad t^{(j)} < t \leq t^{(j+1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Движение, порожденное выбранными на отрезке  $[q_i, q_{i+1}]$  управлениями, определим как равномерный предел последовательности ломаных (3), у которых диаметр разбиения  $d(\omega) \rightarrow 0$ .

Пусть задано число  $\varepsilon \geq 0$ . Цель первого игрока заключается в осуществлении неравенства

$$\|z(p+0)\| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Цель второго игрока противоположна.

**Теорема.** *Первый игрок может осуществить неравенство (4) для начального момента времени  $t_0 < p$  и начального состояния  $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu(t_0) \geq 0$ , если и только если*

$$\|z(t_0)\| \leq f(\tau_*, \mu(t_0)) + \int_{t_0}^{\tau_*} (a(r) - b(r))dr,$$

где  $\tau_*$  является решением задачи оптимизации

$$f(\tau, \mu(t_0)) + \int_{t_0}^{\tau} (a(r) - b(r))dr \rightarrow \max_{\tau \in [t_0, \tau_{max}]},$$

$$f(\tau, \mu(t_0)) + \min_{t \in [t_0, \tau]} \int_t^{\tau} (a(r) - b(r))dr \geq 0.$$

Здесь обозначено

$$f(\tau, \mu) = m(\tau)\mu + \varepsilon - \int_{\tau}^p b(r)dr \text{ при } t(\varepsilon) \leq \tau \leq p,$$

$$f(\tau, \mu) = m(\tau) \left( \mu - \int_{\tau}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{m(r)} dr \right) \text{ при } \tau < t(\varepsilon);$$

$$t(\varepsilon) = \inf \left\{ t < p : \int_t^p b(r)dr \leq \varepsilon \right\}; \quad m(t) = \max_{t \leq r \leq p} a(r), \quad t \leq p.$$

Рассматриваемую задачу можно проиллюстрировать следующим примером дифференциальной игры преследования. До момента времени  $\tau$  первый игрок (преследователь) управляет точкой  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\dot{x} = a(t)u, \quad \|u\| \leq 1. \quad (5)$$

В момент  $\tau$  от точки  $x$  отделяется другая точка, которая также управляется первым игроком (сохраним за ней это же обозначение):

$$\dot{x} = a(t)\dot{\phi}(t)u, \quad \|u\| \leq 1. \quad (6)$$

На выбор  $\phi(t)$  накладывается импульсное ограничение (2). Второй игрок (убегающий) управляет точкой  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\dot{y} = b(t)v, \quad \|v\| \leq 1. \quad (7)$$

Преследователь стремится в заданный момент времени  $p$  осуществить поимку убегающего:  $\|x(p) - y(p)\| \leq \varepsilon$ . Цель убегающего противоположна. Учитывая (5)–(7), сделаем замену переменных  $z = y - x$  и получим дифференциальную игру вида (1).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00105, <https://rscf.ru/project/19-11-00105/>.

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. *Ухоботов В.И.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2005.

## Равномерная глобальная достижимость линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами

**А. А. Козлов**

*Новополоцк, Полоцкий государственный университет*

e-mail: kozlovaa@tut.by

Пусть дана линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными  $\omega$ -периодическими матрицами коэффициентов  $A(\cdot)$  и  $B(\cdot)$ . Возьмем управление  $u$  в системе (1) в виде линейной обратной связи  $u = U(t)x$ , где  $U$  — некоторая кусочно-непрерывная и ограниченная  $\omega$ -периодическая  $(m \times n)$ -матрица. В результате получим замкнутую однородную систему с кусочно-непрерывными и ограниченными  $\omega$ -периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

**Определение 1.** Будем говорить, что система (2) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости* [1], если существует такое число  $T > 0$ , что для любых  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  найдется такая величина  $d = d(\alpha, \beta) > 0$ , при которой для произвольной  $(n \times n)$ -матрицы  $\Lambda$ , удовлетворяющей неравенствам  $\det H \geq \alpha$  и  $\|H\| \leq \beta$ , и всякого  $t_0 \in \mathbb{R}$  существует измеримое и ограниченное управление  $U: [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ , удовлетворяющее при всех  $t \in [t_0, t_0 + T]$  оценке  $\|U(t)\| \leq d(\alpha, \beta)$  и гарантирующее для матрицы Коши  $X_U(t, s)$  системы (3) выполнение равенства

$$X_U(t_0 + T, t_0) = \Lambda.$$

**Замечание 1.** Свойство равномерной глобальной достижимости системы (2) дает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном временном отрезке фиксированной длины  $T$ , т. е. позволяет выбрать такое матричное управление  $U$ , при котором совокупность  $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$  линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами  $e_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , канонического ортономированного базиса пространства  $\mathbb{R}^n$  — через время  $T$  будет совпадать с произвольным наперед заданным правым базисом этого пространства.

**Определение 2.** Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (в смысле Калмана) [2], если существуют такие числа  $\sigma > 0$  и  $\alpha_i > 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , что при всяком  $t_0 \in \mathbb{R}$  имеют место неравенства

$$\alpha_1 E \leq W(t_0, t_0 + \sigma) \leq \alpha_2 E, \quad \alpha_3 E \leq \widehat{W}(t_0, t_0 + \sigma) \leq \alpha_4 E, \quad (3)$$

в которых матрица управляемости (матрица Калмана)  $W(\cdot, \cdot)$  определяется равенством

$$W(t_0, t_0 + \sigma) := \int_{t_0}^{t_0 + \sigma} X(t_0, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0, s) ds,$$

где  $E$  — единичная матрица,  $X(t, s)$  — матрица Коши линейной системы (1) с нулевым управлением,

$$\widehat{W}(t_0, t_0 + \sigma) := X(t_0 + \sigma, t_0)W(t_0, t_0 + \sigma)X^*(t_0 + \sigma, t_0).$$

**Замечание 2.** В определении 2 неравенства (3) понимаются в смысле квадратичных форм.

Основным результатом настоящей работы является нижеприведенная

**Теорема 1.** Система (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными  $\omega$ -периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема (по Калману) тогда и только тогда, когда соответствующая замкнутая система (2) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.

Доказательство этой теоремы основано на доказательстве критерия глобальной ляпуновской приводимости периодической системы (3), представленном в статье [3] (см. также теорему 28.1 монографии [4]), и утверждении о представлении всякой квадратной матрицы с положительным определителем в виде произведения пяти квадратных матриц с отделенными от нуля положительными главными угловыми минорами [5, с. 30].

Прежде чем сформулировать такое утверждение, введем обозначение. Для всяких числа  $l = \overline{1, n}$  и  $(n \times n)$ -матрицы  $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n$  через  $(H)_l$  будем обозначать ее ведущую главную подматрицу [5, с. 30] порядка  $l$ :

$$(H)_1 = h_{11}, \quad (H)_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad (H)_n = H.$$

**Теорема 2.** При всяких числа  $\alpha > 0$  и  $(n \times n)$ -матрицы  $\Lambda$ , удовлетворяющей оценке  $\det \Lambda \geq \alpha$ , найдутся такие величина  $\rho = \rho(\alpha) > 0$  и  $(n \times n)$ -матрицы  $H_1, \dots, H_5$ , для которых при любых  $k = \overline{1, 5}$  и  $i = \overline{1, n}$  справедливы оценки  $\det(H_k)_i \geq \rho$ , что выполняется равенство  $\Lambda = \prod_{k=1}^5 H_k$ .

Отметим, что последняя теорема вытекает из следующей цепочки лемм.

**Лемма 1.** Для любых числа  $\alpha > 0$  и  $(n \times n)$ -матрицы  $\Lambda$ , удовлетворяющей оценке  $\det \Lambda \geq \alpha$ , найдутся такие матрица перестановок  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и величина  $\rho = \rho(\alpha) > 0$ , при которых для всех  $i = \overline{1, n}$  выполняются неравенства  $|\det(P\Lambda)_i| \geq \rho$ .

**Лемма 2.** При всякой матрице перестановок  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  найдется такая верхнетреугольная  $(n \times n)$ -матрица  $U$  с единицами на главной диагонали, что для каждого  $i = \overline{1, n}$  имеют место отношения  $|\det(UP)_i| \geq 1$ .

**Лемма 3.** Для любых числа  $\alpha > 0$  и  $(n \times n)$ -матрицы  $\Lambda$ , удовлетворяющей оценке  $\det \Lambda \geq \alpha$ , найдутся такие величина  $\rho = \rho(\alpha) > 0$  и верхнетреугольная матрица  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с единицами на главной диагонали, что матрица-произведение  $U\Lambda$  представляется в виде  $U\Lambda = H_1 \tilde{E} H_2$ , в котором для матриц  $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $k = 1, 2$ , имеют место оценки  $\det(H_k)_i \geq \rho$  при всех  $i = \overline{1, n}$ , а матрица  $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  получена из единичной матрицы заменой некоторого четного количества диагональных элементов на  $-1$ .

**Лемма 4.** Для квадратной матрицы  $\tilde{E}$  порядка  $n$ , указанной в лемме 3, найдутся такие квадратные  $(n \times n)$ -матрицы  $S_1$  и  $S_2$ , что при всех  $k = 1, 2$  и  $i = \overline{1, n}$  справедливы оценки  $\det(S_k)_i \geq 1$  и равенство  $\tilde{E} = S_1 \cdot S_2$ .

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» (подпрограмма 1, задание 1.2.01, №ГР 20211316 от 15.05.2021).

1. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 45–56.

2. *Kalman R.E.* Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. Vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
3. *Попова С.Н.* Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 12. С. 1627–1636.
4. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

## Устойчивость существования глобальных решений первой краевой задачи для управляемого полулинейного параболического уравнения

**М. С. Коржавина**

*Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

e-mail: maryasha\_f@mail.ru

Данная публикация примыкает к публикации [1], посвященной условиям *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) первой *начально-краевой задачи* (НКЗ) для полулинейного параболического уравнения с управляемой нелинейной правой частью, содержащей производные решения по пространственным переменным. Пусть заданы  $n, r \in \mathbb{N}$ ,  $T > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  и ограниченная односвязная область  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  ( $\partial\Omega \in C_2$ ), элементы которой обозначаем  $x = \{x^1, \dots, x^n\}$ . На цилиндре  $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$  с боковой поверхностью  $S_T \equiv \partial\Omega \times (0, T)$  рассмотрим НКЗ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &\equiv y'_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}y'_{x^j})'_{x^i} = \\ &= g(\{x, t\}, y, y'_x, u(x, t)), \quad \{x, t\} \in Q_T; \end{aligned} \tag{1}$$

$$y(x, 0) = w(x), \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$y(x, t) = 0, \quad \{x, t\} \in S_T, \quad (3)$$

где  $a_{ij}(x, t) : Q_T \rightarrow \mathbf{R}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ),  $g(\{x, t\}, \mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) : Q_T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $w(\cdot) \in L_2(\Omega)$  заданы, а  $u(x, t) : Q_T \rightarrow \mathbf{R}^r$  — управление. Предположения:  $g$ ,  $g'_y$  и  $g'_q$  измеримы по  $\{x, t\}$ , непрерывны по  $\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{u}$ , ограничены на любом ограниченном множестве;  $a_{ij}$  и  $(a_{ij})'_{x^i}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , принадлежат классу  $\mathcal{H}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q_T})$  (используем обозначения функциональных пространств [2, гл. 1, § 1]); выполняется условие равномерной параболичности (см. [2, с. 20]); допустимы  $u(\cdot)$  из ограниченного множества  $\mathbf{D} \subset L_\infty^r(Q_T)$ .

Чтобы ввести понятие решения НКЗ (1)–(3), нам потребуется вспомогательная НКЗ с условиями (2) и (3) для уравнения

$$\mathcal{L}[y](x, t) = z(x, t), \quad \{x, t\} \in Q_T, \quad (4)$$

где  $z(\cdot) \in L_q(Q_T)$ , а  $q$  произвольно из  $[2(n+2)(n+4)^{-1}, \infty]$ . Для любых  $y \in \mathring{V}_2^{1,0}(Q_T)$ ,  $\eta \in W_2^{1,1}(Q_T)$ ,  $\psi \in L_2(\Omega)$ ,  $\xi \in [0, T]$ ,  $z \in L_q(Q_T)$ ,  $w \in L_2(\Omega)$  положим  $J[y, \eta, z, \xi, w] \equiv \int_\Omega y(x, \xi)\eta(x, \xi)dx -$

$$\int_\Omega w(x)\eta(x, 0)dx + \int_0^\xi dt \int_\Omega \left\{ -y\eta'_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y'_{tj}\eta'_{ti} - \eta z \right\} dx. \text{ Следуя}$$

[2, гл.3, §1], функцию  $y(\cdot)$  из  $\mathring{V}_2^{1,0}(Q_T)$  назовем решением НКЗ (2)–(4), если она для почти всех  $\xi \in [0, T]$  удовлетворяет тождеству:

$J[y(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot), \xi, w] = 0$ ,  $\eta \in \mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$ . Такое решение существует и единственно (см. [2, гл. 3, теоремы 2.1, 4.2, 8.1]).

Функцию  $y(\cdot) \in \mathring{V}_2^{1,0}(Q_T)$  назовем решением (1)–(3), отвечающим управлению  $u(\cdot)$ , если она и  $y'_x(\cdot)$  ограничены на  $Q_T$  и для почти всех  $\xi \in [0, T]$  имеем:  $J[y(\cdot), \eta(\cdot), g(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)), \xi, w] = 0$ ,  $\eta \in \mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$ . Каждому  $u(\cdot) \in \mathbf{D}$  не может отвечать более одного такого решения.

Чтобы сформулировать теорему об условиях УСГР НКЗ (1)–(3), воспользуемся функцией Грина задачи (2)–(4) (см. [2, с. 463]). Пусть  $Q_{\tau_1, \tau_2}$  — цилиндр  $\Omega \times (\tau_1, \tau_2)$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$ , а

$S_{\tau_1, \tau_2}$  — его боковая поверхность. Функцией Грина задачи (2)–(4) называется функция  $G(x, t; \zeta, \tau) \equiv G(\{x, t\}; \{\zeta, \tau\}) : Q_T \times Q_T \rightarrow \mathbf{R}$ , которая для любой точки  $\{\zeta, \tau\} \in Q_T$  удовлетворяет условиям:  $G(x, t; \zeta, \tau) = 0$ ,  $\{x, t\} \in Q_{0, \tau}$ ; функция  $G(\cdot; \zeta, \tau) : Q_{\tau, T} \rightarrow \mathbf{R}$  — решение НКЗ

$$G'_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) G'_{xj})'_{x^i} = \delta(x - \zeta) \delta(t - \tau), \quad \{x, t\} \in Q_{\tau, T};$$

$$G(x, \tau; \zeta, \tau) = 0, \quad x \in \Omega; \quad G(x, t; \zeta, \tau) = 0, \quad \{x, t\} \in S_{\tau, T},$$

где  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция, и решение понимается в смысле теории обобщенных функций. Функция  $G(x, t; \zeta, \tau)$  имеет первые производные по переменным  $x$  [2, гл. 4, § 16]. Из [2, гл. 4, теорема 16.3] следует, что при каждой функции  $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$  выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0[z](x, t) &\equiv \int_0^t d\tau \int_\Omega G(x, t; \zeta, \tau) z(\zeta, \tau) d\zeta, \\ \mathcal{A}_1[z](x, t) &\equiv \int_0^t d\tau \int_\Omega (G'_x(x, t; \zeta, \tau))^* z(\zeta, \tau) d\zeta, \end{aligned}$$

ограничены при  $\{x, t\} \in Q_T$ . То есть для любых  $y(\cdot) \in \overset{\circ}{V}_2^{1,0}(Q_T)$ , ограниченных на  $Q_T$  вместе с первыми производными по  $x$ , и любых  $u_1(\cdot)$ ,  $u_2(\cdot)$  из  $\mathbf{D}$  конечна величина

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(y, u_1, u_2) &\doteq \operatorname{vraisup}_{\{x, t\} \in Q_T} \{ |\mathcal{A}_0[\Delta g(\{\cdot\}, y, u_1, u_2)](x, t)| + \\ &+ |\mathcal{A}_1[\Delta g(\{\cdot\}, y, u_1, u_2)](x, t)| \}, \end{aligned}$$

где через  $\Delta g(\{\cdot\}, y, u_1, u_2)$  обозначена разность

$$\begin{aligned} &g(\{x, t\}, y(x, t), y'_x(x, t), u_1(x, t)) - \\ &- g(\{x, t\}, y(x, t), y'_x(x, t), u_2(x, t)). \end{aligned}$$

Сформулируем теорему о достаточных условиях УСГР НКЗ (1)–(3). Пусть  $\mathcal{R}$  — класс тех  $u(\cdot) \in \mathbf{D}$ , каждому из которых отвечает единственное глобальное решение  $y_u$  НКЗ (1)–(3).

**Теорема.** Для любого  $u_0(\cdot) \in \mathcal{R}$  существуют  $\delta > 0$  и  $C > 0$  такие, что, если для некоторого  $u(\cdot) \in \mathbf{D}$  выполняется неравенство  $\mathbf{r}(y_{u_0}, u, u_0) < \delta$ , то  $u(\cdot) \in \mathcal{R}$  и справедлива оценка  $\|y_u - y_{u_0}\|_{V_2^{1,0}(\Pi)} \leq C \mathbf{r}(y_{u_0}, u, u_0)$ .

Для случая нулевой начальной функции приведенная теорема была сформулирована в [1]. Теорема обобщает подобное утверждение об УСГР из [3, гл. 2, § 5], где рассматривался случай, когда правая часть уравнения (1) не зависит от градиента. Наше доказательство теоремы использует переформулировку НКЗ (1)–(3) в виде эквивалентного вольтеррова функционального уравнения; о вольтерровых функциональных уравнениях и доказательстве теорем УСГР для них см., например, [3, гл. 1], [4].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00199.

1. Коржавина М.С., Сумин В.И. Об условиях устойчивости существования глобальных решений краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с управляемой правой частью // В кн.: Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020): материалы IX Международной научной конференции, 12–16 октября 2020 г. Тамбов: ИД «Державинский», 2020. С. 48–50.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
4. Сумин В.И. Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, № 132. С. 422–440.

# Неподвижные точки при построении сингулярных множеств решений в задачах управления по быстродействию

П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: pleb@yandex.ru, uspen@imm.uran.ru

Функция оптимального результата  $u = u(x, y)$  в задаче управления по быстродействию с круговой единичного радиуса вектограммой скоростей является минимаксным решением [1] задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left( \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + 1 = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  — евклидова норма вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$ . Краевое условие в (1) определено на границе  $\Gamma = \partial M$  замкнутого невыпуклого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ , которое в соответствующей задаче управления по быстродействию рассматривается в качестве целевого множества. При этом  $\Gamma = \gamma(t)$ , где  $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$  — дважды непрерывно дифференцируемое отображение числового отрезка  $T = [\hat{t}, \check{t}]$ ,  $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$ ,  $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$ , на плоскость. Кроме того, кривая  $\Gamma$  регулярная, без точек самопересечения и имеет конечное число точек с разрывами производных третьего порядка от координатных функций.

Решение краевой задачи — супердифференцируемая функция, множество негладкости (сингулярное множество) которой относится к множествам симметрии [2]. Сингулярное множество состоит из гладких многообразий (ветвей), на которых мера невыпуклости [3] краевого множества строго больше нуля.

Предложен аналитико-численный подход к построению минимаксного решения краевой задачи (1), сочетающий аналитические процедуры выявления псевдовершин — особых точек границы краевого множества, сигнализирующих о наличии гладких

ветвей сингулярного множества, и численные алгоритмы построения этих ветвей.

Важным элементом реализации на практике разработанного подхода является отыскание для каждой псевдовершины ее маркеров — числовых характеристик псевдовершины. Маркеры (левый и правый) определяются решениями уравнения типа золотой пропорции, которое устанавливает связь между характеристиками уравнения Гамильтона–Якоби и геометрией краевого множества (подробнее см. [4]). Указанные решения относятся к классу локальных диффеоморфизмов, порождающих псевдовершину.

**Определение 1.** Левая односторонняя производная

$$\lambda \triangleq t'_2(t_0 - 0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0}$$

называется *левым маркером* псевдовершины

$$X_0 \triangleq (x(t_0), y(t_0)) \in \Gamma,$$

здесь  $t_2 = t_2(t_1)$  — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину  $X_0$ .

**Определение 2.** Правая односторонняя производная

$$\mu \triangleq t'_1(t_0 + 0) = \lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{t_1(t_2) - t_0}{t_2 - t_0}$$

называется *правым маркером* псевдовершины

$$X_0 \triangleq (x(t_0), y(t_0)) \in \Gamma,$$

здесь  $t_1 = t_1(t_2)$  — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину  $X_0$ .

В общем случае левый и правый маркеры связаны равенством  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ . Формулы для односторонних маркеров однотипны и подходы к их вычислению принципиально не отличаются друг от

друга. Так, например, левый маркер является неположительным решением уравнения

$$\lambda = \varphi(\lambda). \quad (2)$$

Здесь  $\varphi(\lambda) = \frac{-\lambda^3 k'_+(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)k'_-}{-(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda)k'_+ + k'_-}$ , а  $k'_+ = k'(t_0 + 0)$  и  $k'_- = k'(t_0 - 0)$  — правая и левая односторонняя производная кривизны кривой  $\Gamma = \partial M$  в псевдовершине  $X_0$  соответственно. Таким образом, левый маркер — неподвижная точка некоторого гладкого отображения.

**Лемма.** При соблюдении неравенства  $\frac{k'_+}{k'_-} \leq 0$  на множестве  $\Lambda = (-\infty, 0]$  существует единственное решение уравнения (2).

Для численного решения уравнений (2) привлекается рекуррентная формула классического метода Ньютона [5]:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{\Phi(\lambda_n)}{\Phi'(\lambda_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $\Phi(\lambda_n) = \varphi(\lambda) - \lambda$ .

Развиваемые методы доведены до вычислительных алгоритмов и с их помощью осуществлено численное моделирование решений для конкретных примеров задач управления по быстродействию.

Исследование П.Д. Лебедева выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00105, <https://rscf.ru/project/19-11-00105/>.

1. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстрогодействия // В сборнике: Прикладная математика и информатика. Труды факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва, 2007. С. 65–79.
3. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.*  $\alpha$ -множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 95–120.

4. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О структуре сингулярности минимаксного решения задачи Дирихле для уравнения типа эйконала при нарушении гладкости кривизны границы краевого множества // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 3. С. 129–154.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 6-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

## Дифференцируемость функции быстродействия линейной докритической системы на поверхностях переключения

**В. В. Лукьянов**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: lkv-2010@mail.ru

Рассмотрим линейную нестационарную задачу быстродействия в нуль с закрепленным левым концом

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + T) = 0, \quad T \rightarrow \min, \quad (2)$$

где функции  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$  и  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(n, r)$  непрерывны. Множеством допустимых управлений  $\mathcal{U}$  будем считать совокупность всевозможных измеримых функций  $u: \mathbb{R} \rightarrow U = [-1, 1]^r$ . Для заданной точки  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$  обозначим через  $\Theta(t_0, x_0)$  функцию быстродействия в задаче (1)–(2).

Зафиксируем произвольную фундаментальную систему решений  $\psi_i(\cdot)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) сопряженной системы  $\dot{\psi} = -\psi A(t)$  и определим семейство непрерывных функций

$$\xi_i^j(t) = \psi_i(t)b^j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

где  $b^j(t)$  — столбец матрицы  $B(t)$  с номером  $j$ . Для фиксированных чисел  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  и ненулевого вектора  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$

обозначим через  $n_j(c)$  ( $j = 1, \dots, r$ ) количество геометрически различных нулей функции  $\xi^j(t; c) = c_1 \xi_1^j(t) + \dots + c_n \xi_n^j(t)$  на интервале  $I_{t_0} = (t_0, t_0 + \sigma)$ . Обозначим через  $\sigma(t_0)$  точную верхнюю грань таких  $\sigma > 0$ , что на интервале  $I_{t_0}$  при любом ненулевом  $c \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство  $n_1(c) + \dots + n_r(c) \leq n - 1$ . Если для любого  $\sigma > 0$  существует ненулевой вектор  $c \in \mathbb{R}^n$ , для которого на интервале  $I_{t_0}$  выполнено неравенство  $n_1(c) + \dots + n_r(c) \geq n$ , то положим  $\sigma(t_0) = 0$ . Функция  $\sigma(\cdot)$  не зависит от выбора фундаментальной системы решений  $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_n(\cdot)$  сопряжённой системы.

**Определение.** Система (1) называется *докритической* в точке  $t_0 \in \mathbb{R}$ , если выполнено неравенство  $\sigma(t_0) > 0$ .

Задача (1)–(2) для докритической системы изучена в работе [1].

Далее будем предполагать, что система (1) докритическая в точке  $t_0$ .

Положим  $\mathfrak{N} = \{(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r) \in \mathbb{Z}_+^r : \mathbf{n}_1 + \dots + \mathbf{n}_r \leq n - 1\}$ . Для каждого вектора  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r) \in \mathfrak{N}$  обозначим

$$c(\mathbf{n}) = \{c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \mathbf{n}_1 = n_1(c), \dots, \mathbf{n}_r = n_r(c)\},$$

где  $n_j(c)$  — число нулей функции  $\xi^j(t; c)$  на интервале  $(t_0, t_0 + \sigma(t_0))$ , и определим множество

$$\Lambda_{t_0}^{\mathbf{n}} = \bigcup_{c \in c(\mathbf{n})} \{(\delta_1(c), \dots, \delta_r(c))\}, \quad \text{где} \quad \delta_j(c) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} \text{sign} \xi^j(t; c).$$

Для каждого вектора  $\mathbf{n} \in \mathfrak{N}$ , каждого вектора  $\delta \in \Lambda_{t_0}^{\mathbf{n}}$  и любого  $\theta \in (0, \sigma(t_0))$  обозначим через  $\mathfrak{U}_{\delta}^{\mathbf{n}}(t_0, \theta)$  совокупность всевозможных кусочно-постоянных непрерывных справа функций  $u: \mathbb{R} \rightarrow U$ , тождественно равных нулю вне интервала  $(t_0, t_0 + \theta)$ ; каждая координатная функция  $u_j(\cdot)$  на интервале  $(t_0, t_0 + \theta)$  принимает значения  $\pm 1$  и имеет ровно  $\mathbf{n}_j$  переключений, а  $\delta_j$  — значение функции  $u_j(\cdot)$  в правой окрестности точки  $t_0$ . Множество  $\mathfrak{U}_{\delta}^{\mathbf{n}}(t_0, \theta)$  является многообразием без края размерности  $|\mathbf{n}| = \mathbf{n}_1 + \dots + \mathbf{n}_r$ . На множестве допустимых финитных управлений  $\mathcal{U}$  определим

отображение  $F_{t_0} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  с помощью равенства

$$F_{t_0}(u) = - \int_{t_0}^{+\infty} X(t_0, s)B(s)u(s) ds.$$

Положим  $\mathfrak{N}_\delta^n(t_0, \theta) = F_{t_0}(\mathfrak{U}_\delta^n(t_0, \theta))$ ,  $N_\delta^n(t_0, \vartheta) = \bigcup_{0 < \theta < \vartheta} \mathfrak{N}_\delta^n(t_0, \theta)$ .

Для каждого вектора  $\mathbf{n} \in \mathfrak{N}$ , каждого вектора  $\delta \in \Lambda_{t_0}^n$  и любого  $0 < \vartheta < \sigma(t_0)$  множество  $N_\delta^n(t_0, \vartheta)$  является гладкой поверхностью в  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема.** Если линейная управляемая система (1) докритическая в точке  $t_0 \in \mathbb{R}$ , то для каждого вектора  $\mathbf{n} \in \mathfrak{N}$  и каждого вектора  $\delta \in \Lambda_{t_0}^n$  функция быстрогодействия  $x \mapsto \Theta(t_0, x)$  непрерывно дифференцируема по  $x$  на поверхности  $N_\delta^n(t_0, \sigma(t_0))$ .

1. Лукьянов В.В. Двухпараметрические  $T$ -системы функций и их применение для исследования оптимальных по быстродействию линейных нестационарных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 101–130.

## О гарантированном управлении при измерении части фазовых координат

**В. И. Максимов**

Екатеринбург, ИММ УрО РАН

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Задача определения оптимальных законов формирования управления по принципу обратной связи возникла во второй половине прошлого века в контексте инженерных задач, прежде всего, задач об автоматическом регулировании техническими системами. Для таких задач характерны два фактора неопределенности: действие на управляемую систему неконтролируемых динамических возмущений и неполнота информации о состояниях

системы. В обеих ситуациях решения требуют применения принципа управления с обратной связью, позволяющего использовать всю доступную текущую информацию о системе для выработки решений о ее управлении в реальном времени.

Приняты два основных типа описания системных неопределенностей: вероятностный, предполагающий наличие той или иной статистической информации о факторах неопределенности, и детерминированный, предполагающий отсутствие такой информации. В последнем случае факторы неопределенности подчиняются заранее заданным детерминированным ограничениям в виде включений. В рамках этого направления изучение задач управления при неконтролируемых динамических входах привело к созданию во второй половине прошлого века так называемой теории позиционных дифференциальных игр. Значительный вклад в становлении этой теории внесла уральская школа по теории управления. Разработанная этой школой теория дифференциальных игр разрешает фундаментальные вопросы о существовании равновесий в классах стратегий управления с обратной связью, о структуре оптимальных стратегий, предлагает серию оригинальных методов их построения.

Теория позиционных дифференциальных игр позволяет рассматривать задачу управления, стоящую перед каждым из двух игроков-антагонистов, как задачу оптимального гарантирующего управления, в которой воздействия игрока-противника могут формироваться произвольным, неизвестным управляющему игроку механизмом в пределах априорно заданных допустимых ограничений. Подлежащая определению стратегия управляющего игрока при этом гарантирует наилучшее (либо требуемое) качество процесса функционирования системы при наихудшей из возможных реализации динамического возмущения. Вследствие этого теорию позиционных дифференциальных игр называют также теорией гарантирующего (либо гарантированного) управления.

Теория гарантирующего управления, концентрируясь на задачах управления в условиях неопределенных изменяющихся во времени помех, обычно предполагает, что управляющие обратные связи используют полную информацию о текущих фазовых

состояниях системы. В настоящем сообщении речь пойдет о задачах гарантирующего управления при измерении части фазовых координат. Для решения такого типа задач будет описана методология, которая основана на сочетании идеологии «классической» теории гарантирующего управления [1, 2] с теорией динамического обращения [3, 4]. Последняя совмещает методологию позиционного управления с принципом регуляризации из теории некорректно поставленных задач и нацелена, прежде всего, на решение задач идентификации в режиме реального времени текущих значений неконтролируемых переменных входов. При этом мы остановимся на конфликтно-управляемых системах, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с распределенными параметрами.

В качестве примера системы с распределенными параметрами рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \eta) + l \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \eta) &= \Delta_L \psi(t, \eta) + (Bu(t))(\eta) - (Cv(t))(\eta), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \eta) &= \Delta_L \varphi(t, \eta) + g(t, \eta, \varphi(t, \eta)) + \psi(t, \eta) \end{aligned} \quad (1)$$

$$((t, \eta) \in Q = (t_0, \vartheta) \times \Omega)$$

с граничным

$$\frac{\partial}{\partial n} \psi(t, \eta) = \frac{\partial}{\partial n} \varphi(t, \eta) = 0 \quad ((t, \eta) \in (t_0, \vartheta) \times \partial\Omega)$$

и начальным

$$\psi(t_0, \eta) = \psi_0, \quad \varphi(t_0, \eta) = \varphi_0 \quad (\eta \in \Omega)$$

условиями. Здесь  $t \in [t_0, \vartheta]$  ( $t_0 < \vartheta < \infty$ ) — переменная времени;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , где  $n = 2, 3$  — ограниченная пространственная область с гладкой границей  $\partial\Omega$ ;  $B$  и  $C$  — линейные ограниченные операторы, действующие соответственно из банаховых пространств  $Y$  и  $Z$  в гильбертово пространство  $H = L_2(\Omega)$  и преобразующие внешние воздействия  $u(t) \in Y$  и  $v(t) \in Z$ , оказываемые на систему в каждый момент  $t$ , в результаты  $(Bu(t))(\eta)$  и  $(Cv(t))(\eta)$  их

непосредственного влияния на динамику системы в этот момент в каждой точке  $\eta \in \Omega$ ;  $\Delta_L$  — оператор Лапласа;  $l$  — положительная константа;

$$g(t, \eta, \varphi) = a(t, \eta)\varphi + b(t, \eta)\varphi^2 - c(\eta)\varphi^3,$$

при этом  $a(\cdot), b(\cdot) \in L_\infty(Q)$ ,  $c(\cdot) \in L_\infty(\Omega)$ ,  $c(\eta) \geq c > 0$  для п.в.  $\eta \in \Omega$ ;  $\partial/\partial n$  — обозначение производной вдоль нормали к  $\partial\Omega$ , внешней по отношению к  $\Omega$ ;  $(\psi_0, \varphi_0) \in H^2$  — состояние системы в начальный момент  $t_0$ ,

$$\psi_0, \varphi_0 \in W_\infty^2(\Omega), \quad \frac{\partial}{\partial n}\psi_0(\eta) = \frac{\partial}{\partial n}\varphi_0(\eta) = 0 \quad (\eta \in \partial\Omega).$$

Система (1) впервые была введена в работе [5]. В последние годы исследованию этой системы, а также различных ее обобщений, посвящено большое число работ, в том числе работ, посвященных (как правило) задачам программного управления. В настоящем сообщении для системы (1) обсуждаются две взаимно дополняющие игровые задачи о гарантированном позиционном управлении в условиях полной и неполной информации о ее наблюдаемых состояниях. Уравнения характеризуют процесс отвердевания жидкого вещества в ограниченной пространственной области. Устанавливается, что решения задач при полной и неполной информации эквивалентны в смысле асимптотически гарантированных результатов. Решения основаны на методе экстремального сдвига и методе априори стабильных множеств из теории гарантированного позиционного управления и используют конструкции устойчивого динамического обращения управляемых систем.

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.

4. *Осипов Ю.С., Кряжсимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
5. *Caginalp G.* An analysis of a phase field model of a free boundary // Arch. Ration. Mech. Anal. 1986. Vol. 92, pp. 205–245.

## О существовании магистральных процессов в задачах планирования

**Ю. В. Мастерков**

*Владимир, Владимирский государственный университет  
им. А.Г. и Н.Г. Столетовых  
e-mail: Jura.masterkov@yandex.ru*

Рассматривается модель долговременной эксплуатации биологического сообщества, состоящего из  $n$  видов, с целью получения максимальной прибыли. Эволюция биологического сообщества описывается системой

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}. \quad (1)$$

В дискретные моменты времени  $k\tau$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , происходит изъятие доли  $u_i(k)x_i(k\tau)$ ,  $u_i \in [0, 1]$ , биомассы каждого вида. Прибыль с единовременного изъятия

$$Z_k = Z(x(k\tau), u(k)) \doteq \sum_{i=1}^n p_i u_i(k) x_i(k\tau),$$

где  $p_i > 0$  — стоимость единицы биомассы  $i$ -го вида. Таким образом, рассматривается эксплуатируемая популяция, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq k\tau, \quad x_i(k\tau) = (1 - u_i(k)) \cdot x_i(k\tau - 0), \quad i = \overline{1, n},$$

где  $x_i(k\tau - 0)$  и  $x_i(k\tau)$  — количество ресурса  $i$ -го вида до и после сбора в момент  $k\tau$  соответственно,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Предполагается, что решения данной системы непрерывны справа, функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  определены и непрерывно дифференцируемы для всех  $x \in \mathbb{R}_+^n$ .

Ставится задача максимизации *средней временной прибыли*

$$Z(x(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k}{k\tau} \rightarrow \max.$$

Обозначим через  $\varphi(t, x^*)$  решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию  $\varphi(0, x^*) = x^*$ , где  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^n$ . Предполагаем, что решение  $\varphi(t, x^*)$  существует на отрезке  $[0, T]$ ,  $T > \tau$  и является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях. Введем в рассмотрение функцию

$$D_\tau(x) \doteq \sum_{i=1}^n p_i (\varphi_i(\tau, x) - x_i).$$

В работе [1] доказано, что *если функция  $D_\tau(x)$  достигает максимального значения в единственной точке  $x^* \in \mathbb{R}_+^n$  и  $x_i^* \leq \varphi_i(\tau, x^*) \neq 0$  для всех  $i = \overline{1, n}$ , то для любого  $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$  такого, что  $\varphi_i(\tau, x(0)) \geq x_i^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,*

$$\max Z(x(0)) = D_\tau(x^*) = \sum_{i=1}^n p_i (\varphi_i(\tau, x^*) - x_i^*)$$

*при следующем режиме эксплуатации:*

$$u_i^*(1) = \left(1 - \frac{x_i^*}{\varphi_i(\tau, x(0))}\right); \quad u_i^*(k) = \left(1 - \frac{x_i^*}{\varphi_i(\tau, x^*)}\right), \quad i = \overline{1, n}, \quad k \geq 2.$$

Заметим, что отображение  $x^* \rightarrow \varphi_i(\tau, x^*)$  задает *магистральный процесс* в задаче максимизации средней временной прибыли в модели долговременной эксплуатации биологического сообщества. Таким образом, встает вопрос о существовании магистральных процессов в задачах долговременного планирования.

**Теорема.** Пусть  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}_+^n$  и отображение  $x \rightarrow \varphi_i(t, x)$ ,  $t > 0$  переводит компакт  $\overline{G}$  в себя. Если

$f_i(x_0) > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  в точке  $x_0 \in G$ , то найдётся такое  $T > 0$ , что для любого разбиения времени  $k\tau$ ,  $\tau \in (0, T)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , существует  $x^* \in G$ , обеспечивающая максимум

$$\overline{D}_\tau = D_\tau(x^*) \doteq \max_{x \in \overline{G}} D_\tau(x) > 0.$$

Отметим, что данная магистраль может быть не единственной. Но в случае единственности точки  $x^*$ , точка максимума непрерывно зависит от  $\tau$ .

1. Волдеаб М.С., Родина Л.И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Изв. вузов. Математика. 2022. № 1. С. 12–24.

## Об одной задаче преследования двух убегающих во временных шкалах

Н. Н. Петров, Е. С. Можегова

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: kma3@list.ru, mozhegovalena@yandex.ru

Одним из направлений развития современной теории дифференциальных игр является разработка методов решения задач конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих [1, 2, 3]. Б. Олбах и С. Хилгер в работах [4, 5] предложили подход к исследованию дифференциальных и разностных уравнений с единых позиций. Оказывается, что некоторым результатам, полученным отдельно для каждой из этих теорий, можно придать больший характер общности, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замкнутых подмножествах  $\mathbb{R}$ , названных временными шкалами.

Достаточные условия поимки одного убегающего в задаче простого группового преследования в заданной временной шкале получены в работе [6]. В работе [7] рассматривалась задача

простого преследования группой преследователей группы жестко скоординированных убегающих в заданной временной шкале, где были получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего.

**Определение 1.** Непустое замкнутое подмножество  $T \subset \mathbb{R}^1$  такое, что  $\sup_{t \in T} t = +\infty$ , называется *временной шкалой*.

Пусть задана некоторая временная шкала  $T$ ,  $t_0 \in T$ .

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma(n, 2)$   $n + 2$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и двух убегающих  $E_1, E_2$  с законами движения вида

$$x_i^\Delta = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V, \quad (1)$$

$$y_j^\Delta = v, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v \in V. \quad (2)$$

Здесь  $x_i, y_j, x_i^0, y_j^0, u_i, v \in \mathbb{R}^k$ ,  $i \in I = \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in J = \{1, 2\}$ ,  $V = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v\| \leq 1\}$ . Считаем, что  $x_i^0 \neq y_j^0$  для всех  $i \in I, j \in J$ . Дополнительно предполагается, что убегающие  $E_1, E_2$  в процессе игры не покидают пределов выпуклого множества  $\Omega$  с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k \mid (p_j, y) \leq \mu_j, j = 1, \dots, r\},$$

где  $p_1, \dots, p_r$  — единичные векторы  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_r$  — вещественные числа,  $(a, b)$  — скалярное произведение. Считаем, что  $\Omega = \mathbb{R}^k$  при  $r = 0$ .

Введем новые переменные  $z_{ij} = x_i - y_j$ . Тогда вместо систем (1), (2) получим систему

$$z_{ij}^\Delta = u_i - v, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \quad u_i, v \in V.$$

$\Delta$ -измеримую функцию  $v: T \rightarrow \mathbb{R}^k$  назовем допустимой, если  $v(t) \in V$ ,  $y_j(t) \in \Omega$  для всех  $t \in T, j \in J$ . Предысторией функции  $v$  в момент  $t \in T$  будем называть сужение функции  $v$  на  $[t_0, t) \cap T$ . Обозначим  $z^0 = \{z_{ij}^0, i \in I, j \in J\}$  — вектор начальных позиций.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих  $E_1, E_2$  выбирает одно и то же управление  $v(t)$ .

**Определение 2.** В игре  $\Gamma(n, 2)$  происходит *поймка*, если существуют момент  $T_0 = T(z^0)$ , квазистратегии  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$ , такие, что для любой измеримой функции  $v(\cdot)$ ,  $v(t) \in V$ ,  $y(t) \in \Omega$ ,  $t \in [t_0, T_0] \cap T$  выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) найдутся номера  $l, m \in I$ , ( $m \neq l$ ),  $j \in J$ , моменты  $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap T$  такие, что  $z_{lj}(\tau_1) = 0$ ,  $z_{mj}(\tau_2) = 0$ ;
- б) найдутся номера  $l, m \in I$ , ( $m \neq l$ ), моменты  $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap T$  такие, что  $z_{l1}(\tau_1) = 0$ ,  $z_{m2}(\tau_2) = 0$ .

**Замечание 1.** Условие поймки означает, что либо два каких-то преследователя осуществляют поймку одного убегающего, либо один преследователь ловит одного убегающего, а второй — другого. Такая ситуация может возникнуть, если система состоит из двух блоков и для того, чтобы ее вывести из строя, нужно либо уничтожить один из блоков, либо повредить оба блока.

**Теорема 1.** Пусть  $r = 1$  и существует множество  $I_0 \subset I$ ,  $|I_0| = n - 2$  такое, что для всех  $l \in I_0$

$$0 \in \text{Intco} \{z_{i1}^0, z_{i2}^0, i \neq l, p_1\}.$$

Тогда в игре  $\Gamma(n, 2)$  происходит *поймка*.

**Теорема 2.** Пусть существуют  $p \in \mathbb{R}^k$ ,  $p \neq 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^1$ ,  $I_0 \subset I$ ,  $|I_0| = n - 2$  такие, что  $\Omega \subset \{z \in \mathbb{R}^k \mid (p, z) \leq \mu\}$  и для всех  $l \in I_0$

$$0 \in \text{Intco} \{z_{i1}^0, z_{i2}^0, i \neq l, p\}.$$

Тогда в игре  $\Gamma(n, 2)$  происходит *поймка*.

**Теорема 3.** Пусть  $\Omega = \mathbb{R}^k$  и существует множество  $I_0 \subset I$ ,  $|I_0| = n - 2$  такое, что для всех  $l \in I_0$

$$\text{Intco} \{x_i^0, i \in I_0, i \neq l\} \cap \text{co} \{y_1^0, y_2^0\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре  $\Gamma(n, 2)$  происходит *поймка*.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010) и РФФИ (проект 20-01-00293).

1. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
2. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
4. *Aulbach B., Hilger S.* Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale // *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems*. 1990. Vol. 59, pp. 9–20.
5. *Hilger S.* Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus // *Results in Mathematics*. 1990. Vol. 18, pp. 18–56.
6. *Петров Н.Н.* Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах // *Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2020. Т. 30, вып. 2. С. 249–258.
7. *Петров Н.Н.* Об одной задаче преследования группы убегающих во временных шкалах // *Труды ИММ УрО РАН*. 2021. Т. 27, № 3. С. 163–171.

## Субградиенты функционала оптимального результата в задачах оптимального управления системами нейтрального типа

**А. Р. Плаксин**  
*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*  
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

Работа продолжает исследования [1, 2, 3, 4] по развитию обобщенных решений [5, 6] уравнений Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными, соответствующих функционально-дифференциальным системам, и направлена на получение критериев в форме субградиентов для функционала оптимального

результата в задачах оптимального управления системами нейтрального типа в форме Дж. Хейла. При этом, следуя идеям из [3, 4], предлагается рассматривать уравнения Гамильтона–Якоби не на пространстве липшицевых функций, как это было в [2], а на более широком пространстве кусочно-липшицевых функций.

Пусть  $h > 0$ ,  $I \in \mathbb{N}$  и  $\vartheta = Ih$ . Функцию  $w(\cdot): [-h, 0) \mapsto \mathbb{R}^n$  называем *кусочно-липшицевой*, если существуют такие  $-h = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k = 0$ , что  $w(\cdot)$  липшицева на каждом полуинтервале  $[\xi_i, \xi_{i+1})$ ,  $i \in \overline{1, k-1}$ . Множество таких функций обозначим через  $\text{PLip}$ . Обозначим также через  $\text{PLip}_*$  множество функций  $w(\cdot) \in \text{PLip}$ , для которых существует  $\delta > 0$  такое, что  $w(\cdot)$  непрерывно-дифференцируема на  $[-h, -h + \delta]$ . Обозначим

$$\mathbb{G} = (0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \text{PLip}, \quad \mathbb{G}_* = \cup_{i=0}^{I-1} (ih, (i+1)h) \times \mathbb{R}^n \times \text{PLip}_*.$$

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: при каждой  $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$  необходимо минимизировать по  $u(\cdot)$  функционал

$$J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)),$$

где  $x(\cdot)$  — движение динамической системы, описываемой уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{d}{dt} (x(t) - g(t, x(t-h))) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [\tau, \vartheta],$$

при начальном условии  $x(\tau) = z$ ,  $x(t) = w(t - \tau)$ ,  $t \in [\tau - h, \tau)$ . Здесь  $t$  — время;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор;  $u(t) \in \mathbb{U}$  — управляющее воздействие;  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$  — компакт. Функция  $f(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, \vartheta]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{U}$  непрерывна, локально липшицева по второму и третьему аргументу и удовлетворяет условию подлинейного роста (см. условия  $(f_1)$ – $(f_3)$  в [3]). Функция  $g(t, x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, \vartheta]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  непрерывно-дифференцируема. Функция  $\sigma(x) \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  локально липшицева. При указанных условиях каждая допустимая (измеримая) реализация управления  $u(\cdot): [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$  единственным образом определяет движение  $x(\cdot)$  — кусочно-липшицеву функцию, определенную на  $[\tau - h, \vartheta]$ , такую, что функция  $y(t) = x(t) - g(t, x(t-h))$ ,  $t \in [\tau, \vartheta]$  липшицева и уравнение (1) выполняется почти всюду. Функционал

оптимального результата имеет вид

$$\rho(\tau, z, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)} J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)).$$

где  $u(\cdot)$  перебирается по допустимым  $u(\cdot): [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ . Пусть  $H(t, x, y, s) = \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, x, y, u), s \rangle$ . Рассмотрим задачу Коши для уравнение Гамильтона–Якоби с коинвариантными (ci-) производными (см. определение в [2])

$$\begin{aligned} & \partial_{\tau, w}^{ci} \varphi(\tau, z, w(\cdot)) + \langle \partial_{\tau, w}^{ci} \hat{g}(\tau, w(\cdot)), \nabla_z \varphi(\tau, z, w(\cdot)) \rangle \\ & + H(\tau, z, w(-h), \nabla_z \varphi(\tau, z, w(\cdot))) = 0, \quad (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varphi(\vartheta, z, w(\cdot)) = \sigma(z), \quad (z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \text{PLip}, \quad (2)$$

где  $\hat{g}(\tau, w(\cdot)) = g(\tau, w(-h))$ . В отличие от уравнений Гамильтона–Якоби, для систем с запаздыванием (см. [1]) в уравнении (1) появляется новое слагаемое, не определенное на всем  $\mathbb{G}$ . Поэтому мы рассматриваем это уравнение на подпространстве  $\mathbb{G}_*$ , в каждой точке которого, в силу условий на функцию  $g$ ,  $\partial_{\tau, w}^{ci} \hat{g}(\tau, w(\cdot))$  существует.

Решение задачи (1), (2) будем искать в классе функционалов  $\varphi \in \Phi$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- a) Для любых  $(\tau, w(\cdot)) \in [0, \vartheta] \times \text{Lip}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  функция  $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t, w(-0), w(\cdot))$ ,  $t \in [\tau, \vartheta]$  непрерывна;
- b) для любого  $\alpha > 0$  существует такое  $\lambda_\varphi > 0$ , что

$$\begin{aligned} & |\varphi(\tau, z, w(\cdot)) - \varphi(\tau, z', w'(\cdot))| \leq \lambda_\varphi v_i(\tau, z - z', w(\cdot) - w'(\cdot)), \\ & \tau \in (ih, (i+1)h], \quad i \in \overline{0, I-1}, \quad (z, w(\cdot)), (z', w'(\cdot)) \in P(\alpha), \end{aligned}$$

где  $P(\alpha) = \{(z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \text{PLip}: \|z\| \leq \alpha, \sup_{\xi \in [-h, 0]} \|w(\xi)\| \leq \alpha\}$  и

$$v_i(\tau, z, w(\cdot)) = \|z\| + \int_{-h}^0 \|w(\xi)\| d\xi + \|w(-h)\| + \|w(ih - \tau)\|.$$

Следуя [4], субдифференциалом функционала  $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$  в точке  $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ ,  $\tau < \vartheta$  называем множество  $D^- \varphi(\tau, z, w(\cdot))$

таких пар  $(p_0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{(t,x) \in O_\delta^+(\tau,z)} \frac{\varphi(t, x, \kappa_t(\cdot)) - \varphi(\tau, z, w(\cdot)) - (t - \tau)p_0 - \langle x - z, p \rangle}{|t - \tau| + \|x - z\|} \geq 0,$$

где  $\kappa(t) = w(t - \tau)$ ,  $t \in [\tau - h, \tau)$ ,  $\kappa(t) = z$ ,  $t \in [\tau, \vartheta]$  и  $O_\delta^+(\tau, z) = \{(t, x) \in [\tau, \tau + \delta] \times \mathbb{R}^n : \|x - z\| \leq \delta\}$ . Симметричным образом можно определить величину супердифференциала  $D^+ \varphi(\tau, z, w(\cdot))$ .

Критерии для функционала оптимального результата  $\rho$  будем определять, следуя вязкостному подходу [5] (см. также, [3, 4]) к понятию обобщенного решения задачи (1), (2).

**Определение.** Функционал  $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$  назовем *вязкостным решением* задачи (1), (2), если он удовлетворяет включению  $\varphi \in \Phi$ , условию (2) и неравенствам

$$p_0 + \langle \partial_{\tau,w}^{ci} g(\tau, w(\cdot)), p \rangle + H(\tau, z, w(-h), p) \leq 0$$

при  $(p_0, p) \in D^- \varphi(\tau, z, w(\cdot))$ ,

$$q_0 + \langle \partial_{\tau,w}^{ci} g(\tau, w(\cdot)), p \rangle + H(\tau, z, w(-h), q) \geq 0$$

при  $(q_0, q) \in D^+ \varphi(\tau, z, w(\cdot))$ , для любых  $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$ .

**Теорема.** *Функционал оптимального результата  $\rho$  является единственным вязкостным решением задачи (1), (2).*

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 21-71-10070, <https://rscf.ru/project/21-71-10070/>.

1. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.
2. *Плаксин А.Р.* О минимаксном решении уравнений Гамильтона–Якоби для систем нейтрального типа: случай неоднородного Гамильтониана // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 11. С. 1536–1545.
3. *Plaksin A.* Minimax and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations for Time-Delay Systems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2020. Vol. 187, no 1, pp. 22–42.

4. *Plaksin A.* Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs Equations for Time-Delay Systems // SIAM J. Control Optimiz. 2021. Vol. 59, no 3, pp. 1951–1972.
5. *Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.* Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1984. Vol. 282, no 2, pp. 487–502.
6. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective. Berlin, Birkhäuser, 1995.

## Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели динамики популяции

**Л. И. Родина, А. В. Черникова**

*Владимир, Владимирский государственный университет  
им. А.Г. и Н.Г. Столетовых*

e-mail: lrodina67@mail.ru, nastik.e@bk.ru

Рассматривается задача оптимизации средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, заданной разностным уравнением. Показано, что оценки средней временной выгоды зависят от свойств функции  $f(x)$ , определяющей динамику популяции. Работа является продолжением [1, 2], где положено начало исследованиям оптимизации средней временной выгоды.

Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением

$$X(k+1) = f(X(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $X(k)$  — размер популяции в момент времени  $k$ ,  $f(x)$  — вещественная дифференцируемая функция, заданная на отрезке  $I = [0, a]$ , такая, что  $f(I) \subseteq I$ .

Пусть в моменты  $k = 1, 2, \dots$  из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса  $\omega(k) \in \Omega \subseteq [0, 1]$ . Если в

момент  $k$  доля собранного ресурса окажется больше некоторого значения  $u(k) \in [0, 1]$ , то процесс сбора останавливается. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell(k) = \ell(\omega(k), u(k)) = \min(\omega(k), u(k)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$X(k+1) = f((1 - \ell(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $X(k) = X(\ell(1), \dots, \ell(k-1), x(0))$  — количество ресурса до сбора в моменты времени  $k = 2, 3, \dots$ , зависящее от долей ресурса  $\ell(1), \dots, \ell(k-1)$ , собранного в предыдущие моменты времени, и от начальной численности популяции  $x(0) \geq 0$ . До момента  $k = 1$  извлечение ресурса не производится и  $X(1) = f(x(0))$ .

Рассмотрим функцию

$$H_*(\ell, x(0)) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k)\ell(k),$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса.

Проблема рациональной эксплуатации ресурса имеет важную экологическую и экономическую роль: необходимо оставить достаточное количество ресурса для дальнейшего воспроизводства и обеспечения устойчивости экосистемы, а также получить наибольший доход от собранного ресурса. Таким образом, исследуем задачу выбора управления  $\bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots) \in U$ , где  $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}$ , ограничивающего долю добываемого ресурса в каждый момент времени  $k$ , при котором значение функции  $H_*(\ell, x(0))$  можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mu})$ , где  $\tilde{\mathfrak{A}}$  — сигма-алгебра подмножеств  $\Omega \subseteq [0, 1]$ , на которой определена вероятностная мера  $\tilde{\mu}$ . Определим вероятностную модель  $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ , где  $\Sigma = \{\sigma : \sigma = (\omega(1), \dots, \omega(k), \dots)\}$ ,  $\mathfrak{A}$  — наименьшая сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами

$$D(k) \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega(1) \in A(1), \dots, \omega(k) \in A(k)\},$$

где  $A(1) \in \tilde{\mathfrak{A}}, \dots, A(k) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ , и зададим меру

$$\tilde{\mu}(D(k)) \doteq \tilde{\mu}(A(1)) \cdot \tilde{\mu}(A(2)) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(A(k)).$$

Тогда в силу теоремы А.Н. Колмогорова на измеримом пространстве  $(\Sigma, \mathfrak{A})$  существует единственная вероятностная мера  $\mu$ , которая является продолжением меры  $\tilde{\mu}$  на сигма-алгебру  $\mathfrak{A}$ .

Обозначим через  $M\ell(\omega, u(x))$  математическое ожидание случайной величины  $\ell(\omega, u(x)) \doteq \min(\omega, u(x))$  на множестве  $\Omega$ .

Если уравнение (1) имеет решение  $X(k) \equiv \text{const} = x^*$ , то это решение называется *положением равновесия (неподвижной точкой)*, причем  $x^* = f(x^*)$ . Предположим, что  $x^* \in (0, a)$  и  $0 < f'(x^*) < 1$ . Обозначим через  $(a_1, a_2) \subset I$  максимальный интервал, содержащий точку  $x^*$ , для всех точек которого выполнено неравенство  $0 < f'(x) < 1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mu(0) < 1$ , уравнение (1) имеет положение равновесия  $x^* \in (0, a)$  и  $0 < f'(x^*) < 1$ . Тогда для любых  $x \in [a_1, x^*]$ ,  $x(0) \in [x, a_2]$  существует управление  $\bar{u} \in U$  такое, что для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  выполнены неравенства

$$f(x)M\ell(\omega, u(x)) \leq H_*(\ell, x(0)) \leq x^*M\ell(\omega, u(x));$$

здесь  $u(x) = 1 - \frac{x}{f(x)}$ .

Получим оценки средней временной выгоды в случае, когда для положения равновесия  $x^* \in (0, a)$  уравнения (1) выполнено неравенство  $-1 < f'(x^*) < 0$ . Обозначим через  $(b_1, b_2)$  максимальный интервал, содержащий точку  $x^*$ , для всех точек которого  $f'(x) \in (-1, 0)$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1)  $\mu(0) < 1$ ;
- 2) уравнение (1) имеет положение равновесия  $x^* \in (0, a)$  и  $-1 < f'(x^*) < 0$ ;
- 3)  $x \in [b_1, x^*]$ ,  $f(x) \in (b_1, b_2]$ .

Тогда для любых  $x(0) \in [x, b_2]$  существует управление  $\bar{u} \in U$  такое, что для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  имеют место неравенства

$$f(f(x))M\ell(\omega, u_1(x)) \leq H_*(\ell, x(0)) \leq f(x)M\ell(\omega, u_2(x));$$

здесь  $u_1(x) = 1 - \frac{x}{f(f(x))}$ ,  $u_2(x) = 1 - \frac{x}{f(x)}$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00293).

1. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 2. С. 213–221.
2. *Мастерков Ю.В., Родина Л.И.* Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 41–49.

## Представление BV-решений управляемого процесса выметания

**О. Н. Самсонык**

*Иркутск, ИДСТУ СО РАН*

e-mail: olga.samsonyuk@icc.ru

В докладе рассматривается управляемый процесс выметания, оператор решения которого задан на пространстве пополнений графиков функций ограниченной вариации. Формально процесс выметания описывается импульсной управляемой системой:

$$dx(t) = f(t, x(t), y(t)) dt + G(t, x(t)) \mu(dt), \quad x(a^-) = x_0, \quad (1)$$

$$\mu \in C^*(T, K), \quad (2)$$

где  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  — заданный отрезок времени,  $K \subset \mathbb{R}^m$  — замкнутый выпуклый конус,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(a^-)$  — значение функции  $x(\cdot)$  слева в точке  $t = a$ ,  $\mu$  — управляющая мера,  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  — вектор-функции ограниченной вариации, непрерывные справа на

промежутке  $(a, b]$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$ . Функция  $y(\cdot)$  удовлетворяет дифференциальному включению с мерой:

$$-dy(t) \in N_{C(t, x(t))}^P(y(t)), \quad y(a^-) = y_0 \in C(a, x_0), \quad (3)$$

где  $N_C^P(y)$  — проксимальный нормальный конус к множеству  $C$  в точке  $y$ . Для выпуклого множества  $N_C^P(y)$  совпадает с нормальным конусом в смысле выпуклого анализа.

Управляемая система (1)–(3) рассматривается при предположениях:

- 1) Функции  $f(t, x, y)$ ,  $G(t, x)$  непрерывны по всем аргументам, локально липшицевы и удовлетворяют условию не более чем линейного роста по переменным  $x, y$ .
- 2) Многозначное отображение  $C : T \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$  имеет непустые замкнутые значения и локально липшицево относительно метрики Хаусдорфа  $d_H(\cdot, \cdot)$ , т.е. для каждого компактного множества  $Q \subset \mathbb{R}^n$  найдется  $L(Q) > 0$ , такое что неравенство

$$d_H(C(s_1, x_1), C(s_2, x_2)) \leq L(Q)(|s_1 - s_2| + \|x_1 - x_2\|)$$

выполняется для всех  $(s_1, x_1), (s_2, x_2) \in T \times Q$ .

- 3) Множество  $C(t, x)$  является  $\delta$ -проксимально регулярным при некотором  $\delta > 0$  для всех  $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$  (см. [1, 4]).

Основной мотив изучения процесса (1)–(3) был связан с вырожденными задачами оптимального управления системами с гистерезисными нелинейностями, моделируемыми play оператором, релаксационное расширение которых нельзя описать через классические BV-решения соответствующих процессов выметания. Примеры таких задач будут рассмотрены в докладе.

В докладе будут даны определение и описание решений системы (1)–(3), являющихся пополнениями графиков функций ограниченной вариации. Используемый подход к представлению

решений был предложен в [5, 6], он отличается от способов определения решения, предложенных в [2, 3, 4]. Также будут рассмотрены вопросы существования и единственности решения, соответствующего заданным управляющей мере и начальному условию.

Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

1. *Colombo G., Goncharov V.* The sweeping processes without convexity // Set-Valued Anal. 1999. Vol. 7, pp. 357–374.
2. *Kopfova J., Recupero V.* BV-norm continuity of sweeping processes driven by a set with constant shape // J. Differ. Equations. 2016. Vol. 261, no. 10, pp. 5875–5899.
3. *Marques M.* Regularization and graph approximation of a discontinuous evolution problem // J. Differ. Equations. 1987. Vol. 67, pp. 145–164.
4. *Nacry F., Thibault L.* Regularization of sweeping process: old and new // Pure and Applied Functional Analysis. 2019. Vol. 4, no. 1, pp. 59–117.
5. *Samsonyuk O.N., Timoshin S.A.* Optimal control problems with states of bounded variation and hysteresis // J. Global Optim. 2019. Vol. 74, no. 3, pp. 565–596.
6. *Samsonyuk O.* The space-time representation for impulsive control problems with hysteresis // Commun. Comput. Inf. Sci. 2019. Vol. 974, pp. 351–366.

## Пошаговое построение оптимального движения и неупреждающие мультиселекторы

Д. А. Серков

Екатеринбург, ИММ УрО РАН

e-mail: serkov@imm.uran.ru

В задачах динамической оптимизации при наличии помех

построение оптимального движения осуществляется, зачастую, по шагам конечного разбиения  $\Delta$ , выбранного на интервале управления. Оптимальность движения определяется некоторой мультифункцией (далее м/ф)  $\alpha$ , заданной на помехах, со значениями во множестве движений на всем интервале управления. При этом на каждом шаге управляющая сторона получает тем или иным способом реализацию помехи, совпадающую до текущего момента разбиения с истинной помехой, действующей в системе. На основе этой информации управляющая сторона выбирает из оптимальных траекторий такую, которая продолжает до текущего момента разбиения движение, выбранное на предыдущем шаге. Процедура повторяется на всех шагах разбиения  $\Delta$ . В итоге управляющая сторона получает оптимальный ответ на истинную помеху, действующую в системе. Данная схема присутствует, например, в методе управления с поводырём при функциональных ограничениях на помеху [2].

Возможность такого построения при всякой допустимой помехе назовём *физичностью условий*  $(\alpha, \Delta)$ , определяющих пошаговую процедуру. Понятно, что неупреждаемость и непустозначность  $\alpha$  влечёт так понимаемую физичность при любом разбиении интервала управления. Это же верно и при наличии у  $\alpha$  неупреждающего непустозначного мультиселектора.

В работе показано, что свойство физичности условий, заданных парой  $(\alpha, \Delta)$ , эквивалентно существованию у  $\alpha$  «частично» неупреждающего непустозначного мультиселектора, причем указанная неупреждаемость заведомо слабее классического условия неупреждаемости даже в случае, когда физичность имеет место для произвольно выбранного разбиения. Вторым рассматриваемым вопросом является описание, а в отдельных случаях в меру эффективное построение таких «частично» неупреждающих мультиселекторов произвольной м/ф. В целом работа близка к вопросам, рассмотренным в [1, 2].

**Физичность и  $\mathcal{H}_\Delta$ -неупреждаемость.** Пусть  $\mathbb{R}$  — вещественная прямая. Для непустых  $A, B$  обозначим  $B^A$  множество всех отображений из  $A$  в  $B$ . Если  $f \in B^A$  и  $C \in \mathcal{P}(A)$ , то  $(f|C) \in B^C$

и  $(f|C)(x) \triangleq f(x) \forall x \in C$ . Когда  $F \in \mathcal{P}'(B^A)$ , полагаем  $(F|C) \triangleq \{(f|C) : f \in F\}$ ; здесь  $\mathcal{P}(T)$  ( $\mathcal{P}'(T)$ ) — семейство всех (всех непустых) подмножеств  $T$ .

Фиксируем непустые множества  $X, Y$  и  $T \triangleq [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}$ , а также (непустые) множества помех  $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^T)$ , траекторий  $Z \in \mathcal{P}'(X^T)$  и семейство интервалов  $\mathcal{T} \triangleq \{[t_0, \tau] \mid \tau \in T\}$ . Пусть  $\Delta$  — разбиение  $T$ :  $\Delta \triangleq \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n_\Delta} = \vartheta\}$ . Обозначим  $\mathcal{H}_\Delta \triangleq \{H_i \in \mathcal{T} \mid H_i = [\tau_0, \tau_i), \tau_i \in \Delta \setminus \{\tau_0\}\}$ .

Пусть также имеется непустозначная м/ф  $\alpha \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$ , отображающая помехи из  $\Omega$  в оптимальные траектории из  $Z$ . Пару  $(\alpha, \Delta)$  назовём *условиями пошагового выбора*.

Формально свойство физичности определим следующим образом: условия пошагового выбора  $(\alpha, \Delta)$  физичны, если и только если найдется кортеж м/ф  $(\phi_i)_{i \in 1..n_\Delta}$ ,  $\Omega \ni \omega \mapsto \phi_i(\omega) \in \mathcal{P}'(\alpha(\omega))$ , удовлетворяющий при любых  $(\omega_i)_{i \in 1..n_\Delta}$  таких, что  $\omega_i \in \Omega$  и  $(\omega_i|H_i) = (\omega_{i+1}|H_i)$ ,  $i \in 1..(n_\Delta - 1)$ , равенствам  $(\phi_i(\omega_i)|H_i) = (\phi_{i+1}(\omega_{i+1})|H_i)$ ,  $i \in 1..(n_\Delta - 1)$ .

Будем говорить, что м/ф  $\beta$  есть мультиселектор м/ф  $\alpha$  (и обозначать это  $\beta \sqsubseteq \alpha$ ), если  $\beta(\omega) \subset \alpha(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ ; назоваем м/ф  $\beta$   $\mathcal{H}_\Delta$ -неупреждающей, если для любых  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  и  $H \in \mathcal{H}_\Delta$  выполняется  $((\omega_1|H) = (\omega_2|H)) \Rightarrow ((\beta(\omega_1)|H) = (\beta(\omega_2)|H))$ . Обозначим  $\mathbf{N}_{(\mathcal{H}_\Delta)}[\alpha]$  ( $\mathbf{N}_{(\mathcal{H}_\Delta)}^0[\alpha]$ ) множество всех (всех непустозначных)  $\mathcal{H}_\Delta$ -неупреждающих мультиселекторов м/ф  $\alpha$ .

**Лемма 1.** *Условия пошагового выбора  $(\alpha, \Delta)$  физичны, если и только если  $\mathbf{N}_{(\mathcal{H}_\Delta)}^0[\alpha] \neq \emptyset$ . При этом любая м/ф из  $\mathbf{N}_{(\mathcal{H}_\Delta)}^0[\alpha]$  может быть использована в пошаговой процедуре вместо всех м/ф  $(\phi_i)_{i \in 1..n_\Delta}$ .*

Итак, для решения вопроса о физичности условий  $(\alpha, \Delta)$  достаточно найти наибольший элемент в  $\mathbf{N}_{(\mathcal{H}_\Delta)}[\alpha]$  (обозначим его  $\top_{\mathbf{N}_{(\mathcal{H}_\Delta)}[\alpha]}$ ) и выяснить является ли он непустозначным. В случае положительного ответа на эти вопросы соответствующая задача пошагового построения оптимального движения будет решена при любой помехе.

**Представление  $\mathcal{H}_\Delta$ -неупреждающего мультиселектора.**

Для разбиения  $\Delta$  введем семейство операторов  $\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta} \triangleq \{\langle \cdot \rangle_H :$

$H \in \mathcal{H}_\Delta$ , преобразующих м/ф из  $\mathcal{P}(Z)^\Omega$ : для любых  $\beta \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$ ,  $H \in \mathcal{T}$  и  $\omega \in \Omega$

$$\langle \beta \rangle_H(\omega) \triangleq \left\{ h \in \beta(\omega) \mid (h|A) \in \bigcap_{(\omega'|H)=(\omega|H)} (\beta(\omega')|A) \right\}.$$

В силу изотонности и сужаемости в  $(\mathcal{P}(Z)^\Omega, \sqsubseteq)$  (см. [3, п. 1]) операторов из  $\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}$  выполняется лемма 2.

**Лемма 2.** *Для любого  $H \in \mathcal{T}$  оператор  $\langle \cdot \rangle_H$  идемпотентен, неподвижные точки оператора  $\langle \cdot \rangle_H$  суть  $\{H\}$ -неупреждающие м/ф. При этом для любого  $\beta \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$  м/ф  $\langle \beta \rangle_H$  есть наибольший в  $(\mathcal{P}(Z)^\Omega, \sqsubseteq)$   $\{H\}$ -неупреждающий мультиселектор  $\beta$ .*

Из леммы 2, в частности, получим  $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}) = \mathbf{N}_{(\mathcal{H}_\Delta)}$ , где  $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta})$  — множество всех общих неподвижных точек семейства  $\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}$ . Обозначим  $\text{ITER}_\sigma[\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}](\alpha)$  — множество значений композиций степени не более  $\sigma$  (далее  $\sigma$  — произвольный ординал мощности большей, чем мощность множества  $\mathcal{P}(Z)^\Omega$ ) операторов из  $\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}$  на м/ф  $\alpha$  (см. [3, п. 2]). Из леммы 2, следуя рассуждениям из [3, теорема 2.1, следствие 2.1], получим

**Теорема.** *При указанных условиях выполняется равенство*

$$\{\top_{\mathbf{N}_{(\mathcal{H}_\Delta)[\alpha]}}\} = \mathbf{Fix}(\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}) \cap \text{ITER}_\sigma[\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}](\alpha).$$

Понятно, что в общем случае приведенное представление искомого мультиселектора малоэффективно. Вместе с тем, например, при коммутативности семейства  $\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}$ , правая часть этого равенства преобразуется к выражению  $\langle \dots \langle \alpha \rangle_{H_1} \dots \rangle_{H_{n_\Delta}}$  с конечным числом применений операторов из  $\mathbf{F}_{\mathcal{H}_\Delta}$ , оставляя возможности исследования и построения искомой м/ф.

1. Серков Д.А., Ченцов А.Г. К построению неупреждающего селектора многозначного отображения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. С. 232–246.
2. Gomyunov M.I., Serkov D.A. On guarantee optimization in control problem with finite set of disturbances // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2021. Vol. 31, issue 4, pp. 613–628.

3. Сергов Д.А. Об одном представлении множества разрешимости в задаче удержания // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. С. 290–298.

## Об усреднении аппроксимаций решений для задачи динамической реконструкции управлений

Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН, УрФУ*

e-mail: subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

Доклад посвящен развитию нового метода решения задачи динамической реконструкции управлений (ЗДРУ) для динамических управляемых систем, предложенного [1, 2] авторами доклада. Под ЗДРУ понимается задача построения аппроксимаций неизвестного управления, которое порождает наблюдаемую траекторию динамической системы. Роль входных данных играют неточные дискретные замеры наблюдаемой траектории.

В докладе рассматриваются детерминированные управляемые системы, аффинные по управлениям. Допустимые управления — измеримые функции, значения которых ограничены известным выпуклым компактом.

Необходимо заметить, что задача аппроксимации неизвестного управления некорректна, так как одна и та же траектория может порождаться не единственным допустимым управлением. Поэтому вводится понятие нормального управления — измеримого управления, порождающего наблюдаемую траекторию и имеющего минимальную норму в пространстве  $L^2$ . Показано [2], что при типичных предположениях о входных данных для любой траектории, порожденной допустимым управлением, существует единственное нормальное управление. Под ЗДРУ подразумевается задача реконструкции именно нормального управления.

Авторами доклада предложен новый метод [1, 2] решения

ЗДРУ, опирающийся на нахождение стационарных точек регуляризованного [3] интегрального функционала невязки во вспомогательных вариационных задачах. Отличительная особенность подхода — использование невыпуклых (выпукло-вогнутых) функционалов.

Заметим, что аппроксимации нормального управления, построенные с помощью метода [1, 2], вообще говоря, не являются допустимыми управлениями. Это равномерно (по параметрам аппроксимации) ограниченные кусочно-непрерывные функции. Однако, не гарантируется, что их значения будут принадлежать компакту, ограничивающему значения допустимых управлений.

В докладе описывается модификация метода [1, 2], позволяющая строить допустимые аппроксимации нормального управления.

**Постановка ЗДРУ.** Наблюдается некоторая траектория  $x^*(\cdot): [0, T] \rightarrow R^n$  динамической управляемой системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \\ x &\in R^n, \quad u \in U \subset R^m, \quad m \geq n, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где  $x(\cdot)$  — вектор фазовых переменных,  $u(\cdot)$  — вектор управлений,  $T < \infty$ ,  $U$  — выпуклый компакт. Наблюдаемая траектория порождается неизвестным допустимым управлением.

Роль входных данных играют неточные дискретные замеры наблюдаемой траектории

$$\{y_k^\delta, k = 0, \dots, N, N = \lceil T/h^\delta \rceil\} : \|y_k^\delta - x^*(t_k)\| \leq \delta.$$

Они имеют погрешность  $\delta > 0$  и поступают с шагом  $h^\delta > 0$  в моменты времени  $t_k = kh^\delta$ ,  $k = 0, \dots, N$ .

ЗДРУ ставится следующим образом: для известных параметров  $\delta$  и  $h^\delta$  и наборов замеров  $\{y_i^\delta\}$  построить кусочно-непрерывные управления  $u^\delta(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^m$ , равномерно ограниченные по  $\delta$  и  $h^\delta$ , такие, что при стремлении к нулю параметров  $\delta$  и  $h^\delta$  эти управления сходятся слабо со звездой к нормальному управлению, а траектории системы (1), порожденные этими управлениями, сходятся равномерно к наблюдаемой траектории  $x^*(\cdot)$ .

В работах [1, 2] разработан и обоснован пошаговый алгоритм решения ЭДРУ. На каждом шаге алгоритма (т.е. на отрезке времени  $[t_{k-1}, t_k]$ ) используются вспомогательные конструкции из задачи на поиск стационарных точек выпукло-вогнутых функционалов. Во вспомогательных задачах используются гладкие интерполяции дискретных замеров наблюдаемой траектории.

Модификация этого алгоритма, предложенная в данном докладе, отличается от исходной тем, что вводится процедура усреднения аппроксимаций, позволяющая получить из ограниченных кусочно-непрерывных аппроксимаций допустимые кусочно-постоянные. Более того, показано, что построенные усредненные аппроксимации управлений сходятся к искомому нормальному управлению поточечно.

Работа новой модификации алгоритма может быть продемонстрирована на примере следующей динамики:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{S}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) & -\frac{X(t)}{S_F V} \\ -\frac{X(t)}{Y_{X/S}} & \frac{S_F - S(t)}{S_F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(t) \\ U(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \frac{X(t)}{Y_{P/S}} - \frac{S(t)X(t)}{K_m + S(t)} \end{pmatrix}.$$

Это упрощенная модель ферментации пенициллина в организме [4]. Здесь фазовые переменные  $X(\cdot)$  и  $S(\cdot)$  — это содержание препарата и продуктов реакций в организме, а управления  $U(\cdot)$  и  $\mu(\cdot)$  — подача препарата в организм и рост биомассы (неизвестный медицинский параметр организма, формально принятый за управление).

На основании полученных численным способом замеров одной траектории этой системы были построены аппроксимации нормального управления  $\mu(\cdot)$  по модифицированному и немодифицированному алгоритму [1, 2]. Результаты представлены на Рис. 1 (немодифицированный метод) и Рис. 2 (модифицированный метод).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

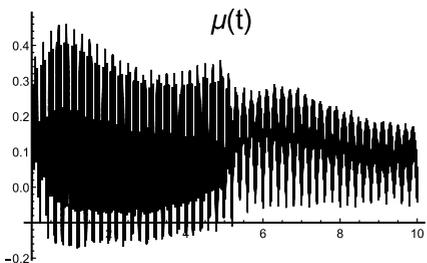


Рис. 1: Аппроксимация нормального управления, полученная немодифицированным методом.

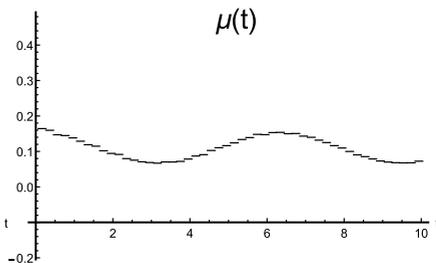


Рис. 2: Аппроксимация нормального управления, полученная модифицированным методом.

1. *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 208–220.
2. *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2021. Т. 315. С. 247–260.
3. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач. // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
4. *Zhai C., Qiu T., Palazoglu A., Sun W.* The emergence of feedforward periodicity for the fed-batch penicillin fermentation process // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32, pp. 130–135.

## О динамическом восстановлении входа в системе дробного порядка при измерении части фазовых координат

П. Г. Сурков

Екатеринбург, ИММ УрО РАН

e-mail: platon.surkov@gmail.com

Различные постановки задач идентификации возникают в прикладных исследованиях и зачастую играют ключевую роль. Например, если при эволюционном развитии процесса не все его

параметры и характеристики доступны для наблюдения, что является достаточно распространенной ситуацией в действительности, то требуется восполнение недостающей информации. Такая проблематика широко представлена в исследованиях, связанных с математическим моделированием в информационных технологиях (восстановление изображений), экологии (оценка влияния источника загрязнения на окружающую среду), медицине (процесс распространения и лечения вирусных заболеваний в одном организме и популяции в целом) и других областях.

Наиболее распространены апостериорные постановки задач идентификации, которые имеют богатую историю изучения и значительное число методов решения (см., например, [1]). Часто используемые алгоритмы в прикладных исследованиях основаны на привлечении сплайнов, конечно-разностной аппроксимации с подходящей сеткой и другим видам аппроксимаций. Увеличение числа точек разбиения при наличии погрешности не приводит к уточнению результата, поэтому для избежания подобных ситуаций в настоящей работе предлагается адаптивный, работающий по принципу обратной связи, алгоритм.

Основной мотивацией работы является распространение метода динамического обращения [2] на более общий класс систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка. Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка

$$[D_*^\gamma x_1](t) = g_1(t, x_1(t)) + C_1 x_2(t), \quad (1)$$

$$[D_*^\gamma x_2](t) = g_2(t, x_1(t), x_2(t)) + C_2 u(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

где  $x = \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор ( $x_1 \in \mathbb{R}^{\kappa_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{\kappa_2}$ ),  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  — неизвестное входное воздействие (возмущение), матрицы  $C_1$  и  $C_2$  размерностей  $\kappa_1 \times \kappa_2$  и  $\kappa_2 \times m$  соответственно, функции  $g_1: T \times \mathbb{R}^{\kappa_1} \rightarrow \mathbb{R}^{\kappa_1}$  и  $g_2: T \times \mathbb{R}^{\kappa_1} \times \mathbb{R}^{\kappa_2} \rightarrow \mathbb{R}^{\kappa_2}$  удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных. Система (1), (2) функционирует на конечном интервале времени  $T := [\sigma, \theta]$ . Здесь  $[D_*^\gamma x](t)$ ,  $t \in T$ , обозначает дробную производную Капуто [3, с. 91] функции  $x(\cdot)$  порядка  $\gamma \in (0, 1)$ .

Траектория системы (1), (2) определяется переменным внешним воздействием  $u(\cdot)$ , но ее реализация и воздействие  $u(\cdot)$  неизвестны заранее. Однако, одновременно с функционированием системы (1), (2), доступны для измерения с некоторой погрешностью ее  $\kappa_1$  координат. В результате измерений имеем векторы  $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^{\kappa_1}$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\|\xi^h(t) - x_1(t)\|_{\kappa_1} \leq h, \quad t \in T,$$

где  $h \in (0, 1)$  — погрешность измерений. Начальные условия предполагаются известными точно:  $x_1(\sigma) = x_{1\sigma}$ ,  $x_2(\sigma) = x_{2\sigma}$ .

Рассматриваемая задача состоит в том, чтобы найти специальную процедуру восстановления, работающую по принципу обратной связи, результат работы которой аппроксимировал бы неизвестное возмущение и формировался по результатам неточных непрерывных измерений части имеющихся фазовых координат. Построенная таким образом аппроксимация возмущения должна быть нечувствительна к информационным шумам и вычислительным ошибкам.

Действие предлагаемой процедуры представлено двумя блоками восстановления, работающими одновременно. Первый блок нацелен на восстановление ненаблюдаемой координаты  $x_2$ . Информация, полученная в результате его работы, передается на второй блок, который, в свою очередь, формирует некоторую аппроксимацию  $u(\cdot)$  по принципу обратной связи. Введем вспомогательную систему (модель) вида

$$[D_*^\gamma w_1](t) = g_1(t, \xi^h(t)) + C_1 \psi^h(t), \quad (3)$$

$$[D_*^\gamma w_2](t) = g_2(t, \xi^h(t), \psi^h(t)) + C_2 v^h(t), \quad t \in T, \quad (4)$$

с начальными условиями  $w_1(\sigma) := x_{1\sigma}$ ,  $w_2(\sigma) := x_{2\sigma}$ . Далее, фиксируются некоторые функции  $\alpha(h)$ ,  $\alpha: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  и  $\delta(h)$ ,  $\delta: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ . Тогда работа первого блока восстановления включает в себя систему (3) и правило аппроксимации ненаблюдаемой координаты  $w_2$  вида

$$\psi^h(t) = (\alpha(h))^{-1} C_1^\top (\xi^h(t) - w_1(t)), \quad t \in T.$$

Второй блок восстановления соответствует системе (4) и использует следующее правило формирования управления:

$$v^h(t) = (\delta(h))^{-1} C_2^\top (\psi^h(t) - w_2(t)), \quad t \in T.$$

Введем множество  $U(x(\cdot))$  всех управлений, порождающих движение  $x(\cdot)$ , по формуле

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}^m) : \\ x(t) = x_\sigma + [I^\gamma(g(\cdot, x(\cdot)) + C_2 u(\cdot))](t), \quad \forall t \in T\}.$$

Определим элемент  $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$  как элемент минимальной  $L_2(T, \mathbb{R}^m)$ -нормы в  $U(x(\cdot))$ . Поскольку множество  $U(x(\cdot))$  выпукло и замкнуто в  $L_2(T, \mathbb{R}^m)$ , то элемент  $u_*(\cdot)$  существует и единственен.

**Теорема.** Пусть функция  $u(\cdot)$  имеет ограниченную вариацию на  $T$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\det C_1 \neq 0$ , и пусть функции  $\alpha: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ ,  $\delta: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  и постоянные  $\beta_1, \beta_2 \in (0, 2)$  и  $\beta_3, \beta_4 \in (0, \mu)$  таковы, что выполнены соотношения

- (a)  $\alpha(h) \rightarrow 0$ ,  $(\alpha(h))^{-2} h^{\beta_2} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ;
- (b)  $(\alpha(h))^{-1} h^\lambda \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , где  $\lambda := \min\{\beta_1, 2 - \beta_1, 2 - \beta_2\}$ ;
- (c)  $\alpha(h) h^{-\beta_3} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , где  $\mu := \min\{1, 2 - \beta_1, 2 - \beta_2\}$ ;
- (d)  $\delta(h) \rightarrow 0$ ,  $(\delta^2(h))^{-1} \pi^{\frac{3}{2}}(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , где  $\pi(h) := h^\rho + \alpha(h) h^{-\beta_3} + (\alpha(h))^{-1} h^\lambda$ ,  $\rho := \min\{\beta_1, \beta_3, \mu - \beta_3\}$ ;
- (e)  $(\delta(h))^{-1} \eta(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , где  $\eta(h) := h + \pi^{\frac{1}{2}}(h) + (\delta(h))^{-2} \pi^{\frac{3}{2}}(h)$ ;
- (f)  $\alpha(h) h^{-\beta_4} \rightarrow 0$ ,  $\pi(h) h^{-\beta_4} \rightarrow 0$ ,  $\eta(h) h^{-\beta_4} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Тогда  $v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot)$  в  $L_2(T, \mathbb{R}^m)$  при  $h \rightarrow 0$ .

Доказательство этого утверждение может быть проведено по схеме [4].

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Осипов Ю.С., Кряжисмский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2011.
3. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.
4. *Surkov P.G.* Real-time reconstruction of external impact on fractional order system under measuring a part of coordinates // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. Vol. 381. 113039.

## Линейная интерполяция программного управления по параметру

**В. Н. Ушаков, А. А. Ершов**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: ushak@imm.uran.ru, ale10919@yandex.ru

Рассматривается задача перевода состояния управляемой системы  $\Sigma$  из начальной точки  $x(t_0) = x^{(0)}$  на целевое множество  $M$  в заданный момент времени  $\vartheta$  с помощью программного управления. В полностью детерминированной ситуации данная задача была исследована, например, в [1]. Однако, в данном случае предполагается, что управляемая система содержит заранее неопределённый постоянный параметр  $\alpha$ . В соответствии с [2] решение такой задачи состоит из трех этапов: сбор информации о системе, применения этой информации для устранения неопределённости и, наконец, переход к активному управлению. Мы рассматриваем ситуацию, возникающую, когда неопределённый параметр уже восстановлен, но уже нет времени на построение разрешающего управление [3, 4]. Таким образом, постановка задачи состоит в заблаговременном построении и последующем компактном хранении разрешающих программных управлений при всех значениях постоянного параметра  $\alpha$  из множества его возможных значений

$\mathcal{L} = [a, b]$ . В отличие от известных авторов методов, предлагаемый подход применим в ситуации, когда после приближённого восстановления неопределённого параметра наблюдение за системой не ведётся.

В качестве разрешающего управления предложено программное управление, которое вычисляется как линейная интерполяция узловых управлений, соответствующих значениям параметра  $\alpha$  в точках разбиения множества  $\mathcal{L} = [a, b]$ . Эти узловые управления построены по методу экстремального прицеливания Н.Н. Красовского, т.е. каждому из них соответствует набор точек, прокладываемый ориентировочный путь к целевому множеству  $M$ , так называемый «поводырь». На каждом отрезке разбиения  $\mathcal{L}$  разрешающее управление состоит из выпуклых линейных комбинаций узловых управлений, соответствующих одному и тому же поводырю, но разным значениям параметра  $\alpha$ . Применяя метод разделения управления на основное и компенсирующее [5, 6], удаётся не только повысить точность, но и построить такие узловые управления.

Для данной схемы доказана оценка погрешности перевода движения управляемой системы на целевое множество, имеющая второй порядок точности относительно диаметра разбиения множества  $\mathcal{L}$  [7].

Исследование выполнено за счёт средств гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00105), <https://rscf.ru/project/19-11-00105/>.

1. Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. К решению задач о сближении управляемых систем // Труды МИАН. 2015. Т. 291. С. 276–291.
2. Никольский М.С. Об одной задаче управления с неполностью известным начальным условием // Прикладная математика и информатика. 2016. Т. 51. С. 16–23.
3. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределённый параметр // Математический сборник. 2017. Т. 208, № 9. С. 56–99.
4. Ушаков В.Н., Ершов А.А. О восстановлении неопределённого постоянного параметра несколькими пробными управлениями // Уфимский математический журнал. 2020. Т. 12, № 4. С. 101–116.

5. Ushakov V.N., Ershov A.A. Application of correcting control in the problem with unknown parameter // In: *Stability, Control and Differential Games, Proceedings of the International Conference "Stability, Control, Differential Games" (SCDG2019)*. Springer, Cham. 2020. P. 225–237.
6. *Ершов А.А., Ушаков А.В., Ушаков В.Н.* Задача о сближении управляемой системы с компактом в фазовом пространстве при наличии фазовых ограничений // Математический сборник. 2019. Т. 210, № 8. С. 29–66.
7. Ершов А.А. Интерполяция программного управления по параметру в задаче о сближении // Проблемы математического анализа. 2022. Вып. 113. С. 17–37.

## **Некоторые задачи наведения управляемых систем на целевые множества в евклидовых пространствах**

**В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, А. В. Ушаков**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: ushak@imm.uran.ru, ale10919@yandex.ru, aushkov.pk@gmail.com

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, зависящая от параметра. Изучаются множества достижимости и интегральные воронки дифференциального включения, соответствующего управляемой системе. Тематика доклада имеет непосредственное отношение к ряду задач управления и дифференциальных игр, в которых имеются параметры. В частности, она имеет отношение к задачам о сближении в дифференциальных играх, в которых множества разрешимости описываются ключевым свойством стабильности на языке унификационных динамических систем [1–6]. В докладе обсуждается зависимость множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений от параметра: оценивается степень этой зави-

симости от параметра, изучаются задачи о покрытии компактных целевых множеств в конечномерных евклидовых пространствах интегральными воронками дифференциальных включений. Приводится пример.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).

1. *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
2. *Куржанский А.Б.* Избранные труды. М.: Изд-во МГУ. 2009.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974.
4. *Черноузько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
5. *Никольский М.С.* ОБ оценке изнутри множества достижимости нелинейного интегратора Р. Брокитта // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 96, № 11. С. 1501–1505.
6. *Гусев М.И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 82–94.

## **О тотально глобальной разрешимости существенно нелинейного волнового уравнения**

**А. В. Чернов**

*Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского,*

*ННГТУ им. Р.Е. Алексеева*

e-mail: [chavnn@mail.ru](mailto:chavnn@mail.ru)

Введем определение тотальной глобальной разрешимости управляемой системы.

**Определение.** *Тотально глобальная разрешимость* (ТГР) — это свойство управляемой системы сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. Синоним: *тотальное сохранение глобальной разрешимости* [1].

Пусть  $T > 0$ ,  $\rho \geq 0$  — заданные числа,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область переменных  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $Q = \Omega \times (0; T)$ ,  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $\tilde{V} = L_2(\Omega)$ ,  $V_0 = H_0^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ ,  $x_0 \in V_0$ ,  $x_1 \in \tilde{V}$ ,  $z \in L_2(Q) = L_2(0, T; \tilde{V})$ . Следуя [2, § 1.3], рассмотрим задачу в цилиндре  $Q$ :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta x + |x|^\rho x = z, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{\partial x}{\partial t}(0) = x_1, \quad x|_{\partial\Omega \times (0; T)} = 0. \quad (2)$$

Положим  $\mathbf{C}(0, T; V)$  — пространство функций со значениями в  $V$ , непрерывных на отрезке  $[0; T]$ ;  $W = \{x \in L_\infty(0, T; V) : x' \in L_\infty(0, T; \tilde{V})\}$ ,  $\|x\|_W = \|x\|_{L_\infty(0, T; V)} + \|x'\|_{L_\infty(0, T; \tilde{V})}$ . Имеем:  $W \subset \mathbf{C}(0, T; \tilde{V})$  непрерывно [3, глава IV, § 1, лемма 1.11, с.173]. Аналогично [3, глава IV, § 1, теорема 1.16, с.173], устанавливается, что  $W$  — банахово пространство.

Начальные условия  $x_0, x_1$  будем считать фиксированными. Непосредственно из [2, § 1.3, теорема 1.1, с.20; § 1.5, теорема 1.2, с.27] вытекает

**Лемма 1.** *Если  $\rho \leq \frac{2}{n-2}$  (при  $n = 2$ :  $\rho \in [0; +\infty]$ ), то задача (1), (2) имеет единственное решение  $x = x[z] \in W$ .*

**Замечание.** В [2, § 1.3, теорема 1.1] существование решения доказывается в пространстве

$$W_0 = \{x \in L_\infty(0, T; V_0) : x' \in L_\infty(0, T; \tilde{V})\}.$$

Но, как видно из доказательства [2, § 1.5, теорема 1.2], единственность решения устанавливается в пространстве  $W$ , а уже из этого следует единственность и в более узком пространстве  $W_0$ .

Далее будем считать, что  $\rho \leq \frac{2}{n-2}$ ,  $n \geq 3$ . В соответствии с леммой 1 определен оператор  $x = \mathcal{F}[z]: L_2(0, T; \tilde{V}) \rightarrow W$ . Можно показать, что оператор  $\mathcal{F}$  является вольтерровым в следующем смысле:  $\mathcal{F}[x](t) = \mathcal{F}[y](t)$  при  $t \in [0; \tau]$  для всех  $x, y \in L_2(0, T; \tilde{V})$ ,  $x(t) = y(t)$  при  $t \in [0; \tau]$ ,  $\tau \in (0; T]$ . Соответственно, если задан управляемый вольтерров оператор  $f[u]: W \rightarrow L_2(0, T; \tilde{V})$ , где  $u \in U$  — управление,  $U$  — некоторое множество допустимых управлений, то задача (2) для управляемого уравнения

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta x + |x|^\rho x = f[u](x), \quad (3)$$

переписывается в виде операторного уравнения второго рода:

$$x = \mathcal{F}(f[u](x)), \quad x \in W.$$

Далее будем считать, что область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  есть объединение конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно своего шара;  $H = L_r(\Omega)$  при  $r \in \left[2; \frac{2n}{n-2}\right)$ . Эти предположения позволяют установить компактные вложения:  $V \subset H$ ,  $W \subset L_2(0, T; H)$ .

В соответствии с [2, глава 1, § 1.4, с. 22] определим билинейную форму

$$a(x, y) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} d\xi, \quad x, y \in V.$$

Как указано в [2, глава 1, § 1.4, с. 23],  $\|x\|_a = \sqrt{a(x, x)}$  — эквивалентная норма в  $V$ . Положим:  $\|\cdot\|_{\tilde{V}} = |\cdot|$ ,  $V_a$  — пространство  $V$  с нормой  $\|\cdot\|_a$ .

Установим некоторые свойства оператора  $\mathcal{F}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\gamma_0 = \|x_0\|_a^2 + |x_1|^2 + \frac{2}{\rho+2} \|x_0\|_{L_{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}$ ,  $z \in L_2(0, T; \tilde{V})$ ,  $x = \mathcal{F}[z]$ . Тогда

$$\|x(t)\|_a^2 + |x'(t)|^2 \leq e^t \left( \gamma_0 + \int_0^t |z(s)|^2 ds \right)$$

для всех  $t \in [0; T]$ .

**Доказательство** нетрудно получить на основе рассуждений при доказательстве [2, § 1.3, теорема 1.1].

Так как нормы  $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_V$  эквивалентны, найдется константа  $\kappa_1 > 0$  такая, что  $\|\cdot\|_V \leq \kappa_1 \|\cdot\|_a$ . Кроме того, учитывая непрерывное (и более того, компактное) вложение  $V \subset H$ , существует константа  $\kappa_2 > 0$  такая, что  $\|\cdot\|_H \leq \kappa_2 \|\cdot\|_V$ . Таким образом, непосредственно из леммы 2 получаем:

$$\|x(t)\|_H \leq \kappa_1 \kappa_2 e^{t/2} \sqrt{\gamma_0 + \|z\|_{L_2(0,t;\tilde{V})}^2} \equiv L_1(t, \|z\|_{L_2(0,t;\tilde{V})}).$$

Кроме того, из леммы 2 нетрудно получить оценку:

$$\|x\|_{W[0;t]} \leq 2\kappa_1 e^{t/2} (\sqrt{\gamma_0} + \|z\|_{L_2(0,t;\tilde{V})}).$$

Отсюда ясно, что оператор  $\mathcal{F} : L_2(0, T; \tilde{V}) \rightarrow W$  ограничен.

**Лемма 3.** *Найдется  $c > 0$ : для всех  $z_i \in L_2(Q)$ ,  $x_i = \mathcal{F}[z_i]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \in [0; T]$  имеем:  $\|x_1 - x_2\|_{L_\infty(0,t;V_a)} \leq 2e^{ct} \int_0^t |z_1(s) - z_2(s)| ds$ .*

**Доказательство** получается очевидной компиляцией рассуждений из доказательства [2, глава 1, § 1.5, теорема 1.2] с учетом леммы Гронуолла. Отсюда

$$\|x_1 - x_2\|_{L_\infty(0,t;H)} \leq 2\kappa_1 \kappa_2 e^{ct} \int_0^t |z_1(s) - z_2(s)| ds.$$

Таким образом,  $\mathcal{F}$  как оператор  $L_2(0, T; \tilde{V}) \rightarrow L_\infty(0, T; H)$  непрерывен.

Итак, мы установили выполнение следующих свойств:

**A<sub>1</sub>**) оператор  $\mathcal{F} : L_2(0, T; \tilde{V}) \rightarrow W$  ограничен, и кроме того, непрерывен как отображение  $L_2(0, T; \tilde{V}) \rightarrow L_2(0, T; H)$ ;

**A<sub>2</sub>**) при произвольных  $t \in (0; T]$ ,  $z \in L_2(0, t; \tilde{V})$ , и  $x = \mathcal{F}_{[0;t]}[z]$ , имеем:  $\|x(t)\|_H \leq L_1(t, \|z\|_{L_2(0,t;\tilde{V})})$ , где функция  $L_1(t, M)$  непрерывна по  $t \in [0; T]$  и не убывает по  $M \geq 0$ .

Относительно оператора  $f[u]$  сделаем следующие предположения:

**F<sub>1</sub>)** для всякого  $u \in U$  оператор  $f[u]: L_2(0, T; H) \rightarrow L_2(0, T; \tilde{V})$  ограничен и непрерывен;

**F<sub>2</sub>)** для всех  $u \in U$ ,  $x \in L_2(0, T; H)$ ,  $t \in [0; T]$ ,  $\|x(s)\|_H \leq \beta(s)$  при  $s \in [0; T]$ , имеем:  $\|(f[u]x)(s)\|_{\tilde{V}} \leq \mathcal{N}_1[\beta](s)$ ,  $s \in [0; t]$ ,  $\mathcal{N}_1[\beta] \in L_2[0; T]$ .

**Теорема.** *Предположим, что функционально-интегральное неравенство*

$$L_1\left(t, \|\mathcal{N}_1[\beta]\|_{L_2(0,t;\tilde{V})}\right) \leq \beta(t), \quad t \in [0; T],$$

*имеет решение  $\beta \in \mathbf{C}[0; T]$ . Тогда  $\forall u \in U$  задача (3), (2) имеет по крайней мере одно решение  $x = x[u] \in W$ :  $\|x(t)\|_H \leq \beta(t)$ ,  $t \in [0; T]$ .*

1. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
3. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

## **Задача управления гармоническим осциллятором малой массы с дешевым управлением в среде без сопротивления**

**А. А. Шабуров**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: alexandershaburov@mail.ru

В работе рассматриваются две задачи оптимального управ-

ления линейными системами [1, 2, 3] с постоянными коэффициентами с медленными переменными [4, 5, 6] на конечном временном промежутке с дешевым управлением и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Рассматриваемая система не удовлетворяет стандартному условию устойчивости присоединенной системы. Поэтому результаты А.Б. Васильевой [7] неприменимы. Тем не менее, линейная система удовлетворяет условию вполне управляемости. Среди работ, посвященных сингулярно возмущенным задачам управления, такие задачи называются задачами с «дешевым» управлением (см., например, обзор [6]), поскольку характеризуются близостью к вырожденной задаче в смысле принципа максимума Понтрягина. Но (см., например, статьи [8, 9]) в работах при рассмотрении линейно-квадратичных задач строится асимптотика решения только при условии отсутствия ограничений на оптимальное управление. При одинаковых условиях на управляемую систему для задачи с интегральным выпуклым критерием качества получились степенные разложения в смысле Эрдейи по сложной системе функций [10, Definition 2.4].

**Теорема.** Пусть рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, & t \in [0, T], & \|u_\varepsilon\| \leq 1, \\ \varepsilon \cdot \dot{y}_\varepsilon = -x_\varepsilon + u_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = x_0, & y_\varepsilon(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_\varepsilon, y_\varepsilon$  — медленные и быстрые переменные, а  $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  — вектор управления, с интегральным выпуклым критерием качества:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) := \frac{1}{2} \|x_\varepsilon(T)\|^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{N}/\{1\}. \quad (2)$$

Тогда вектор  $l_\varepsilon$  есть единственное решение уравнения

$$-l_\varepsilon = \cos\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}\right) x^0 + \sqrt{\varepsilon} \sin\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}\right) y^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) l_\varepsilon}{S_\varepsilon\left(\left\|\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) l_\varepsilon\right\|\right)} dt,$$

где

$$S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 \leq \xi \leq \varepsilon^\alpha, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^\alpha, \end{cases}$$

и при  $\varepsilon \rightarrow +0$  раскладывается в асимптотический ряд по  $\varepsilon^{k/2}$  в смысле Эрдейи [10, Definition 2.4]. Причем ограничение на управление в задаче (1), (2) не по существу.

**Замечание.** Пусть рассматривается следующая задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, & t \in [0, T], & \|u_\varepsilon\| \leq 1, \\ \varepsilon \cdot \dot{y}_\varepsilon = x_\varepsilon + u_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = x_0, & y_\varepsilon(0) = y_0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $x_\varepsilon, y_\varepsilon$  — медленные и быстрые переменные, а  $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  — вектор управления, с интегральным выпуклым критерием качества (2).

Тогда вектор  $l_\varepsilon$  есть единственное решение уравнения

$$\begin{aligned} -l_\varepsilon = & \cosh\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}\right) x^0 + \sqrt{\varepsilon} \sinh\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}\right) y^0 + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{\sinh^2\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) l_\varepsilon}{S_\varepsilon\left(\left\|\sinh\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) l_\varepsilon\right\|\right)} dt, \end{aligned}$$

где

$$S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 \leq \xi \leq \varepsilon^\alpha, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^\alpha, \end{cases}$$

и при  $\|x_0\| < 1/2$  ограничение в задаче (2), (3) не по существу, но при  $\|x_0\| > 1/2$  ограничение в задаче (2), (3) по существу.

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

4. *Дончев А.* Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
5. *Kokotovic P. V., Haddad A. H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1, pp. 111–113.
6. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
8. *Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.* Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 4. С. 601–612.
9. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Асимптотическое решение линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 124–139.
10. *Erdelyi A, Wyman M.* The asymptotic evaluation of certain integrals // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. Vol. 14, pp. 217–260.

## Об одной нелинейной задаче сближения с дискретным управлением

**К. А. Щелчков**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: incognitobox@mail.ru

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma(x_0)$  двух лиц. Динамика преследователя  $P$  описывается системой вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \quad x(0) = x_0,$$

где  $U = \{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^l$  — множество значений управления преследователя. Динамика убегающего  $V$  описывается системой

вида

$$\dot{y} = g(y, v), \quad v \in V, \quad y(0) = 0,$$

где  $V \subset \mathbb{R}^s$  — компакт — множество значений управления убегающего. Целью преследователя является сближение с убегающим за конечное время на сколь угодно малое наперед заданное расстояние. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию, для построения которой разрешается использовать только информацию о значении фазовых координат игроков в точках разбиения временного интервала. Убегающий использует кусочно-программную контрстратегию. Рассматривается возможность использования результатов работы [1], в которой исследуется задача преследования с нелинейной системой вида

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v).$$

Отметим, что рассматриваемая задача не сводится к задаче [1] с помощью замены.

Показано, что, используя некоторую вспомогательную конструкцию, теорема поимки [1], тем не менее, может быть использована для получения условий поимки в рассматриваемой задаче. Получен пример, в котором показано отличие полученной теоремы о поимке от теоремы [1].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010) и гранта РФФИ (проект 20-01-00293).

1. *Щелчков К.А.* Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 111–118.

---

---

## ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

### On the properties of invariants of the surfaces isometric on sections

**A. S. Sharipov**

*Tashkent, National university of Uzbekistan, Uzbekistan*

e-mail: asharipov@inbox.ru

**F. F. Topvoldiyev**

*Fergana, Fergana state university, Uzbekistan*

e-mail: ftopvoldiev87@mail.ru

In modern differential geometry, one of the main problems is the restoration of surfaces according to given geometric characteristics. The geometric characteristics can be intrinsic curvature, extrinsic or Gaussian curvatures, and other features associated with the surface. The problem of restoring the surface by geometric characteristics of the geometry “in large” is considered in the works of A.D. Aleksandrov, A.V. Pogorelov and their students [1].

In one of the directions differential geometry, the properties of geometric objects are studied along their entire range, which is called geometry “in large”. In 1813, O. Cauchy proved that two closed polyhedra, which are equally composed of congruent faces, are equal. This result is one of the first among the solved problems of geometry “in large”. Many problems in geometry “in large” are related to the isometry of surfaces. If the surfaces are isometric, you can select the coordinate lines so that the surfaces have the same metric. The map isometry on sections is a special case of the map isometry of foliated manifold, in other words, isometry on sections, each section of one surface is associated with a section of another surface.

As a result of seminal studies on geometry “in large”, a number of topical problems have been solved in recent years, in particular, the following series of results has been obtained: the existence and uniqueness theorems for pointwise slant immersions of Riemannian manifolds  $M^n$  into a complex space form  $\tilde{M}^n(c)$  of constant holomorphic sectional curvature have been established [2], new invariants such as arc-length, curvature and torsion with a fractional-order have been introduced, and the problem of reconstruction of the curve in terms of the new invariants has been solved [3], the geometric invariant properties of a normal curve on a smooth immersed surface under conformal transformation have been established [4].

In this paper we are studied the linear transformation of the space is considered invariant group. The transformation matrix is neither symmetric nor orthogonal. But the determinant is equal to one.

In three-dimensional Euclidean  $R^3$  space, consider the surface  $F$  and the non-zero vector  $\vec{e}$ , the surface  $F$  is intersected by all possible planes  $\pi^j$  perpendicular to the vector  $\vec{e}$ . The set of cross-section points is denoted by  $\gamma^j = F \cap \pi^j$ . The class of surfaces for which the section  $\gamma^j$  is homeomorphic to a segment, a straight line or a circle, we denote by  $W\{\vec{e}\}$ .

**Definition 1.** Surfaces  $F_1$  and  $F_2$  are called isometric on sections if there are directions  $\vec{e}_1$  and  $\vec{e}_2$  perpendicular to the given sections, and a homeomorphism  $f$  of the surfaces satisfies the following conditions:

- a) Points on the surface  $F_1$  that belong to the same sections are mapped to points that belong to the same section of the surface  $F_2$ . Images of points that lie on different sections lie on different sections;
- b) The distances between the planes containing curves  $\gamma^1$  and  $\gamma^2$  and the planes containing curves  $f(\gamma^1)$  and  $f(\gamma^2)$  are equal;
- c) The length of the arc of the curve  $\gamma \subset \pi^j$  between two points is equal to the length of the arc of the curve  $f(\gamma)$  between the corresponding points [5].

The isometry of surfaces does not follow isometry on section, and vice versa.

**Example 1.** Helicoid and catenoid

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = av, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{a^2 + u^2} \cos v, \\ y = \sqrt{a^2 + u^2} \sin v, \\ z = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{a}. \end{cases}$$

They are locally isometric, but there are no directions in which they are isometric on sections.

**Example 2.** Ellipsoid  $\frac{x^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 z^2}{a^2} = 1$  is isometric on sections with two respect  $\vec{e}_1\{1, 0, \lambda\}$  and  $\vec{e}_2\{1, 0, -\lambda\}$  to spheres with radius  $a$ , when  $|\lambda| < 1$ .

**Definition 2.** Let some set  $M$  be selected on a convex surface  $F$ . Let's take the unit sphere, the center which is at the origin. Let's draw through each point of the set  $M$  all possible reference planes to the surface  $F$ , we will postpone the unit vectors of the outer normals to these planes from the center of the sphere. The locus of ends of these normals is called the spherical image set  $M$ . Denote by the spherical image of the set  $M$  through  $M^*$ . Consider a cylinder whose guide circle is

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

and the generators are parallel to the vector  $\vec{i}$ . With the help of central projection, we will project area  $M^*$  onto a cylinder. The central projection of the set  $M^*$  on the cylinder is called the cylindrical image of the set  $M$  and denoted by  $M'$  [5].

**Theorem 1.** Let the surfaces  $F_1, F_2 \in W\{\vec{e}\}$  be given by the equations

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= u\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \\ \vec{r}_2 &= u\vec{i} + [\alpha u + y(u, v) \cos \varphi + z(u, v) \sin \varphi]\vec{j} + \\ &+ [\beta u - y(u, v) \sin \varphi + z(u, v) \cos \varphi]\vec{k}. \end{aligned}$$

Then they are isometric by sections and the areas of the corresponding cylindrical images that are equal to each other (where  $\vec{e} \parallel OX$ ).

Let us be given a convex surface  $z = f(x, y)$  ( $z \in W\{\vec{e}\}$ ) with an upward convexity projecting uniquely onto a region  $\Omega$  on a plane  $XOY$  and with a boundary  $\partial\Omega = \gamma$ . Let the distance from the highest point of the surface to the plane  $XOY$ , i.e. the height of the surface, be equal to  $h$ .

We give the following property of the cylindrical image of the surface.

**Theorem 2.** *Cylindrical image of the surface monotonically increasing function with respect to  $h$ .*

**Theorem 3.** *The area of a cylindrical image is a completely additive function of a set on a convex surface  $F \in W\{\vec{e}\}$ , defined for all Borel sets.*

1. *Shikin Ye.V.* Some questions of differential geometry “in large”. M.: Mir, 1996.
2. *Azeb Alghane mi, Noura M. Al-howiti, Bang-Yen Chen, Siraj Uddin.* Existence and uniqueness theorems for pointwise slant immersions in complex space forms // *Filomat*. 2021. Vol. 35:9, pp. 3127–3138.
3. *Muhittin Evren Aydin, Mehmet Bektas, Alper Osman Ogrenmis, Asif Yokus.* Differential Geometry of Curves in Euclidean 3-Space with Fractional Order // *International electronic journal of geometry*. 2021. Vol. 14, no. 1, pp. 132–144.
4. *Lone M.S.* Geometric Invariants of Normal Curves under Conformal Transformation in  $E^3$  // *Tamkang journal of mathematics*. 2022. Vol. 53, no. 1, pp. 75–87.
5. *Sharipov A.S., Topvoldiyev F.F.* On some properties of surface with isometric on sections // *Bulletin of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Uzbekistan*. 2021. Vol. 4, no. 1, pp. 11–15.

## О полукольце непрерывных частичных числовых функций, рассматриваемом с расширенным сложением. II

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

Киров, Вятский государственный университет

e-mail: vecht@mail.ru, shishkina.en@mail.ru

Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $C(X)$  — кольцо всех непрерывных действительныхзначных функций на  $X$  с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций,

$$CP(X) = \bigcup \{C(Y) : Y \text{ — открыто-замкнутое множество в } X\}.$$

Через  $D(f)$  обозначим область определения частичной функции  $f$  из  $X$  в  $\mathbb{R}$ .

На множестве  $CP(X)$  зададим операции сложения и умножения частичных функций поточечно. Именно, для  $f, g \in CP(X)$  положим:

$$\begin{aligned} D(f + g) &= D(f) \cup D(g), \\ (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \text{ при } x \in D(f) \cap D(g), \\ f + g &= f \text{ на } D(f) \setminus D(g) \text{ и } f + g = g \text{ на } D(g) \setminus D(f); \\ D(fg) &= D(f) \cap D(g) \text{ и } (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ при } x \in D(f) \cap D(g). \end{aligned}$$

Относительно введенных операций  $CP(X)$  становится коммутативным полукольцом с нулем  $\emptyset$  (пустая частичная функция) и единицей (функция-константа 1 на  $X$ ). Если топологическое пространство  $X$  связно, то  $CP(X) = C(X) \cup \{\emptyset\}$ . Если пространство  $X$  дискретно [2], то  $CP(X)$  будет полукольцом всех частичных  $\mathbb{R}$ -значных функций на  $X$ .

*Полукольцом* называется алгебраическая структура  $\langle S, +, \cdot \rangle$  такая, что  $\langle S, + \rangle$  — коммутативный моноид с нулем 0,  $\langle S, \cdot \rangle$  — моноид с единицей 1, умножение  $\cdot$  дистрибутивно относительно

сложения  $+$  с обеих сторон и  $0$  является поглощающим элементом по умножению [8].

Данная заметка является продолжением публикации [4], в которой дано описание максимальных идеалов и максимальных конгруэнций в полукольцах  $CP(X)$ . Изучение полуколец непрерывных частичных функций начато в работах [3], [5, глава 8].

Напомним [6], что топологическое пространство называется *тихоновским* (*хьюиттовским*), если оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) прямой степени числовой прямой  $\mathbb{R}$ . Хаусдорфово пространство называется *нульмерным*, если открыто-замкнутые множества составляют его открытую базу. В исследовании полуколец  $CP(X)$  наиболее содержателен случай нульмерных пространств  $X$ .

Подполукольцо  $A$  полукольца  $CP(X)$  называется *подалгеброй*, если  $A$  выдерживает умножение на числа из  $\mathbb{R}$ . Пустое множество  $\emptyset$  также считаем подалгеброй в  $CP(X)$ .

Через  $\beta X$  обозначается компактификация Стоуна–Чеха тихоновского пространства  $X$ . Замыкание в  $\beta X$  множества  $Y \subseteq \beta X$  обозначим как  $[Y]$ . Для точек  $p \neq q$  из  $\beta X$  положим:

$$M^p = \{f \in CP(X) : p \in [f^{-1}(\{0\})] \text{ или } p \notin [D(f)]\} - \text{идеал в полукольце } CP(X),$$

$$A^q = \{f \in CP(X) : q \in [D(f)]\}, A^{pq} = M^p \cup A^q - \text{подалгебры в } CP(X).$$

Если  $p, q \in X$  и  $p \neq q$ , то

$$M^p = M_p = \{f \in CP(X) : f(p) = 0 \text{ или } p \notin D(f)\},$$

$$A^q = A_q = \{f \in CP(X) : q \in D(f)\},$$

$$A^{pq} = A_{pq} = \{f \in CP(X) : f(p) = 0 \text{ или } p \notin D(f) \text{ или } q \in D(f)\}.$$

**Теорема 1.** *Для любого тихоновского пространства  $X$  подалгебры вида  $A^{pq}$ ,  $p \neq q$  из  $\beta X$ , являются максимальными подалгебрами полукольца  $CP(X)$ .*

Отметим, что простейшее полукольцо  $CP(\{0\}) = \mathbb{R} \cup \{\emptyset\}$  имеет 6 подалгебр:  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$ ,  $\{0\}$ ,  $\{\emptyset, 0\}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \cup \{\emptyset\}$ , причем,  $\{\emptyset, 0\}$ ,  $\mathbb{R}$ , — максимальные подалгебры.

**Теорема 2.** Для  $n$ -элементного дискретного топологического пространства  $X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) справедливы следующие утверждения:

- 1) решетка всех идеалов полукольца  $CP(X)$  есть прямое произведение  $n$  трехэлементных цепей, значит, содержит  $3^n$  элементов;
- 2) решетка всех конгруэнций полукольца  $CP(X)$  есть прямое произведение  $2n$  двухэлементных цепей, стало быть, содержит  $4^n$  элементов;
- 3) максимальные подалгебры полукольца  $CP(X)$  суть в точности подалгебры  $A_{xy}$  по различным точкам  $x, y$  пространства  $X$ , следовательно, их число равно  $n(n-1)$ .

Для произвольного топологического пространства  $X$  существует его тихоновизация  $\tau X$ , полученная из  $X$  склеиванием точек, не разделяемых функциями из  $C(X)$ . Любое тихоновское пространство  $X$  имеет расширение Хьюитта  $\nu X$ , на которое непрерывно продолжаются все функции из  $C(X)$ . При этом для всякого топологического пространства  $X$  полукольца  $CP(X)$ ,  $CP(\tau X)$  и  $CP(\nu \tau X)$  канонически изоморфны (см. [6, 7]).

**Теорема 3.** Для любых топологических пространств  $X$  и  $Y$  равносильны следующие утверждения:

- (1) решетки всех подалгебр полуколец  $CP(X)$  и  $CP(Y)$  изоморфны;
- (2) полукольца  $CP(X)$  и  $CP(Y)$  изоморфны;
- (3) кольца  $C(X)$  и  $C(Y)$  изоморфны;
- (4) пространства  $\nu \tau X$  и  $\nu \tau Y$  гомеоморфны.

Эквивалентность утверждений (3) и (4) — известная теорема Хьюитта.

**Теорема 4.** Произвольное хьюиттовское пространство  $X$  определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, решеткой всех подалгебр полукольца  $CP(X)$ .

Заметим, что для колец  $C(X)$  теорема 4 доказана в [1].

1. Вечтомов Е.М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62, вып. 5. С. 687–693.

2. *Вечтомов Е.М.* О полукольцах частичных функций с расширенным сложением // Международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ. Тезисы докладов. М.: МГУ, 2019. С. 18–19.
3. *Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н.* Полукольца непрерывных действительных функций // CEUR-WS.org\_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference «Modern Problems in Mathematics and its Applications». Yekaterinburg, Russia, February 5–11, 2017. С. 20–29.
4. *Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н.* О полукольце непрерывных частичных функций, рассматриваемом с расширенным сложением // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конф. с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. С. 365–366.
5. *Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н., Сидоров В.В., Чупраков Д.В.* Элементы функциональной алгебры: в 2 т. Т. 2. Киров: ООО «Издательство «Радуга-ПРЕСС», 2016.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
7. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. New York, 1976.
8. *Golan J.S.* Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

## О плотных множествах произведений

**А. А. Грызлов**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: gryzlov@udsu.ru

Одним из наиболее интересных направлений в теории произведений топологических пространств является изучение всюду плотных множеств в произведениях. Известная теорема Хьюитта–Марчевского–Пондишери устанавливает, что в произведении

континуума сепарабельных пространств существует счетное всюду плотное множество.

В этой связи важной является проблема существования в таком произведении всюду плотных множеств, обладающих дополнительными свойствами.

Известной является проблема существования в произведении сепарабельных пространств счетного всюду плотного множества, не содержащего сходящихся последовательностей и поэтому секвенциально замкнутого. Существование таких множеств доказано для произведений различных пространств.

Еще одна проблема связана с изучением проекций всюду плотных множеств и их подмножеств на грани различной размерности произведений пространств.

Мы доказываем существование в произведении континуума сепарабельных пространств счетного всюду плотного множества, проекции счетных подмножеств которого на грани обладают дополнительными свойствами.

Эти свойства обеспечивают, в частности, что это счетное всюду плотное множество не содержит сходящихся последовательностей, что замыкание всякого его счетного подмножества имеет мощность  $2^c$ . Доказательства основаны на использовании так называемой независимой матрицы подмножеств счетного множества, введенной и широко используемой в теории расширенных дискретных пространств.

Исследование проведено в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FEWS-2020-0009).

## **Новая константа в табличных логиках**

**А. К. Кощеева**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: kannakst@mail.ru

Задача о новой интуиционистской логической константе бы-

ла поставлена академиком П.С. Новиковым в конце 50-х годов следующим образом.

Пусть  $Fm$  — множество формул языка логики высказываний с пропозициональными переменными  $Var = \{p_i, q_j, \dots\}$ , стандартными связками  $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$  и логическими константами  $0$  (ложь),  $1$  (истина).

**Определение 1.** *Суперинтуиционистской (с.и.) логикой* называется произвольное подмножество  $L \subsetneq Fm$ , включающее интуиционистскую пропозициональную логику ( $Int$ ) и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

Через  $L + A$  обозначается, как обычно, наименьшая логика, включающая логику  $L$  и содержащая формулу  $A$ .

Добавим к пропозициональному языку дополнительную логическую константу  $\varphi$ . Получим множество  $Fm(\varphi)$  формул расширенного языка, при этом формулы из  $Fm$  назовем *чистыми*.

**Определение 2.** *Подстановкой* [1] на множестве  $Fm(\varphi)$  называется отображение  $s: Fm(\varphi) \rightarrow Fm(\varphi)$ , удовлетворяющее условиям:  $s(A \circ B) = s(A) \circ s(B)$ , где  $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ;  $s(\neg A) = \neg s(A)$ ;  $s(0) = 0$ ,  $s(1) = 1$ ,  $s(\varphi) = \varphi$ .

**Определение 3.**  $\varphi$ -Логикой называется множество  $\mathcal{L}$  формул расширенного языка, включающее  $Int$  и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки [2, 3].

**Определение 4.**  $\varphi$ -Логика  $\mathcal{L}$  называется *консервативным расширением* логики  $L$ , если  $L \subset \mathcal{L}$  и для класса чистых формул выполнено  $Fm \cap \mathcal{L} = L$ .

**Определение 5.**  $\varphi$ -Логика  $\mathcal{L}$  называется *полным по П.С. Новикову расширением* логики  $L$ , если  $\mathcal{L}$  консервативна над  $L$  и для любой формулы  $A \in Fm(\varphi)$ , не принадлежащей  $\mathcal{L}$ ,  $\varphi$ -логика  $\mathcal{L} + A$  неконсервативна над  $L$ .

Первый пример полной по П.С. Новикову над  $Int$   $\varphi$ -логики в языке с одной дополнительной константой был приведен в статье Я.С. Сметанича [4].

В этой же статье Я.С. Сметанич рассмотрел с.и.-логику чистой двухэлементной цепи  $L(C_2)$  (первой матрицы Яськовского  $J_1$  [5]  $\equiv$  связного двоемочия по Келли [6]) и показал, что  $L(C_2)$  имеет ровно три полных расширения в языке с одной дополнительной константой, из которых одно определяет новую по П.С. Новикову константу, а остальные содержат явные соотношения  $\varphi \leftrightarrow 0$ ,  $\varphi \leftrightarrow 1$  соответственно.

Аналогичную задачу можно поставить по отношению к произвольной табличной логике.

**Определение 6.** *Табличной* называют с.и. логику, которая характеризуется конечным числом конечных шкал.

Постановка задачи:

1) Построение примеров полных по П.С. Новикову расширений конкретной табличной логики.

2) Отыскание полных по П.С. Новикову табличных логик с дополнительными константами (проблема-минимум).

3) Описание всего семейства полных по П.С. Новикову табличных логик с дополнительными константами (проблема-максимум).

4) Решение вопросов аксиоматики найденных примеров полных по П.С. Новикову расширений табличных  $\varphi$ -логик.

1. *Ершов Ю.Л., Паломтин Е.А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.
2. *Скворцов Д.П.* Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 154–173.
3. *Яшин А.Д.* О новой константе в интуиционистской логике высказываний // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 3. С. 903–926.
4. *Сметанич Я.С.* О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Труды Московского математического общества. 1960. Т. 9. С. 357–371.
5. *Пильчак Б.Ю.* Об исчислении задач // Украинск. матем. журнал. 1952. Т. 4, № 2. С. 174–194.

## О геометрии орбит конформных векторных полей

Э. О. Ражабов

Ташкент, Ташкентский государственный технический  
университет им. Ислама Каримова  
e-mail: rajabov\_2019@bk.ru

Пусть  $(M, g)$  — гладкое риманово многообразие размерности  $n$  с метрическим тензором  $g$ ,  $V(M)$  — множество всех гладких векторных полей на многообразии  $M$ . Множество  $V(M)$  — линейное пространство над полем вещественных чисел и алгебра Ли относительно скобки Ли векторных полей.

Векторное поле  $X$  на  $(M, g)$  называется *конформным*, если однопараметрическая группа преобразований, порожденная векторным полем  $X$ , состоит из конформных преобразований. Это означает, что  $L_X g = \sigma g$ , где  $L_X g$  — производная Ли в направлении вектора  $X$ ,  $\sigma$  — неотрицательная функция на  $(M, g)$ . Если  $\sigma$  является константой, то поток векторного поля состоит из гомотетий; если  $\sigma = 0$ , то поток состоит из изометрий.

Напомним, что диффеоморфизм  $\phi: M \rightarrow M$  называется *конформным преобразованием*, если  $d\phi(g) = \lambda g$ , где

$$d\phi(g)(u, v) = g(d\phi(u), d\phi(v)),$$

$\lambda$  — положительная функция на  $(M, g)$ ,  $u, v$  — касательные векторы. Если  $\lambda$  постоянно, то  $\phi$  является преобразованием гомотетии. Если  $\lambda \equiv 1$ , то  $\phi$  является изометрией.

Примерами конформных векторных полей являются векторные поля Киллинга. Напомним, что векторное поле на  $(M, g)$  называется *полем Киллинга*, если его поток состоит из изометрий риманова многообразия  $(M, g)$ , то есть  $L_X g = 0$ . Геометрия орбиты векторных полей Киллинга изучаются в [3].

Изучению геометрии конформных векторных полей посвящены многочисленные исследования [1, 2, 3, 6], в частности, в [1] доказано, что если многообразие компактно, то множество неподвижных точек конформного векторного поля является подмногообразием четной коразмерности.

Пусть  $D$  — семейство гладких векторных полей, определенных на  $M$ . Семейство  $D$  может содержать конечное или бесконечное число гладких векторных полей. Для векторного поля  $X \in D$  через  $X^t(x)$  обозначим интегральную кривую  $X$ , проходящую через точку  $x \in M$  при  $t = 0$ .

**Определение 1.** Орбитой  $L(x)$  семейства  $D$  векторных полей через точку  $x$  называется множество точек  $y$  в  $M$ , таких, что существуют действительные числа  $t_1, t_2, \dots, t_k$  и векторные поля  $X_1, X_2, \dots, X_k$  в  $D$  (где  $k$  — произвольное натуральное число), такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1})\dots)).$$

Основным результатом в геометрии орбит является теорема Суссмана [7], которая утверждает, что каждая орбита гладких векторных полей с топологией Суссмана имеет дифференциальную структуру, относительно которой она является погруженным подмногообразием в  $M$ .

**Определение 2.** Система векторных полей  $D = \{X_1, \dots, X_k\}$  называется *инволютивной* на  $M$ , если существуют гладкие вещественные функции  $f_{ij}^l(x)$ ,  $x \in M$ ,  $i, j, l = 1, \dots, k$ , такие, что для каждой пары  $(i, j)$  выполняется равенство

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^k f_{ij}^l(x) X_l.$$

Рассмотрим семейство конформных векторных полей  $D = \{X, Y\}$  в пространстве  $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ , где

$$X = 2xz \frac{\partial}{\partial x} + 2yz \frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y = 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + 2yz \frac{\partial}{\partial z}.$$

**Теорема.** Система  $D = \{X, Y\}$  инволютивна, орбиты семейства порождают двумерное слоение, слоями которого являются поверхности неотрицательной кривизны.

1. *Blair D.E.* On the zeros of a conformal vector field // Nagoya Math. Journal. 1974. Vol. 55, pp. 1–3.
2. *Ferrand J.* The action of conformal transformations on a Riemannian manifold // Math. Annals. 1996. Vol. 304, pp. 277–291.
3. *Narmanov A.Ya., Saitova S.S.* On the Geometry of Orbits of Killing Vector Fields // Differential Equations. 2014. Vol. 50, no. 6, pp. 247–258.
4. *Narmanov A.Ya., Rajabov E.O.* On the geometry of conformal vector fields // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No. 2, pp. 103–110.
5. *Narmanov A.Ya., Rajabov E.O.* On the Geometry of Orbits of Conformal Vector Fields // J. Geom. Symmetry Phys. 2019. Vol. 51, pp. 29–39.
6. *Obata M.* The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, pp. 265–270.
7. *Sussman H.J.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Transactions of the AMS. 1973. Vol. 180, pp. 171–188.

## Об инвариантах поверхностей, изометричных по сечениям

**А. С. Шарипов, М. К. Кеунимжаев**

*Ташкент, Национальный университет Узбекистана*

e-mail: asharipov@inbox.ru, keunimjaeff@gmail.com

В классической дифференциальной геометрии выделяются два направления. Одно из них, называемое геометрией «в малом», изучает локальные свойства геометрических объектов, а второе исследует геометрические объекты на всем их протяжении и называется геометрией «в целом».

Многие задачи геометрии «в целом» связаны со существованием и единственностью поверхностей с заданными инвариантами относительно преобразования. Задачи нахождения инвариантов поверхностей определенного класса и решение задачи существования и единственности поверхности, имеющей заданные значения инвариантов, являются актуальными [1, 2].

В данной работе исследуется вопрос об инвариантах поверхностей, изометричных по сечениям, т.е. мы находим инварианты относительно преобразования, сохраняющего изометрии по сечениям.

В трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  рассмотрим поверхность  $F$  и вектор  $\vec{e}$ . Поверхность  $F$  пересекаем всевозможными плоскостями  $\pi^j$ , перпендикулярными вектору  $\vec{e}$ . Множество точек сечения обозначим через  $\gamma^j$ . Класс поверхностей, для которых сечения  $\gamma^j$  гомеоморфны отрезку, прямой либо окружности, обозначим через  $W\{\vec{e}\}$ .

**Определение 1.** Поверхности  $F_1$  и  $F_2$  называются *изометричными по сечениям*, если существуют направления  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , перпендикулярно которым проводятся сечения, и гомеоморфизм  $f$  поверхностей, удовлетворяющие следующим условиям:

- а) точкам поверхности  $F_1$ , принадлежащим одному сечению, сопоставляются точки, принадлежащие одному сечению поверхности  $F_2$ . Образы точек, лежащих на разных сечениях, лежат на разных сечениях;
- б) расстояния между плоскостями, содержащими кривые  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$ , и плоскостями, содержащими кривые  $f(\gamma^1)$  и  $f(\gamma^2)$ , равны;
- в) длина дуги кривой  $\gamma^j \subset \pi^j$  между двумя точками равна длине дуги кривой  $f(\gamma^j)$  между соответствующими точками [3].

**Пример 1.** Рассмотрим геликоид и катеноид, заданные соответственно системами

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = av, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{a^2 + u^2} \cos v, \\ y = \sqrt{a^2 + u^2} \sin v, \\ z = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{a}. \end{array} \right.$$

Они локально изометричны, но не существуют направления, по которым они были бы изометричны по сечениям, так как сечения геликоида — это отрезки, а сечения катеноида — замкнутые линии, гомеоморфизма между которыми не существует.

**Пример 2.** Рассмотрим эллиптический параболоид и гиперболический параболоид, заданные соответственно системами

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = u^2 - v^2. \end{cases}$$

Для них существуют два направления  $\vec{e}_1(1; 0; 0)$  и  $\vec{e}_2(0; 1; 0)$ , по которым они являются изометричными по сечениям, но они локально не изометричны.

**Пример 3.** Рассмотрим круговой цилиндр

$$\begin{cases} x = \cos u, \\ y = \sin u, \\ z = v, \end{cases} \quad \text{где } 0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

и часть плоскости

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{где } 0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Известно, что часть плоскости и круговой цилиндр локально изометричны, при этом для них существуют два направления  $\vec{e}_1(0; 0; 1)$  и  $\vec{e}_2(1; 0; 0)$ , по которым они являются изометричными по сечениям.

Нами доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть поверхности  $F_1, F_2 \in W\{\vec{e}\}$  заданы соответственно уравнениями

$$\vec{r}_1(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

$u$

$$\vec{r}_2 = x(u, v)\vec{i} + [\alpha x(u, v) + y(u, v)\cos\varphi + z(u, v)\sin\varphi]\vec{j} + \\ + [\beta x(u, v) - y(u, v)\sin\varphi + z(u, v)\cos\varphi]\vec{k}.$$

Тогда они являются изометричными по сечениям.

**Замечание.** Из теоремы 1 следует, что преобразования

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = \alpha x + y\cos\varphi - z\sin\varphi + b, \\ z' = \beta x + y\sin\varphi + z\cos\varphi + c \end{cases} \quad (1)$$

сохраняют изометрию по сечениям относительно вектора  $\vec{e}(1; 0; 0)$ . Следовательно, исследования инвариантов поверхностей относительно преобразования (1) являются актуальными.

**Теорема 2.** *Длина проекции нормали поверхности из класса  $W\{\vec{e}\}$  на плоскость перпендикулярного вектора  $\vec{e}$  сохраняется при преобразовании (1).*

1. *Артикбаев А., Ибодуллаева Н.М.* Задача восстановления поверхности по внешней кривизне и решения уравнения Монжа–Ампера // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 201. С. 123–131.
2. *Sharipov A.S., Topvoldiyev F.F.* On invariants of surfaces with isometric on sections // Mathematic and Statics. 2022. Vol. 10, no. 2, pp. 523–528.
3. *Sharipov A.S., Topvoldiyev F.F.* On some properties of surfaces with isometric on sections // Bulletin of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Uzbekistan. 2021. Vol. 4, no. 1, pp. 11–15.

**Transverse vibrations of viscoelastic beams of variable length, taking into account the action of damping forces**

**K. V. Litvinova**

*Moscow, Moscow State University,  
Samara, Samara State Technical University  
e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru*

The resonance characteristics of viscoelastic beams with moving boundaries using the Kantorovich–Galerkin method are examined in the article. The phenomenon of resonance and steady passage through resonance are analyzed.

One-dimensional systems whose boundaries move are widely used in engineering [1, 2, 3, 4, 5]. The presence of moving boundaries causes considerable difficulties in describing such systems. Exact methods for solving such problems are limited by the wave equation and relatively simple boundary conditions. Of the approximate methods, the Kantorovich–Galerkin method described in [5] is the most efficient. However, this method can also be used in more complex cases. This method makes it possible to take into account the effect of resistance forces on the system, the viscoelastic properties of an oscillating object, and also the weak non-stationarity of the boundary conditions.

The paper considers the phenomena of steady-state resonance and passage through resonance for transverse oscillations of a beam of variable length, taking into account viscoelasticity and damping forces.

Performing transformations similar to transformations [5], an

expression is obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the  $n$ -th dynamic mode. Expressions are also obtained that describe the phenomenon of steady state resonance and the phenomenon of passage through resonance.

The expression that determines the maximum amplitude of oscillations when passing through the resonance was numerically investigated to the maximum. The dependence of the beam oscillation amplitude on the boundary velocity, viscoelasticity, and damping forces is analyzed. The results of numerical studies allow us to draw the following conclusions:

- with a decrease in the velocity of the boundary, viscoelasticity and damping forces, the amplitude of oscillations increases;
- as the boundary velocity, viscoelasticity and damping forces tend to zero, the oscillation amplitude tends to infinity.

In conclusion, we note that the above results make it possible to carry out a quantitative analysis of the steady state resonance and the phenomenon of passage through the resonance for systems whose oscillations are described by the formulated problem.

1. *Vesnitskii A. I., Potapov A. I.* Transverse vibrations of ropes in mine hoists // *Dinamika sistem*. Gorky: Gorky State University. 1975. Issue 7, pp. 84–89.
2. *Anisimov V. N., Litvinov V. L.* Longitudinal vibrations of a viscoelastic rope of variable length // *Tr. 4th All-Russian Scientific Conf. "Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Mathematical modeling and boundary value problems"*. Samara. 2007. Part 1, pp. 25–27.
3. *Goroshko O. A., Savin G. N.* *Vvedenie v mekhaniku deformiruemyykh odnomernyykh tel peremennoi dliny* (Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length). Kiev: Naukova Dumka, 1971.
4. *Anisimov V. N., Litvinov V. L.* Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction // *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra Rossiiskoi Akademii Nauk*. 2017. Vol. 19, no. 4, pp. 161–165.

5. *Anisimov V. N., Korpen I. V., Litvinov V. L.* Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving borders // *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela.* 2018. No. 2, pp. 70–77.

## **Anisotropy of the magneto-thermophoretic force acting on magnetic particles in a fluid**

**S. I. Martynov**

*Surgut, Surgut State University*

e-mail: martynovsi@mail.ru

The anisotropy of the diffusion and thermal diffusion coefficients was found in experiments [1] with a magnetic fluid containing iron oxide (maghemite) nanoparticles in an external uniform magnetic field. It is found that the values of the coefficients vary depending on the orientation of the magnetic field. It can be assumed that the anisotropy of the thermal diffusion coefficient is related to the anisotropy of the force acting on the particles from the magnetic field. Moreover, this force should depend on the temperature gradient. This is possible only if there is a dependence of the magnetic permeability of the carrier liquid  $\mu_f$  or particles  $\mu_p$  on temperature  $T$ . Since the carrier phase in magnetic fluids is not magnetic  $\mu_f = 1$ , then the variant remains, when the force is due to the dependence of the magnetic permeability of particles on temperature  $\mu_p = \mu_p(T)$ . In this case, as was shown in [2], the dependence of the magnetic properties of maghemite on temperature satisfies the condition  $(\partial\mu_p/\partial T) < 0$ . To calculate the force acting on particles from the magnetic field and fluid, it is necessary to know the distribution of the magnetic field, temperature velocity and pressure in the liquid. The problem of determining the magneto-thermophoretic force acting on particles is solved in the approximation of pair interactions of particles having a size  $a$  and separated by a vector  $\mathbf{r}$ . Distribution equations for pressure  $p$ , velocity  $\mathbf{u}$ , temperature  $T_f$  in

liquid and particles  $T_{p1}$  and  $T_{p2}$  for the case of small particle sizes have the form

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0, \\ \Delta T_f &= 0, \quad \Delta T_{p1} = 0, \quad \Delta T_{p2} = 0. \end{aligned}$$

On the surface of the particles, the no-slip conditions must be satisfied for the velocity, and for the temperature, the conditions for the continuity of temperature and heat fluxes, taking into account the thermal diffusivity of the liquid  $\chi_f$  and particles  $\chi_p$ . Magnetic field in liquid and particles is potentially  $\mathbf{H} = \nabla \varphi$ . Equations for potentials in fluid  $\varphi_f$  and particles  $\varphi_{p1}$ ,  $\varphi_{p2}$  are written as

$$\Delta \varphi_f = 0, \quad \Delta \varphi_{p1} = 0, \quad \Delta \varphi_{p2} = 0.$$

The boundary conditions for the potentials on the surface of the first particle are represented as follows

$$\varphi_f = \varphi_{p1}, \quad \mu_f \nabla \varphi_f \cdot \mathbf{n} = \nabla [\mu_p(T) \varphi_{p1}] \cdot \mathbf{n}, \quad \text{for } |\mathbf{x}_1| = a.$$

Here the vector  $\mathbf{x}_1$  determines the position of the first particle in the fluid,  $\mathbf{n}$  is the normal vector to the surface of the particle. The boundary conditions for the second particle have a similar form. Far from the particles, the conditions for damping perturbations from particles for velocity, pressure, temperature and the potential of the magnetic field must be satisfied in the fluid. The method presented in [3] is used to solve the system of equations of hydrodynamics, temperature, and magnetic field. The solution to the problem of the distribution of the magnetic field around particles, taking into account the dependence of the magnetic permeability of particles on temperature, is sought in a linear approximation with respect to a given temperature gradient  $\nabla T_0$ . In the zero gradient  $\nabla T_0$  approximation, the solution of the problem of the distribution of temperature and the potential of the magnetic field in liquid and particles have the same form. In this case, the solution to the problem of the interaction of two particles in a magnetic field was found in [4]. Solving the systems of equations for the magnetic field potential in the linear approximation with respect to the vector  $\nabla T_0$  outside and inside the particles with an accuracy

of  $(a/r)^5$ , we obtain the following expression for the force acting on the particles

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -\mu_f G \left[ 6 \frac{(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla T_0)}{r^5} \mathbf{H}_0 + 3 \frac{H_0^2}{r^5} \nabla T_0 - 15 \frac{(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^7} \nabla T_0 - \right. \\ & - 15 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r}) H_0^2}{r^7} \mathbf{r} - 30 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^7} \mathbf{H}_0 \\ & \left. - 30 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{H}_0)(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^7} \mathbf{r} + 105 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^9} \mathbf{r} \right]. \end{aligned}$$

The coefficient  $G$  is equal

$$G = - \frac{6a^8 \mu_f \chi_f}{(2\mu_p + 3\mu_f)} \frac{(\mu_f - \mu_p)}{(\mu_p + 2\mu_f)^2 (\chi_p + 2\chi_f)} \left( \frac{\partial \mu_p}{\partial T} \right)_0.$$

The average force  $\bar{\mathbf{F}}$  in a suspension of identical particles is determined by the relation

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{N}{V} \int_V \mathbf{F} dV.$$

Here the summation is carried out over all  $N$  particles in the volume  $V$  ( $n_0 = N/V$  — concentration of particles per unit volume). Taking into account only pair interactions between particles, the average value can be represented as

$$\bar{\mathbf{F}} = \phi \int \frac{\mathbf{F}}{(4/3)\pi a^3} n_0 q(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + o(\phi^2).$$

Here  $\phi = n_0 4\pi a^3/3$  is the volume concentration of particles,  $q(\mathbf{r})$  is the probability density function, which is found from the equation

$$\operatorname{div}(q(\mathbf{r})\mathbf{V}) = 0.$$

The vector  $\mathbf{V}$  determines the relative velocity of the particles and is found from the condition of equality of the hydrodynamic and magnetic forces acting on the particles. Taking into account the solution of this equation, the average force acting into particles is equal to

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\mu_f G}{\pi^2 a^8} \left[ \frac{3}{512} H_0^2 \nabla T_0 + \frac{1575}{16896} (\nabla T_0 \cdot \mathbf{H}_0) \mathbf{H}_0 \right] \phi^2.$$

As can be seen from the obtained expression, when the magnetic field is oriented along and perpendicular to the temperature gradient vector, we obtain a different value of the force acting on the particles, and, therefore, there is an anisotropy of the thermal diffusion coefficient.

1. *Fiuza T., Sarkar M., Riedl J., Cebers A., Cousin F., et al.* Thermodiffusion anisotropy under magnetic field in ionic liquid-based ferrofluids // *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry. 2021. Vol. 17, pp. 4566–4577.
2. *Krasilnikov V.N., Gyrdasova O.I., Tyutyunnik A.P., Dyachkova T.V., etc.* Thermal and magnetic properties of maghemite  $\gamma - Fe_2O_3$  synthesized by the precursor method // *Reports of the Russian Academy of Sciences*. 2018. Vol. 481, no. 4, pp. 386–390.
3. *Martynov S.I.* Hydrodynamic interaction of particles // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*. 1998. No. 2, pp. 112–119.
4. *Boriskina I.P., Syromyasov A.O.* Pair-wise MHD-interaction of rigid spheres in longitudinal creeping flow // *SVMO*. 2019. Vol. 21, no. 1, pp. 78–88.

## Об одной задаче дифракции в прямоугольной волноводной структуре

Г. В. Абгарян

Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет

e-mail: g.v.abgaryan@gmail.com

В работе исследуется задача дифракции ТЕ-поляризованной электромагнитной волны в полубесконечной прямоугольной волноводной структуре с резонансной областью в конце рис. 1.

Как известно, математическая модель, соответствующая данной физической задаче, ставится в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями типа Дирихле.

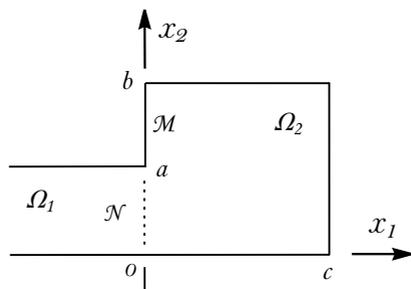


Рис. 1: Полубесконечная волноводная структура

Решение этой краевой задачи методом частных областей, который позволяет свести исходную задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} v_j = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

относительно коэффициентов  $\{v_j\}$  разложения искомой функции  $u(x)$  в ряд, приведено в [1]. Настоящая работа является продолжением данного исследования. В рамках этой работы исследовались вопросы обоснования численного метода усечения для приближенного решения БСЛАУ (1).

Доказана  $S$ -сходимость [2] приближенного решения  $\bar{v}^n$  усеченной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} v_j = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

к точному решению  $v$  системы (1), где  $S: \mathbb{C}^n \rightarrow l_2$  — оператор интерполяции, действующий по правилу

$$S\bar{v}^n = (v_1, v_2, \dots, v_n, 0, 0, \dots).$$

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

1. *Abgaryan G.V., Pleshchinskii N.B.* On the eigen frequencies of rectangular resonator with a hole in the wall // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, iss. 10, pp. 1631–1639.
2. *Плещинский Н.Б.* К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений // Изв. вузов. Матем. 2000. № 3. С. 39–47.

## К исследованию аперидической устойчивости интервально неопределенных систем

**О. Г. Антоновская**

*Нижний Новгород, ННГАСУ*

e-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

### 1. Об аперидической устойчивости интервально неопределенных непрерывных систем.

Пусть необходимо определить условия аперидической устойчивости интервально неопределенного полинома

$$P_n(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^{n-k} \quad (0 < \underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k). \quad (1)$$

Полином (1), являющийся характеристическим полиномом для линейной непрерывной системы, является аперидически устойчивым, если все его корни действительны и отрицательны [1]. Произведем  $D$ -разбиение [2] на комплексной плоскости полиномов относительно  $\mu$ -сектора

$$p = \begin{cases} -\omega + j\mu\omega, & \omega \geq 0, \\ \omega - j\mu\omega, & \omega \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

здесь  $j^2 = -1$ . Тогда полученное выражение можно представить в виде ряда по  $\mu$  и, следовательно, уравнения границы  $D$ -разбиения в первом приближении по  $\mu$  будут задаваться уравнениями

$$\xi = P_n(-\omega), \quad \eta = \mu\omega P'_n(-\omega), \quad \omega \geq 0. \quad (3)$$

Для  $\omega \leq 0$  на комплексной плоскости граница симметрична указанной относительно действительной оси. Согласно (3), основную роль для описания семейства границ при  $\mu \rightarrow 0$  играют величины

$$\underline{\xi} = \underline{R}_0 - \bar{R}_1, \quad \bar{\xi} = \bar{R}_0 - \underline{R}_1. \quad (4)$$

В (4) функции  $R_0 \geq 0, R_1 \geq 0$  получаются из действительной части выражения  $P_n(p)$ ,  $p$  определяется согласно (2) (функция  $R_0$  содержит коэффициенты  $P_n(p)$  с четными степенями,  $R_1$  — с нечетными). Черта сверху или снизу переносится на все коэффициенты  $a_k$ , входящие в эти функции. Поэтому при  $\mu \rightarrow 0$  апериодичность интервального полинома будет обеспечена, если апериодичностью обладают два полинома:  $P_n^{(1)}$ , у которого  $a_k = \underline{a}_k$ , если  $k$  нечетно,  $a_k = \bar{a}_k$ , если  $k$  четно, и  $P_n^{(2)}$ , у которого  $a_k = \underline{a}_k$ , если  $k$  четно,  $a_k = \bar{a}_k$ , если  $k$  нечетно.

## 2. Об апериодической устойчивости интервально неопределенных дискретных систем.

Пусть необходимо определить условия апериодической устойчивости интервально неопределенного полинома (1). Полином (1), являющийся характеристическим полиномом для линейной дискретной системы, является апериодически устойчивым, если все его корни принадлежат интервалу  $(0, 1)$ . Произведем  $D$ -разбиение [3] относительно  $\mu$ -сектора

$$p = \begin{cases} \omega + j\mu\omega, & 0 \leq \omega \leq (1 + \mu^2)^{-1/2}, \\ -\omega + j\mu\omega, & -(1 + \mu^2)^{-1/2} \leq \omega \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

в котором в пределе будет расположен интервал вещественной оси  $(0, 1)$ . Тогда при  $\omega \geq 0$  полученное выражение можно представить в виде ряда по  $\mu$  и, следовательно, уравнения границы  $D$ -разбиения в первом приближении по  $\mu$  будут задаваться уравнениями

$$\xi = P_n(\omega), \quad \eta = \mu\omega P_n'(\omega), \quad \omega \geq 0. \quad (6)$$

Для  $\omega \leq 0$  на комплексной плоскости граница симметрична указанной относительно действительной оси по сравнению со случаем  $\omega \geq 0$ . Согласно (6), основную роль для описания семейства границ при  $\mu \rightarrow 0$  играют величины

$$\underline{\xi} = \underline{R}_0 + \underline{R}_1, \quad \bar{\xi} = \bar{R}_0 + \bar{R}_1. \quad (7)$$

При  $\mu \rightarrow 0$  семейство границ  $D$ -разбиения прижимается к оси  $\xi$ , причем интервалы, в которых граница  $\underline{D}$ -разбиения пересекает ось  $\xi$ , в пределе задается величинами  $\underline{\xi}$  и  $\bar{\xi}$  из (7). Но это означает, что робастная апериодичность полинома (1) имеет место тогда и только тогда, когда два полинома, получающихся из (1) при  $a_k = \underline{a}_k$  и  $a_k = \bar{a}_k$ , являются апериодическими.

1. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
2. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
3. *Горюнов В.И.* Построение границ апериодической устойчивости по методу  $D$ -разбиений // Электромеханика. 1985. № 12. С. 39–41.

## Анализ и прогноз степени дифференциации населения по уровню доходов и расходов

**А. А. Анфалова**

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: anfalovaalisa00@mail.ru

Изучение вопросов, связанных с распределением населения социально-экономической системы по уровню доходов, является важным показателем при анализе уровня жизни населения. Этой проблеме посвящено много современных исследований [2].

Степень неравномерности в распределении доходов является в современном мире актуальной проблемой, поскольку это влечет за собой негативные последствия в социально-экономических процессах государства. Такие процессы влияют на степень благополучия, на уровень здоровья [1], снижают уровень рождаемости и увеличивают уровень смертности, ведут к уменьшению интенсивности производственного процесса в стране, к снижению валового внутреннего продукта.

Изучим структуру, текущую и прогнозную динамику доходов населения с помощью методов экономико-математического анализа и моделирования.

Воспользуемся методикой оценки степени дифференциации населения по уровню доходов, представленной в [1, 3, 4]. Рассмотрим логарифмически нормальную модель распределения населения по величине среднедушевого дохода, функция плотности которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для расчетов здесь и далее воспользуемся статистическими данными, представленными на официальном сайте федеральной службы государственной статистики РФ. На рис. 1 представлен график логарифмически нормальной функции распределения населения РФ по величине среднедушевого дохода для 2020 года. Наибольшая плотность населения в 2020 году приходится на интервал среднедушевого денежного дохода 30-40 тыс. руб./месяц.

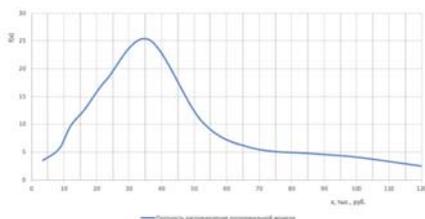


Рис. 1: Логарифмически нормальная модель распределения населения РФ по величине среднедушевого дохода за 2020 год.

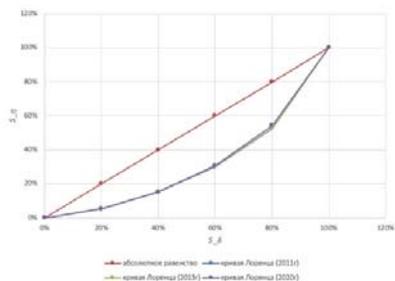


Рис. 2: Кривая Лоренца для РФ для 2011, 2015 и 2020 годов.

Степень дифференциации населения по уровню доходов также отражает кривая Лоренца. На рис. 2 представлена кривая Лоренца, рассчитанная для 2011 года, 2015 года и 2020 года. По данным расчетам в РФ наблюдается неравномерность в распределении доходов населения в период с 2011 года по 2020 год.

Также была изучена степень дифференциации распределения денежных доходов населения по квинтильным группам. Первая группа — с наименьшими доходами, крайняя пятая — с наибольшими. На рис. 3 представлен график распределения доходов населения по 20-ти процентным группа населения РФ за период 2010–2020 гг. Расчеты проводились в приведенных ценах в соответствии со статистическими данными [5]. Анализ динамики долей квинтильных групп для населения РФ показал, что темпы роста доходов по всем группам населения примерно одинаковы, поскольку их доли меняются незначительно.



Рис. 3: Динамика долей квинтильных групп в общем объеме денежных доходов населения.

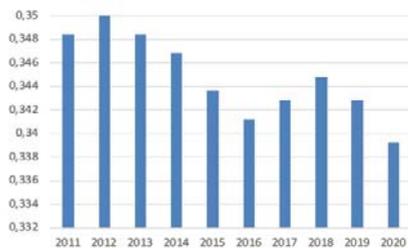


Рис. 4: Динамика коэффициента Джини для РФ за период 2011–2020 гг.

Рассчитаем индекс концентрации доходов (коэффициент Джини ( $G$ )), который показывает, как фактическое распределение доходов отличается от равномерного распределения. Статистическая мера равенства доходов колеблется от 0 до 1, крайние случаи 0 — абсолютное равенство доходов у всех групп населения, 1 — абсолютное неравенство. Индекс концентрации доходов вычисляется по формуле  $G = 1 - 2 \sum_{i=1}^n \delta_i S_{\eta_i} + \sum_{i=1}^n \delta_i \eta_i$ . Динамика коэффициента Джини за 2011–2020 гг. представлена на рис. 4.

Таким образом, расчеты показали, что за последние 10 лет уровень доходов населения в приведенных ценах 2020 года в РФ

не изменился. Степень дифференциации населения по уровню дохода находится на среднем уровне. Так, в 2020 году доходы верхних наиболее обеспеченных 10% населения были в 15 раз выше, чем доходы нижних наименее обеспеченных 10% населения.

1. *Кетова К.В., Русяк И.Г.* Анализ степени дифференциации населения Российской Федерации по уровню доходов // E-Scio. 2020. № 6 (45). С. 367–378.
2. *Севрюкова С.В., Коростелева О.Н.* Формирование денежных доходов населения как социально-экономический аспект регулирования уровня жизни // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2017. № 11.
3. *Кетова К.В., Павлова Н.В.* Структурно-динамический анализ доходов населения социально-экономической системы // Экономика и бизнес: теория и практика. 2020. № 6 (64). С. 120–130.
4. *Кетова К.В.* Моделирование структуры доходов населения Удмуртской Республики // В сборнике: Анализ, моделирование и прогнозирование экономических процессов. Материалы II Международной научно-практической Интернет-конференции. 2010. С. 164–174.
5. *Официальный сайт федеральной службы государственной статистики РФ.* Индексы-дефляторы, в % к предыдущему году URL: <https://www.gks.ru/> (дата обращения 10.04.2022).

## **Численное исследование процессов взаимодействия электролита с металлическим электродом**

**Р. М. Асхатов, Л. Н. Кашапов, Н. Ф. Кашапов,**

**В. Ю. Чебакова**

*Казань, Казанский федеральный университет*

e-mail: Radik.Ashatov@kpfu.ru, kashlenar@gmail.com,

vchebakova@mail.ru

В медицине активно используется гипокситерапия. В ра-

боте [1] рассмотрен опыт применения гелий-кислородных смесей для вентиляции легких, а в [2] показано, что дополнительное вдыхание кислорода во время операции кесарево сечение в условиях спинальной анестезии снижает частоту и тяжесть интраоперационных симптомов. Электролизеры не являются основным способом получения кислорода, но сейчас ведутся работы по повышению эффективности реакций выделения кислорода. Математическое моделирование представляет собой один из способов исследования разных моделей электролизеров без большого количества экспериментальных исследований. Нами предложен способ получения прогноза выхода вещества по току, позволяющий в первом приближении оценить эффективность электролизера. Реализация метода показана на расчете выхода кислорода, получаемого электролизом водного раствора оксида калия.

Электрохимические катодные и анодные реакции различаются в зависимости от значения водородного показателя электролита. В щелочной среде основными реакциями считаются:  $H_2O \rightarrow H^+ + OH^-$ ,  $H^+ + OH^- \rightarrow H_2O$ ,  $2OH^- + 2e \rightarrow O + H_2O$ ,  $2O \rightarrow O_2$ . Для кислой и нейтральной среды, в зависимости от микроусловий, могут быть добавлены реакции с образованием перекиси водорода:  $2OH^- - 2e \rightarrow H_2O_2$ ,  $H_2O_2 + OH \rightarrow HO_2 + H_2O$ ,  $HO_2 \rightarrow H^+ + O_2$ .

Модельная задача ставится по материалам экспериментальной работы [3]. Моделирование проводится с учетом стадийных реакций, происходящих на инертном аноде с рабочей площадью в  $60 \text{ см}^2$  в водном растворе 30% гидроксида калия (среда щелочная). Температура электролита поддерживается постоянной. Схема стадийных электрохимических реакций может быть описана системой, состоящей из задач Коши. Эта система записывается с учетом положительности значений констант скоростей реакций и концентраций.

Начальные условия ставятся с учетом следующих предположений:

- растворимость газа мала и начальную концентрацию атомов и молекул можно считать нулевой;
- гидроксид калия полностью диссоциирует на ионы при растворении в воде;

– ионное произведение воды постоянно при неизменных условиях;

– константы скоростей электрохимических реакций могут считаться постоянной величиной при постоянной температуре, рабочей площади электродов, а также постоянном токе, в предположении, что газ сразу уходит от электрода;

– начальные приближения для констант скоростей соответствующих процессов вычисляются из их соотношения к лимитирующей скорости и стехиометрическим числам;

– при электролизе объединение ионов водорода и гидроксильной группы в молекулу воды крайне мала (ею можно пренебречь).

Для всех представленных расчетов использовались данные работы [3] для моментов времени  $t_1 = 0,14$  и  $t_2 = 0,28$  часа. Численный алгоритм решения приведен в работе [4]. В нем для решения обратной задачи химической кинетики применяется метод Хука–Дживса, который относится к методам прямого поиска. Данный метод был модифицирован с учетом проверки условий. Для решения системы кинетических уравнений с начальными условиями используется метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Результаты расчета и данные экспериментов приведены на рис. 1.

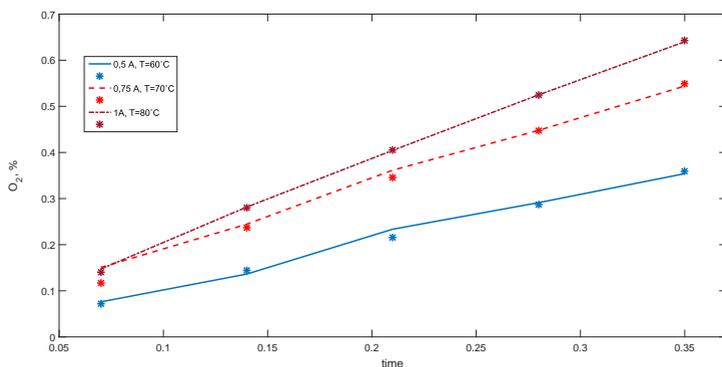


Рис. 1: Сравнение экспериментальных и расчетных данных, \* соответствуют экспериментальным данным.

Результаты численных исследований хорошо согласуются с экспериментальными данными. Так как константы скоростей электрохимических реакций зависят от факторов свойственных техническим параметрам конкретных электролизеров, то и использоваться они могут только для моделирования именно этих электролизеров в задачах большей размерности (см., напр., [5]).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–08–010050.

1. *Овчинников Б.М., Парусов В.В., Перов А.Ю.* Лечение больных с дыхательной недостаточностью гелий-кислородными смесями // Альманах клинической медицины. 2006. № 12. С. 154.
2. *Погодин А.М., Шифман Е.М.* Интраоперационное применение кислорода при операции кесарево сечение в условиях спинальной анестезии // Акушерство и гинекология. 2012. № 3. С. 44–48.
3. *Бабаев Р.К., Алиев С.А.* Исследование кинетических закономерностей получения водорода электролизом воды // Проблемы науки. 2018. Т. 4, № 28. С. 31–33.
4. *Кашапов Р.Н., Кашапов Л.Н., Кашапов Н.Ф., Чебакова В.Ю.* Кинетика двухфазных газожидкостных сред в процессах электролиза // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59, № 6. С. 869–876.
5. *Асхатов Р.М., Кашапов Н.Ф., Кашапов Р.Н., Чебакова В.Ю.* Математическая модель процессов электролиза раствора гидроксида натрия с инертными электродами // Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, 15–19 июня 2020. Ижевск. Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. С. 245–247.

# О банаховом пространстве правильных функций нескольких переменных

В. Н. Баранов, В. И. Родионов, А. Г. Родионова

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: v.n.baranov@gmail.com, rodionov@uni.udm.ru,

alla041054@yandex.ru

Непрерывные функции  $K \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $K$  — это отрезок или интервал, обладают достаточно высокой степенью регулярности («порядка»), заключающейся в том, что близость аргументов влечет близость значений непрерывной функции. «Не слишком разрывные» правильные функции тоже обладают хорошей регулярностью. Термин «правильная функция» предложен в [1, с. 197] как перевод слов «regulated function», в более раннем переводе [2, с. 167] использован термин «простая функция», позднее в работах [3, 4] использован термин «прерывистая функция». Отметим еще, что в [5] дается определение правильных функций  $x: K \rightarrow X$ , действующих из  $K$  в произвольное банахово пространство  $X$ . В определении  $x$  предполагается, что существуют все односторонние пределы, и они принадлежат пространству  $X$  (см., например, [3, 5]). Пространство правильных функций  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  обозначим через  $G[a, b]$ . Согласно [5, с. 16] справедливо

**Утверждение.** Для функции  $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  следующие утверждения эквивалентны:

- 1)  $x \in G[a, b]$ ;
- 2)  $x$  есть равномерный (на  $[a, b]$ ) предел последовательности ступенчатых функций;
- 3) для любого  $\varepsilon > 0$  существует разбиение

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$$

такое, что при всех  $k = 1, \dots, n$  справедливо

$$\sup_{\tau, s \in (\tau_{k-1}, \tau_k)} |x(s) - x(\tau)| < \varepsilon.$$

В настоящей работе на базе третьего пункта утверждения определяется понятие многомерной правильной функции  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — компакт. Показана переносимость основных свойств одномерных правильных функций на многомерный случай.

**Определение 1.** Пусть  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$  — открытое ограниченное множество,  $\overline{\Omega_0}$  — его замыкание, а множество  $\Omega$  таково, что  $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega_0}$ . Семейство открытых множеств  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  называется *разбиением* множества  $\Omega$ , если

- 1)  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  для всех  $i, j = 1, \dots, m$  таких, что  $i \neq j$ ;
- 2)  $\bigcup_{i=1}^m \overline{\Omega_i} = \overline{\Omega}$ .

**Замечание 1.** Разбиения  $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_m$  и  $\Omega''_1, \Omega''_2, \dots, \Omega''_k$  множества  $\Omega$  порождают совокупность множеств  $\{\Omega_{ij}\}$ , в которой  $\Omega_{ij} \doteq \Omega'_i \cap \Omega''_j$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k$ . Легко убедиться, что эта совокупность также является разбиением множества  $\Omega$ .

**Определение 2.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — компактное множество. Ограниченная функция  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *кусочно-постоянной* (ступенчатой), если существуют разбиение  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  множества  $\Omega$  и числа  $c_1, c_2, \dots, c_m$  такие, что  $x(t) = c_i$  для всех  $t \in \Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

**Определение 3.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — компактное множество. Ограниченная функция  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *правильной*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует разбиение  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  множества  $\Omega$  такое, что

$$\omega(x, \Omega_i) \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $\omega(x, \Omega_i) \doteq \sup_{t', t'' \in \Omega_i} |x(t') - x(t'')|$  — это колебание  $x$  на множестве  $\Omega_i$ .

В соответствии с замечанием 1 сумма  $x + y$  и произведение  $xy$  двух правильных функций  $x, y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  также являются правильными. (Аналогичное утверждение справедливо и для ступенчатых функций.) Пространство (алгебру) правильных функций  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  будем обозначать через  $G(\Omega)$ , либо через  $G(\Omega, \mathbb{R})$ .

Очевидно, всякая кусочно-постоянная функция является правильной. Более того, справедлива следующая

**Теорема 1.** *Функция  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  является правильной на компактном множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом последовательности ступенчатых функций.*

**Следствие.** *Равномерный предел последовательности, состоящей из правильных функций, есть функция правильная.*

**Теорема 2.** *Пространство  $\langle G(\Omega), \|\cdot\| \rangle$  является полным по норме  $\|x\| \doteq \sup_{t \in \Omega} |x(t)|$ .*

**Замечание 2.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — компактное множество. Легко убедиться, что всякая непрерывная функция  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  является правильной.

**Пример.** Пусть  $\Omega \doteq \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2: t^2 + \tau^2 \leq 1\}$ , функция  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что  $x(0, 0) = 0$  и  $x(t, \tau) = (t^2 + \tau^2) \left\{ \frac{1}{t^2 + \tau^2} \right\}$  при  $(t, \tau) \neq (0, 0)$  (выражение  $\{\sigma\}$  обозначает дробную часть числа  $\sigma \in \mathbb{R}$ ). Зафиксируем  $k = 1, 2, \dots$ . Для всех  $(t, \tau) \in \Omega$  таких, что  $t^2 + \tau^2 \in \left( \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ , справедливо неравенство  $k \leq \frac{1}{t^2 + \tau^2} < k + 1$ , поэтому  $\left[ \frac{1}{t^2 + \tau^2} \right] = k$  (здесь  $[\sigma]$  — целая часть числа  $\sigma \in \mathbb{R}$ ). Следовательно, для всех точек  $(t, \tau)$  из кольца

$$R_k \doteq \left\{ (t, \tau) \in \Omega: \frac{1}{k+1} < t^2 + \tau^2 \leq \frac{1}{k} \right\}$$

имеет место равенство  $x(t, \tau) = 1 - k(t^2 + \tau^2)$ . Таким образом, функция  $x$  непрерывна в каждом кольце  $R_k$ . Она разрывна во всех точках семейства концентрических окружностей

$$\left\{ t^2 + \tau^2 = \frac{1}{k+1} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В точке  $(0, 0)$  функция непрерывна. Понятно, что  $x \in G(\Omega)$ .

1. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
2. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
3. *Tvrđy M.* Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral // *Casopis Pro Pestovani Matematiky*. 1989. Vol. 114, no. 2, pp. 187–209.
4. *Родионов В.И.* Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2009. Вып. 4. С. 7–24.
5. *Honig Ch.S.* Volterra–Stieltjes integral equations. *Mathematics Studies*. Vol. 16. Amsterdam: North-Holland, 1975.

## Поиск аномалий в числовых рядах на основе исторических данных

**Е. С. Бастрыков**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*  
e-mail: vporoshok@gmail.com

Данная работа проводится как улучшение существующей системы по мониторингу серверной инфраструктуры многих клиентов. На данный момент система собирает большой массив предопределённых метрик с различных программных комплексов, развёрнутых на серверах клиентов. В системе есть правила определения нештатного поведения (триггеры), позволяющие уведомлять клиентов о неполадках. Показания метрик хранятся продолжительный период времени, позволяя анализировать их постфактум. Задачей данной работы является разработка подсистемы, обучаемой на данных, предшествующих срабатываниям триггеров, которая позволит предсказывать нештатное поведение за минуты до их наступления. В качестве основы исследования предполагается использовать LSTM-сеть [2]. Другой частью подсистемы будет поиск неполадок, ещё не отслеживаемых триггерами. Для этого будут использованы кластеризация рядов по корреляции поведений и леса [1].

1. *Liu F., Ting K., Zhou Zh.-H.* Isolation-Based Anomaly Detection // ACM Trans. Knowl. Discov. Data. 2012. Vol. 6, no. 1, pp. 3:1–3:39.
2. *Malhotra P., Vig L., Shroff G.M., Agarwal P.* Long Short Term Memory Networks for Anomaly Detection in Time Series // ESANN, 22-24 April 2015. Bruges, 2015, pp. 89–94.

## Параллелизация алгоритма сборки СЛАУ разрывного метода конечных элементов для двумерной краевой задачи

**В. С. Великань**

*Казань, Казанский федеральный университет*

e-mail: velickan.vladislav@yandex.ru

В работе рассматривается двумерное линейное уравнение на прямоугольнике  $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ , дополненное граничным условием Дирихле:

$$-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u(x)) + r(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = u_D(x). \quad (2)$$

Здесь  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ ,  $p \in C^1(\Omega)$ ,  $\exists p_0, p_1 > 0 : p_0 < p(x) < p_1$  при всех  $x \in \Omega$ . Функция  $r(x)$  является непрерывной и положительной на всей рассматриваемой области,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_D \in L^2(\partial\Omega)$ .

В работе [1] была получена вариационная постановка для задачи (1)–(2) на разрывном пространстве Соболева. Решение задачи (1)–(2) аппроксимируется кусочно разрывными функциями, сужения которых принадлежат пространству  $P_1$  на каждом конечном элементе. Поиск приближенного решения задачи (1)–(2) сводится к решению СЛАУ с блочной пятидиагональной матрицей

$$Ax = b. \quad (3)$$

В данной работе было рассмотрено несколько алгоритмов параллелизации сборки матрицы СЛАУ (3).

- **Наивный алгоритм** основывается на последовательном алгоритме сборки матрицы  $A$ . При таком подходе во время обхода ребер возникает вероятность конфликта (несколько нитей могут одновременно обратиться к одному и тому же элементу матрицы). Защитить сборку от конфликтов позволяют критические секции, существенно увеличивающие время работы алгоритма.
  - **Алгоритм colouring** [2] позволяет решить проблемы конфликтов наивного алгоритма с помощью перенумерации («закрашивания») ребер конечных элементов так, чтобы один элемент не содержал в себе двух ребер одного цвета. Сборка вклада ребер по каждому цвету осуществляется параллельно, между разными цветами необходима барьерная синхронизация нитей.
  - **Алгоритм блочно-диагональной параллелизации**, предложенный в данной работе, осуществляет независимую сборку главной и побочной диагонали матрицы  $A$  за счет связи между ребрами и конечными элементами. Такой подход позволяет избежать конфликтов и не требует внутренней барьерной синхронизации.
1. *Riviere B.* Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations. Philadelphia: SIAM, 2008.
  2. *Sato Y., Hino T., Ohashi K.* Parallelization of an unstructured Navier–Stokes solver using a multicolor ordering method for OpenMP // Computers & Fluids. 2013. Vol. 88, pp. 496–509.

# Методы анимирования поверхностей в 3d max

**Р. А. Головастов**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: rpa4@bk.ru

Пакет трехмерной графики 3d max обладает широким функционалом по моделированию двумерных многообразий. Основными способами построения различных поверхностей в трехмерных сценах являются следующие: построение на основе параметрически заданных стандартных примитивах, аппроксимация поверхностей полигональными сетками, поверхности Безье, лофтинг, каркасное моделирование на основе сплайнов с использованием модификатора Surface. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Наибольшее распространение благодаря простоте и понятности получил метод полигональных сеток.

Анимация поверхностей может осуществляется разными способами. Определяющими факторами в выборе инструментария здесь являются как построение поверхности, так и сложность анимируемых преобразований. Некоторые анимации реализуются в пару кликов за счет выбора подходящего модификатора и настройки его параметров (Twist, Bend, Wave, FreeFormDeformation и другие). Поверхности, построенные лофтингом или через модификатор Surface, могут быть анимированы через гомотопию определяющих их сплайнов, которую можно реализовать через скрипт контроллеры анимации вершин сплайнов.

Наибольшее же распространение в современной компьютерной графике (кино, игры) получил метод так называемого рига (англ. rig — оснастка). Суть его заключается в том, что за перемещение в пространстве групп вершин полигональной сетки отвечают вспомогательный объекты, так называемые кости. Используя принципы анатомии, данный подход позволяет автоматизировать процесс переноса движений от референсных моделей (люди, жи-

вотные, результаты вычисления нейронных сетей) в анимацию созданных в 3d max поверхностей.

Мы рассмотрели варианты скриптового управления анимацией поверхностей для иллюстрации гомотопий двумерных многообразий, построенных методом лофтинга и методом каркасов через модификатор Surface.

## Оценка эффективности и оптимизация систем кибербезопасности на основе стохастического моделирования

В. Ф. Горохова, А. А. Магазев

Омск, Омский государственный технический университет

e-mail: lera.tsyrunnik@mail.ru, magazev@mail.ru

Рассмотрим компьютерную систему (далее просто *систему*), которая в течении некоторого интервала времени может быть подвергнута воздействию любой из  $n$  независимых кибератак с вероятностями  $q_1, q_2, \dots, q_n$  соответственно. Допустим, что для отражения кибератак имеется  $m$  различных средств защиты, причём каждой паре «атака — средство защиты» сопоставлено число  $r_{i,a}$  — вероятность успешного отражения  $i$ -й кибератаки  $a$ -м средством защиты.

Выберем некоторый поднабор средств защиты из заданного набора  $m$  наименований. Для описания всех таких возможностей введём  $m$ -мерный булев вектор  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ , чья  $a$ -я компонента  $z_a$  равна единице, если  $a$ -е средство защиты выбрано, и нулю — в обратном случае. В силу того, что каждая кибератака может отражаться сразу несколькими средствами защиты, отражение  $i$ -й кибератаки — это сумма  $m$  совместных случайных событий, каждое из которых есть отражение этой атаки некоторым средством защиты. В результате вероятность отражения  $i$ -й

атаки выбранным поднабором средств защиты будет равна

$$r_i(\mathbf{z}) = 1 - \prod_{a=1}^m (1 - r_{i,a}z_a).$$

В наших предыдущих работах [1–4] был рассмотрен класс математических моделей, в рамках которых возможно количественное описание динамики противодействия кибератакам на языке марковских цепей с дискретным временем. Для оценки эффективности системы защиты от кибератак в рамках этих моделей нами был предложен параметр  $\tau$ , называемый *средним временем до отказа безопасности*. «Физический смысл» этого параметра — это среднее время до момента наступления так называемого *отказа безопасности*, то есть события, когда какая-либо из кибератак успешно реализуется злоумышленником. В работе [4] нами была получена явная формула для оценки этой величины

$$\tau(\mathbf{z}) = \frac{1 + \sum_{i=1}^n q_i}{\sum_{i=1}^n q_i \prod_{a=1}^m (1 - r_{i,a}z_a)}.$$

В соответствии с данной формулой, среднее время до отказа безопасности — это функция от булевых переменных  $z_a$ , зависящая от вероятностей  $q_i$  как от параметров.

Обозначим через  $c_a$  затраты на приобретение и эксплуатацию  $a$ -го средства защиты (в некоторых условных единицах) и введём функцию  $c(\mathbf{z})$ , значения которой равны суммарным затратам на эксплуатацию данного набора  $\mathbf{z} \in \{0, 1\}^m$  средств защиты

$$c(\mathbf{z}) = \sum_{a=1}^m c_a z_a.$$

Наличие функций  $\tau(\mathbf{z})$  и  $c(\mathbf{z})$  позволяет нам сформулировать две естественные задачи оптимизации:

1.  $\tau(\mathbf{z}) \rightarrow \max, c(\mathbf{z}) \leq c_0$ ;

$$2. c(\mathbf{z}) \rightarrow \min, \tau(\mathbf{z}) \geq \tau_0.$$

Первая задача — это максимизация среднего времени до отказа безопасности при имеющихся ограничениях на стоимость эксплуатации средств защиты, а вторая — это минимизация стоимости на эксплуатацию системы защиты при имеющемся ограничении на продолжительность безотказного функционирования защищаемой системы. Обе эти задачи относятся к классу задач нелинейного булева программирования, и поэтому являются трудно решаемыми с вычислительной точки зрения.

Целью настоящей работы является подробное исследование первой из сформулированных оптимизационных задач. В частности, мы показываем, что в случае одной кибератаки, то есть когда  $n = 1$ , она может быть сведена к эквивалентной *сепарабельной* задаче оптимизации. Мы также разрабатываем эффективный алгоритм её решения, основанный на применении концепции динамического программирования [5]. Обсуждаются перспективы использования полученного нами результата к общему случаю, когда число кибератак  $n$  произвольно.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 19-37-90122.

1. *Магазев А.А., Цырульников В.Ф.* Исследование одной марковской модели угроз безопасности компьютерных систем // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 4. С. 445–458.
2. *Magazev A.A., Tsyruльников V.F.* Optimizing the selection of information security remedies in terms of a Markov security model // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1096, p. 012160.
3. *Kasenov A.A., Kustov E.F., Magazev A.A., Tsyruльников V.F.* A Markov model for optimization of information security remedies // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1441, p. 012043.
4. *Касенов А.А., Магазев А.А., Цырульников В.Ф.* Марковская модель совместных киберугроз и ее применение для выбора оптимального набора средств защиты информации // Моделирование и анализ информационных систем. 2020. Т. 27, № 1. С. 108–123.
5. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967.

# Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния ствола артиллерийского орудия методом конечных элементов в пространственной осесимметричной постановке

Р. А. Думкин, Д. А. Ключкин, Р. Р. Хамидуллин

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*  
e-mail: dumkin215@yandex.ru, anatoliikljukin@mail.ru,  
1rifkat1@gmail.com

В процессе стрельбы ствол подвергается износу. Одна из главных причин — термическое воздействие. Постоянное расширение и возвращение ствола в первоначальное состояние из-за возгорания пороховых газов приводит к изменению поверхности ствола и баллистических характеристик, что влияет на его пригодность. Расчёт термоупругости ствола является актуальной проблемой в баллистике, поскольку от прочности ствола будут зависеть условия его применения и боевые характеристики.

Рассматривается задача моделирования напряженно-деформированного состояния ствола во время выстрела в осесимметричной постановке с учётом теплового нагружения ствола продуктами горения пороха, которое описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{xr}}{r} + F_x = \rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{xr}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (1)$$

где  $F_x$  и  $F_r$  — соответствуют силам теплового расширения ствола орудия:

$$F_x = \frac{\alpha E}{(1 - \nu)} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad F_r = \frac{\alpha E}{(1 - \nu)} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (2)$$

На левом торце ствола задавалось условие закрепления, на внешней границе и правом торце — атмосферное давление. На

внутренней поверхности канала ствола задавалось распределение давления  $p = p(t, x)$ , полученное из решения задачи внутренней баллистики [1]. Граничные условия в напряжениях определяются на внутренней стенке ствола из системы:

$$\begin{cases} n_x \sigma_{xx} + n_r \sigma_{xr} = n_x p, \\ n_x \sigma_{xr} + n_r \sigma_{rr} = n_r p. \end{cases} \quad (3)$$

Силы теплового расширения  $F_x$  и  $F_y$  определяются из решения уравнения теплопроводности, которое также представлено в осесимметричной постановке [3]:

$$\frac{\partial(c\rho T)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4)$$

с граничными условиями внутри канала ствола

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = a_g(T_g - T_s), \quad (5)$$

определяемыми из решения задачи внутренней баллистики [1].

Тестирование разработанного алгоритма для решения стационарной задачи проводилось на основе сравнения с аналитическим решением по формуле Ламе [2], а для динамической задачи — на основе сравнения с решением, полученным в системе инженерного проектирования Ansys.

Задача напряженно-деформированного состояния ствола 30-мм автоматической пушки решалась методом конечных элементов [4] путем преобразования исходной задачи в последовательность решений систем линейных алгебраических уравнений. Расчётная сетка была построена на четырехугольных конечных элементах. Результаты моделирования представлены на рис. 1.

Из рис. 1 а) видно, что за время выстрела ствол орудия прогревается на 0,1 мм, при этом температура достигает 970 К на внутренней поверхности ствола. Из рис. 1 б) видно, что максимальные напряжения при стрельбе достигаются в камере и равны 1400 МПа.

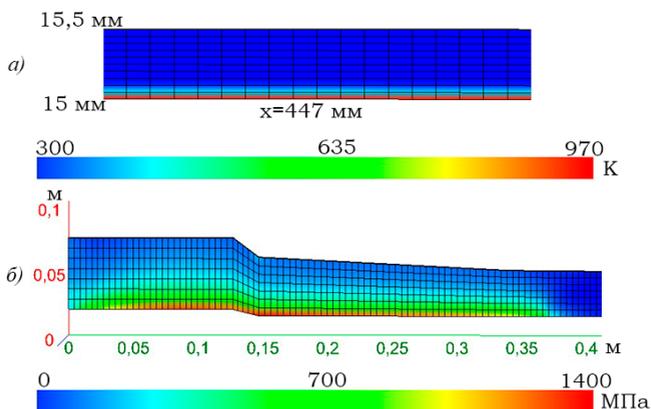


Рис. 1: Распределение а) температуры внутри ствола и б) эквивалентных напряжений по Мизесу в момент достижения максимального давления внутри ствола

Таким образом, в результате выполнения работы был реализован и протестирован алгоритм метода конечных элементов, проведена триангуляция расчетной области и решена задача определения напряженно-деформированного состояния ствола артиллерийского орудия в осесимметричной постановке.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072.

1. *Русяк И.Г., Иценко А.Н., Суфьянов В.Г., Касимов В.З., Ермолаев М.А., Широков В.М.* Анализ динамики внутрибаллистических характеристик с использованием программного комплекса моделирования артиллерийского выстрела // *Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Материалы VII международного симпозиума.* Москва, 11–13 сентября 2012. М.: РАН, 2012. Т. 2. С. 245–252.
2. *Колтунов М. А., Васильев Ю.Н., Черных В.А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975.
3. *Бронина Т.Н.* Алгоритм построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.
4. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.

# Неклассические задачи математической физики в теории квазистационарных электромагнитных процессов

А. В. Калинин, А. А. Тюхтина

*Нижегород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

e-mail: avk@mm.unn.ru, kalinmm@yandex.ru

Квазистационарные приближения для системы уравнений Максвелла [1] играют важную роль при решении широкого класса прикладных задач, связанных с формированием электромагнитных полей. Наибольшее распространение получило нерелятивистское магнитное приближение, формально заключающееся в пренебрежении током смещения и применяемое для описания достаточно медленных электромагнитных процессов в высокопроводящих средах [1–3]. Различные постановки задач для этого приближения достаточно хорошо исследованы теоретически, аналитически и численно [3–10].

При моделировании электромагнитных процессов в средах с малой проводимостью используется нерелятивистское электрическое приближение [1], заключающееся в пренебрежении изменением во времени магнитного поля. При этом ток смещения в системе уравнений Максвелла сохраняется в виде своей потенциальной составляющей. Особую роль это приближение играет при исследовании квазистационарных электромагнитных явлений в нижних слоях атмосферы Земли [11–14].

Реальные физические среды, рассматриваемые как при моделировании атмосферных явлений, так и при решении различных инженерных задач, могут характеризоваться значительной неоднородностью физических характеристик. В частности, расчетная область может содержать участки как с достаточно высокой, так и с достаточно низкой удельной проводимостью. При этом возникает проблема построения единой квазистационарной модели, которая охватывала бы среды со сложной структурой. Кроме того, требуется более тонкий анализ иерархии квазистаци-

онарных моделей в зависимости от значений параметров, характеризующих скорость протекания физических процессов и степень неоднородности среды [15].

В настоящей работе рассматриваются различные постановки задач для квазистационарного приближения, в котором выделяются потенциальная и вихревая компоненты электрического поля, в токе проводимости сохраняется полное электрическое поле, а в токе смещения — лишь потенциальная часть электрического поля [16, 17]. Доказываются теоремы о существовании и единственности решения поставленных задач. Проводится сравнение решений квазистационарных задач и соответствующих задач для нестационарной системы уравнений Максвелла и системы уравнений Максвелла в нерелятивистском магнитном и нерелятивистском электрическом приближениях. Показано, что рассматриваемое приближение обобщает классические нерелятивистские приближения и может применяться при исследовании более широкого круга задач математической физики, в частности, при моделировании электрофизических явлений в различных слоях атмосферы Земли.

Работа поддержана научно-образовательным математическим центром «Математика технологий будущего» (соглашение № 075-02-2022-883).

1. *Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. *Галантин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Физматлит, 1995.
3. *Alonso Rodriguez A., Valli A.* Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag Italia, 2010.
4. *Калинин А.В., Калинин А.А.* Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла // Вест. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. № 1. С. 21–38.
5. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном

- магнитном приближении // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 608–624.
6. *Калинин А.В., Тюхтина А.А.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями // Журнал СВМО. 2016. Т. 18, № 4. С. 119–133.
  7. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 2. С. 18–40.
  8. *Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A.* Methods of dual regularization for solving inverse problems of quasistationary electromagnetic fields theory// Baswell A.R., ed. *Advances in Mathematics Research*. New York: Nova Science Publishers, 2017. Vol. 24, ch. 4, pp. 59–124.
  9. *Калинин А.В., Тюхтина А.А., Изосимова О.А.* Модифицированные калибровочные соотношения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Журнал СВМО. 2017. Т. 19, № 4. С. 55–67.
  10. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* Lp-estimates for scalar products of vector fields and their application to electromagnetic theory problems // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2018. Vol. 41, no. 18, pp. 9283–9292.
  11. *Жидков А.А., Калинин А.В.* Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 4. С. 123–129.
  12. *Мареев Е.А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // *Успехи физ. наук*. 2010. Т. 180, № 5. С. 527–534.
  13. *Калинин А.В., Слюняев Н.Н., Мареев Е.А., Жидков А.А.* Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2014. Т. 50, № 3. С. 314–322.
  14. *Kalinin A.V., Slyunyaev N.N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2017. Vol. 450, no. 1, pp. 112–136.

15. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective // *Am. J. Phys.* 2007. Vol. 75, no. 3, pp. 230–239.
16. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* The Darwin approximation for the system of Maxwell's equations in inhomogeneous conducting media // *Comp. Math. Math. Phys.* 2020. Vol. 8 (60), pp. 121–134.
17. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields // *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23–27, 2020, Revised Selected Papers.* Springer, 2021, pp. 77–92.

## Метод композиции решения контактной задачи с трением деформируемых тел

**А. С. Карavaев, С. П. Копысов**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: karavaev-alexander@yandex.ru, s.kopysov@gmail.com

Развивается метод решения контактных задач с трением, подчиняющегося закону трения Кулона и строятся численные решения пространственных задач о контакте параллелепипеда с твердым основанием, куба с упругим полупространством в квазистатической постановке и контакте двух деформируемых тел.

Во многом этот алгоритм соответствует классическому методу декомпозиции Дирихле–Неймана. Однако реализуется противоположный подход — метод композиции, позволяющий построить решение задачи из более простых решаемых задач. Так, задача Дирихле заменяется контактной задачей деформируемого тела с твердым основанием. В этом случае для реализации численных методов для задач контакта с двумя телами можно использовать различные комбинации алгоритмов решения для каждого тела.

Процесс удовлетворения контактных условий содержит на внешний и внутренний итерационный цикл. Во внутреннем цикле

выполняется решение задачи одностороннего контакта с трением для тела  $\Omega^{(1)}$ , при этом граница тела  $\Omega^{(2)}$  фиксируется и выступает как твердое основание. Процесс удовлетворения контактных условий задается условиями Дирихле вдоль нормального и тангенциального направлений для выполнения условий непроникания и сцепления. При возникновении зоны скольжения вместо условий закрепления Дирихле вдоль тангенциальной составляющей, задаются силовые нагрузки аппроксимирующие выполнение закона Кулона. Во внешнем цикле решается задача Неймана для тела  $\Omega^{(2)}$  с заданными контактными нагрузками, определенными из реакций тела  $\Omega^{(1)}$  и полученными в результате решения задачи контакта во внутреннем цикле.

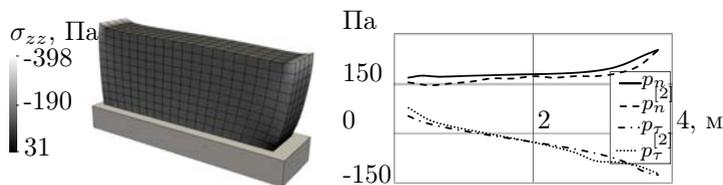


Рис. 1: Контакт пластины с основанием: напряжения  $\sigma_{zz}$ ; нормальная и касательная компонента контактного напряжения в данном алгоритме и работы [2]

В данной работе для удовлетворения условий закона Кулона в зоне области скольжения выполняется корректировка значений касательной компоненты узловой силы [1]. На каждой итерации внутреннего цикла тангенциальная компонента силы корректируется заданием соответствующего вектора узловых сил

$$\overline{f_i(\mathbf{x})} = f_{\tau,i-1}(\mathbf{x}) \pm \frac{|\sigma_{\tau,i-1}(\mathbf{x})| - |\mu\sigma_{n,i-1}(\mathbf{x})|}{\max(|\sigma_{\tau,i-1}(\mathbf{x})|, |\mu\sigma_{n,i-1}(\mathbf{x})|)} \alpha |f_{\tau,i-1}(\mathbf{x})|,$$

где  $f_{\tau,i-1}(\mathbf{x})$  — проекция узловой силы на касательную с предыдущей итерации.

Приведем результаты расчетов и их сравнения с известными результатами для тестовых задач.

Рассмотрено решение статической задачи контакта линейно-упругой пластины с твердым основанием из [2]. При заданных

нагрузках состояние равновесия тела в горизонтальной плоскости достигалось только за счет возникающей в контактной области силы трения (рис. 1).

Результаты решения квазистатической задачи одностороннего контакта деформируемого куба с твердым основанием [2] приведены на рис. 2.

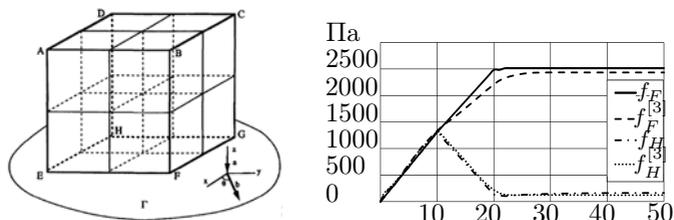


Рис. 2: Контакт куба с твердым основанием: граничные условия Дирихле на  $ABDC$ ; нормальная компонента контактного напряжения по шагам в узлах  $F$  и  $H$  в разработанном алгоритме и по данным из [3]

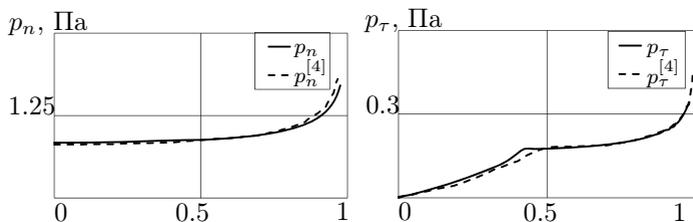


Рис. 3: Вдавливание блока в основание: нормальная  $p_n$ ,  $p_n^{[4]}$ ; и касательные  $p_\tau$ ,  $p_\tau^{[4]}$  компоненты в разработанном алгоритме и по данным работы [4]

В следующем тесте рассмотрено решение задачи вдавливания прямоугольного упруго блока в деформируемое основание [4]. Для стабилизации контактной зоны деформируемых тел потребовалось десять внешних итераций.

1. Станкевич И.В. Математическое моделирование контактных задач теории упругости с непрерывным односторонним контактом //

Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 5. С. 83–96.

2. *Oden J.T., Pires E.B.* Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws // *Computers and Structures*. 1984. Vol. 19, issue 1–2, pp. 137–147.
3. *Feng Z.Q.* Some test examples of 2D and 3D contact problems involving coulomb friction and large slip // *Mathematical and Computer Modelling*. 1998. Pp. 469–477.
4. *Olukoko O.A., Becker A.A., Fenner R.T.* Three benchmark examples for frictional contact modelling using finite element and boundary elements methods // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1993. Vol. 28, issue 4, pp. 293–301.

## **Нестационарное моделирование процесса плазменно-электролитной полировки нержавеющей стали 17-4 РН**

**Л. Н. Кашапов**

*Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Москва, ОИВТ РАН*

e-mail: LeNKashapov@kpfu.ru

Была разработана и применена модель плазменно-электролитной полировки (ПЭП) в предположении, что ПЭП можно рассматривать как электрохимическую полировку. Разработанная модель используется для моделирования электрических явлений и процесса удаления при ПЭП после возникновения стабильного парогазового слоя. Настройка модели и расчет производились в COMSOL Multiphysics. Были выбраны интерфейсы Electric Currents и Deformed Geometry. Исходный профиль поверхности анода был сгенерирован с использованием метода пространственных частот [1].

Геометрия модели и граничные условия основаны на принципиальной схеме (рис. 1). Ванна с электролитом — катод. Анод полностью погружают на глубину 5 мм. Он окружен парогазовым слоем. Модель имеет 3 домена: электролитный, парогазовый и анодный. На заготовку подается напряжение 200 В. В качестве электролита используется раствор сульфата натрия. Электропроводность равна 110 мСм/см, что соответствует концентрации раствора 50 г/л при 75 °С [2]. Материал анода — нержавеющая сталь 17-4 PH. Толщина парогазового слоя — 150 мкм [2]. Тогда электрическое поле равно  $E = \frac{U}{dh} = 13333$  В/см. Среднее значение плотности тока  $j_n$  для 200 В равно 0,3399 А/см<sup>2</sup> [2]. Тогда проводимость  $\sigma = \frac{j_n}{E} = 2.5 \cdot 10^{-2}$  мСм/см.

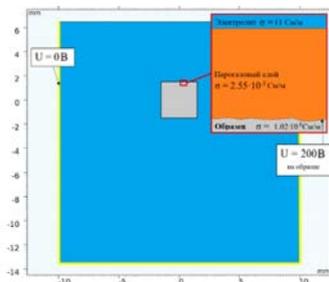


Рис. 1: Геометрия модели, граничные и доменные условия

Моделирование включает два исследования: стационарное исследование, в котором рассчитываются начальные значения электрических переменных, и исследование, зависящее от времени, в котором решаются физика электрических токов и деформация сетки. Деформация сетки описывается уравнением

$$V_{\text{deform}} = K \cdot (-j_n),$$

где  $K$  — коэффициент удаления [2];  $j_n$  — нормальная плотность тока. Величина  $K$  рассчитывается из экспериментальных данных: средней скорости съема материала ( $MRR$ ) и средней плотности тока для 200 В:  $K = \frac{MRR}{j_n} = 1.54 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>/А · с.

**Результаты моделирования.** На рисунке 2 показан электрический потенциал вблизи поверхности заготовки на различных временных шагах.

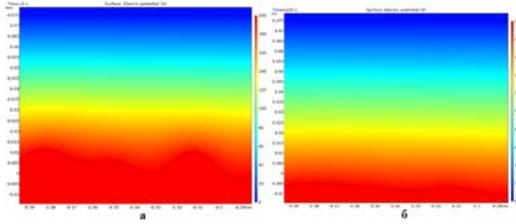


Рис. 2: Поверхность заготовки и электрический потенциал при а) 0 с. и б) 120 с.



Рис. 3: Профиль поверхности при 0 с. и 120 с.

Парогазовый слой можно рассматривать как особую электрохимическую ячейку, в которой граница между парогазовым слоем и электролитом выступает в качестве катода. Нормальная плотность тока в полостях ниже, чем у пиков. Из-за электрохимического характера процесса это приводит к более быстрому удалению материала на пиках.

На рисунке 3 показан профиль поверхности до и после 120 секунд полировки. Видно, что пики были заметно удалены. Это можно объяснить более высокой плотностью тока на вершинах.

Для анализа полирующего эффекта был рассчитан параметр шероховатости  $Ra$ . Уравнение для расчета  $Ra$  было разработано на основе следующей формулы:

$$Ra = \frac{1}{l} \int_0^l |h(x)| dx,$$

где  $l$  — длина оценки,  $h(x) = |y - \bar{y}|$  — отклонение от средней

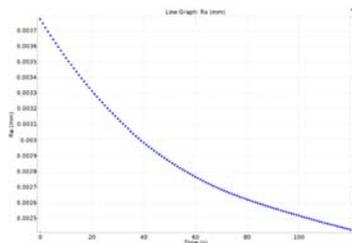


Рис. 4: Результаты для  $Ra$  как функция времени.

линии. Результаты этого расчета можно увидеть на рисунке 4. Видно, что шероховатость уменьшается в соответствии с экспоненциальным затуханием.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 21-79-30062.

1. *Sjodin B.* Multiphysics|COMSOL Blog [Электронный ресурс]: How to Generate Random Surfaces in COMSOL. URL: <https://www.comsol.com/blogs/how-to-generate-random-surfaces-in-comsol-multiphysics/> (дата обращения: 20 января 2022).
2. *Danilov I., Hackert-Oschatzchen M., Zinecker M., Meichsner G., Edelmann J., Schubert A.* Process Understanding of Plasma Electrolytic Polishing through Multiphysics Simulation and Inline Metrology. 2019. *Micromachines*, 10.

## Исследование напряженно-деформированного состояния и колебаний ствола автоматической пушки при стрельбе очередями

**Д. А. Клюкин**

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: anatoliikljukin@mail.ru

В работе рассматривается задача математического моде-

лирования напряженно-деформированного состояния ствола 30-мм автоматической пушки (рис. 1), устанавливаемую преимущественно на наземную бронетехнику. Темп стрельбы данной пушки составляет 4000 выст./мин, длина короткой очереди – 5 выстрелов, огонь ведется боеприпасами 30x165 мм [1].



Рис. 1: Модель ствола 30-мм автоматической пушки

Приближенная геометрия пушки представлена в таблице 1.

Таблица 1: Геометрия 30-мм автоматической пушки

Координата сечения $x$ , м	Внутренний диаметр $d$ , мм	Внешний диаметр $D$ , мм
0	40	150
0,127	40	150
0,147	30	120
0,339	30	100
2,4	30	60

Задача продольно-поперечных колебаний ствола описывается дифференциальными уравнениями в частных производных по формуле (1) [2].

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho F g \sin \varphi + q_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (F \sigma^x) - p_1 \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = & -\rho F g \cos \varphi + q_2(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( (F \sigma^x - p_1 S) \frac{\partial (v + v_{00})}{\partial x} \right) + \\ & + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) y df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E J_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad (2) \end{aligned}$$

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_3(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( (F \sigma^x - p_1 S) \frac{\partial (w + w_{00})}{\partial x} \right) +$$

$$+\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) z df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3)$$

$$\sigma^x = E \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{F} \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) df, \quad (4)$$

Нагружение давлением  $p_1$  определяется из решения задачи внутренней баллистики в термодинамической постановке [3], при этом напряжения в поперечном сечении определяются из решения задачи Ламе [4]. На рисунке 2 представлен начальный прогиб автоматической пушки под действием силы тяжести при угле возвышения  $5^\circ$ .

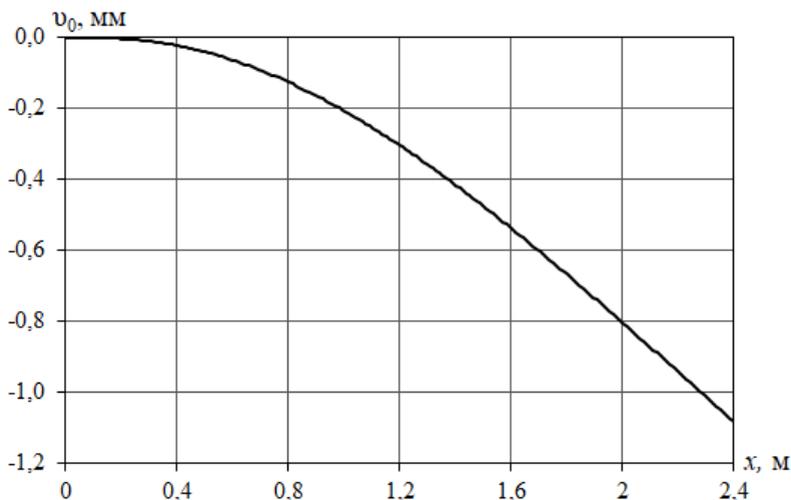


Рис. 2: Начальный прогиб ствола 30-мм автоматической пушки под действием силы тяжести

Из рисунка 2 видно, что под действием силы тяжести дульный срез смещается на 1,08 мм, что необходимо учитывать при стрельбе на большое расстояние. На рисунке 3 представлены поперечные колебания дульного среза 30-мм автоматической пушки при стрельбе очередью из 5 выстрелов с интервалом в 15 мс.

Из рисунка 3 видно, что каждый последующий выстрел значительно смещает положение дульного среза, что также негатив-

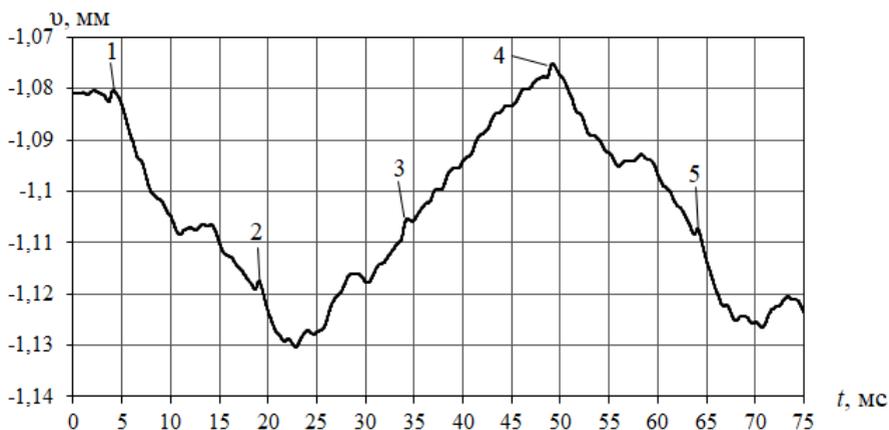


Рис. 3: Поперечные колебания ствола 30-мм автоматической пушки при стрельбе очередью из 5 выстрелов

но сказывается на точности стрельбы. Амплитуда колебаний при этом составила 0,055 мм, частота колебаний 20 Гц.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072.

1. 30 mm 2A72 // WeaponSystems.net.  
URL: <https://weaponsystems.net/system/534-30mm+2A72> (дата обращения 01.04.2022 г.)
2. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
3. Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
4. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1986.

# Построение двумерной математической модели и вычислительных алгоритмов задач фильтрации структурированных флюидов в двухслойном пласте

**Ш. Каюмов, А. П. Марданов, Т. О. Хаитов**

*Ташкент, Ташкентский государственный технический университет*

e-mail: kayumovmatomic@gmail.com, apardayevich@mail.ru,  
tojiboy.xaitov.77@gmail.ru

**А. Б. Каюмов**

*Ташкент, Университет Инха в городе Ташкенте*

e-mail: akayumovb@gmail.ru

Известно, что основные запасы полезных флюидов, используемых в народном хозяйстве, находятся в подземных пористых средах, и эти среды в большинстве случаев являются многослойными. В свою очередь, эти многослойности квалифицируются как многопластовые среды, имеющие четкие границы пластов с проницаемыми и непроницаемыми кровлями и подошвами. Если эти пласты гидродинамически связаны, то в процессе фильтрации могут происходить взаимнообмены между пластами, называемые перетоками из одного пласта в другой. Эти перетоки могут происходить по ряду причин, и они, в основном, связаны со структурой среды и зависят от величин горизонтальных и вертикальных характеристик пласта. Если нижние и верхние границы непроницаемы, то эти пласты можно считать изолированными друг от друга, и в них не будут происходить перетоки из одного слоя в другие. В этих изолированных средах взаимнообмен может происходить только через общую скважину, если она вскрыта по высоте каждого пласта. В этих случаях также могут быть неопределённости по поводу того, какая величина отбора из каждого пласта происходит в едином дебите общей скважины. Для многопластовых структур существует различные модели фильтрации, и они описаны в работах [1–3] для ньютоновских

флюидов. При этом трехслойные пласты могут представлять собой варианты, когда верхний и самый нижний хорошо проницаемы, а средний — плохо проницаем, или средний хорошо проницаем, а нижний и верхний плохо проницаемые пласты. В работах [4–9] исследован процесс фильтрации неструктурированных и структурированных [6] флюидов в однослойных, двухслойных и трехслойных средах. Эти исследования, в основном, проведены для одномерных математических моделей, которые являются частным случаем многомерной среды. Пусть имеется гидродинамически связанная двухпластовая среда, причем нижняя область  $\Omega_1(x, y, z)$  имеет коэффициенты проницаемости по плоскости на несколько порядков больше, чем по вертикали и, следовательно, можно предположить осреднение по вертикали, что эквивалентно предположению, что движение флюида по вертикали не происходит. Второй верхний пласт — область  $\Omega_2(\bar{x}, \bar{y}, z)$  — такова, что там движение флюида происходит по вертикали, так как горизонтальная плоскость однородная по  $x$  и  $y$ , а неоднородность в характеристиках среды имеется только по вертикали (по  $z$ ). Поэтому предположим, что движение флюида имеет место только по вертикали. Такая физическая задача математически моделируется так: необходимо найти непрерывные функции  $u(x, y, t)$  и  $v(\bar{x}, \bar{y}, z, t)$ , определенные в области  $\Omega_1(x, y, z)$  и  $\Omega_2(\bar{x}, \bar{y}, z)$ , а также границы возмущенных зон  $G_i(x, y, t)$ ,  $R_i(\bar{x}, \bar{y}, z, t)$  из следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( X_i(|\nabla u|, \beta_i) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( X_i(|\nabla u|, \beta_i) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \\ & - a_1 \Phi(|\nabla v|, \bar{\beta}) \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=H_1} = M_i \frac{\partial u}{\partial t} + F(x, y, t), \\ & (x, y) \in \Omega_1, \quad z = H_1, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left( \Phi_i(|\nabla v|, \bar{\beta}_i) \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \\ & = \bar{M}_i \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad z(H_1; H_2), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

с начальными

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v(\bar{x}, \bar{y}, z, 0) = v_0(\bar{x}, \bar{y}, z), \quad (3)$$

$$G_i(x, y, 0) = N_0, \quad R(\bar{x}, \bar{y}, z, 0) = H_{1,0}(\bar{x}, \bar{y}, H_1), \quad (4)$$

граничными

$$X_1(|\nabla u|, \beta_1) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{n \in G_{1-0}} = X_2(|\nabla u|, \beta_2) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{n \in G_{1+0}}, \quad (5)$$

$$X_2(|\nabla u|, \beta_2) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{n \in G_{2-0}} = X_3(|\nabla u|, \beta_3) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{n \in G_{2+0}}, \quad (6)$$

$$\Phi_1(|\nabla v|, \bar{\beta}_1) \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z \in R_{1-0}} = \Phi_2(|\nabla v|, \bar{\beta}_2) \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z \in R_{1+0}}, \quad (7)$$

$$\Phi_2(|\nabla v|, \bar{\beta}_2) \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z \in R_{2-0}} = \Phi_3(|\nabla v|, \bar{\beta}_3) \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z \in R_{2+0}}, \quad (8)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{n \in G_{1-0}} = u(x, y, t) \Big|_{n \in G_{1+0}}, \quad (9)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{n \in G_{2-0}} = u(x, y, t) \Big|_{n \in G_{2+0}}, \quad (10)$$

$$v(\bar{x}, \bar{y}, z, t) \Big|_{z \in R_{1-0}} = v(\bar{x}, \bar{y}, z, t) \Big|_{z \in R_{1+0}}, \quad (11)$$

$$v(\bar{x}, \bar{y}, z, t) \Big|_{z \in R_{2-0}} = v(\bar{x}, \bar{y}, z, t) \Big|_{z \in R_{2+0}}, \quad (12)$$

а также условиями на границах областей

$$\alpha_1 X(|\nabla u|, \beta) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{n \in (x_0, y_0)} = \varphi(t), \quad (13)$$

$$\alpha_2 X(|\nabla u|, \beta) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{n \in \Gamma(x, y)} = 0, \quad (14)$$

$$\alpha_3 \Phi(|\nabla v|, \beta) \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z \in H_2(x_0, y_0)} = 0. \quad (15)$$

В задаче (1)–(15) параметры пласта и флюида  $k_1(x, y)$ ,  $k_2(z)$ ,  $m_1(x, y)$ ,  $m_2(z)$ ,  $v(x, y)$ ,  $v(z)$ ,  $\mu_1(x, y)$ ,  $\mu_2(z)$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  содержатся

в функциях  $X_i$  и  $\Phi_i$ , и они описывают те же пластовые характеристики, что и в [10–12]. Функции  $X_i$  и  $\Phi_i$  в соответствие с принадлежностью различным зонам структурированного флюида имеют свои выражения

$$\begin{aligned}
 X_i(|\nabla u|, \beta) &= \left\{ \left[ \frac{k_1(x, y)\beta_1}{v(x, y)h_1}; (x, y) \in ((x_0, y_0); G_1(x, y, t)) \right]; \right. \\
 &\left[ \frac{k_1(x, y)\beta_2}{v(x, y)h_1} \cdot \frac{|\nabla u| - \beta_2\gamma_0}{|\nabla u|}; (x, y) \in (G_1(x, y, t); G_2(x, y, t)) \right]; \\
 &\left. \left[ \frac{k(x, y) \cdot \beta_3}{\mu_1(x, y)h_1}; (x, y) \in (G_2(x, y, t); \Gamma(x, y)) \right] \right\}, \\
 \Phi_i(|\nabla u|, \beta) &= \left\{ \left[ \frac{k_2(z) \cdot \bar{\beta}_1}{v_2(z) \cdot h_2}; z \in (H_1; R_1) \right]; \right. \\
 &\left[ \frac{k(z)\bar{\beta}_2}{\mu_2(z) \cdot h_2} \cdot \frac{|\nabla v| - \bar{\beta}_2\gamma_0}{|\nabla v|}; z \in (R_1; R_2) \right]; \\
 &\left. \left[ \frac{k(z)\bar{\beta}_3}{\mu_2(z)h_2}; z \in (R_2; H_2) \right] \right\} \quad i = \overline{1, 3}.
 \end{aligned}$$

При желании можно применять другие виды аппроксимации в зонах аномальной подвижности и ползучести. Так как задача (1)–(15) — нелинейная, и ее аналитическое решение практически невозможно, то для ее решения применяются приближенные методы. Используя метод переменных направлений (или метод дробных шагов) [13, 14] по переменной  $t$ , задача приводится к одномерным задачам по каждому направлению  $x$  и  $y$ . Далее, вводя поток по переменными  $x$  и  $y$ , получим расщепленные задачи относительно потока. Применяя потоковый вариант прогонки, сводим задачу к решению системы разностных уравнений. Подвижные неизвестные границы определяется из разностных аналогов (5)–(12) на каждом шаге сетки. Поскольку в начальный момент границы возмущений неизвестны, то задается начальное нулевое значение [15] границы подвижных зон, и относительно них тоже используется итерационный процесс [16].

Построенные алгоритмы апробированы на гипотетических данных, результаты вычислительные экспериментов показали

возможность использования математической модели и алгоритмов вычисления для определения геолого-промысловых данных при проектировании и эксплуатации двухпластовых месторождений флюидов.

1. *Гусейнзаде М.А., Колосовская А.К.* Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. Москва: Недра, 1972.
2. *Бегматов А.* К расчету неустановившейся фильтрации в многослойных пластах // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 1974. № 4. С. 182–188.
3. *Аббасов М.Т., Кулиев А.М.* Методы гидродинамических расчетов разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Баку: ЭЛМ, 1976.
4. *Мухидинов Н.М.* Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Ташкент: Фан, 1978.
5. *Закиров С.Н.* Определения показателей разработки многопластовых месторождений при наличии газодинамической связи между пластами // Разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений. 1970. № 8.
6. *Левашкевич В.Г.* Зависимость вязкости, подвижности и скорости фильтрации аномально-вязкой нефти от градиента давления // Известия ВУЗов, серия «Нефть и газ». 1982. № 11. С. 58–63.
7. *Каюмов Ш.* К вопросу о математическом моделировании структурированных флюидов // Вычислительные технологии. Труды международной конференции RDAAM. 2001. Т. 6, № 11. С. 183–190.
8. *Каюмов Ш., Исканаджиев И.* Математическое моделирование структурированных флюидов в многослойных средах // Тезисы докладов Всероссийской конференции «Проблемы механики сплошных сред и физика взрыва». Новосибирск, 2007. С. 98–99.
9. *Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б.* Математического моделирования структурированных флюидов в связанных пластах // Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механике». Воронеж, 2020. С. 934–942.
10. *Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б.* Об одной математической модели задачи теории фильтрации структурированных флюидов в двухслойной пласте // Тезисы докладов

республиканской научной конференции «Сарымсаковские чтения». Ташкент, 2021. С. 82–84.

11. *Каюмов Ш.* Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. Ташкент: Изд-во ТГТУ, 2017.
12. *Qayumov Sh., Mardanov A.P., Xaitov T.O., Qayumov A.B.* Multiparameter mathematical models of the problem of problem of filtration of unstructured and structured fluids // E3S. Web of conferences 264. 01030(2021).
13. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1977.
14. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
15. *Каюмов Ш.* Алгоритм и программа для решения одномерных задач теории фильтрации вязко пластичных жидкостей и газов // Алгоритмы. 1984. Вып. 53. С. 41–49.
16. *Каюмов Ш.* Приближенно-аналитические методы решения задач теории фильтрации вязкопластических флюидов. Ташкент: Фан, 1991.

## **Задача восстановления коэффициентов SEIR–подобной эпидемиологической модели с учётом различного вида погрешностей в эпидемиологической статистике**

**М. М. Кокурин, А. В. Семёнова, Ч. М. Абду Рауф**

*Йошкар–Ола, Марийский государственный университет*

e-mail: kokurin@nextmail.ru, anst-val@yandex.ru,

abdouraoufcheha370@gmail.com

Изучается SEIR–подобная эпидемиологическая модель

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (1 - e(t) - i(t) - r_e(t) - r_i(t) - p(t)) \times \\ \quad \times (a_e e(t) + a_i i(t)) - (\varkappa + \rho)e(t), \\ \dot{i}(t) = \varkappa e(t) - (\beta + \mu)i(t), \\ \dot{r}_e(t) = \rho e(t) - \gamma_e r_e(t), \quad \dot{r}_i(t) = \beta i(t) - \gamma_i r_i(t), \\ \dot{r}_o(t) = \beta i(t), \quad \dot{p}(t) = \mu i(t), \end{cases} \quad (1)$$

и ставится задача восстановления её неизвестных параметров по данным эпидемиологической статистики на примере распространения эпидемии COVID-19 в регионах России и зарубежных странах. Модель (1) основана на разделении населения рассматриваемого ареала на следующие группы: бессимптомные заражённые с относительной численностью  $e(t)$ , симптомные больные с относительной численностью  $i(t)$ , выздоровевшие после бессимптомного заражения и имеющие иммунитет (относительная численность  $r_e(t)$ ), выздоровевшие после симптомной болезни и имеющие иммунитет (относительная численность  $r_i(t)$ ), погибшие (относительная численность  $p(t)$ ), восприимчивые к инфекции (относительная численность  $s(t) = 1 - e(t) - i(t) - r_e(t) - r_i(t) - p(t)$ ). Здесь под относительной численностью понимается отношение количества людей, принадлежащих к той или иной группе, к общей численности популяции. Обзор других SEIR-подобных эпидемиологических моделей приведён в [1]. Значения функций  $i(t)$  и  $p(t)$  можно считать приближённо известными из эпидемиологической статистики заражений и смертности. В то же время, статистика выздоровлений не соответствует ни одной из описанных выше функций. Дело в том, что модель (1) учитывает постепенную утрату иммунитета переболевшими и их переходу из группы «выздоровевших» в группу «восприимчивых», что, однако, не отражается на эпидемиологической статистике выздоровлений. Поэтому в модель (1) добавлена дополнительная функция  $r_o(t)$ , показывающая относительную численность «наблюдаемых выздоровевших».

Мы предполагаем, что эпидемиологическая статистика заражений, выздоровлений и смертности соответствует значениям функций  $i(t)$ ,  $r_o(t)$  и  $p(t)$ , называемых ниже наблюдаемыми величинами. Но в соответствии между статистикой и значениями

этих величин есть погрешности следующих видов:

1. Систематическое занижение статистики, обусловленное ограниченностью возможностей медицинской системы. Мы предполагаем, что все три статистики (заражений, выздоровлений и смертности) занижены примерно в одинаковое количество раз, которое может быть установлено путём сравнения с данными об избыточной смертности.

2. Временные сдвиги эпидемиологической статистики относительно реальных значений наблюдаемых величин, обусловленные задержками между заболеванием/выздоровлением/смертью человека и включением этой информации в статистику. Кроме того, рассмотрение возможности таких сдвигов позволяет устранить внутренний недостаток модели (1), в которой не учитывается ненулевая минимальная длительность болезни.

3. Малые случайные погрешности, не относящиеся к двум предыдущим видам.

Изучение модели (1) имеет две основные цели: прогнозирование распространения эпидемии на будущие промежутки времени и установление эпидемиологических параметров, таких как индекс репродукции  $R_0$  (определяющий заразность инфекции), летальность, вероятность заболеть в единицу времени и др. В свою очередь, эта информация позволяет оценить степень опасности инфекции и целесообразность введения тех или иных мер борьбы с эпидемией. Для достижения обеих целей необходимо найти неизвестные коэффициенты  $a_e, a_i, \kappa, \rho, \beta, \mu, \gamma_e, \gamma_i$  и начальные значения всех функций в системе (1), в т.ч. ненаблюдаемых величин  $e(t), r_e(t), r_i(t)$ . Мы представляем эту задачу восстановления неизвестных параметров модели (1) в виде операторного уравнения

$$F(x) = f, \quad (2)$$

где  $x$  — вектор, содержащий все неизвестные значения,  $f$  — вектор, содержащий значения наблюдаемых величин в рассматриваемый промежуток времени,  $F$  — оператор, действующий в соответствующих многомерных пространствах. Для решения уравнения (2) применяется подход, основанный на итеративно регуля-

ризованном методе Гаусса–Ньютона [2]

$$x_{n+1} = \xi - (F'^*(x_n)F'(x_n) + \alpha_n E)^{-1} F'^*(x_n) \times \\ \times (F(x_n) - f_\delta - F'(x_n)(x_n - \xi)). \quad (3)$$

Здесь  $x_0$  и  $\xi$  — начальные приближения для искомого вектора неизвестных коэффициентов  $x$ ;  $E$  — единичный оператор; вектор  $f_\delta$  содержит данные эпидемиологической статистики, обработанные с целью устранения погрешностей первых двух видов. Предложен способ подбора величин сдвигов эпидемиологической статистики и момента останова итераций в методе (3).

Изменения характера эпидемии, обусловленные мутациями инфекционного агента, а также мерами по борьбе с эпидемией (локдаунами и массовой вакцинацией), требует изучения зависимости коэффициентов модели (1) от времени. Для этого предлагается два разных подхода. В рамках первого из них зависимость коэффициентов от времени явно включается в модель (1); для простоты эта зависимость считается кусочно-постоянной, и метод (3) используется для установления этой зависимости. В рамках второго подхода задача восстановления коэффициентов модели (1) решается с помощью метода (3) на сравнительно небольших промежутках времени, на каждом из которых все коэффициенты можно считать постоянными, причём полученные значения коэффициентов для каждого из этих промежутков выбираются в качестве начальных приближений при решении задачи восстановления коэффициентов на следующем промежутке времени.

Результаты численных экспериментов показывают применимость предлагаемых подходов для изучения динамики эпидемиологических параметров, эффективности мер борьбы с эпидемией, а также прогнозирования её распространения.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 20–11–20085, <https://rscf.ru/project/20-11-20085/>.

1. *Sameni R.* Mathematical Modeling of Epidemic Diseases; A Case Study of the COVID–19 Coronavirus. arXiv:2003.11371v1 [q-bio.PE] 25 Mar 2020.
2. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2012.

# Алгоритм решения задачи оптимизации конструкции заряда с целью повышения дульной скорости снаряда

**И. Д. Кочурова**

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: idk157@mail.ru

В настоящее время широко используются комбинированные заряды, состоящие из пороховых элементов различных типов (трубчатый, зерненный) и разных марок, которые отличаются геометрией и теплофизическими характеристиками. Такие комбинированные заряды позволяют повысить эффективность разгона снаряда, снизить габариты установки и т.п. [1, 2]. Примерами могут служить комбинированные заряды, состоящие из двух типов и двух марок порохов. Газодинамические модели описания баллистики таких зарядов, алгоритмы и методы их численного расчета приводятся в данной работе. Определенный интерес представляет оптимизация конструкции таких зарядов с точки зрения повышения дульной скорости снаряда при ограничениях на максимальное давление в канале ствола. Ниже такая задача рассмотрена в рамках подхода к оптимизации конструкции заряда в целях повышения дульной скорости снаряда. Задача внутренней баллистики рассматривается в рамках термодинамического подхода [3]. Опишем математическую постановку задачи. Условия динамической совместности для определения параметров продуктов горения на границах:

– в сечении 1–1 (рис. 1 а))

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 m_1 S_{\text{КН}} (\nu_1 - w_{\text{T}}) = S_{\text{ТК}} \rho_{\text{ТК}} (\nu_{1\text{ТК}} - w_{\text{T}}) + S_{\text{ТЗ}} \rho_{\text{ТЗ}} (\nu_{1\text{ТЗ}} - w_{\text{T}}), \\ G_1 \nu_1 + p_1 m_1 S_{\text{КН}} = \rho_1 (m_1 S_{\text{КН}} - S_{\text{ТК}} - S_{\text{ТЗ}}) + G_{1\text{ТТ}} \nu_{1\text{ТК}} + \\ + p_{\text{ТК}} S_{\text{ТК}} + G_{1\text{ТТ}} \nu_{1\text{ТЗ}} + p_{\text{ТЗ}} S_{\text{ТЗ}}, \\ G_1 (c_{\nu} T_1 + \frac{\nu_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}) = G_{1\text{ТК}} (c_{\nu} T_{\text{ТК}} + \frac{\nu_{1\text{ТК}}^2}{2} + \frac{p_{\text{ТК}}}{\rho_{\text{ТК}}}) + \\ + G_{1\text{ТЗ}} (c_{\nu} T_{\text{ТЗ}} + \frac{\nu_{1\text{ТЗ}}^2}{2} + \frac{p_{\text{ТЗ}}}{\rho_{\text{ТЗ}}}), \quad G_1 = \rho_1 m_1 S_{\text{КН}} (\nu_1 - w_{\text{T}}), \\ G_{1\text{ТК}} = S_{\text{ТК}} \rho_{\text{ТК}} (\nu_{1\text{ТК}} - w_{\text{T}}), \quad G_{1\text{ТЗ}} = S_{\text{ТЗ}} \rho_{\text{ТЗ}} (\nu_{1\text{ТЗ}} - w_{\text{T}}); \end{array} \right.$$

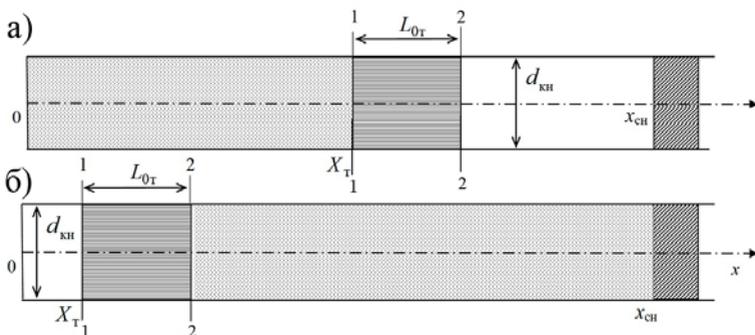


Рис. 1: Схема комбинированного заряда а) зерно-трубки, б) трубки-зерно

– аналогично в сечении 2–2.

Запишем динамическое и кинематическое уравнения движения снаряда с учетом противодействия и давления форсирования:

$$\begin{cases} \nu_{сн} = 0, & \text{если } p_{сн} \leq p_{ф}, \\ q \frac{d\nu_{сн}}{dt} = S_{кн}(p_{сн} - p_{пр}), & \text{если } p_{сн} > p_{ф}, \\ p_{пр} = p_{н} \left( 1 + \frac{k_{в+1}}{4} k_{в} \frac{\nu_{сн}}{c_{в}} \sqrt{1 + \left( \frac{k_{в+1}}{4} \right)^2 \left( \frac{\nu_{сн}}{c_{в}} \right)^2} \right). \end{cases}$$

Условия динамической совместности для определения параметров продуктов горения на границах:

– в сечении 1–1 (рис. 1 б):

$$\begin{cases} G_1 = G_{1ТК} + G_{1ТЗ} \text{ или} \\ S_{ТК} \rho_{ТК} (\nu_{2ТК} - w_{Т}) + S_{ТЗ} \rho_{ТЗ} (\nu_{2ТЗ} - w_{Т}) = S_{кн} m_2 \rho_2 (\nu_2 - w_{Т}), \\ G_{2ТК} \nu_{2ТК} + p_{ТК} S_{ТК} + G_{2ТЗ} \nu_{2ТЗ} + \\ + p_2 (m_2 S_{кн} - S_{ТК} - S_{ТЗ}) = G_2 \nu_2 + p_2 m_2 S_{кн}, \\ G_{2ТК} (c_{\nu} T_{ТК} + \frac{\nu_{2ТК}^2}{2} + \frac{p_{ТК}}{\rho_{ТК}}) + \\ + G_{1ТЗ} (c_{\nu} T_{ТЗ} + \frac{\nu_{2ТЗ}^2}{2} + \frac{p_{ТЗ}}{\rho_{ТЗ}}) = G_2 (c_{\nu} T_2 + \frac{\nu_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}), \end{cases}$$

где  $G_1 = p_1 S_{кн} (\nu_1 - w_{Т})$ ;  $\rho_1, p_1, T_1, \nu_1$  – давление, плотность, температура газа и его скорость в сечении 1–1 в области свободного объема соответственно;

— аналогично для сечения 2–2.

Заметим, что системы уравнений необходимо дополнить начальными условиями.

Для решения задачи структурно-параметрической оптимизации применяются генетические алгоритмы (ГА) [4]. Они позволяют за приемлемое время получить близкие к оптимальному решения многоэкстремальных задач с произвольной целевой функцией. Такие алгоритмы просты в масштабировании, позволяя распределять вычислительную нагрузку на множество вычислительных устройств. Блок-схема алгоритма представлена на рис. 2.

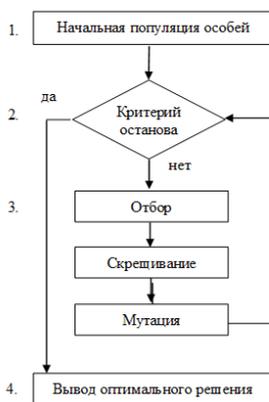


Рис. 2: Блок-схема генетического алгоритма

В качестве варьируемых параметров структурно-параметрической оптимизации использовались следующие параметры: порядковый номер, начиная от дна камеры,  $k = \overline{1, K}$ , где  $K$  — количество компонентов;  $s$  — тип пороха (трубчатый  $s = 1$ , зерный  $s = 2$ ); марка пороха  $r$ , где для трубчатого пороха  $r = \overline{1, R_1}$ , для зернового  $r = \overline{1, R_2}$ ;  $R_1, R_2$  — общее количество марок трубчатого и зернового пороха соответственно;  $l_k$  — длина компонента;  $\Delta_k$  — плотность заряжения компонента.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–01–00072.

1. *Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З.* Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в стволовых системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
2. *Орлов Б.В., Ларман Э.К., Маликов В.Г.* Устройство и проектирование стволов артиллерийских орудий. М.: Машиностроение, 1976.
3. *Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М.* Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
4. *Панченко Т.В.* Генетические алгоритмы. Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007.

## **Оценивание параметров нелинейных регрессионных моделей, описывающих динамику ударной волны**

**И. Н. Краснопёров**

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: krasnop1001@mail.ru

Неправильное применение взрывной нагрузки в строительстве может привести не только к непропорциональному разрушению конструкции, но и к огромным человеческим жертвам и травмам. Анализ конструкций, подверженных взрывной нагрузке, является первым этапом проектирования и требует хорошего понимания взрывных явлений и последующей динамической реакции конструкций [1].

Для описания взрывной нагрузки обычно применяются математические модели распространения ударной волны, которые описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных. Решение этих уравнений является достаточно трудоемкой задачей, так как требует достаточно мелкого шага для точного расчета параметров ударной волны в каждой точке [2]. В этой связи используется инженерный подход, основанный на построении нелинейной регрессионной модели Фридлендера для

описания динамики параметров ударной волны в точке [1]:

$$P_t = \begin{cases} P_0 + P_s \left(1 - \frac{t-t_0}{t_d}\right) e^{-\frac{b(t-t_0)}{t_d}}, & t \geq t_0, \\ P_0, & t < t_0. \end{cases} \quad (1)$$

Параметр  $P_s$  регрессионной модели определяется в соответствии с одной из моделей:

1. Модель Нелд:  $P_s = 2\frac{W^{2/3}}{R^2}$ .
2. Модель Садовского:  $P_s = \frac{0.085}{Z} + \frac{0.3}{Z^2} + \frac{0.82}{Z^3}$ .
3. Модель Миллса:  $P_s = \frac{1.772}{Z^3} - \frac{0.114}{Z^2} + \frac{0.108}{Z}$ .
4. Модель Вайс:  $P_s = 0.102\frac{W^{1/3}}{R} + 0.436\frac{W^{2/3}}{R^2} + 1.4\frac{W}{R^3}$ ,

где  $Z = \frac{R}{W^{1/3}}$  — нормированное расстояние,  $R$  — расстояние от центра взрыва,  $W$  — масса взрывчатого вещества в тротиловом эквиваленте (кг).

Параметр  $t_0$  регрессионной модели определяется методом динамической трансформации временной шкалы (DTW). Идея метода DTW заключается в сравнении исходной последовательности  $S$  с некоторым шаблоном  $Q$  и построением пути преобразования в последовательность  $U$  [2]:  $U = u_1, u_2, \dots, u_l$ , где  $u_k = (i, j)_k$  — вектор, который ставит элементу  $s_i$  в соответствие элемент  $q_j$ . Последовательность преобразует шаблон в исходный процесс некоторым оптимальным образом на основе решения задачи динамического программирования

$$DTW(S, Q) = \min_u \sum_{k=1}^l d(u_k),$$

где  $d(u_k)$  — расстояние между элементами последовательностей  $s_i$  и  $q_j$ , которое вычисляется по формуле

$$d(u_k) = (s_i - q_j)^2.$$

Метод динамической трансформации временной шкалы использовался для определения момента времени начала фиксации параметров динамического процесса  $t_0$ .

В данной работе рассматривается упрощенная модель динамики ударной волны

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ Ae^{-\alpha(t-t_0)} - \delta, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (10)$$

Параметры процесса определялись методом наименьших квадратов, за исключением  $t_0$ , который определялся методом DTW. Результаты аппроксимации динамики процесса представлен на рис. 1.

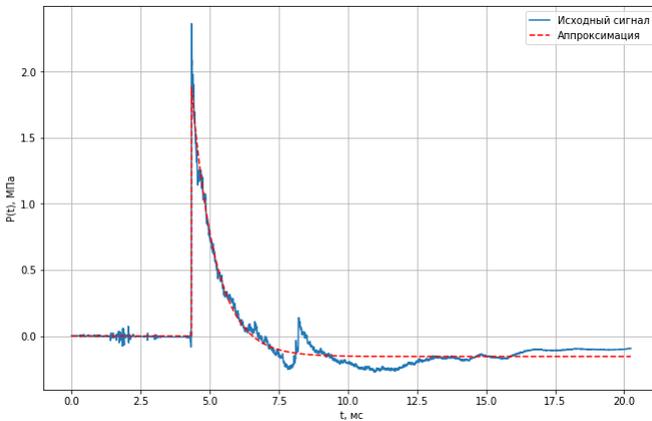


Рис. 1: Результат совмещения шкалы и сигнала функции  $f(t)$  с параметрами  $A = 2,04$ ,  $\alpha = 1,16$ ,  $\delta = 0,16$ ,  $t_0 = 4,34$

В положительной фазе ударная волна достигает рассматриваемой точки после детонации взрывчатого вещества через интервал времени, называемый временем прибытия  $t_0$ .

Из рис. 1 видно, что положительная фаза продолжается 2,403 мс и максимальное давление  $P_t = 2,363$  МПа.

1. Ullah A., Furqan A., Heung-Woon J., Sung-Wook K., Jung-Wuk H. Review of Analytical and Empirical Estimations for Incident Blast Pressure. 2016. Pp. 2211–2225.

2. Суфиянов В.Г., Русяк И.Г., Белобородов М.Н., Заборовский А.Д., Клокин Д.А. Разработка интеллектуальной экспертной системы оценки достоверности измерений параметров динамических процессов // В сборнике: Проектирование систем вооружения боеприпасов и измерительных комплексов. Труды 18-й Всероссийской научно-технической конференции. Нижний Тагил, 2022. С. 336–350.

## О построении простой математической модели реального нейрона

С. Ю. Култышев

*Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет*  
e-mail: kultyshev.su@yandex.ru

Вопросам построения математической модели реального нейрона посвящено много публикаций (см., например, [1, 2, 3, 4]). Есть модели простые: такие как модель МакКалока–Питерса, которая даёт на выходе единицу, если входной сигнал выше известного порога, и ноль, если ниже. Есть более сложные: в виде нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка (модель Ходжкина–Хаксли [5]), которая считается весьма детальной и адекватной. Но, конечно, хочется иметь модель достаточно простую, которая давала бы реальные сигналы на выходе при соответствующих реальных сигналах на входе, и отражала бы свойства реального нейрона. Поэтому предлагается строить математическую модель нейрона в виде достаточно простого оператора (алгоритма) вход–выход по измерениям входной и выходной вектор-функций. Эта модель состоит из модели входных синапсов и модели собственно нейрона, общую структуру которых можно изобразить как на Рис. 1.

Будем предполагать, что функции  $v_i(t)$ ,  $x_i(t)$ ,  $y(t)$  ограничены на отрезке времени  $[\Theta, T]$ , на котором рассматриваются синапсы и нейрон.

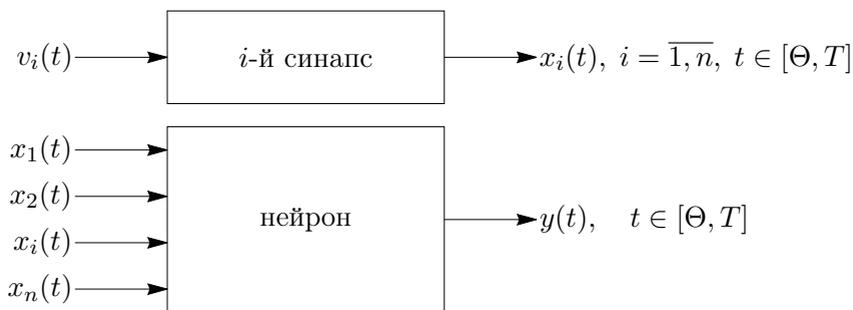


Рис. 1

Согласно [6] математическую модель  $i$ -го синапса можно строить в виде

$$x_i(t) = \frac{a_i v_i(t) + b_i}{1 + \exp[k_i v_i(t) + l_i]}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [\Theta, T],$$

где числовые коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $k_i$ ,  $l_i$  принимают значения в зависимости от того является ли синапс возбуждающим или тормозящим и определяются путем решения задачи идентификации по результатам измерений входа и выхода реального синапса (см. [7, 8]).

А математическую модель нейрона предлагается строить в виде

$$y(t) = (Ax)(t), \quad \text{где } x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t), \quad t \in [\Theta, T].$$

Здесь оператор  $A: S[\Theta, T] \rightarrow S[\Theta, T]$  предполагается непрерывным, а  $S[\Theta, T]$  — пространство ограниченных на  $[\Theta, T]$  функций. Оператор  $A$  и числовые коэффициенты  $c_i$  определяются достаточно простым алгоритмом, который строится по измерениям входа и выхода реального нейрона тоже путем решения задачи идентификации [9].

1. *Прокин И.С., Симонов А.Ю., Казанцев В.Б.* Математическое моделирование нейродинамических систем: электронное учебное пособие. Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2012.
2. *Lapicque M.L.* Recherches quantitatives sur l'excitation Electrique des Nerfs Traitec comme une Polarisation // Journal de Physiologie et Pathologie General. 1907. Vol. 9, pp. 620–635.
3. *Izhikevich E.M.* Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting // Dynamical Systems. The MIT press, 2007.
4. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., Abarbanel H.D.I.* Dynamical principles in neuroscience // Reviews of Modern Physics. 2006. Vol. 78, no. 4, pp. 1213–1265.
5. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and excitation in nerve // The Journal of physiology. 1952. Vol. 117, no. 4, pp. 500–544.
6. *Nicholls J.G., Martin A.R., Brown D.A., Diamond M.E., Weisblat D.A.* From neuron to brain. Sunderland: Sinauer Associates, 2001.
7. *Култышев С.Ю., Култышева Л.М.* Идентификация математических моделей реальных объектов: теория и приложения. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2017.
8. *Култышев С.Ю., Култышева Л.М., Миллюша М.В.* Идентификация математической модели при наличии неизмеряемых внешних воздействий на моделируемый объект // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 3. С. 124–142.
9. *Култышев С.Ю., Култышева Л.М.* Задача идентификации математической модели при наличии неизмеряемых внешних воздействий на моделируемый объект // Прикладная математика и вопросы управления. 2020. № 1. С. 37–55.

# Результаты численного моделирования внутренней и внешней баллистики артиллерийского выстрела с применением визуальных технологий

А. М. Липанов, И. Г. Русяк,

В. А. Тенев, В. Г. Суфиянов, С. А. Королев

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: AML35@yandex.ru, primat@istu.ru,

v.tenenev@gmail.com, vsufiy@istu.ru, stkj@mail.ru

Проектирование современных ракетно-артиллерийских систем требует широкого применения математического моделирования и современных технологий компьютерной визуализации. Разработка методов математического моделирования с применением визуальных технологий позволяет исследовать изучаемые процессы в режиме виртуальной реальности, что имеет особое значение, если мы имеем дело с процессами, протекающими с большой скоростью, и надежная регистрация отдельных параметров в ходе натурального эксперимента на текущем этапе развития экспериментальной базы невозможна.

Комплексные физико-математические модели внутренней и внешней баллистики становятся незаменимым инструментом для анализа нештатных ситуаций и позволяют детально изучать аномальные явления с учетом многих факторов. К аномальным физическим явлениям в процессе движения снаряда внутри ствола можно отнести существенный рост давления в канале ствола при небольших изменениях исходных параметров заряжания, схемы заряжания или начальных условий выстрела, а также явления, зафиксированные в эксперименте, но не укладывающиеся в устоявшиеся физические представления. Данные явления наиболее существенно проявляются при проектировании артиллерийских систем высокоскоростного метания, где используются заряды с большими плотностями заряжания или новые малоизученные пороховые элементы.

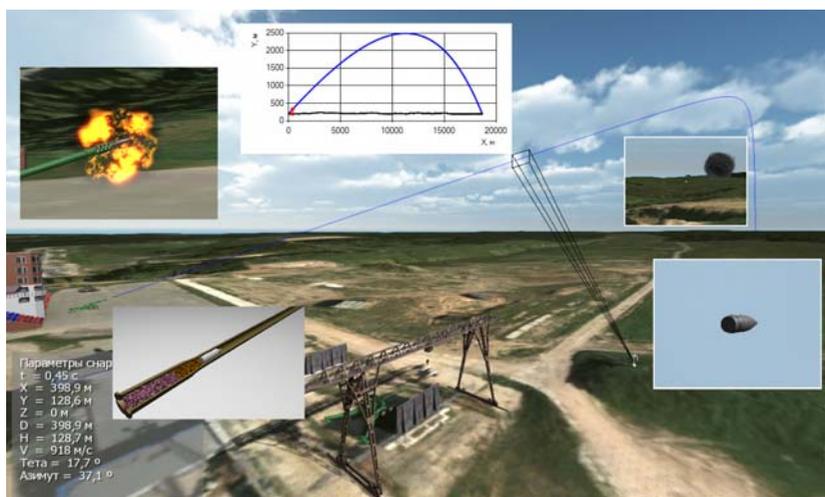


Рис. 1: Элементы моделирования системы полигонных испытаний

С помощью математических моделей и имитационного моделирования возможно проведение широкого спектра исследований по анализу влияния различных факторов на процесс стрельбы, в том числе анализу возможных нештатных ситуаций на внешнебаллистической траектории движения снаряда: критические отклонения снаряда от расчётной траектории и потеря устойчивости движения вследствие асимметрии массы снаряда, критические отклонения ракет вследствие влияния ветра и реактивной струи впереди летящих ракет при последовательных пусках.

В этой связи разработка новых визуальных технологий компьютерного моделирования быстропротекающих процессов артиллерийского выстрела является актуальной научно-практической проблемой [1]. Решение этой проблемы нашло отражение в диссертационных работах В.Г. Суфиянова [2] и С.А. Королёва [3], выполненных на кафедре прикладной математики и информационных технологий ИЖГТУ имени М.Т. Калашникова под научным руководством академика РАН и РАН, д.т.н., профессора А.М. Липанова и академика РАН, д.т.н., профессора И.Г. Ру-

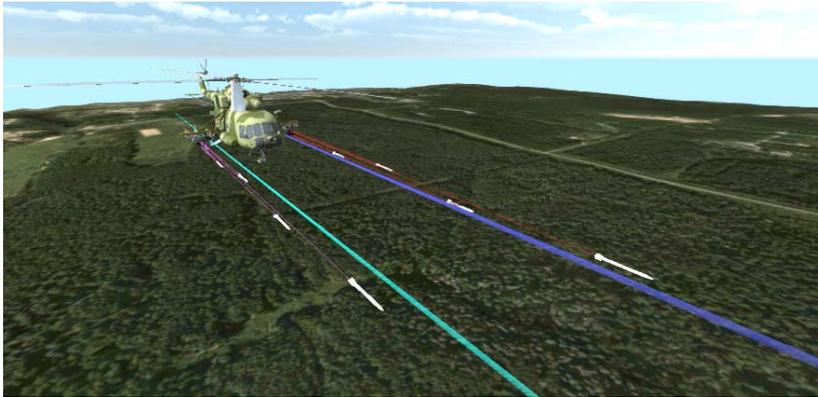


Рис. 2: Визуализация траектории движения снарядов и ракет при стрельбе очередью с подвижного носителя

сяка при научной поддержке д.ф.-м.н., профессора В.А. Тененёва в ходе выполнении научно-исследовательских работ.

Одним из результатов выполнения диссертационных исследований являются разработанные комплексные физико-математические модели и программное обеспечение, позволяющие исследовать и визуализировать процессы функционирования ствольных систем и боеприпасов на испытательном полигоне (см. рис. 1).

Развитием этих исследований является решение проблем аэродинамики и устойчивости движения снарядов и неуправляемых ракет при стрельбе с подвижного носителя (рис. 2).

Дальнейшее исследования связаны с разработкой математических моделей и численных методов решения пространственных сопряженных нестационарных задач газовой динамики и механики многофазных реагирующих деформируемых гетерогенных сред в условиях выстрела, а также разработкой программного обеспечения для трехмерной визуализации результатов моделирования.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00072.

1. *Липанов А.М., Вагин А.В., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г.* К вопросу о моделировании полигонных испытаний артиллерийских систем // Известия РАН. 2014. № 4 (84). С. 46–52.
2. *Суфиянов В.Г.* Решение задачи комплексного моделирования артиллерийского выстрела с применением визуальных технологий для проектирования и отработки артиллерийских систем: дис. ... д-ра техн. наук. Ижевск, 2017.
3. *Королёв С.А.* Развитие подходов к решению проблем аэродинамики и устойчивости движения снарядов и неуправляемых ракет на основе математического моделирования: дис. ... д-ра техн. наук. Ижевск, 2020.

## **Исследование продольных колебаний бесконечного неоднородного тонкого стержня при помощи метода Римана**

**К. В. Литвинова**

*Москва, МГУ; Самара, СамГТУ*

e-mail: vladlitvinov@rambler.ru, kristinalitvinova900@rambler.ru

Метод Римана рассматривается применительно к решению задачи, описывающей свободные продольные колебания неограниченного неоднородного тонкого стержня. Математическая постановка задачи включает дифференциальное уравнение в частных производных относительно искомой функции смещения и неоднородные начальные условия. Решение производится в безразмерных переменных в аналитическом виде. Получено сравнительно простое выражение для продольных колебаний неоднородного стержня, что позволяет использовать полученные результаты для анализа колебаний одномерных неоднородных технических объектов.

Одномерные неоднородные системы широко распространены в технике: канаты грузоподъемных установок [1], гибкие звенья передач [2, 3], стержни твердого топлива [1], бурильные колонны и т.д. Наличие неоднородностей связано с переменной

плотностью материала стержня, а, следовательно, и переменной скоростью распространения волн в объекте, что вызывает значительные затруднения при описании таких систем.

Дифференциальное уравнение, описывающее продольные колебания неограниченного неоднородного стержня, имеет вид [1, 4]:

$$U_{tt}(x, t) - a^2(x, t)U_{xx}(x, t) = 0. \quad (1)$$

Начальные условия:

$$U(x, 1) = f(x); \quad (2)$$

$$U_t(x, 1) = F(x). \quad (3)$$

В задаче (1)–(3) обозначено:  $U(x, t)$  — продольное смещение точки стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $a^2(x, t) = \frac{E}{\rho(x)}$ , где  $\rho(x)$  — переменная плотность материала стержня.

В данной работе принимается, что величина  $a(x, t)$  численно равна  $\frac{x}{t}$  для всех точек стержня с координатой  $x$ .

Введем в задачу (1)–(3) новые переменные:

$$\xi = xt, \quad \tau = \frac{t}{x}.$$

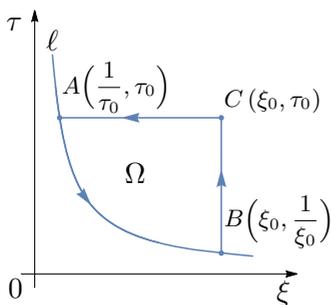


Рис. 1

Прямая  $t = 1$  в новых переменных будет иметь вид равнобочной гиперболы (рис. 1). На рис. 1 обозначено:  $C(\xi_0, \tau_0)$  — фиксированная точка;  $\Omega$  — область, ограниченная контуром, состоящим из дуги  $AB$  кривой  $\ell$  и двух характеристик  $CA$  и  $BC$ , параллельных осям координат.

После преобразований получим

$$U_{\xi\tau}(\xi, \tau) - \frac{1}{2\xi}U_{\tau}(\xi, \tau) = 0. \quad (4)$$

Начальные условия:

$$U_{\xi}|_{\xi\tau=1} = \frac{1}{2}f'(\xi) + \frac{1}{2\xi}F(\xi); \quad (5)$$

$$U_{\tau}|_{\xi\tau=1} = -\frac{\xi^2}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2}F(\xi); \quad (6)$$

$$U|_{\xi\tau=1} = f(\xi). \quad (7)$$

Для решения задачи (4)–(7) используем метод Римана [4].  
Формула Римана для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} U(\xi_0, \tau_0) = & \frac{(U(\xi, \tau)V(\xi, \tau))_B + (U(\xi, \tau)V(\xi, \tau))_A}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{AB} ((V(\xi, \tau)U_{\xi}(\xi, \tau) - U(\xi, \tau)V_{\xi}(\xi, \tau) - \\ & - V(\xi, \tau)U_{\xi}(\xi, \tau)/\xi) d\xi - \\ & - (V(\xi, \tau)U_{\tau}(\xi, \tau) - U(\xi, \tau)V_{\tau}(\xi, \tau)) d\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно указанному методу функция Римана  $V(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0)$  должна удовлетворять уравнению, сопряженному (4)

$$V_{\xi\tau} + \frac{1}{2\xi}V_{\tau}(\xi, \tau) = 0 \quad (9)$$

и условиям

$$V(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}; \quad V(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0) = 1 \quad (10)$$

на характеристиках  $CA$  и  $BC$  соответственно.

Из (9) и (10) следует, что функция Римана имеет вид:

$$V(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}. \quad (11)$$

Подставляя (5), (6), (7) и (11) в формулу (8), получим:

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left( f(\xi) + \sqrt{\xi\tau} f\left(\frac{1}{\tau}\right) + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \int_{\xi}^{1/\tau} \frac{f(\xi) - 2F(\xi)}{\xi^{3/2}} d\xi \right).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \left( f(xt) + tf(a) + \frac{\sqrt{xt}}{2} \int_{xt}^a \frac{f(z) - 2F(z)}{z^{3/2}} dz \right). \quad (12)$$

В случае однородного стержня решение (12) совпадает с классическим, что говорит о корректности полученных результатов.

Применение метода Римана позволило получить сравнительно простое выражение для продольных колебаний неоднородного стержня в частном случае, если  $a(x, t) = \frac{x}{t}$ , что позволяет использовать полученные результаты для анализа колебаний одномерных неоднородных технических объектов.

1. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020.
2. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Применение метода Канторовича–Галёркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.
3. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегродифференциальных уравнений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 188–199.
4. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

# Моделирование метаногенеза для случая последовательной переработки субстрата в метантенках с различной температурной средой

Д. В. Майков

Ижевск, Ижевский торгово-экономический техникум

e-mail: MaykovD@yandex.ru

При переработке отходов животноводческих предприятий применяется технология метаногенеза — анаэробного сбраживания метанообразующими бактериями органических веществ, содержащихся в субстрате. В процессе метаногенеза отходы перерабатываются в экологически чистые биоудобрения, которые применяются для повышения плодородности почв. Сопутствующим продуктом метаногенеза является биогаз, содержащий, в зависимости от вида сырья, 55–70% метана, который может быть использован для поддержания температуры процесса метаногенеза и частичного покрытия энергетических потребностей предприятия. Для метаногенеза применяются специальные емкости (метантенки). Биогазовая установка может работать в мезофильной и термофильной средах, отличающихся температурой, составом бактерий и периодом сбраживания. Стабилизация скорости образования биогаза достигается при непрерывном режиме поступления сырья, но в этом случае содержащиеся в нем питательные вещества перерабатываются не в полном объеме. Решением данной проблемы является последовательное сбраживание субстрата в нескольких метантенках с возможностью применения различных температурных режимов метаногенеза (рис. 1).

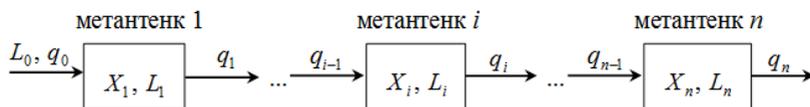


Рис. 1: Схема многостадийного метаногенеза

На этой схеме величина  $q_i = \frac{dQ_i}{dt}$  – скорость перетока субстрата из  $i$ -го в  $(i + 1)$ -й метантенк,  $Q_i$  – масса субстрата в  $i$ -м метантенке. Рассматривается относительная скорость перетока субстрата  $p_i = \frac{1}{Q_i} \cdot \frac{dQ_i}{dt} = \frac{q_i}{Q_i}$ .

Математическая модель метаногенеза, обобщающая модель из [1], имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = \lambda_i p_i X_{i-1} + \left( \frac{\mu(T_i)L_i}{a_i + L_i} - \frac{\nu_i(T_i)b_i}{b_i + L_i} - p_i \right) \cdot X_i, \\ \frac{dL_i}{dt} = p_i \cdot (L_{i-1} - L_i) - \frac{\beta_i \mu_i(T_i)L_i X_i}{a_i + X_i}, i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1)$$

Переменными модели служат  $L_i$  и  $X_i$  – концентрации питательных веществ в субстрате и метанообразующих бактерий соответственно, где  $i$  – номер метантенка (рис. 1). Их исходные значения составляют  $L_0$  и  $X_0$ . Величины  $\mu_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\beta_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  являются параметрами модели. В роли управляющих параметров выступают  $p_i$  и температуры субстрата в метантенках  $T_i$ . Величина  $\lambda_i$  равна нулю, если температурная среда в  $i$ -м метантенке отличается от среды в  $(i - 1)$ -м, и единице, если эти среды одинаковы.

Параметры  $\mu$  и  $\nu$  зависят от температуры субстрата  $T$  по закону [2]:

$$\begin{aligned} \mu(T) &= r \cdot \exp\left(-\frac{(T - T^{opt})^2}{c}\right), \\ \nu(T) &= 1 - (1 - s) \cdot \exp\left(-\frac{(T - T^{opt})^2}{d}\right), \end{aligned}$$

где  $T^{opt}$  – оптимальная температура метаногенеза (для мезофильной среды – 37°C, для термофильной – 56°C);  $r$ ,  $c$ ,  $s$ ,  $d$  – параметры модели.

Скорость получения биогаза всеми метантенками равна:

$$W(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \mu_i L_i(t) X_i(t) Q_i(t)}{a_i + L_i(t)}.$$

Рассматривается задача максимизации скорости образования биогаза по векторам температуры  $\mathbf{T}(t)$  субстрата в метантен-

ках и относительных скоростей  $\mathbf{p}(t)$  за период  $K$  суток:

$$\int_0^K W(t)dt \rightarrow \max_{\mathbf{T}, \mathbf{p}}. \quad (2)$$

Ее решение осуществляется следующим образом. Задается полный вектор управлений

$$\mathbf{U} = (T_1(t_0), \dots, T_n(t_m), p_1(t_0), \dots, p_n(t_m)),$$

представляющий собой последовательность возможных значений температуры субстрата  $T_i = T_i(t_k)$ , а также относительных скоростей перетока субстрата  $p_i = p_i(t_k)$  на каждом  $k$ -м временном узле отрезка  $[0, K]$ . После этого выполняется численное решение системы дифференциальных уравнений (1) с помощью метода Рунге–Кутты 4-го порядка, и на его основе вычисляется значение критериального функционала (2). Для поиска наилучшего вектора  $\mathbf{U}^{opt}$  применяется разработанный автором квантовый алгоритм пресноводных гидр [3]. Этот алгоритм является популяционным и в течение одной итерации обрабатывает множество (популяцию) допустимых решений (особей). При этом положение особей определяется на основе расчета вероятностей (эмулируя решение уравнения Шредингера методом Монте–Карло), не оперируя скоростями особей. Это позволяет как повысить разнообразие особей в популяции, так и успешно преодолевать ими области притяжения локальных экстремумов. За счет этого происходит более полное исследование пространства поиска и предотвращается преждевременная сходимость алгоритма к локальному экстремуму.

В результате проведенных численных исследований установлено, что максимальная скорость образования биогаза и степень переработки субстрата достигаются, когда все метантенки работают в термофильной среде, а минимальные значения соответствуют применению мезофильных сред. Так, если все метантенки работают в одинаковых температурных средах, то степень переработки субстрата при использовании двух и трех метантенков увеличивается соответственно на 5–10% и на 10–15% по срав-

нению со случаем одного метантенка, в зависимости от температурной среды и вида сырья. Скорость выработки биогаза при этом возрастает в два раза для случая двух метантенков и в два половинной — для трех. Скорость получения биогаза для термофильного режима всегда оказывается почти вдвое выше, чем для мезофильного.

1. *Королев С.А., Майков Д.В.* Оптимизация двухстадийного режима метаногенеза на основе принципа максимума Понтрягина // Вестник Донского государственного технического университета. 2019. Т. 19, № 2. С. 195–203.
2. *Королев С.А., Майков Д.В.* Моделирование метаногенеза при изменении условий теплообмена с окружающей средой // Тезисы Всеросс. конф. с международ. участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (СТММ2020), 15–19 июня 2020. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. С. 298–299.
3. *Королев С.А., Майков Д.В.* Квантовая модификация алгоритма пресноводных гидр для решения задачи оптимизации // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2020. № 2. С. 37–48.

## **Оптимизация внутри- и внешнебаллистических параметров активно-реактивного снаряда с целью повышения дальности стрельбы**

**Р. Р. Мансуров**

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: otum@bk.ru

В работе рассмотрена задача повышения дальности стрельбы активно-реактивного снаряда (АРС) за счет оптимизации внутренних и внешнебаллистических параметров. Разработана

комплексная математическая модель баллистического расчета АРС, включающая этапы внутренней баллистики при движении снаряда в стволе орудия, внешней баллистики на активном и пассивном участке траектории и внутренней баллистики твердотопливного реактивного двигателя. Параметры внутриваллистического процесса в стволе орудия рассчитываются на основе термодинамического подхода в нульмерной постановке [1]. Для фиксированной массы пороха метательного заряда и начальной массы АРС, с учетом массы топлива реактивного двигателя, определяется начальная скорость снаряда при вылете из канала ствола. По результатам параметрических исследований для 152 мм орудия построена аппроксимационная зависимость начальной скорости снаряда от его массы  $V_0(m_0) = -400 \ln(m_0) + 2461$ .

Система дифференциальных уравнений движения для случая активно-реактивного снаряда описывается следующими дифференциальными уравнениями [2]:

уравнения изменения координат центра масс снаряда

$$\frac{dx_c}{dt} = V_k \cos \theta \cos \psi, \quad \frac{dy_c}{dt} = V_k \sin \theta, \quad \frac{dz_c}{dt} = -V_k \cos \theta \sin \psi;$$

уравнение изменения скорости

$$\frac{V_k}{dt} = -g \sin \theta + \frac{P - C_{xk} q S_M}{m};$$

уравнение изменения угла наклона траектории

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{V_k} - \frac{C_{y_k}}{m V_k};$$

уравнение изменение массы снаряда

$$\frac{dm}{dt} = -\mu,$$

где  $x_c, y_c, z_c$  — координаты центра масс снаряда: дальность, высота полета, боковое отклонение;  $V_k$  — скорость снаряда;  $\theta$  — угол наклона траектории;  $\psi$  — угол направления;  $m$  — масса снаряда;  $P$  — тяга реактивного двигателя.

Для определения тяги на активном участке траектории решалась задача внутренней баллистики твердотопливного реактивного двигателя (РД). Скорость горения подбирается под заданное давление в камере сгорания и время работы двигателя. Тяга определяется на основе параметров в выходном сечении сопла по формуле [3]

$$P = G_{\text{кр}} u_{\text{в}} + S_{\text{в}}(p_{\text{в}} - p_{\text{н}}),$$

где  $G_{\text{кр}}$  — расход продуктов горения через сопло;  $u_{\text{в}}, p_{\text{в}}$  — скорость и давление газов в выходном сечении сопла;  $S_{\text{в}}$  — площадь выходного сечения сопла;  $p_{\text{н}}$  — наружное давление.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений внутренней и внешней баллистики решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Для выбора оптимальных баллистических параметров АРС решалась задача максимизации дальности стрельбы [4]

$$D = F(m_0, V_0, \theta_0, t_1, I_p, \Delta t_p, i_x) \rightarrow \max,$$

где  $m_0$  — начальная масса снаряда, включая массу топлива РД;  $V_0$  — начальная скорость;  $\theta_0$  — угол стрельбы;  $t_1$  — время старта РД;  $I_p$  — суммарный импульс тяги РД;  $\Delta t_p$  — время работы РД;  $i_x$  — коэффициент формы, определяющий изменение лобового сопротивления в зависимости от аэродинамической формы снаряда. Для решения задачи многомерной оптимизации применялся метод Хука–Дживса [5].

Для оценки потенциала увеличения дальности стрельбы на основе разработанной расчетной методики рассматривался активно-реактивный снаряд калибра 152 мм с твердотопливным реактивным двигателем. Для снаряда массой 52 кг, включая массу топлива 5 кг, были найдены оптимальный угол стрельбы и оптимальное время старта реактивного двигателя. Результаты исследований показывают, что, при комплексной оптимизации, оптимальный угол стрельбы  $\theta_0 = 58^\circ$ , а оптимальное время старта РД  $t_1 = 12$  с. При этом наборе параметров удается достичь максимальную дальность 40,5 км.

Разработанная комплексная математическая модель баллистического расчета и оптимизации параметров активно-реактивного снаряда позволяет исследовать эффективность различных способов повышения дальности стрельбы с учетом взаимосвязи процессов внутренней и внешней баллистики.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00072.

1. *Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М.* Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
2. *Королев С.А., Липанов А.М., Русяк И.Г.* Исследование путей повышения дальности стрельбы ствольной артиллерии // Вестник Ижевского гос. техн. ун-та им. М.Т. Калашникова. 2018. Т. 21, № 3. С. 185–191.
3. Баллистика ракетного и ствольного оружия: учебник для вузов / под ред. *А.А. Королева, В.А. Комочкова*; науч. конс. *В.А. Шурыгин*. Волгоград, 2010.
4. *Королев С.А., Мансуров Р.Р.* Исследование дальности стрельбы активно-реактивным снарядом // В сборнике: I Липановские научные чтения. Материалы региональной научной конференции. Ижевск, 2021. С. 71–77.
5. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М: Изд-во МЦНМО, 2011.

## **Вычислительные технологии для численного решения задач механики сплошных сред**

**С. И. Мартыненко**

*Черноголовка, Институт проблем химической физики РАН*

e-mail: Martynenko@icp.ac.ru

В 1978 г. выдающиеся английские ученые Брайн Сполдинг (Brian Spalding) и Харви Ростен (Harvey Rosten) одними из пер-

вых задумали создание единого кода вычислительной гидродинамики PHOENICS, способного обрабатывать все процессы, связанные с течением жидкости или газа (<http://www.cham.co.uk>). Современные программы типа FLUENT, ЛОГОС и др. позволяют решать широкий класс прикладных задач, однако их вычислительная эффективность оставляет желать лучшего из-за использования стандартных методов вычислительной математики.

Пользователям нужен очень простой в эксплуатации и достаточно мощный инструмент, который существенно расширит их возможности без изучения вычислительной математики и программирования, т.е. устроенный по принципу «черного ящика». Естественным желанием является минимальное время решения сложнейших задач даже на простейших компьютерах. Поэтому в [1] было дано следующее определение:

**Определение.** Программа для численного решения (начально-)краевых задач механики сплошной среды называется *автономной* (или *устроенной по принципу «черного ящика»*), если она не требует каких-либо дополнительных данных от пользователя, кроме определения физической задачи, состоящей из геометрии области, граничных и начальных условий, перечня уравнений, которые необходимо решить (уравнение теплопроводности, уравнения Навье–Стокса, уравнения Максвелла и т.д.), и рабочих сред. Пользователю не нужно ничего знать о численных методах, высокопроизводительных и параллельных вычислениях.

Кратко сформулируем основные требования к численным методам для программного обеспечения, устроенного по принципу «черного ящика»:

- а) универсальность (минимальное количество проблемно-зависимых компонентов);
- б) эффективность (трудоемкость не более  $W = O(N \log N)$  арифметических операций в широком диапазоне изменения параметров задачи, где  $N$  есть количество неизвестных);
- в) параллелизм (ускорение по сравнению с наилучшим последовательным алгоритмом);
- г) адаптивность (возможность гибкого изменения способа и порядка аппроксимации исходной (начально-)краевой задачи, а так-

же используемого алгоритма ее решения);  
д) минимальное использование ресурсов компьютера.

Развитию автономного программного обеспечения препятствуют следующие факторы [2]:

- 1) заранее неопределенный порядок аппроксимации уравнений математической модели;
- 2) заранее неопределенный метод аппроксимации уравнений математической модели;
- 3) широкий диапазон изменения шагов сетки и параметров задачи;
- 4) нелинейность прикладных задач;
- 5) построение вычислительной сетки;
- 6) ограниченность ресурсов компьютера;
- 7) ограниченность теоретических методов исследования моделей и алгоритмов.

В качестве базового использован метод вспомогательного пространства (auxiliary space method) [3], котором помимо основной сетки  $G_0$  используют вспомогательную сетку  $G_A$  более простой топологии для отыскания поправки.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода является использование структурированной сетки в качестве вспомогательной  $G_A$ . Напомним определение глобально-структурированной сетки:

**Определение.** Вычислительная сетка  $G_1^0$  называется *глобально-структурированной*, если ее подсетки  $G_k^l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L^+$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , обладают следующими свойствами:

Свойство 1. Каждая сетка  $G_k^l$  ( $l \neq L^+$ , где  $L^+$  — уровень с самыми грубыми подсетками) представима в виде объединения  $K$  соответствующих ей грубых подсеток уровня  $l+1$ . Как следствие, исходная сетка  $G_1^0$  представима в виде объединения всех подсеток одного уровня  $l$ :

$$G_1^0 = \bigcup_{k=1}^K G_k^l, \quad l = 0, \dots, L^+.$$

Свойство 2. Подсетки одного уровня  $l$  не имеют общих точек, т.е.

$$G_n^l \cap G_m^l = \emptyset, \quad n \neq m, \quad l = 1, \dots, L^+.$$

Свойство 3. Каждый конечный объем на подсетках  $G_k^l$  представим в виде объединения  $K$  конечных объемов на исходной сетке  $G_1^0$ .

Универсальная Многосеточная Технология (УМТ) используется для отыскания поправки на вспомогательной сетке  $G_A$ . Фактически, УМТ является односеточным методом Зейделя с точечным или блочным упорядочениями неизвестных для сегрегированного или совместно численного решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных соответственно [4]. Теоретически показано, что количество межсеточных итераций (т.е. переходов между основной и вспомогательной сетками) не зависит от параметра дискретизации.

УМТ может выступать в качестве решателя, если исходная сетка  $G_0$  является структурированной ( $G_0 = G_A$ ), и в качестве предобуславливателя, если  $G_0$  является неструктурированной ( $G_0 \neq G_A$ ).

Параллельная УМТ является реализацией двух параллелизмов:

1) Уровни с грубыми сетками. Геометрический параллелизм определяется вычислительной сеткой и не зависит от итерационного метода. УМТ на данных уровнях обладает полным параллелизмом вне зависимости от используемого итерационного метода.

2) Уровни с мелкими сетками. Алгебраический параллелизм определяется итерационным методом и не зависит от вычислительной сетки. В параллельной УМТ на данных уровнях используют метод Зейделя с многоцветными блочным упорядочением неизвестных для параллельного сглаживания на уровнях с мелкими сетками.

Сочетание геометрического и алгебраического параллелизмов позволяет достичь высокую эффективность параллельной УМТ.

В докладе приведены результаты анализа сходимости УМТ и результаты решения модельных и прикладных (начально-)краевых задач.

Исследовательские работы проведены при финансовой поддержке го-

сударства в лице РФ по соглашению № 21–72–20023 по теме «Суперкомпьютерное моделирование высокоскоростных ударов по искусственным космическим объектам и Земле», <https://rscf.ru/project/21-72-20023/>.

1. *Martynenko S.I.* The robust multigrid technique: For black-box software. Berlin: De Gruyter, 2017.
2. *Мартыненко С.И.* Параллельное программное обеспечение для универсальной многосеточной технологии. М.: Триумф, 2021.
3. *Xu J.* The auxiliary space method and optimal multigrid preconditioning techniques for unstructured grids. *Computing*. 1996. Vol. 56, pp. 215–235.
4. *Мартыненко С.И.* Многосеточная технология: теория и приложения / Под. ред. М.П. Галанина. М.: Физматлит, 2015.

## Алгоритмическая и программная реализация итерационного решения СЛАУ при совместных вычислениях на CPU и GPU

**Н. С. Недождогин, С. П. Копысов**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: Nedozhoin@inbox.ru, s.kopysov@gmail.com

Гетерогенные платформы, в которых многоядерные процессоры (CPU) объединены с графическими (GPU), широко используются в высокопроизводительных вычислениях, например, как один из подходов к постоянному повышению производительности при решении задачи энергоэффективности [1]. Как известно, решение систем линейных алгебраических уравнений плохо масштабируется на multi-CPU/multi-GPU кластеры. Для достижения максимальной эффективности программной реализацией необходимо, во-первых, учитывать загрузку ядер CPU и балансировку нагрузки между вычислительными устройствами (вычислительным устройством будем называть либо GPU, либо несколь-

ко параллельных нитей CPU, выполняющих действия над своим блоком матрицы). Во-вторых, минимизировать количество данных, пересылаемых между этими устройствами.

Предлагаемый алгоритм построен на основе блочного метода, в котором использовалось разделение матрицы из [2]. Исходная матрица  $A$  делится на  $d$  блоков, где  $d$  — количество доступных вычислительных единиц. Каждый блок  $A_k$  исходной матрицы содержит в себе следующие подматрицы:

- $A_k^{[i_k, i_k]}$  — матрица связей между внутренними узлами;
- $A_k^{[i_k, b_k]}, A_k^{[b_k, i_k]}$  — матрицы связей между внутренними и граничными узлами;
- $A_k^{[b_k, b_l]}$  — матрица связи между граничными узлами  $k$ -го и  $l$ -го блоков.

Такое представление матрицы позволяет матрично-векторное произведение разделить на две составляющие:

$$n_k^i = A_k^{[i_k, i_k]} m_k^i + A_k^{[i_k, b_k]} n_k^b, \quad n_k^b = A_k^{[b_k, i_k]} m_k^i + \sum_{l=1}^{l \leq d} A_k^{[b_k, b_l]} m_l^b.$$

При этом часть вычислений, которые соответствуют подматрицам  $A_k^{[i_k, i_k]}, A_k^{[i_k, b_k]}, A_k^{[b_k, i_k]}, A_k^{[b_k, b_k]}$  можно выполнить независимо в каждой подобласти, а вычисления на граничных подматрицах  $A_k^{[b_k, b_l]}, k \neq l$  на CPU, используя OpenMP.

Гибкость балансировки и наибольшую производительность multi-CPU/multi-GPU кластера можно достичь при совместном использовании технологий MPI, OpenMP и CUDA на разных уровнях вычислительного процесса. Рассмотрим организацию параллельных вычислений на примере кластера, в составе которого имеется два вычислительных узла (8 ядер CPU и 2 GPU на каждом узле). Вычислительному узлу ставится в соответствие параллельный процесс MPI, с помощью чего осуществляется обмен данными между ними. В параллельном процессе порождается 9 параллельных потоков OpenMP, что на один больше доступных ядер CPU.

Последний (восьмой) поток OpenMP отвечает за коммуникации между различными вычислительными узлами (сборка векторов с помощью функции `MPI Allgather`, различными GPU (через общую память с помощью OpenMP), сборка скаляров — `Allreduce`).

Первые потоки OpenMP, по числу доступных GPU (нулевой и первый для примера), связываются с одним из доступных устройств и отвечают за пересылку данными между GPU–CPU (вызовы функций асинхронного копирования) и вспомогательные вычисления (операции матрично-векторного умножения на граничных узлах).

Оставшиеся параллельные потоки (второй – седьмой) производят вычисления как отдельное исполняющее устройство для своего блока матрицы.

Порядок действий в матрично-векторном произведении, в зависимости от номера нити, выглядит следующим образом. Для первых нитей, связанных с GPU:

- Вызов асинхронного копирования части вектора, отвечающего за граничные узлы, на CPU.
- Вызов ядра матрично-векторного произведения, оптимизированного под архитектуру графического ускорителя, для матриц  $A_k^{[i_k, i_k]}$  и  $A_k^{[i_k, b_k]}$ .
- Вызов ядра матрично-векторного произведения, оптимизированного под архитектуру графического ускорителя, для матриц  $A_k^{[b_k, i_k]}$  и  $A_k^{[b_k, b_k]}$ .

Для нитей, исполняющих роль вычислительного устройства:

- Матрично-векторное произведение, распараллеленное с помощью OpenMP, для матриц  $A_k^{[i_k, i_k]}$  и  $A_k^{[i_k, b_k]}$ .
- Матрично-векторного произведения, распараллеленное с помощью OpenMP, для матриц  $A_k^{[b_k, i_k]}$  и  $A_k^{[b_k, b_k]}$ .

Для параллельной нити, отвечающей за коммуникацию:

- Сбор вектора, соответствующего граничным узлам, с помощью технологии MPI.

Для всех нитей, после выполненных выше операций:

- Вычисление произведений  $\sum_{l=1}^{l \leq d} A_k^{[b_k, b_l]} m_l^b$ .

В конвейерном алгоритме метода сопряженных градиентов, скалярное произведение векторов вычисляются последовательно, что позволяет выполнять их одновременно на GPU, за счет создания трех блоков параллельных потоков CUDA. Каждый поток вычисляет свое скалярное произведение. Такой подход позволяет, во-первых, вычислить все скалярные произведения за один вызов ядра CUDA, во-вторых, уменьшить время на коммуникации, так как обмен осуществляется за одно сообщение. За счет этого, в конвейерном варианте затраты на GPU уменьшаются для всех рассмотренных систем уравнений практически трехкратно.

Работа выполнена при финансовой поддержке УдГУ в рамках конкурса грантов «Научный потенциал», проект № 2021-05-09.

1. Mittal S., Vetter J. S. A survey of cpu-gpu heterogeneous computing techniques // ACM Comput. Surv. Vol. 47, no. 4, Jul. 2015.
2. Kopysov S., Kuzmin I., Nedozhogin N., Novikov A., Sagdeeva Y. Scalable hybrid implementation of the Schur complement method for multi-GPU systems // The Journal of Supercomputing. 2014. Vol. 69, pp. 81–88.

# Построение оптимальной разделяющей гиперплоскости для линейного классификатора

А. В. Павлов

Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова

e-mail: cool.hash0xb70ee@yandex.ru

Классификацией мы называем распределение вещей по классам согласно сходству между ними. Классификация вещей, или распределение их по классам, преследует свои определенные задачи, которые можно формулировать так: задача классификации заключается в том, чтобы распределить вещи по группам в таком порядке, который наиболее полезен для припоминания вещей и для определения их свойств.

Важная проблема, возникающая в статистической теории машинного обучения, заключается в том, как много случайных примеров необходимо использовать при обучении для того, чтобы гарантировать достаточно малую ошибку классификации с заданной степенью достоверности [1].

В работе будет рассматриваться бинарная классификация, т.е. имеется только два класса. Их необходимо разделить оптимальной разделяющей гиперплоскостью вида  $f = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b$ .

Требуется найти коэффициенты  $b$  и  $w_i$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Дан набор пар  $(x^i, y^i)$ , где  $x$  — вектор значений независимых переменных, а  $y$  — соответствующее им значение. Рассматриваются три алгоритма для поиска коэффициентов и классификации: метод опорных векторов, логистическая регрессия и адаптивный линейный нейрон.

1. Уравнения для логистической регрессии [2],  $\alpha > 0$ :

$$\ln L(w) = \sum_{i=1}^n y^i \ln(f(w^T x^i)) + (1 - y^i) \ln(1 - f(w^T x^i)) \rightarrow \max_w$$

где  $w^T x^i = w_0 + w_1 x_1^i + w_2 x_2^i + \dots + w_n x_n^i$  ( $w_0 = b$ ).

Для максимизации этой функции применяется метод градиентного спуска. Он заключается в выполнении следующих итераций, начиная с некоторого начального значения параметров  $w$ :

$$w := w + \alpha \nabla \ln L(w) = w + \alpha \sum_{i=1}^n (y^i - f(w^T x^i)) x^i,$$

где  $f(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ .

2. Уравнения для адаптивного линейного нейрона [3]:

$$Q(w) = \sum_{i=1}^n ((a(x_i; w_i) - y_i)^2 \rightarrow \min_w,$$

где для нахождения  $w$  необходимо выполнение следующих итераций, начиная с некоторого начального значения параметров  $w$ :

$$w := w - \eta \nabla Q(w) = w - \eta((w, x) - y)x,$$

где  $a = (w, x)$  — скалярное произведение векторов  $w$  и  $x$ .

3. Уравнения для метода опорных векторов [4]:

$$-L(\lambda) = - \sum_{i=1}^n \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i * x_j) \rightarrow \min_{\lambda},$$

при условиях  $0 \leq \lambda_i \leq C$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0$ , где  $C$  — параметр настройки метода, который позволяет регулировать отношение между максимизацией ширины разделяющей полосы и минимизацией суммарной ошибки. Тогда, решив эту задачу, мы найдем значения вектора  $w$  и  $b$ :

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i, \quad b = w * x_i - y_i.$$

Необходимо программно реализовать перечисленные методы и сравнить их точность, изучить, как распространение частоты ошибки влияет на оценку вероятности ошибки, а также использовать емкость семейства алгоритмов для оценки вероятности ошибки.

1. *Вьюгин В.В.* Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования. М.: МЦМНО, 2013.
2. *Ng A.* Stanford CS229 Lecture Notes, 2003.
3. *Widrow B.* Adaptive sampled-data systems, a statistical theory of adaptation. 1959. IRE WESCON Convention Record, part 4. New York: Institute of Radio Engineers.
4. *Cristianini N., Shawe-Taylor J.* An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods. Cambridge University Press, 2000.

## Моделирование инвазивных популяционных процессов с осцилляциями

**А. Ю. Переварюха**

*Санкт-Петербург, СПб ФИЦ РАН*

e-mail: madelf@rambler.ru

В докладе рассмотрено моделирование экстремальных процессов при вселении новых видов. Инвазионные процессы популяций в новой среде могут происходить с периодическими импульсными вспышками. Начальный импульс может затухнуть после первого пика, либо может развиться серия нерегулярных вспышек. Наиболее агрессивные процессы стремительного распространения видов в новые ареалы вселения сопровождаются резкими изменениями численности с дефолиацией леса. С точки зрения теории бифуркаций мы имеем дело с принципиально разными сценариями экодинамики, которые не описываются системой уравнений «хищник–жертва» [1].

Важна сущностная трактовка возникновения  $\tau$  запаздывания  $t - \tau$  или, обобщенно,  $t - \psi(t)$ . Величина времени  $\tau$  изначально в относилась к регуляции эффективности воспроизводства через задержку онтогенетического развития. Изменение запаздывания по некоторому закону  $\tau = \psi(t)$  может возникать при существовании смежных поколений с разной длительностью онтогенеза,

когда одно из поколений проходит зимовку, что является специфическим случаем. Длина жизненного цикла вида и интервалы между пиками численности у его популяций — не всегда сопоставимые величины на шкале времени. Мы предлагаем разделять запаздывание при интерпретации моделей на репродуктивное (онтогенетическое), регуляционное из-за исчерпания ресурсов и адаптивное — время для выработки ответной реакции.

Для модели экстремальных популяционных процессов актуальна минимальная численность той группы, которая теоретически необходима для выживания локальной популяции. Д. Базыкиным предложено уравнение с квадратичным фактором внешнего сопротивления  $-\delta N^2$  для описания сценария исчезновения популяции при пороговом эффекте:

$$\frac{dN}{dt} = r \frac{\gamma N^2}{\gamma + \sigma N} - \varsigma N - \delta N^2. \quad (1)$$

Принцип «агрегированной группы» говорит о том, что для популяции есть оптимальный для воспроизводства диапазон численности сообщества  $\bar{\Delta}N$ . Этот термин применим к общественным животным. Критический минимальный  $L$ -порог  $L < \inf \bar{\Delta}N$  из этого эффекта напрямую не следует, более того,  $L$ -порог плохо совместим с жесткой функцией регуляции  $rf(N^k)$ ,  $k \geq 2$  в моделях. Многомиллионные колонии социальных насекомых не страдают от высокой плотности. Минимально необходимое количество рабочих насекомых действительно установлено для выживания пчелиных семей.

Подобные резкие изменения представляют проблему для математического моделирования и составляют большую группу переходных процессов существования экосистем, которые переходят в устойчивые режимы. Нами разработаны сценарии для особых случаев популяционной динамики и взаимодействия противоборствующих организмов на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием  $t - \tau$ . Нами выбраны модификации известных уравнений для описания особой колебательной активности после обычной бифуркации Андронова–Хопфа в (1) после увеличения репродуктивного параметра  $R$ , но с последующим разру-

шением образовавшегося цикла.

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau_1)}{\mathfrak{K}} \right) (\mathfrak{U} - N(t - \tau_2)). \quad (2)$$

где параметр  $\mathfrak{U}$  — это величина, которую мы назвали предкритической емкостью полунасыщения вида-вселенца, для которой выполнены неравенства  $\mathfrak{U} < \mathfrak{K} \times 0.75$ . Значение численности  $\mathfrak{U}$  играет роль «спускового крючка» для ряда необратимых деструктивных процессов при инвазии и мешает эффективному биотическому противодействию. Важно, что при большом диапазоне значений  $R\tau_1$  система не имеет обычного балансового равновесия-точки  $N(t) \rightarrow K$  и не имеет неустойчивого равновесия, вокруг которого происходят орбитально устойчивые колебания  $N_*(t; R\tau_1\tau_2)$ . Объем «Экологической ниши» в такой небалансируемой ситуации просто не существует [1]. Потому мы заменили в (1) традиционное обозначение величины ниши  $K$  на  $\mathfrak{K}$ , так по своему смыслу эти величины иные, чем в известной «колебательной» модели Хатчинсона для популяции насекомых, изолированных от внешнего действия в лабораторных условиях:

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right). \quad (1)$$

Модель с запаздыванием в экологии традиционно исследуют с константой функцией-предысторией,  $K$  — емкость — традиционно усредненный равновесный уровень. Квадратичный закон регуляции в (2) — исключительно умозрительное предположение. Минимумы колебаний в (2) так быстро становятся глубокими и околонулевыми:  $\min N_*(t; R\tau) \rightarrow 0, R < M < \infty$ , что пользоваться моделью Хатчинсона в реальности невозможно. Популяция для существования должна всегда поддерживать минимально допустимую численность  $N(t) > \mathfrak{L}$ . Для описания начала осциллирующей вспышки можно использовать  $\mathfrak{B}$  как порог активного сопротивления:

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left( \frac{\mathfrak{B} - N^2(t - \tau_1)}{\mathfrak{B} + lN^3(t - \tau)} \right),$$

где  $\mathfrak{B}$  — нижний порог запуска серии пиков численности. Величина емкости ниши  $K$  — это инфимум для множества значений  $\mathfrak{B}$ . Полученная серия пиков в (3) без нереального свойства

$$\min N_*(R\tau, t) \rightarrow 0 + \varepsilon$$

и с наибольшим

$$\max N_*(R\tau, t_{m1}) > \max N_*(R\tau, t_{m1} + t_p)$$

в самом начале вспышки описывает ряд ситуаций периодических нашествий насекомых, как начало пилообразной вспышки кольчатого шелкопряда в лесах Востока Канады.

Для описания противодействия и затухания экстремального процесса предлагаем включить в модель (3) фактор сопротивления биотического окружения или выброса клеток иммунной системой на появление вируса, который будет зависеть и от начальной численности вселенца  $N(0)$ :

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left( \frac{\mathfrak{B} - N^2(t - \tau_1)}{\mathfrak{B} + EN^3(t - \tau)} \right) - \gamma \frac{N^m(t)}{H + N^2(0)}, \quad 2 < m < 3,$$

где  $\gamma$  — параметр эффективности биотического противодействия виду-вселенцу, что не сразу проявляется со стороны автохтонного окружения.

Предложенное уравнение можно использовать в составе «вольтерровских» систем для описания трофического взаимодействия с пороговыми эффектами. Предложенную функцию воздействия  $F(N^m(t - \nu); J)$  можно включать в модель пилообразных колебаний вспышек вредителей для описания их демпфирования в случае существования ограниченного лесного ресурса и противодействия естественных врагов-паразитов.

Рассмотренный сценарий отличается от ситуации прохождения у вновь образующейся популяции стадии длительного минимума при стабильной малочисленной группе особей с относительно малым  $r$ . Длительное состояние минимальной реликтовой группы принципиально отлично по эволюционным аспектам от перехода к резкому кризису с восстановлением. Увеличение численности  $N(t) \rightarrow K$  в сценариях с длительным минимумом  $N(t) \approx L$  связано с нарастанием репродуктивного потенциала, где  $r \neq \text{const}$ .

1. *Переварюха А.Ю.* Запоздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата // *Динамические системы.* 2017. Т. 7, № 2. С. 157–165.

## **Анализ и моделирование количественных показателей общеобразовательных организаций Удмуртской Республики с учетом демографической динамики**

**Д. А. Перевощикова**

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: perewoschikowadina@gmail.com

Целью работы является анализ количественных показателей общеобразовательных организаций (ОО) на примере Удмуртской Республики (УР). При анализе учтена демографическая динамика в регионе. Рассмотрены три ступени образования: начальное общее образование (НОО), основное общее образование (ООО), среднее общее образование (СОО). Изучена динамика количества классов очного обучения и обучающихся в этих классах и рассчитаны общие и частные показатели нагрузки. Современные демографические исследования предполагают широкое использование математических методов для анализа и прогноза демографических процессов и явлений. В данной работе для демографических расчетов использовалась задача демографической динамики вида [1]. Некоторые демографические расчеты на основе статистических данных [2] представлены на рис. 1–3. Расчеты показывают, что численность людей, получающих НОО и ООО, к 2026 г. увеличится; количество учащихся по программам СОО — уменьшится.

Некоторые результаты анализа количественного состава учебных заведений региональной экономической системы, а также изучение распределения населения по уровню образования приведены в работах [3, 4]. В таблице 1 и таблице 2 представлена динамика количества классов очного обучения в УР и чис-

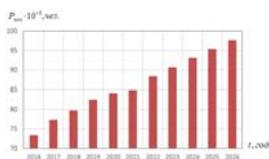


Рис. 1: Численность людей, получающих НОО с прогнозом 5 лет (1–4 классы)

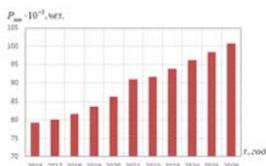


Рис. 2: Численность людей, получающих ООО с прогнозом 5 лет (5–9 классы)

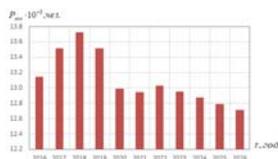


Рис. 3: Численность людей, получающих СОО с прогнозом 5 лет (10–11 классы)

ленность обучающихся в них в период 2016–2020 гг. по видам реализуемых программ.

Таблица 1 – Количество классов очного обучения в УР с 2016 по 2020 гг. шт.

	2016-2017	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021
Всего классов, $N$	9 266	9 487	9 595	9 753	9 855
из них:					
по программам НОО, $N_{ноо}$	3 994	4 141	4 191	4 284	4 300
по программам ООО, $N_{ооо}$	4 382	4 419	4 464	4 536	4 645
по программам СОО, $N_{соо}$	890	927	940	933	910

Таблица 2 – Численность обучающихся в УР в период с 2016 по 2020 гг. чел.

	2016-2017	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021
Всего обучающихся, $P$	165 665	170 806	175 085	179 555	173 449
из них:					
по программам НОО, $P_{ноо}$	73 315	77 275	79 776	82 434	74 128
по программам ООО, $P_{ооо}$	79 206	80 016	81 585	83 602	86 326
по программам СОО, $P_{соо}$	13 144	13 515	13 724	13 519	12 995

За период 2016–2020 гг. число классов очного обучения в УР увеличилось на 6,4%, в то время как число обучающихся с 2019 г. уменьшилось на 3,4%. Количество классов НОО за 5 лет увеличилось на 7,7%, а количество учащихся по программам НОО с 2019 г. уменьшилось на 8 306 чел. (на 10,1%). Количество классов ООО увеличилось на 6%, так же, как и число обучающихся по программам ООО, которое возросло на 7 120 чел. (на 9%). Количество классов СОО с 2018 г. уменьшилось на 3,2%, число обучающихся по программам СОО уменьшилось с 2018 г. на 5,3%. В

этой связи перейдем к анализу удельных показателей загруженности учебных заведений, которые представлены на рис. 4. Так, с 2016 г. нагрузка на классы НОО уменьшилась на 6,1%; на классы СОО уменьшилась на 3,3%; На классы ООО — увеличилась на 2,8%.

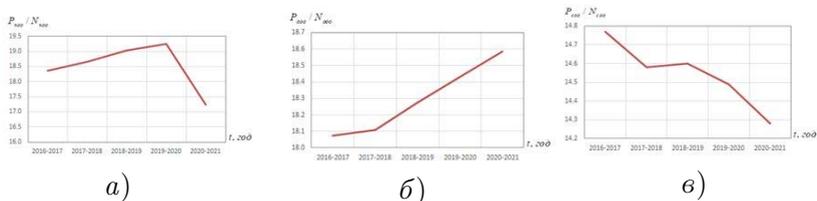


Рис. 4: Удельные показатели загруженности ОО в УР в период 2016–2020 гг.: а) – НОО; б) – ООО; в) – СОО

В регионе прослеживается тенденция увеличения учащихся по программам основного общего образования. Несмотря на увеличение количества классов ООО, нагрузка на них возрастает. Таким образом, в настоящее время сформирована потребность в еще большем увеличении классов ООО.

1. *Русяк И.Г., Кетова К.В.* К вопросу о выводе уравнения динамики возрастного состава // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2004. № 2. С. 49–52.
2. Удмуртия в цифрах. 2020 год: (стат. ежегод.): (№002 по кат.) / Федер. служба гос. статистики, Территор. орган Федер. службы гос. статистики по Удмурт. Респ. Ижевск: Удмуртстат, 2021.
3. *Кетова К.В., Вавилова Д.Д., Кузьмин М.С.* Анализ структуры населения по уровню образования // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2020. № 6-2 (45). С. 27–34.
4. *Кетова К.В., Корепанова А.В.* Анализ количественного состава учебных заведений региональной экономической системы // Дневник науки. 2020. № 4 (40). С. 50.

# Математическое моделирование процессов внутренней баллистики с учетом флегматизатора и теплообмена

М. Д. Поторочин

Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова

e-mail: maksimpotorochin@yandex.ru

При стрельбе из автоматического оружия существует проблема перегрева ствола, что ограничивает темп стрельбы. Одним из способов решения этой проблемы является использование флегматизированных порохов, имеющих более низкую температуру горения, нежели обычный штатный порох. Для оценки влияния этого эффекта на тепловое состояние стволов в работе рассматривается задача внутренней баллистики с пороховым зарядом, состоящим из двух фракций (марок) пороха, одна из которых флегматизированная. Под флегматизацией пороха подразумевается покрытие порохового элемента некоторым слоем вещества, задерживающего начало его зажигания на некоторое время и уменьшающего температуру его горения, то есть в начальный момент времени зажигается только одна из фракций пороха, в то время как другая фракция зажигается через некоторый промежуток времени.

Вводится  $t_i^*$  — момент времени, после которого будет зажигаться  $i$ -я фракция пороха, и рассматривается математическая модель внутренней баллистики в термодинамической постановке в обозначениях [1]:

1. Уравнение горения для заряда  $i$ -й фракции ( $i = 1, 2$ ), для порохов без фазы распада

$$z_i = \psi_i = 0, \quad \text{если } t < t_i^*;$$

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{u_{ki}}{e_{1i}}, \quad \sigma_i(z_i) = 1 + 2\lambda_i z_i + 3\mu_i z_i^2, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{S_{0i}}{\Lambda_{0i}} \sigma_i(z_i) u_{ki},$$

$$\text{если } t \geq t_i^*; \quad 0 \leq z_i \leq 1, \quad 0 \leq \psi_i \leq 1.$$

## 2. Уравнение движения

$$v_{\text{CH}} = 0, \quad \text{если } p_{\text{CH}} < p_{\Phi},$$

$$q \frac{dv_{\text{CH}}}{dt} = S_{\text{KH}}(p_{\text{CH}} - p_{\text{HP}}), \quad \text{если } p_{\text{CH}} > p_{\Phi},$$

$$p_{\text{HP}} = p_{\text{H}} \left( 1 + \frac{k_{\text{B}} + 1}{4} k_{\text{B}} \frac{v_{\text{CH}}^2}{c_{\text{B}}^2} + k_{\text{B}} \frac{v_{\text{CH}}}{c_{\text{B}}} \sqrt{1 + \left( \frac{k_{\text{B}} + 1}{4} \right)^2 \frac{v_{\text{CH}}^2}{c_{\text{B}}^2}} \right);$$

$$\frac{dl_{\text{CH}}}{dt} = v_{\text{CH}}.$$

## 3. Уравнение энергии

$$\begin{aligned} p \left[ W_{\text{CH}} - \frac{\omega_1}{\delta_1} (1 - \psi_1) - \frac{\omega_2}{\delta_2} (1 - \psi_2) - \alpha_1 (\omega_{\text{B}} + \omega_1 \psi_1) - \alpha_2 \omega_2 \psi_2 \right] = \\ = (\omega_{\text{B}} + \omega_1 \psi_1) \frac{\theta}{\theta_1} f_1 + \omega_2 \psi_2 \frac{\theta}{\theta_2} f_2 - \left[ 1 + \frac{\omega_{\text{B}} + \omega_1 + \omega_2}{q} J_1 \right] \theta q \frac{v_{\text{CH}}^2}{2}. \end{aligned}$$

## 4. Уравнение состояния

$$\begin{aligned} p \left[ W_{\text{CH}} - \frac{\omega_1}{\delta_1} (1 - \psi_1) - \frac{\omega_2}{\delta_2} (1 - \psi_2) - \alpha_1 (\omega_{\text{B}} + \omega_1 \psi_1) - \alpha_2 \omega_2 \psi_2 \right] = \\ = (\omega_{\text{B}} + \omega_1 \psi_1 + \omega_2 \psi_2) RT. \end{aligned}$$

## 5. Дополнительные соотношения

$$p_{\text{CH}}(t) = \frac{p(t) + (\omega_{\text{B}} + \omega_1 + \omega_2) \frac{v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}} [0.5J_1 + J_2(x_{\text{CH}}) - J_3 - 0.5]}{1 + \frac{\omega_{\text{B}} + \omega_1 + \omega_2}{q} [J_2(x_{\text{CH}}) - J_3]},$$

$$\begin{aligned} p_{\text{KH}}(t) = p_{\text{CH}}(t) \left[ 1 + \frac{\omega_{\text{B}} + \omega_1 + \omega_2}{q} J_2(x_{\text{CH}}) \right] + \\ + (\omega_{\text{B}} + \omega_1 + \omega_2) \frac{v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}} [0.5 - J_2(x_{\text{CH}})], \end{aligned}$$

$$J_1 = \frac{S_{\text{KH}}^2}{W_{\text{CH}}^3} \int_0^{x_{\text{CH}}} \frac{W^2(x)}{S(x)} dx, \quad J_2(x) = \frac{S_{\text{KH}}^2}{W_{\text{CH}}^2} \int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi,$$

$$J_3 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^3} \int_0^{x_{\text{сн}}} \left( \int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi \right) dx, \quad W(x) = \int_0^x S(\xi) d\xi.$$

Совместно с задачей внутренней баллистики решается осесимметричная квазиодномерная задача теплообмена в поперечных сечениях ствола [2]:

$$\frac{\partial(c\rho T)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial t} \right),$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_{\text{внут}}} = a_{\Gamma}(T_{\Gamma} - T_s), \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_{\text{внеш}}} = a_{\text{В}}(T_{\text{В}} - T_s). \end{cases}$$

Переменная температура поверхности канала ствола  $T_s$  определяется по методике Р.Е. Соркина [3]:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{2Nu^2\lambda^2}{d_{\text{кн}}c_c\rho_c\lambda_c} (T - T_{\text{н}} - \sqrt{\eta})^2, \quad T_s = T_{\text{н}} + \sqrt{\eta(t)}, \quad \eta(0) = 0.$$

Задача внутренней баллистики решается методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Задача теплопроводности решается по неявной четырехточечной разностной схеме с использованием метода прогонки.

Исследовано влияние массы и времени задержки начала горения флегматизированного пороха на тепловой режим канала ствола при выстреле. Показано, что существует возможность управления нагревом ствола за счет выбора указанных выше параметров.

1. *Русяк И.Г., Тененев В.А.* Влияние размерности математической модели внутренней баллистики на расчетные параметры выстрела для зарядов из зернового пороха // Вестник НИТГУ. Математика и механика. 2021. № 73. С. 95–110.
2. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2002.
3. *Соркин Р.Е.* Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1967.

# Модель речного стока, основанная на гидрологических данных

С. В. Русаков

*Пермь, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет*  
e-mail: rusakov@psu.ru

Вопросам моделирования речного стока посвящено достаточно много работ. Можно отметить монографию [1], в которой имеется обширный обзор по этой проблематике, где особое внимание уделяется моделям, опирающимся на уравнения массопереноса. Кроме того, весьма популярны статистические модели, том числе реализованные в виде нейронных сетей (см., например, [2]). В настоящей работе представлена агрегированная модель, в которой детальное описание русла частично компенсируется имеющимися регулярно измеряемыми данными.

Система наблюдений за состоянием рек в России организована в виде так называемых гидрологических постов (г/п), на которых производится замер уровня воды в реке и расхода жидкости через поперечное сечение русла. Полученные результаты накапливаются в виде ежедневных данных. Если на протяжении реки имеется два таких г/п, то получаемая с них информация помогает анализировать характер водного стока на участке реки между ними, с помощью математических моделей. Будем рассматривать задачу в одномерной постановке, где пространственная координата  $x$  направлена вдоль русла реки. Пусть  $Q(x, t)$  — расход через поперечное сечение русла реки в точке  $x$ . Взяв за основу уравнения гидродинамики, рассмотрим модель, описывающую поведение этой величины в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q(x, t)}{\delta t} + u(x, t) \frac{\delta Q(x, t)}{\delta x} = \\ = K(x, t)S(x, t) + \frac{\delta q(x, t)}{\delta t}, \quad x > 0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$Q(x, 0) = \phi_0(x), \quad Q(0, t) = \psi_0(t).$$

Здесь  $S(x, t)$  — площадь водного сечения русла реки,  $u(x, t)$  — средняя скорость потока в точке  $x$  и момент времени  $t$ , которая определяется по формуле  $u(x, t) = \frac{Q(x, t)}{S(x, t)}$ ,  $q(x, t)$  — приток воды с неосвещенной наблюдениями площади водосбора (маленькие речки, ручьи, родники, грунтовые воды и т.д.) через береговую линию и ложе реки,  $\varphi_0(x)$  и  $\psi_0(t)$  — соответственно начальное и граничное условия. Эмпирический функциональный коэффициент  $K(x, t)$  предназначен для учета движения воды за счет силы тяжести и торможения в силу наличия вязкого сопротивления трения.

В качестве примера такой водной системы рассмотрим участок реки Кама от г/п Кама–Гайны до г/п Кама–Бондюг протяженностью  $L_B = 120$  километров. На этом участке имеется один значительный правый приток река Коса, в устье которой также имеется г/п Коса–Коса ( $L_K = 60$  км от г/п Камы–Гайны). Таким образом вода, проходя через г/п Кама–Гайны и г/п Коса–Коса в конечном итоге оказывается в г/п Кама–Бондюг, то есть имеется два точечных и один распределенный  $q(x, t)$  источники, работающие на вход, и один на выход.

В рассматриваемом случае в качестве исходных данных используются значения расходов водного потока и уровня поверхности в этих трех г/п, которые мы будем обозначать соответственно  $Q_G(t)$ ,  $Q_K(t)$ ,  $Q_B(t)$  и  $H_G(t)$ ,  $H_K(t)$ ,  $H_B(t)$ . Поскольку в створе г/п известен русловой профиль, это позволяет однозначно определить площади водного сечения, которые мы будем обозначать как  $S_G(t)$  и  $S_B(t)$ . Требуется на основе этих данных оценить величину  $q(x, t)$  в зимний период, когда отсутствуют какие либо поступления воды в виде атмосферных осадков. При решении поставленной задачи будем использовать следующие упрощающие предположения:

1) за неимением более подробной информации, изменение площади водного сечения вдоль русла реки будем аппроксимировать линейной зависимостью вида

$$S(x, t) = S_G(t) + x \frac{S_B(t) - S_G(t)}{L_B};$$

2) поскольку рельеф местности водосбора рассматриваемо-

го участка р. Кама достаточно однороден, будем полагать

$$q(x, t) = q(t);$$

3) эмпирический функциональный коэффициент  $K(x, t)$  зависит только от значений расходов воды на г/п:

$$K(t) = K(Q_G(t), Q_K(t), Q_B(t)).$$

Для определения вида функции  $K(x, t)$  воспользуемся квазистационарным приближением. Пусть решение задачи (1) не зависит от времени, тогда имеем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dQ^2(x)}{dx} &= 2K \cdot S^2(x), \quad Q(0) = Q_G, \quad x \in (0, L_K - 0), \\ Q(L_K) &= Q(L_K - 0) + Q_K, \quad x \in (L_K, L_B], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $K = \text{const}$ . В силу допущений задача (2) имеет аналитическое решение

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sqrt{Q_G^2 + 2K_1 \cdot F(x)}, \quad x \in [0, L_K), \\ Q(x) &= \sqrt{(Q(L_K - 0) + Q_K)^2 + 2K_2 \cdot F(x)}, \quad x \in [L_K, L_B], \\ Q(L_K - 0) &= \sqrt{Q_G^2 + 2K_1 \cdot F(L_K)}, \quad F(x) = \int_0^x S^2(\xi) d\xi, \quad x \in [0, L_B]. \end{aligned} \quad (3)$$

Из упрощающего предположения 2), имеем:

$$Q(L_K - 0) = Q_G + (Q_B - Q_G - Q_K)L_K/L_B.$$

Тогда из решения (3) можно определить

$$K_1 = \begin{cases} \frac{1}{2F(L_K)} ((Q_G + Q(L_K - 0))^2 - Q_G^2), & x \in [0, L_K), \quad i = 1, \\ \frac{1}{2F(L_B)} (Q_B^2 - (Q(L_K - 0) + Q_K)^2), & x \in [L_K, L_S], \quad i = 2. \end{cases} \quad (4)$$

Учитывая то, что каждый зимний сезон имеются периоды в 1-1.5 недель, когда значения наблюдаемых расходом практически постоянны, на основе формул (4) были построены регрессионные зависимости, которые и использовались в расчетах.

Численное решение задачи (1) было реализовано в виде простейшей неявной схемы на регулярной сетке  $x_j = j \cdot \Delta x$ ,  $t^{(n)} = n \cdot \Delta t$ ,  $\Delta x = L_B$ ,  $j = 0, \dots, N$ :

$$\frac{Q_j^{(n+1)} - Q_j^{(n)}}{\Delta t} + \frac{Q_j^{(n)}}{S_j^{(n)}} \frac{Q_j^{(n+1)} - Q_{j-1}^{(n+1)}}{\Delta x} =$$

$$= K \left( x_J, Q_G^{(n)}, Q_K^{(n)}, Q_B^{(n)} \right) S_j^{(n)} + \left( \frac{dq}{dt} \right)^{(n+1)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (5)$$

$Q_0^{n+1} = Q_G^{(n+1)}$ . При построении начального условия  $Q_j^{(0)}$  использовалось аналитическое решение (3), которое потом уточнялось внутренними итерациями на первом шаге по времени. Отметим, что известное значение  $Q_N^{(n+1)} = Q_B^{(n+1)}$  позволяет однозначно определить величину  $(dq/dt)^{(n+1)}$ . Константа, возникающая при интегрировании этой величины, определялась исходя из средне-зимних характеристик расходов в рассматриваемой гидрологической системе.

Результаты расчетов по данным зимних сезонов 2008 – 2015 гг. показали, что величина  $q(t)$  убывает практически линейно, причем скорость этого убывания, коррелируя со средне зимними расходами в г/п Кама–Бондюг, в то же время является самостоятельной характеристикой, зависящей от целого ряда факторов: насыщения почвы влагой в осенний период, характер промерзания грунта и т.п.

1. *Мотовилов Ю.Г., Гельфан А.Г.* Модели формирования стока в задачах гидрологии речных бассейнов. Москва: Институт водных проблем РАН, 2018.
2. *Wu C.L., Chau K.W.* A flood forecasting neural network model with genetic algorithm // International Journal of Environment and Pollution. 2006. Vol. 28, no. 3-4, pp. 261–273.

# Моделирование движения управляемого барражирующего боеприпаса

В. Н. Русских

Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова

e-mail: lerar564@gmail.com

Одним из главных преимуществ барражирующих боеприпасов является поражение цели, точное местоположение которой неизвестно при выстреле. Барражирующие боеприпасы являются одним из развивающихся направлений военной индустрии. Возникает необходимость в их постоянном развитии и усовершенствовании. Для успешного выделения признаков, которые могли бы наглядно показать, какие факторы оптимизируют или ухудшают работу барражирующего боеприпаса, резоннее всего построить математическую модель. Цель работы состоит в том, чтобы оптимизировать дальность полета барражирующего боеприпаса с учетом нормальных условий окружающей среды. Объектом исследования выступает траектория полета барражирующего боеприпаса, которая зависит от угла выстрела снаряда, количества реактивного топлива и момента запуска реактивного двигателя. В ходе исследования было выделено три основных задачи.

**Задача внутренней баллистики.** В данном пункте определяется скорость выстрела барражирующего боеприпаса в зависимости от свойств артиллерийской системы, пороха и массы снаряда, которая равна сумме массы снаряда и массы реактивного топлива:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \psi(z) = kz(1 + z\lambda + z^2\mu),$$
$$q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = p_{\text{сн}} S_{\text{сн}}, \quad \frac{dl_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}, \quad p = \phi p_{\text{сн}}, \quad \phi = 1 + \frac{1}{3} \frac{\omega}{q},$$
$$p[l_{\text{сн}} S_{\text{сн}} + W_{\text{кам}} - \alpha \omega \psi - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi)] = \omega \psi f - \frac{\theta}{2} q v_{\text{сн}}^2,$$
$$p[l_{\text{сн}} S_{\text{сн}} + W_{\text{кам}} - \alpha \omega \psi - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi)] = \omega \psi RT.$$

Здесь  $p_{\text{сн}}$  — давление на дно снаряда,  $S_{\text{сн}}$  — площадь поперечного сечения снаряда,  $W_{\text{кам}}$  — объем камеры,  $v_{\text{сн}}$  — скорость снаряда.

**Задача внешней баллистики.** В данном пункте рассматривается траектория полета, которая зависит от скорости выстрела, угла выстрела и массы снаряда:

$$\frac{dV}{dt} = -g \cos \theta + \frac{P - R}{m}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\cos \theta}{V} + \frac{Y}{mV},$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = V \sin \theta, \quad \frac{dm}{dt} = -\mu.$$

Здесь  $R$  — сумма сопротивлений крыльев и боеприпаса,  $P$  — сила тяги,  $\mu$  — снижение массы снаряда за счет сжигания реактивного топлива.

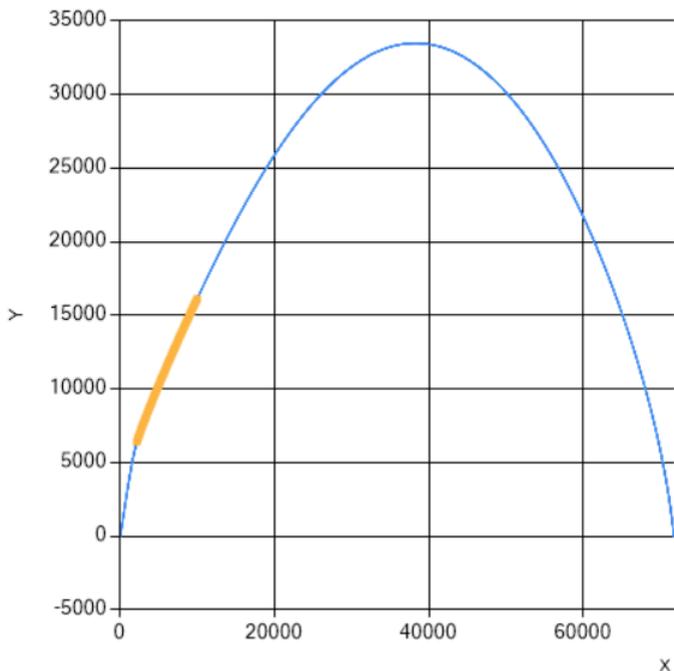


Рис. 1: Оптимальная траектория барражирующего боеприпаса

**Задача оптимизации.** Задача оптимизации состоит в использовании метода случайного поиска, который определяет, при каком угле выстрела, количестве топлива и моменте запуска реактивного двигателя боеприпас достигает максимальной дальности полета.

В ходе исследования установлено, что необходимо запускать реактивный двигатель в ходе нарастания высоты полета. Оптимальный угол для достижения наибольшей дальности полета равен 45 градусов. Исследования показывают, что наибольшее количество топлива расходуется до высоты в 15–16 км. После этого плотность воздуха становится достаточной, чтобы увеличить работу сил тяги для преодоления сопротивления. Из-за этого расход топлива значительно снижается, и снаряд проходит большее расстояние за меньшее время. На рис. 1 изображена оптимальная траектория барражирующего боеприпаса с крыльями, находящимися под углом атаки в 5 градусов и реактивным двигателем. Синей линией обозначена траектория боеприпаса, желтой линией указан интервал работы реактивного двигателя.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–01–00072.

1. Бронебойные снаряды с прямоточным воздушно-реактивным двигателем. URL: <https://habr.com/ru/post/348974/> (дата обращения: 15.02.2022 г.)
2. *Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З.* Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
3. *Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М.* Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
4. *Гаврилов К.С.* Проектирование бронебойного подкалиберного снаряда с прямоточным воздушно-реактивным двигателем.

# Автоматизация конечно-элементных вычислений при решении прикладных задач

А. В. Селезнева, С. П. Копысов

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: zukova16@mail.ru, s.kopysov@gmail.com

Метод конечных элементов (МКЭ) отличается простой физической интерпретацией основных вычислительных операций. Его легкая приспособляемость к геометрии рассматриваемой области и граничным условиям является также очень важным достоинством. С другой стороны, применение МКЭ требует выполнения достаточно большого объема однотипных и уже стандартных операций, которые можно эффективно произвести с помощью компьютера.

Рассмотрим некоторые существующие подходы, реализующие конечно-элементные вычисления и их средства для упрощения понимания, исследования и практического применения МКЭ.

В настоящее время операций, которые ранее требовали участие разработчика, становится все меньше. Построение расчетных сеток в произвольных областях и введение граничных условий и параметров задачи давно реализовано в многих программных системах, реализующих МКЭ в САЕ-системах (Computer Aided Engineering) — системах инженерного анализа. В них имеется инфраструктура и библиотеки различных конечных элементов, которые позволяют достаточно быстро осуществить моделирование практически важных прикладных задач.

В то же время, в исследовательской практике и прикладных расчетах встречается большой спектр задач высокой сложности, для решения которых невозможно использовать универсальные средства, реализующие МКЭ. Вместе с тем, хотелось бы обойтись без традиционного программирования прикладных задач, решая их в специально разработанных средах, позволяющих выполнять численные расчеты, аналитические преобразования, анализ данных и графическое представление результатов. При этом исполь-

зуемые программные средства должны легко адаптироваться к имеющейся архитектуре вычислительной системы и среде выполнения.

Такие направления прикладного программного обеспечения для МКЭ развиваются широко, например: DEAL.II, FreeFem++, AceFEM, FEATool Multiphysics, Fenics, Firedrake, Gridap и т.д.

Целью данной работы не является подробное представление шаблонов проектирования и автоматизации, используемых в различных системах и связанных с их внутренним представлением. Далее приводится краткий обзор и сравнение лишь двух систем Gridap и FEniCS, а также примеры и результаты сравнения конечно-элементного решения уравнений в частных производных. Отметим, что примеры приводятся в формате записных книжек Jupyter Notebook, в которых объединяется код и его выходные данные в единый документ, сочетающий в себе математические уравнения, текст с описанием алгоритмов, визуализацию результатов и другие мультимедийные средства, позволяющие проводить интерактивное обучение.

FEniCS [1] — это свободно распространяемая библиотека метода конечных элементов, позволяющая автоматизировать решение задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Использование FEniCS значительно упрощает решение дифференциальных уравнений в частных производных. Так, уравнение записывается в вариационной форме, а для дискретизации в пространстве используются конечные элементы, и их дальнейшее решение производится автоматически.

Большая функциональная часть представлена в модуле DOLFIN, который является основным пользовательским интерфейсом. В модуле имеются все необходимые компоненты для работы с расчетными сетками и пространствами. Работа с модулем возможна как на Python, так и на C++.

Архитектура FEniCS предполагает использование других библиотек и даёт возможность пользователю выбирать конкретные компоненты (классы), а не привязываться к жесткой структуре или какому-то пакету. В DOLFIN можно создавать сложную и многофункциональную систему из относительно небольшого по

объёму программного кода, что становится возможным благодаря автоматизации и более сложной внутренней архитектуре построения среды.

DOLFIN позволяет отделить алгоритмы сборки от реализации вариационных форм и конечных элементов. В результате DOLFIN поддерживает более широкий диапазон конечных элементов, поскольку он может собирать любую вариационную форму конечных элементов в любом пространстве конечных элементов, поддерживаемом компилятором форм и серверной частью конечных элементов.

Компилятор форм автоматически генерирует код для самого внутреннего цикла алгоритма сборки из высокоуровневого математического описания вариационной формы конечных элементов.

Для решения задач в FEniCS вариационная форма дифференциальных уравнений в частных производных, функциональные пространства, типы элементов, настройки решателя и т.д. определяются посредством разработки скриптов.

Задачи механики сплошной среды решаются в FEniCS путем разработки соответствующих сценариев, эти сценарии обычно специфичны для различных типов задач (например, твердое тело, жидкость) и свойств материала (например, определяющие уравнения, сжимаемость).

Рассмотрим еще одну свободную библиотеку — Gridap [2]. Данная библиотека предоставляет широкий набор инструментов для решения сложных задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Gridap полностью написана на высокоуровневом высокопроизводительном языке программирования Julia.

Отметим, что библиотека имеет проработанный программный интерфейс, что позволяет пользователям, не имеющим высоких навыков программирования, записывать дифференциальные уравнения в частых производных в слабой форме, схожей с математической нотацией. Все математические объекты, участвующие в определении дискретной задачи, имеют соответствующее представление в коде.

Библиотека построена таким образом, что взаимодействие

пользовательского интерфейса и вычислительной части происходит без использования промежуточного языка программирования. Эта особенность позволяет легко управлять модулями библиотеки. Построение Gridap уникально тем, что используется много возможностей языка Julia (множественная диспетчеризация и функциональное программирование) без ущерба для производительности и выразительности.

Структура Gridap позволяет реализовывать достаточно сложные задачи в малом количестве строк кода, используя высокий уровень абстракций, предоставляемых библиотекой (дискретные модели, конечно-элементные пространства, триангуляции, квадратуры и т.д.).

Рассмотренные подходы автоматизации конечно-элементных вычислений повышают доступность при моделировании задач вычислительной механики для пользователей с минимальными знаниями в области программирования, сохраняя при этом мощные и расширяемые платформы с открытым исходным кодом, которые позволяют получить доступ ко всему спектру возможностей МКЭ.

1. *Logg A., Wells G.N.* DOLFIN: Automated Finite Element Computing // ACM Transactions on Mathematical Software. 2010. Vol. 37, no. 2.
2. *Verdugo F., Badia S.* A user-guide to Gridap — grid-based approximation of partial differential equations in Julia // ArXiv. 2019. V. abs/1910.01412.

# Применение методов цифровизации для изучения демографических характеристик народонаселения

А. С. Селезнёва

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: [nastya.selezneva.2000@list.ru](mailto:nastya.selezneva.2000@list.ru)

В современных условиях постоянного нарастания объема окружающей человека информации для сохранения устойчивости и безопасности развития региональных социально-экономических систем возникает необходимость в развитии грамотных технологий работы с информационными потоками [1, 2]. В целях дальнейшего успешного движения в заданном правительством страны направлении необходимо также создавать комплексные системы цифровизации, которые могли бы быть предложены для использования как населению, так и управляющим органам для оптимизации и развития разных сфер жизнедеятельности. В этой связи требуют своего научного и практического развития принципы и алгоритмы цифровизации движения населения и связанного с этим движения человеческого капитала. Эта задача пока не реализована в полном объеме в Российской Федерации. Она является новым научным направлением, тем более, если говорить об учете особенностей развития каждого региона в отдельности.

Важным элементом является структуризация потоков информации о численности населения, его распределении по возрастам, о процессах рождаемости и смертности, миграции и пр. Правильная структуризация, обработка и хранение такой информации поможет, в первую очередь, обеспечить безопасность самого человека.

Объектом исследования в работе является движение демографических потоков, а также сопутствующих этому движению обобщенных качественных характеристик населения. Предметом научного исследования является человек, а именно, количественные и качественные демографические характеристики. Это обу-

словлено пониманием того, что главной компонентой развития любой территории и главной производительной силой развития общественного производства является население. Исследование проводится применительно к условиям и особенностям Удмуртской Республики. Целью работы является разработка принципов и алгоритмов цифровизации движения населения и связанного с этим движения человеческого капитала применительно к условиям и особенностям Российской Федерации. Для этого используются современные методы математического анализа, обработки и хранения данных [3, 4].

Для решения поставленных задач, в частности, для формирования цифровых демографических потоков и цифровых потоков человеческого капитала, необходимо располагать структурированной статистической информацией. В данном случае, при решении этой задачи результатом является разработанная структура базы статистических данных для построения демографических потоков и связанных с ними потоков демографических характеристик. На рис. 1 представлена структура информационно-аналитической системы для решения задачи цифровизации демографических характеристик населения.

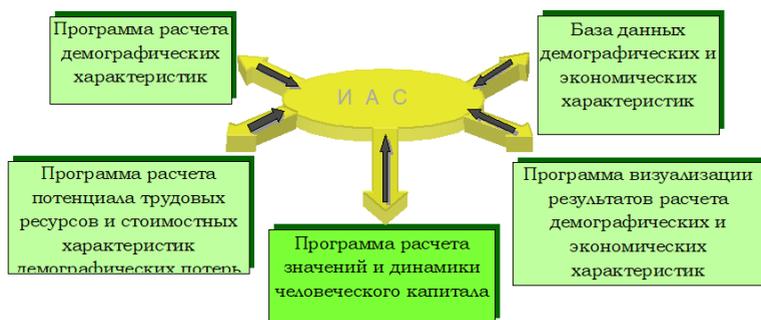


Рис. 1: Структура информационно-аналитической системы

1. Задача применения технологии работы с большим объемом данных BigData для реализации возможности структуризации информационных потоков в области демографических

процессов, а также ряда социально-экономических процессов (здравоохранение, образование, сфера культуры).

2. Задача применения технологии Data-анализ для формирования сопутствующих движению демографических элементов информационных потоков их качественных характеристик.
3. Задача применения технологии Data Science (в том числе алгоритмов нейросетевого моделирования) для анализа и прогноза демографических показателей и социально-экономических характеристик человеческого капитала населения.
4. Задача разработки технологии формирования цифрового следа человека на всем пути его жизни.

Решение задачи позволяет осуществить построение различных функций распределения населения по количественным и качественным характеристикам. Например, функции распределения численности населения по возрастам для любого момента времени; функции распределения удельных расходов государства в составляющую образования, здравоохранения и культуры в распределении по возрастам; функции распределения удельных частных инвестиций, направленных на приращение человеческого капитала, по возрастам; коэффициентов выбытия составляющих человеческого капитала в распределении по времени и возрасту; функции, задающей долю населения, участвующего в общественном производстве, в распределении по времени и возрасту.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072.

1. Цифровизация. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.gd.ru/articles/10334-tsifrovizatsiya>
2. Методы развития цифровой экономики в регионах Российской Федерации. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <file:///F:/metodologiya-issledovaniya-razvitiya-tsifrovoy-ekonomiki-v-regionah-rossiyskoy-federatsii.pdf>

3. *Цымблер М.Л.* Какие методы и технологии используются для обработки Больших Данных.
4. *Кетова К.В.* Математические модели экономической динамики. Ижевск, 2013.

## Об одном алгоритме связывания в сопряженной задаче о движении твердого тела в несжимаемой жидкости

А. А. Сидорова, Л. Е. Тонков

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: sidorova\_albina@bk.ru, letonkov@mail.ru

Рассматривается в двумерном приближении задача о движении твердого тела под действием постоянной силы в несжимаемой жидкости. Движение тела, вызываемое действующей силой, определяет характер течения жидкости в окрестности тела, что в свою очередь влияет на динамику его движения. Таким образом, рассматриваемая задача является сопряженной и представляет собой тестовый пример для исследования и сравнения соответствующих методов и алгоритмов.

Численная схема решения задачи основана на одном из вариантов метода погруженных границ, получившем название метода консервативного обмена импульсом [1]. Система нестационарных уравнений Навье–Стокса, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -(1/\rho_f) \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

дискретизируется на неподвижной ортогональной сетке. Поле скорости  $\mathbf{u}$  определяется в каждой ячейке как средневзвешенное  $\mathbf{u} = (1 - \alpha) \mathbf{u}_f + \alpha \mathbf{u}_s$ , где  $\alpha$  — объемная доля твердого тела в ячейке, а индексы  $f$  и  $s$  обозначают жидкую и твердую фазы

соответственно. Величина  $\rho_f \mathbf{f}$  является удельной (на единицу объема) силой взаимодействия тела и жидкости.

Численное решение системы (1) ищется при помощи проекционной схемы с коррекцией поля скорости [2, 3]. На первом этапе по известному с шага  $k$  полю промежуточной скорости  $\tilde{\mathbf{u}}^k$  определяется поле давления  $p^{k+1}$ , а затем поле скорости  $\mathbf{u}^{k+1}$ , удовлетворяющее условию несжимаемости на шаге  $k + 1$ :

$$\delta t \nabla^2 p^{k+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^k, \quad \mathbf{u}^* = \tilde{\mathbf{u}}^k - \delta t \nabla p^{k+1}, \quad (2)$$

$$\delta t \mathbf{f}^{k+1} = \alpha (\mathbf{u}_s^k - \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* + \delta t \mathbf{f}^{k+1}. \quad (3)$$

На втором этапе вычисляется новое поле промежуточной скорости путем решения уравнений импульса без учета влияния градиента давления и силы взаимодействия:

$$(1/\delta t)(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1}) = -(\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \quad (4)$$

а также интегрируются уравнения динамики твердого тела для определения его положения и скорости  $\mathbf{u}_s^{k+1}$ . Дискретизация дифференциальных операторов осуществляется со вторым порядком методом контрольных объемов на совмещенной сетке, т.е. компоненты скорости и давление определяются в центрах ячеек.

Отметим, что существенным, прежде всего в смысле вычислительных затрат, в рассматриваемой численной схеме является этап определения скалярного поля  $\alpha$ . Однако, вычисления хорошо локализуются, так как требуют рассмотрения только тех ячеек сетки, которые пересекает поверхность тела.

Результаты проведенных расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными и численными результатами, представленными в [4]. Численная схема, построенная на основе проекционного метода с коррекцией скорости, может оказаться более эффективной, чем аналогичные на основе PISO при решении сопряженных задач взаимодействия жидкости и деформируемых тел (FSI) в рамках разделенного подхода как за счет большего перекрытия подзадач, так и за счет лучшей сходимости итерационного процесса сопряжения решений на границе «жидкость–твердое тело».

1. *Takeuchi S., Yuki Y., Ueyama A., Kajishima T.* A conservative momentum-exchange algorithm for interaction problem between fluid and deformable particles // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2010. Vol. 64, pp. 1084–1101.
2. *Guermont J.-L., Mineev P., Shen, J.* An overview of projection methods for incompressible flow // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2006. Vol. 195, pp. 6011–6045.
3. *Сидорова А.А., Тонков Л.Е.* Проекционные методы с коррекцией скорости для численного решения задач гидродинамики // В сборнике: Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, 15–19 июня 2020. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. С. 340–341.
4. *Sun X., Sakai M.* Numerical simulation of two-phase flows in complex geometries by using the volume-of-fluid/immersed-boundary method // Chemical Engineering Science. 2016. Vol. 139, pp. 221–240.

## Решение задачи SAT посредством операций пересечения и дополнения конститuentных множеств

**Ю. М. Сметанин**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: gms1234gms@rambler.ru

Логическому уравнению  $F(\tilde{x}_n) = 1$ , где  $\tilde{x}_n = x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ , сопоставляется его образ — отношение равенства в алгебре множеств  $U = F(\tilde{X}_n), U \subseteq U^0 = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ . Значение  $U$  вычисляется как  $U = F(\tilde{X}_n^0), \tilde{X}_n^0 = X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0$ , где  $X_i^0 \subset U^0$  есть фиксированные множества из неотрицательных целых чисел. Доказано [1], что двоичное представление элементов  $U$  представляет все множество выполняющих подстановок для уравнения  $F(\tilde{x}_n) = 1$ .

Рассматривается задача SAT для  $F(\tilde{x}_n) = 1$ . В качестве левой части уравнения берется КНФ. Алгоритм поиска выполняющей подстановки организован путем вычисления пересечения множеств  $U_i$  — номеров выполняющих подстановок каждого из кловов. Формат представления этих множеств и содержание алгоритма поясняются в примере 1.

### Пример 1.

$$f(\tilde{x}_4) = (x'_2 + x_3 + x'_4) \cdot (x'_1 + x'_3) \cdot (x_3 + x_4) \times \\ \times (x_1 + x'_2) \cdot (x_3) \cdot (x'_1 + x'_3 + x_4) = 1. \quad (1)$$

Сопоставим (1) его образ — равенство (2), для которого булевы переменные  $x_i$  из (1) есть характеристические функции модельных множеств  $X_i$ .

$$U = (X'_2 + X_3 + X'_4) \cdot (X'_1 + X'_3) \cdot (X_3 + X_4) \times \\ \times (X_1 + X'_2) \cdot (X_3) \cdot (X'_1 + X'_3 + X_4). \quad (2)$$

Множество  $U$  можно вычислить как пересечение множеств  $M(i)$  из равенств  $I - VI$ , которые далее называются единицами, а их дополнения до универсума нулями —  $N(i)$ .

$$I. M(1) = (X'_2 + X_3 + X'_4);$$

$$II. M(2) = (X'_1 + X'_3);$$

$$III. M(3) = (X_3 + X_4);$$

$$IV. M(4) = (X_1 + X'_2);$$

$$V. M(5) = (X_3);$$

$$VI. M(6) = (X'_1 + X'_3 + X_4).$$

Единица для (2) находится из равенства  $M = U$ , где

$$U = (X_2^{0'} + X_3^0 + X_4^{0'}) \cdot (X_1^{0'} + X_3^{0'}) \cdot (X_3^0 + X_4^0) \times \\ \times (X_1^0 + X_2^{0'}) \cdot (X_3^0) \cdot (X_1^{0'} + X_3^{0'} + X_4^0),$$

$X_i^0$  — фиксированные подмножества  $U^0 = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ . Множества  $X_i^0$  зададим в алгебре кортежей [2] в виде  $C$ -системы:

$$\begin{aligned} X_1^0 &= \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ * & * & 1 & * \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \\ X_2^0 &= \begin{bmatrix} * & 1 & * & * \\ * & * & 1 & * \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \\ X_3^0 &= \begin{bmatrix} * & * & 1 & * \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \\ X_4^0 &= \begin{bmatrix} * & * & * & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Здесь  $*$  =  $\{0, 1\}$ , единицей — 1 обозначено множество  $\{1\}$ , каждая строка задает конституентные множества, получаемые из декартова произведения множеств одного кортежа,

$$X_1^0 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, X_1^1 = \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}, \\ X_1^2 = \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}, X_4^0 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}.$$

Зададим нуль конъюнкции суждений  $I - VI$  как объединение нулей каждого из них.

Эти нули выражаются  $C$ -системой из  $C$ -кортежей (нулей), сопоставленных каждому клозу.

$$N(f(\tilde{x}_4)) = N(1) + N(2) + N(3) + N(4) + N_5 + N_6 = \\ = \begin{bmatrix} *101 \\ 1*1* \\ **00 \\ 01** \\ **0* \\ 1*10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(1) \\ N(2) \\ N(3) \\ N(4) \\ N(5) \\ N(6) \end{bmatrix}.$$

Принцип кодирования  $C$ -кортежом нуля ( $N(i)$  для  $i$  клоза весьма прост. Например, клозу  $(x'_2 + x_3 + x'_4)$  сопоставляется  $C$ -кортеж  $N(1) = [*101]$ , определяющий конституентное множество  $\{5, 13\}$ , соответствующее двум подстановкам 0101 и 1101, на которых клоз невыполним.

Более предпочтительным является способ вычисления единицы  $N(f(\tilde{X}_4))$ , как пересечения всех единиц суждений  $I - VI$ . Каждая единица  $M(i) = N(i)'$  вычисляется, как дополнение нуля, выраженное  $C$ -системой из ортогональных (непересекающихся) множеств. Алгоритм получения единицы клоза  $M(i)$  имеет линейную сложность относительно количества нулей и единиц в

его нуле  $N(i) = M(i)'$ . «Умножим»  $M(2)$  и  $M(3)$

$$\begin{aligned}
 M(2) \cdot M(3) &= N'(2) \cdot N'(3) = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ 1 & * & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * & * & 1 & * \\ * & * & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= [\{0..7\} + \{8, 9, 12, 13\}] \cdot [\{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\} + \{1, 5, 9, 13\}] = \\
 &= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13\} = \begin{bmatrix} 0 & * & 1 & * \\ 0 & * & 0 & 1 \\ 1 & * & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Автором разработан эффективный алгоритм вычисления пересечений единиц для образов каждого клоза. Количество выполняемых операций пересечений кортежей из  $M(i)$  для (1) зависит от их упорядочения. Для порядка 123456 их число равно 30. Для порядка 256413 — 11. Общая единица равна  $\{2, 3\}_{(10)} = \{< 0010 >, < 0011 >\}_2$ .

Минимизация числа операций умножения достигается за счет приоритетного выполнения пересечений тех единиц, которые представлены меньшим числом ортогональных множеств.

При решении задачи нахождения всех выполняющих подстановок, сведенной к поиску единицы, сопряженного с логическим уравнением  $F(x_1, \dots, x_n) = 1$ , равенства  $U = F(X_1, \dots, X_n)$  возникает проблема быстрого возрастания объема промежуточных результатов вычислений для числа переменных свыше 40. При последовательных вычислениях данная проблема может быть решена выгрузкой этих промежуточных результатов из оперативной памяти в долговременную.

Ограничив объем используемых в оперативной памяти промежуточных результатов допустимой порцией, мы приходим к классическому алгоритму с возвратами, дерево вычислений которого развивается в глубину. При этом на каждом шаге на выполнимость для очередного клоза тестируется сразу множество подстановок. При этом в отличие от алгоритмов, основанных на классических — (*DPLL*, *CDCL*), может быть получена не одна, а несколько выполняющих подстановок.

«Ширину фронта» проверки (объем порции проверяемых подстановок) можно увеличивать и уменьшать. Для реализации

пересечений и дополнений множеств используются «быстрые» битовые операции.

Алгоритм реализован. Логическое уравнение в форме  $\text{КНФ}=1$  генерируется случайным образом.

Предлагаемый алгоритм может быть подвергнут распараллеливанию.

1. *Сметанин Ю.М.* Верификация логического следования в неклассической многозначной логике // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 50. С. 62–82.
2. *Кулик Б.А.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2010.

## Автоматизация решения логических задач

Ю. М. Сметанин, Л. П. Сметанина, Д. М. Латыпова

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: gms1234gms@rambler.ru, Smetanina.l.p@udsu.ru,

latypova.dinara18@mail.ru

Рассматривается два класса логических задач, в которых данное задачи задается утверждениями, имеющими интерпретацию в алгебре высказываний. Требуемое — это проверяемое на истинность заключение, либо вопрос «какие следствия вытекают из данных посылок?».

Проанализирован и модифицирован метод, основанный на составлении и решении характеристических уравнений. Метод подразумевает введение набора булевых переменных  $\tilde{x}_n$ , обозначающих атомарные суждения задачи, формализации посылок в виде ППФ алгебры высказываний и составлении характеристического уравнения  $f(\tilde{x}_n) = 1$  в виде конъюнкции посылок. Далее

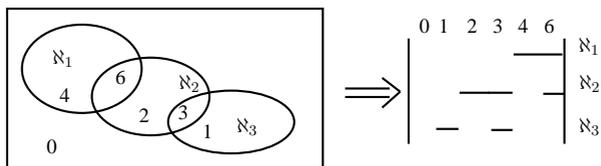


Рис. 1: Преобразование модельной схемы в А-онтологию

метод подразумевает нахождение всех выполняющих подстановок этого уравнения. Затем осуществляется проверка логического следования  $f_p(\tilde{x}_n) \models f_s(\tilde{x}_n)$ , где  $f_s(\tilde{x}_n)$  проверяемое заключение. Если задача открытая, то нужно указать какие-нибудь, возможно все, следствия из системы посылок. Тогда решение ищется путем приведения характеристического уравнения посылок к СКНФ, и следствиями будут сама данная СКНФ, а также всевозможные конъюнкции ее членов [1].

Изложенный метод изменен так, что поиск выполняющих подстановок сводится к вычислению множества из неотрицательных целых чисел для конъюнкции посылок  $U_p$  и для следствия  $U_s$ . При этом проверка логического следования осуществляется путем проверки включения  $U_p \subset U_s$ . Полное обоснование перехода к исчислению множеств для проверки логического следования проведено в работе [2].

На рисунке 1 показано преобразование диаграммы Венна в дискретную диаграмму с конечным универсумом из неотрицательных целых чисел. Числами представлены номера конститuent в исходной диаграмме. Соответственно модельные множества диаграммы Венна кодируются подмножествами из этого универсума. Для перехода к исчислению множеств характеристические уравнения посылок и следствия преобразуем в уравнения в булевой алгебре логики, которые выражаются с помощью операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Преобразованные уравнения посылок и заключения будем обозначать как  $F_p(\tilde{x}_n) = 1$  и  $F_s(\tilde{x}_n)$ . Каждому логическому уравнению  $F(\tilde{x}_n) = 1$ , где  $\tilde{x}_n = x_1, x_2, \dots, x_n, x_i \in \{0, 1\}$ , сопоставляется отношение равен-

ства в алгебре множеств

$$U = F(\tilde{X}_n), \quad U \subseteq U^0 = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}.$$

Значение  $U$  вычисляется как  $U = F(\tilde{X}_n^0)$ ,  $\tilde{X}_n^0 = X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0$ , где  $X_i^0 \subseteq U^0$  есть заранее заданные фиксированные множества [2]. Например, для  $n = 4$  множества  $X_i^0$ ,  $i = 1, 4$  можно задать кортежами (1)

$$\begin{aligned} X_1^0 &= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ * & * & 1 & * \\ * & * & * & 1 \end{array} \right], \\ X_2^0 &= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ * & * & 1 & * \\ * & * & * & 1 \end{array} \right], \\ X_3^0 &= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ * & * & 1 & * \\ * & * & * & 1 \end{array} \right], \\ X_4^0 &= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ * & * & 1 & * \\ * & * & * & 1 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $*$  =  $\{0, 1\}$ , цифрой 1 обозначено множество  $\{1\}$ , каждая строка задает конституентные множества, получаемые из декартова произведения множеств одного кортежа.

Доказано [2], что вычисляемая левая часть равенства  $U = F(\tilde{X}_n^0)$  содержит числа, двоичное представление которых представляет все множество выполняющих подстановок для уравнения  $F(\tilde{x}_n) = 1$ .

Рассмотрим логическое содержание множеств  $U^0$  и  $U \subset U^0$ . Первое выражает диаграмму Венна состоящую из  $2^n$  непустых конституент, второе указывает на то, что представляемая им диаграмма имеет как множество непустых конституент выражаемое номерами из  $U$ , так и множество пустых, выражаемое множеством  $U^0 \setminus U$ . Далее первое будем называть **единицей**, второе — **нулем** и обозначать буквами  $M$  и  $N$ .

Логическое содержание равенств  $U = F(\tilde{X}_n^0)$  можно выразить двумя способами. Первый представляет  $U$  как объединение конституент (совершенная нормальная форма Кантора — СНФК). Второй — в виде пересечения дизъюнктов — множеств дополняющих до универсума конституенты, номера которых образуют  $N$ .

Например, если  $U = \{5, 7, 8, 9, 12, 13\}$  представляется равенством (2), либо равенством (3), либо равенством (4)

$$U = X_1 \cdot X_3' + X_2 \cdot X_4 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 U = & X_1' \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4 + X_1' \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + \\
 & + X_1 \cdot X_2' \cdot X_3' \cdot X_4' + X_1 \cdot X_2' \cdot X_3' \cdot X_4 + \\
 & + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4' + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4 + \\
 & + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 U = & (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4') \times \\
 & \times (X_1 + X_2 + X_3' + X_4) \cdot (X_1 + X_2 + X_3' + X_4') \times \\
 & \times (X_1 + X_2' + X_3 + X_4) \cdot (X_1 + X_2' + X_3' + X_4) \times \\
 & \times (X_1' + X_2 + X_3' + X_4) \cdot (X_1' + X_2 + X_3' + X_4') \times \\
 & \times (X_1' + X_2' + X_3' + X_4)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Метод решения логической задачи состоит из шести этапов.

A) Левая часть характеристического уравнения  $F(\tilde{x}_n) = 1$  каждой посылки приводится к ППФ алгебры Буля.

B) Все вхождения булевых переменных  $\tilde{x}_n$  заменяются конститuentные множества  $\tilde{X}_n^0$ .

C) Вычисляется  $U = F(\tilde{X}_n^0)$ . По элементам из  $U$  определяются все выполняющие подстановки для  $F(\tilde{x}_n) = 1$ .

D) Находится **нуль**  $N = U^0 \setminus U$ .

E) По множеству конститuent из  $N$  строится СКНФ левой части логического уравнения.

F) По СКНФ проверяется логическое следствие для заключения, либо выявляются другие «интересные» следствия. Верификацию также можно провести посредством вычисления единиц  $U_p$  и  $U_s$  образов конъюнкции посылок и следствия и проверки соотношения  $U_p \subset U_s$ .

Автоматизирован этап C. Его результаты визуализируются в виде дискретных диаграмм Венна, на которых выявляют искомое логической задачи.

1. *Никольская И.Л.* Математическая логика. М: Высшая школа, 1981.
2. *Сметанин Ю.М.* Верификация логического следования в неклассической многозначной логике // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 50. С. 62–82.

# О популяционной динамике в речной экологии

Ж. О. Тахиров, М. И. Боборахимова

Ташкент, Институт математики АН Республики  
Узбекистан

e-mail: prof.takhirov@yahoo.com, kamina9314@mail.ru

Многие организмы, начиная от речной флоры и фауны, и заканчивая кишечными бактериями, живут в средах с преимущественно однонаправленным течением. Вопрос о том, как популяции сопротивляются вымыванию и умудряются сохраняться на протяжении многих поколений при наличии такого однонаправленного течения, был назван «парадоксом дрейфа» [1]. В [2] авторы предписали различные граничные условия на верхних и нижних краях течения, мотивированные различными экологическими сценариями. Типичный пример из речных экосистем (см. [3]) задается следующим уравнением реакция-диффузия-адвекция логистического типа

$$u_t = du_{xx} - \alpha u_x + u(r - u), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$du_x(0, t) - \alpha u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad 0 < x < L,$$

где  $u(x, t)$  — плотность популяции водных видов в точке  $x$  и времени  $t > 0$ ;  $d > 0$  — скорость случайного движения из-за турбулентности воды или самодвижения;  $\alpha > 0$  — скорость адвективного переноса, вызванного речным потоком;  $L > 0$  — длина реки;  $r > 0$  — внутренняя скорость роста.

Во многих реальных ситуациях моделирования виды имеют тенденцию эмигрировать за границу, чтобы получить новую среду обитания или улучшить среду обитания. Тогда разумнее рассматривать область с подвижной свободной границей. Мы можем считать, что свободная граница вызвана только экзотическим видом, а фронт распространения расширяется со скоростью, пропорциональной градиенту популяции хищника на границе.

В работе рассматривается одновидовая модель, возникающая в речной экологии. Интересная особенность этих моделей заключается в граничных условиях, при которых может возникнуть чистая убыль особей на границе среды обитания. Сначала мы определяем различные достаточные условия для сохранения одного вида с точки зрения критического размера местообитания и критической скорости адвекции.

Одним из основных вопросов пространственной экологии является следующий вопрос: как пространственная неоднородность окружающей среды влияет на вторжение экзотических видов и результаты конкуренции местных и экзотических видов? Термин «неоднородность» относится к неравномерному распределению различных условий окружающей среды. Экзотические виды часто могут успешно вторгаться, потому что они имеют некоторое конкурентное преимущество перед местными видами. Однако в гетерогенной среде с помощью одной только диффузии инвазия все же возможна, даже если экзотические виды не имеют явного конкурентного преимущества.

Предлагается следующая одновидовая модель со свободной границей, возникающая в речной экологии:

$$u_t = du_{xx} - \alpha u_x + u(r - u), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad 0 < x < s_0,$$

$$du_x(0, t) - \alpha u(0, t) = b\alpha u(0, t), \quad t > 0,$$

$$u = 0, \quad \dot{s}(t) = -\mu \partial u / \partial x, \quad x = s(t), \quad t > 0.$$

Оказывается, что после введения параметра  $b$  могут произойти кардинальные изменения в динамическом поведении.

В работе мы впервые изучили популяционную динамику общей модели со свободной границей экологии реки. Интересной особенностью структуры системы является параметр  $b$ , входящий в граничное условие, который используется для измерения скорости потерь. Этот параметр, помимо своих очевидно важных биологических интерпретаций, играет существенную роль в математике, поскольку его разные значения могут давать разные типы граничных условий.

Наша цель — установить априорные оценки и изучить поведение свободной границы в условиях, согласующихся с известными результатами по речной экологии, и доказать глобальную разрешимость задачи. Будет обеспечена корректность рассматриваемой модели и найдены необходимые и достаточные условия ее устойчивости на основе исследования зависимости критического размера местообитания и его монотонности по скорости диффузии, скорости адвекции и скорости потери  $b$ , соответственно.

1. *Anholt B.R.* Density dependence resolves the stream drift paradox // *Ecology*. 1995. Vol. 76, pp. 2235–2239.
2. *Lou Y., Lutscher F.* Evolution of dispersal in open advective environments // *J. Math. Biol.* 2014. Vol. 69, pp. 1319–1342.
3. *Speirs D.C., Gurney W.S.C.* Population persistence in rivers and estuaries // *Ecology*. 2001. Vol. 82, pp. 1219–1237.

## Балансировка обратного маятника на омниколесной платформе

**В. А. Тененев, А. С. Шаура**

*Ижевск, Удмуртский федеральный исследовательский центр  
УрО РАН*

e-mail: tenenev@istu.ru, shauraa@mail.ru

Перевернутый маятник представляет собой математическую абстракцию (модель) многих реальных систем [1]: многоразовые ракетные системы [2], сегвей и колесные роботы [3], шагающие роботы [4] и является классической задачей автоматического управления.

Наиболее часто исследуется модель двумерного маятника, точка опоры которого закрепляется на тележке, способной перемещаться по горизонтали вдоль некоторой оси, и ставится задача балансировки маятника за счет управления перемещением тележки.

Существенно сложнее и намного ближе к реальным системам исследование задачи о балансировке перевернутого маятника в трехмерной постановке [2, 5]. В случае установки маятника на тележку возникает вопрос о способе организации движения тележки в пространстве. Омниколеса дают платформе возможность произвольно перемещаться в горизонтальной плоскости, они успешно применяются в различных системах и имеют большие перспективы при разработке мобильных роботов и систем [6].

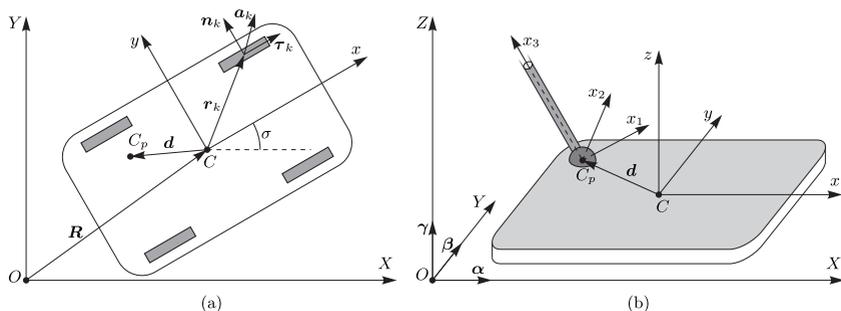


Рис. 1: Схематичное изображение омниколесной платформы и введенных систем координат. На рис. а) изображена вертикальная проекция системы, ось  $OZ$  совпадает с точкой  $O$ , ось  $Cz$  совпадает с точкой  $C$

Для описания движения по горизонтальной плоскости омниколесной платформы с установленным на ней перевернутым сферическим маятником вводятся три системы координат (см. рис. 1):

- Неподвижную (инерциальную)  $OXYZ$ .
- Подвижную  $Cxyz$ , связанную с платформой. Точка  $C$  совпадает с центром масс платформы, оси  $Cx$  и  $Cy$  лежат в плоскости платформы, а ось  $Cz$  сонаправлена с осью  $OZ$ .
- Подвижную  $C_px_1x_2x_3$  связанную с маятником. Ось  $C_px_3$  направлена вдоль стержня, а точка  $C_p$  совпадает с точкой опоры маятника.

Положение платформы относительно неподвижной системы координат задается радиус-вектором  $\mathbf{R} = (X, Y, 0)$  точки  $C$ , а ее ориентация углом  $\sigma$  между положительными направления-

ми осей  $OX$  и  $Cx$ . Движение платформы является плоскопараллельным, поэтому координата  $Z$  точки  $C$  равна нулю, и поэтому  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$  — вектор абсолютной скорости точки платформы  $C$ , где  $v_1, v_2$  — его проекции на подвижные оси  $Cx$  и  $Cy$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$  — вектор угловой скорости платформы.

Движение рассматриваемой системы характеризуется лагранжианом

$$L = T - U,$$

где  $T$  — кинетическая энергия,  $U$  — потенциальная энергия.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии платформы  $T^c$ , кинетической энергии каждого  $i$ -го колеса  $T_i^w$  и кинетической энергии маятника  $T^p$ . Потенциальная энергия маятника определяется выражением  $U = m_p g l \gamma_3$ . Пусть  $m_c$  — масса платформы,  $I_c$  — момент инерции платформы относительно оси  $C_z$ ,  $m_w$  — масса колеса,  $\tilde{I}_w$  — момент инерции колеса относительно диаметра,  $I_w$  — момент инерции колеса относительно оси,  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$  — радиус-вектор центра масс  $i$ -го колеса в системе координат  $Cxyz$ ,  $\Psi_i$  — угол поворота  $i$ -го колеса относительно своей оси,  $m_p$  — масса маятника,  $l$  — полудлина маятника, тогда лагранжиан системы принимает вид:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + m\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{Jz}) + \frac{1}{2}I\Omega^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N I_w \dot{\Psi}_i^2 + \\ & + m_p l ((v_1 - d_2 \Omega) \cos \sigma - (v_2 + d_1 \Omega) \sin \sigma) (\alpha_1 \omega_2 - \alpha_2 \omega_1) + \\ & + m_p l ((v_1 - d_2 \Omega) \sin \sigma + (v_2 + d_1 \Omega) \cos \sigma) (\beta_1 \omega_2 - \beta_2 \omega_1) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{4m_p l^2}{3} (\omega_1^2 + \omega_2^2) - m_p g l \gamma_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m = m_c + \sum_{i=1}^N m_w + m_p, \quad \mathbf{z} = \frac{m_p \mathbf{d} + \sum_{i=1}^N m_w \mathbf{r}_i}{m}, \\ I = I_c + \sum_{i=1}^N \left( \tilde{I}_w + m_w (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i) \right) + m_p (\mathbf{d}, \mathbf{d}). \end{aligned}$$

С помощью лагранжева формализма получены уравнения движения системы «тележка-маятник». Для решения задачи балансировки маятника за счет управления движением тележки использован гибридный генетический алгоритм [7]. Исследовано поведение системы при различных начальных условиях с учетом обязательной остановки тележки или необходимости продолжения движения в конечной точке траектории. Показано, что решение рассматриваемой задачи в двумерной постановке является частным случаем трехмерной балансировки.

1. *Kafetzis I., Moysis L.* Inverted Pendulum: A system with innumerable applications // Conference: 9th International Week Dedicated to Math, March 2017. Thessaloniki, Greece, pp. 13.
2. *Mahlstedt B.* Optimal VTOL of SpaceX's Grasshopper // Technical Report. 2012, pp. 26.
3. *Miller P.* Building a Two Wheeled Balancing Robot // University of Southern Queensland, Faculty of Engineering and Surveying. Retrieved Nov 18, 2009.
4. *Sakka S., Hayot C., Lacouture P.* A generalized 3d inverted pendulum model to represent human normal walking // 10th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, 6–8 December 2010. Memphis, Tennessee, United States: IEEE, 2011, pp. 486–491.
5. *Братищев А.В.* Управление колебаниями маятника на подвижной платформе // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2020. № 14. С. 76–87.
6. *Караваев Ю.Л., Кимин А.А.* Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11, № 1. С. 187–204.
7. *Дмитриев С.В., Тененев В.А.* Оптимизация многоэкстремальных функций с помощью гибридных генетических алгоритмов // Изв. ИМИ УдГУ. 2006. № 2 (36). С. 163–166.

# Разработка интеллектуальной экспертной системы оценки достоверности измерений при наличии повторных измерений

Н. А. Тукмачёв

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: ruch3611@gmail.com

В большинстве случаев выводы о достоверности измерений в процессе проведения испытаний изделий высококвалифицированный эксперт может сделать на основе анализа результатов измерений в графическом, числовом или табличном виде. В условиях массового проведения испытаний возможности эксперта ограничивают применение такого подхода к оценке достоверности, кроме того, увеличивается вероятность ошибки при принятии решения в силу так называемого «человеческого фактора». В этой связи актуальным является вопрос о создании экспертной системы, которая позволяет в режиме реального времени оценивать достоверность измерений [1].

Разрабатываемая экспертная система основана на алгоритме, описанном в [2], который определяет достоверность фиксации сигналов методом максимального правдоподобия (Байеса). Кроме того, представляет практический интерес оценка времени задержки сигнала  $\Delta t$ . Решение этой частной задачи ищется на основе кросс-корреляции [3].

– Кросс-корреляция для дискретных функций:

$$r_{X_1 X_2}(\Delta t) = \frac{\text{cov}(X_1(t), X_2(t - \Delta t))}{\sqrt{DX_1(t)DX_2(t - \Delta t)}}. \quad (1)$$

– Анализ временной задержки:

$$\Delta t^* = \arg \max(r_{X_1 X_2}(\Delta t)). \quad (2)$$

На рис. 1 представлены сигналы, соответствующие двум датчикам.

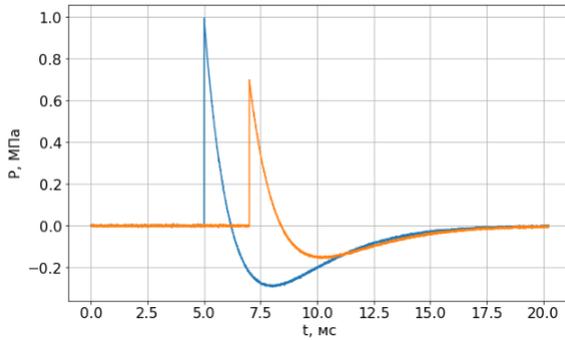


Рис. 1: Профили сигналов

На рис. 2 представлена кросс-корреляция сигналов двух датчиков.

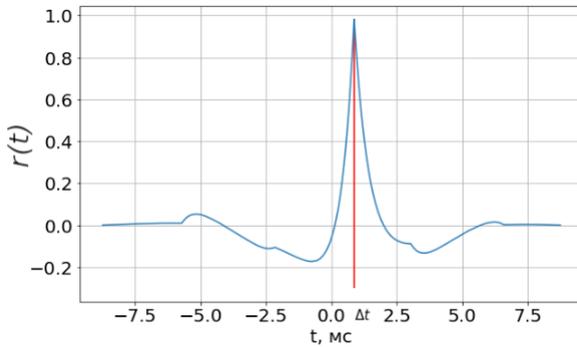


Рис. 2: Кросс-корреляция сигналов

Из рис. 2 видно, в какой точке достигается наибольшая корреляция, исходя из этого, по формуле (2) можно сделать оценку временной задержки между двумя сигналами.

Оценка зависимости между сигналами выполняется посред-

ством передаточной функции:

$$S(t) = \frac{X_1(t) + 1}{X_2(t - \Delta t^*) + 1}. \quad (3)$$

На рис. 3 представлен график передаточной функции для сигналов датчиков, показанных на рис. 1. На основе анализа передаточной функции сделаны выводы о взаимосвязи сигналов [3].

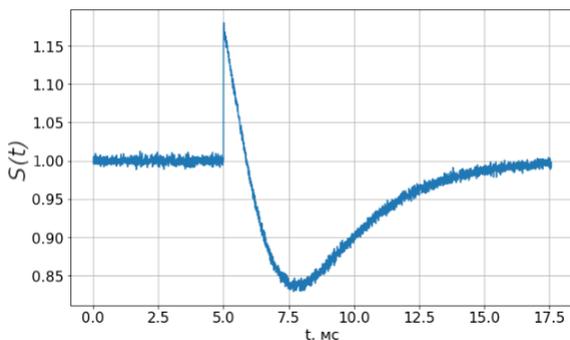


Рис. 3: График передаточной функции  $S(t)$

При наличии дублирующих средств измерений экспертная система имеет возможность оценить недостоверность измерений [4].

1. *Бушцев О.Ю.* Компьютерное моделирование преобразователей давления и численные методы для оценки их технического состояния. Челябинск: Южно-Уральский государственный университет, 2015.
2. *Суфиянов В.Г., Русяк И.Г., Белобородов М.Н., Заборовский А.Д., Клокун Д.А.* Разработка интеллектуальной экспертной системы оценки достоверности измерений параметров динамических процессов // В сборнике: Проектирование систем вооружения боеприпасов и измерительных комплексов. Труды 18-й Всероссийской научно-технической конференции. Нижний Тагил, 2022. С. 336-350.
3. *Isermann R., Munchhof M.* Identification of Dynamic Systems. Springer Science and Business Media, 2010.

4. *Брусакова И.А.* Достоверность результатов метрологического анализа. СПб.: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), 2001.

## **Задачи о создании электромагнитных полей заданной конфигурации в рамках квазистационарных приближений для системы уравнений Максвелла**

**А. А. Тюхтина**

*Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

e-mail: kalinmm@yandex.ru

Обратные задачи для системы уравнений Максвелла естественным образом возникают при решении широкого класса технологических проблем, связанных с необходимостью формирования электромагнитных полей заданной конфигурации. При этом в большинстве ситуаций возможна постановка задач в рамках квазистационарных приближений для системы уравнений Максвелла [1].

Для описания медленных процессов в средах с достаточно высокой проводимостью применяется нерелятивистское магнитное приближение [1, 2]. В работах [3–5] в рамках этого приближения рассматривались обратные задачи финального наблюдения и обсуждалась возможность применения для их решения устойчивых секвенциальных принципов Лагранжа и теоремы Куна–Таккера.

Нерелятивистское электрическое приближение [1] используется для описания достаточно медленных процессов в средах с низкой проводимостью, в частности, при моделировании электромагнитных процессов в нижних слоях атмосферы [6, 7]. Обратные задачи для уравнения глобальной электрической цепи, полученного в рамках квазистационарного электрического приближения для системы уравнений Максвелла, рассматриваются, в частно-

сти, в [8, 9].

В настоящей работе изучаются постановки обратных задач о восстановлении источников и начальных данных по известной с определенной погрешностью конфигурации магнитного поля в конечный момент времени для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении, основанном на сохранении в системе уравнений Максвелла потенциальной компоненты тока смещения [10]. Рассматриваемое квазистационарное приближение обобщает классические нерелятивистские квазистационарные приближения [11] и может найти своё применение для исследования более широкого класса прикладных задач, в том числе — при исследовании атмосферных явлений в различных слоях атмосферы.

Работа поддержана научно-образовательным математическим центром «Математика технологий будущего» (соглашение № 075-02-2022-883).

1. *Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. *Alonso Rodriguez A., Valli A.* Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag Italia, 2010.
3. *Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A.* Methods of dual regularization for solving inverse problems of quasistationary electromagnetic fields theory// Baswell A.R., ed. Advances in Mathematics Research. New York: Nova Science Publishers, 2017. Vol. 24, ch. 4, pp. 59–124.
4. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 608-624.
5. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 2. С. 18–40.

6. *Мареев Е.А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // *Успехи физ. наук.* 2010. Т. 180, № 5. С. 527–534.
7. *Kalinin A.V., Slyunyaev N.N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2017. Vol. 450, no. 1, pp. 112–136.
8. *Жидков А.А., Калинин А.В., Сумин М.И.* Алгоритм двойственной регуляризации в обратных задачах теории глобальной электрической цепи // *Вестник ТГУ* 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1074–1076.
9. *Чернов А.В.* О единственности решения обратной задачи атмосферного электричества // *Вестник российских университетов. Математика.* 2020. Т. 25, № 129. С. 85–99.
10. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* The Darwin approximation for the system of Maxwell's equations in inhomogeneous conducting media // *Comp. Math. Math. Phys.* 2020. Vol. 8(60), pp. 121–134.
11. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields // *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23–27, 2020. Revised Selected Papers. Communications in Computer and Information Science.* Springer, 2021. Vol. 1413, pp. 77–92.

## Анализ эффективности методов предобуславливания

**Р. Т. Хазияхметов**

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: khuslan@yandex.ru

В процессе решения ряда задач математического моделирования возникают системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для решения которых и вводятся методы предобуславливания. Предобуславливание (preconditioning) — это есть

вычислительная операция, направленная на уменьшение числа обусловленности, отчего и зависит скорость сходимости итерационных методов.

Для определения перспективности использования предобуславливателей вычислительные эксперименты ставились при решении систем линейных алгебраических уравнений тремя методами. Применялись метод сопряжённых градиентов (CG), метод сопряжённых градиентов с диагональным предобуславливателем (DiagCG), метод сопряжённых градиентов с алгебраическим многосеточным предобуславливателем (SA-AMGCG), которые изложены в трудах американского специалиста по численной линейной алгебре Джима Деммеля [1] с использованием вещественных положительно определённых матриц, взятых из коллекции разреженных матриц Университета Флорида [2].

В ходе вычислительных экспериментов в (Таблице 1) приведены приближенные результаты, полученные с помощью программного продукта «Решатель системы линейных алгебраических уравнений» [3], с выводом, иллюстрирующим кратное сокращение количества итераций у матриц `kuu`, `muu`, `bcsstk38`, `ex15`, `s1rmt3m1`, `s2rmt3m1`, `s3rmt3m3` при применении алгебраического многосеточного предобуславливания в методе сопряжённых градиентов. Матрицы `treferhen20`, `trefethen20b` имеют кратное сокращение итераций при использовании диагонального предобуславливателя, что объясняется не более  $20 \times 20$  размерностью выбранных матриц. Компьютерная программа [3] с тремя видами режимов счёта поддерживает чтение, хранение и запись матриц в формате MatrixMarket. При каждом обчёте программа замеряет полное время работы решения системы линейных алгебраических уравнений в секундах, число итераций, среднее время работы одной итерации.

Условно будем считать, что итерация методом SA-AMGCG многократно отягощена, но количество итераций значительно меньше, чем итерация другими методами расчёта (CG, DiagCG). Отягощение итерации методом SA-AMGCG, прежде всего, связано с построением узлов «сетки».

Таким образом, анализируя три метода решения систем линейных алгебраических уравнений (MCG с алгебраическим

Таблица 2: Решение СЛАУ вида  $Ax = b$ , «float».  $N$  — квадратная матрица вида  $N \times N$ ,  $Nnz$  — количество ненулевых элементов,  $cond(A)$  — число обусловленности,  $N_{it}$  — число итераций,  $t$  (сек) — затраченное время на одну итерацию

Матрицы	$N$	$Nnz$	$cond(A)$	Метод	$N_{it}$	$t$
Kuu	7102	340200	$1.58 \times 10^4$	CG	455	0.3
				DiagCG	381	0.2
				SA-AMGCG	46	0.1
Muu	7102	170134	$7.65 \times 10^5$	CG	41	0.0
				DiagCG	12	0.0
				SA-AMGCG	6	0.1
bcsstk38	8032	355460	$1.82 \times 10^5$	CG	1651	0.9
				DiagCG	436	0.2
				SA-AMGCG	33	0.1
ex15	6867	98671	$8.61 \times 10^{12}$	CG	1100	0.6
				DiagCG	96	0.1
				SA-AMGCG	55	0.1
s1rmt3m1	5489	217651	$2.55 \times 10^6$	CG	3953	2.2
				DiagCG	703	0.4
				SA-AMGCG	2	0.1
s2rmt3m1	5489	217681	$2.5 \times 10^8$	CG	14228	8.4
				DiagCG	2095	1.2
				SA-AMGCG	2	0.1
s3rmt3m1	5489	217669	$2.48 \times 10^9$	CG	5931	3.4
				DiagCG	5982	3.4
				SA-AMGCG	2	0.1
s3rmt3m3	5357	207123	$2.4 \times 10^{10}$	CG	9350	5.4
				DiagCG	10933	6.3
				SA-AMGCG	2113	1.9
Trefethen20	20	158	$6.31 \times 10^5$	CG	22	0.0
				DiagCG	8	0.0
				SA-AMGCG	22	0.0
Trefethen20b	19	147	$3.04 \times 10^5$	CG	20	0.0
				DiagCG	7	0.0
				SA-AMGCG	20	0.0

многосеточным предобуславливанием, без предобуславливания и диагональным предобуславливанием), установлена высокая эффективность алгебраического предобуславливания [4] при реше-

нии матриц большой размерности ( $N \times N \geq 5000$ ), как сравнительно хорошо обусловленных, так и плохо обусловленных систем. Это было достигнуто за счёт скорости сходимости метода, несмотря на многократное увеличение времени формирования предобуславливателя в случае с матрицей  $kuu$  до 91% от полного времени решения системы.

1. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.
2. CUSP: Main page. // URL: <http://cusplibrary.github.io> (дата обращения: 10.03.2020).
3. *Хазияхметов Р.Т.* Решатель системы линейных алгебраических уравнений // Официальный бюллетень «Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем». Москва: ФИПС, бюллетень № 6. 2021.
4. *Хазияхметов Р.Т.* Многосеточное предобуславливание линейного уравнения большой размерности // Сборник трудов Десятой Всероссий. конф. «Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах» (ICOS' 2020). Ижевск: Изд-во УдмФИЦ УрО РАН, 2020. С. 309–313.

## Математическое моделирование стратифицированных систем

**В. А. Шишкин**

*Пермь, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет  
e-mail: vsh1791@mail.ru*

В [1, с. 56–62] Михайло Месарович ввёл понятие стратифицированной системы, которое подразумевает рассмотрение сложных систем на разных уровнях абстракции (стратах). При этом для каждой страты строится своё описание анализируемой систе-

мы  $S$ , например, вида

$$S_i = \langle A_i, R_i, G_i, E_i, T_i, N_i, L_i \rangle, \quad (1)$$

где  $A$  — составные части;  $R$  — связи;  $G$  — цель системы;  $E$  — среда;  $T$  — временной интервал, на котором рассматривается система;  $N$  — наблюдатель или лицо, принимающее решение (и его цель);  $L$  — язык, используемый для описания системы на данном уровне. Индекс  $i$  определяет номер анализируемой страты.

Например, человек — (сверх)сложная, всем известная система. На различных уровнях абстракции человека можно рассматривать как чёрный ящик, связанный со средой входами и выходами; как множество взаимодействующих функциональных систем; как множество клеток (биология), молекул (химия), атомов и элементарных частиц (физика). Также человек может рассматриваться как элемент социальных надсистем.

Очевидно, что при построении математических моделей стратифицированных систем необходимо учитывать все элементы (1). В частности, поведение системы определяется её целью  $G$  (имеется у всех искусственных систем), с учётом которой вводится критерий  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ , используемый для оценки состояния системы. Если  $m > 1$  и

$$F_1(x) \rightarrow \text{extr}, \dots, F_m(x) \rightarrow \text{extr}, \quad (2)$$

то для решения (2) можно использовать метод главного критерия (обоснование см. в [2, гл. 1]) или любой другой подходящий метод решения многокритериальных задач (например, метод идеальной точки). Поиск оптимального решения в большинстве случаев осложняется наличием в системе (1) объективной (например, стохастические величины) или субъективной (нечёткие, неточные и т.п. величины) неопределённости, вследствие чего требуется указать как методы сравнения неопределённых величин, так и методы сведения неопределённых задач к детерминированным аналогам (см., например, [3] и [4]).

Заметим, что выбор критерия  $F$  и множества управляющих переменных  $x'$  зависит не только от (реальной, а не декларируемой!) цели  $G$ , но и от расположения наблюдателя  $N$  по отноше-

нию к рассматриваемой системе  $S$  (внутри системы, в среде или вне среды).

Как пример построения множества моделей стратифицированной системы возьмём возможный результат описания деятельности абстрактного коммерческого производственного предприятия.

1.  $S_0$  — чёрный ящик. При наличии ненасыщенного рынка — модель планирования выпуска на основе критерия максимизации прибыли. При насыщенном рынке план производства определяется портфелем заключённых контрактов.

Заметим, что для некоммерческих предприятий уже здесь возникла бы проблема определения цели  $G$  и её формализации в виде набора критериев  $F$ : например, если цель существования больниц — лечение людей, то с какие критерии следует ввести для оценки качества работы больницы?

2.  $S_1$  — производственный уровень. Модель (сетевое) планирования производства тех объёмов продукции, которые были определены на уровне  $S_0$ .

Сначала проверяется существование решения. Если решение не единственно, то требуется ввести критерии для сравнения альтернатив.

Если на уровне  $S_1$  не удаётся решить задачу, то выполняется возврат к уровню  $S_0$  и коррекция плана выпуска с учётом полученной информации.

3.  $S_2$  — расширенный производственный уровень. Если на уровне  $S_1$  предполагался неограниченный объём производственных ресурсов, то в  $S_2$  учитывается взаимодействие с поставщиками ресурсов и потребителями продукции — задача управления запасами.

План-график производства, полученный на уровне  $S_1$ , дополняется и уточняется с учётом дополнительной информации о поставках и сбыте.

4. На уровне  $S_3$  производственная система рассматривается как элемент надсистемы, содержащей других производителей-конкурентов (игра с двумя и более участниками), а также, возможно, иерархию органов управления, прямо влияющих на участников или задающих правила поведения (многоступенчатая игра, см. [5]).

Таким образом, при моделировании стратифицированных систем для каждой страты строится отдельная модель, не имеющая явной связи с моделями для других страт. Однако, решение, найденное для одной страты, должно согласовываться с решениями для других страт, что приводит к неявной связи между моделями.

1. *Месарович М., Мако А., Такахага И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
2. *Детмер У.* Теория ограничений Голдратта: Системный подход к непрерывному совершенствованию. М.: Альпина Бизнес Бук, 2008.
3. *Лю Б.* Теория и практика неопределённого программирования. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
4. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределённости. М.: Наука, 1981.
5. *Dempe S.* Foundations of Bilevel Programming. Kluwer Academic Publishers, 2002.

## **Разработка информационно-аналитической системы классификации временных рядов нейронными сетями глубокого обучения**

**М. С. Шурмина**

*Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: ma.sse@yandex.ru

В последнее время задача классификации временных рядов

набирает все больший интерес в науке и является важной проблемой в области анализа данных. Задача классификации временных рядов встречается во многих сферах деятельности. Например, для изучения биржевых трендов финансовых инструментов, для исследования человеческой активности по замерам гироскопа и акселерометра, для диагностики заболеваний по ЭКГ сигналам [1] и т.д. Поскольку количество данных растет с каждым днем, то необходимость в их точной классификации тоже возрастает.

Исследователи предложили множество методов решения задачи классификации. Наиболее популярный из них — это метод ближайшего соседа. Он относит объекты к классу, которому принадлежит большинство его соседей в многомерном пространстве признаков. Если использовать этот метод в сочетании с алгоритмом динамической трансформации временной шкалы (DTW), который позволяет определить наилучшее соответствие между временными последовательностями, то можно добиться больших успехов в классификации временных рядов. Однако, точность этих методов ограничена и масштабы временных рядов могут не совпадать. Для решения этих проблем недавно было показано, что методы глубокого обучения, такие, как рекуррентные или сверточные нейронные сети, обеспечивают наилучшие результаты в сложных задачах классификации временных рядов. Рекуррентные нейронные сети (RNN) обучаются последовательно, а сверточные — пакетно, поэтому RNN не может использовать распараллеливание, поскольку он должен ждать предыдущих вычислений [2]. CNN достигают более высокой производительности, поэтому в решении задачи классификации временных рядов будет использоваться сверточная нейронная сеть.

На рис. 1 показана общая структура глубокого обучения для классификации временных рядов. Это композиция из нескольких слоев, которые реализуют нелинейные функции. Входные данные представляют собой многомерный временной ряд. Каждый слой принимает в качестве входных данных выходные данные предыдущего слоя и применяет его нелинейное преобразование для вычисления своих собственных выходных данных [3].

Сформулируем постановку задачи: пусть сигналы поступа-

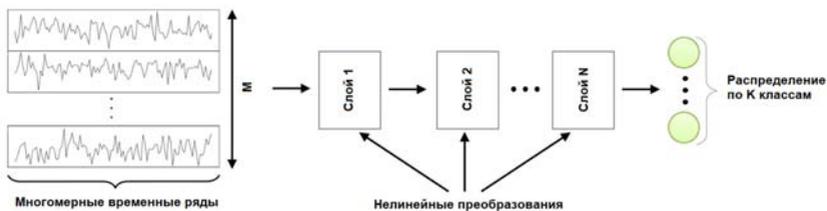


Рис. 1: Общая структура глубокого обучения для классификации временных рядов

ют с некоторой величиной  $x(t)$ , которая меняется во времени. Эти сигналы замеряют в моменты времени  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n_i}\}$  и получают последовательность значений величины  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Данную последовательность будем называть *временным рядом*. Задача классификации временных рядов состоит в поиске точного отображения  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , которое принимает на вход временной ряд и ставит ему в соответствие один из  $N$  классов. Процесс поиска этого отображения и будем считать обучением. Обучение осуществляется по обучающей выборке — набору  $[(X_1, y_1), (X_2, y_2), \dots, (X_m, y_m)]$ , для объектов которого известен ответ искомой функции.

Результат обучения — функция, которая максимизирует качество классификации на отложенной выборке [4]. Мера качества — процент правильно классифицированных объектов

$$Acc = \frac{1}{m} \left( \sum_i^m [f(X_i) = y_i] \right), \quad (1)$$

где объекты  $(X_i, y_i)$  берутся из выборки размера  $m$ .

На рис. 2 представлены графики смоделированных функций с разными коэффициентами. На последнем графике изображен стационарный ряд, на котором сигнал с датчика не был зарегистрирован. Входные данные для нейронной сети — это сигналы датчика, образующие временные ряды. Выходные данные: 0 и 1, в которых 0 — сигнал не зафиксирован, 1 — сигнал зафиксирован.

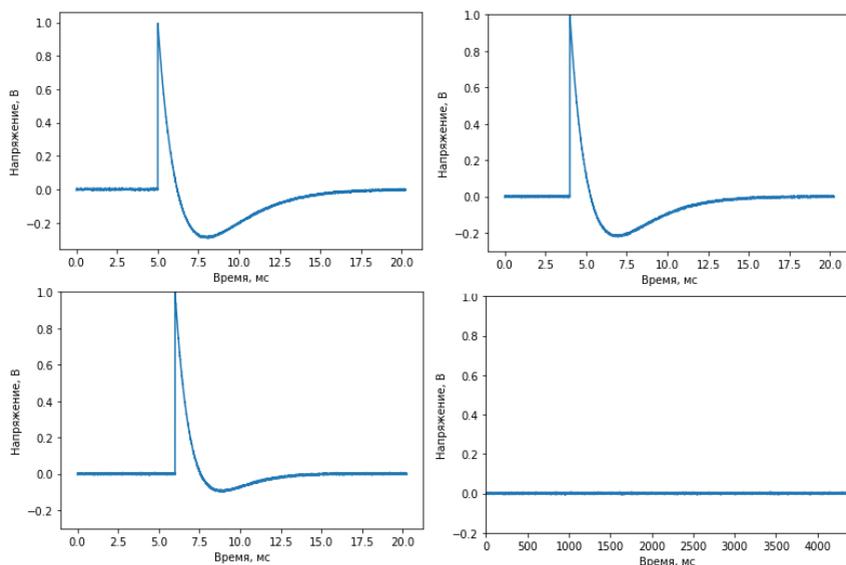


Рис. 2: Примеры временных рядов для решения задачи классификации

Для классификации временных рядов был использован открытый фреймворк TensorFlow на языке программирования Python. Эта библиотека хорошо подходит для создания многослойных нейронных сетей и поддерживает распределенное обучение. В ходе работы были получены высокие результаты классификации временных рядов.

1. *Arel I., Rose D.S., Karnowski T.P.* Deep machine learning — a new frontier in artificial intelligence research [research frontier] // *Comput. Intelligence Magazine. IEEE.* 2010. Vol. 5, no. 4, pp. 13–18.
2. *Cui Z., Chen W., Chen Y.* Multi-Scale Convolutional Neural Networks for Time Series Classification // 2016. arXiv:1603.06995. [Online]. <http://arxiv.org/abs/1603.06995>
3. *Baydogan M.G., Gunger C., Tuv E.* A bag-of-features framework to classify time series // *Pattern Analysis and Machine Intelligence. IEEE Transactions on.* 2013. Vol. 35, no. 11, pp. 2796–2802.
4. *Bengio Y.* Learning deep architectures for ai // *Foundations and trends in Machine Learning.* 2009. Vol. 2, no. 1, pp. 1–127.

## Список авторов

- Abdishukurova G. M., 154  
Astashova I. V., 12  
Bykova T. S., 149  
Kim I. G., 157  
Kinzebulatov D., 15  
Litvinova K. V., 259  
Makovetsky I. I., 18  
Martynov S. I., 261  
Miller B. M., 151  
Naligama C. A., 21  
Narmanov A. Ya., 154  
Sharipov A. S., 242  
Topvoldiyev F. F., 242  
Yuldashev T. K., 25  
Zaitsev V. A., 149, 157  
Абгарян Г. В., 264  
Абду Рауф Ч. М., 306  
Акманова С. В., 142  
Александрова И. В., 28, 61  
Антоновская О. Г., 266  
Анфалова А. А., 268  
Асхатов Р. М., 271  
Баландин А. С., 32  
Барабанов Е. А., 35  
Баранов В. Н., 275  
Бастрыков Е. С., 278  
Беликова О. Н., 145  
Белов А. И., 28  
Бештокова З. В., 39, 42  
Благодатских А. И., 159  
Боборахимова М. И., 376  
Бондарев А. Н., 46  
Бортаковский А. С., 163  
Быков В. В., 35  
Васильев А. В., 49, 52  
Васильев В. Б., 49, 52  
Великань В. С., 279  
Ветохин А. Н., 54  
Вечтомов Е. М., 246  
Вишнякова О. М., 167  
Гладышев Ю. А., 57  
Головастов Р. А., 281  
Гомоюнов М. И., 170  
Горохова В. Ф., 282  
Горохова И. В., 173  
Грызлов А. А., 249  
Дмитрук А. В., 178  
Долгий Ю. Ф., 181  
Думкин Р. А., 285  
Ершов А. А., 230, 232  
Жабко А. П., 61  
Измestьев И. В., 185  
Калинин А. В., 288  
Караваев А. С., 291  
Кашапов Л. Н., 271, 294  
Кашапов Н. Ф., 271  
Кашпар А. И., 64  
Каюмов А. Б., 301  
Каюмов Ш., 301  
Кеунимжаев М. К., 255  
Клюкин Д. А., 285, 297  
Клячин А. А., 68  
Козлов А. А., 188  
Кокурин М. М., 306  
Кондакова Д. Д., 69  
Копысов С. П., 291, 336, 359  
Коржавина М. С., 192  
Королев С. А., 319

Коструб И. Д., 97  
Кочурова И. Д., 310  
Кошечева А. К., 250  
Краснопёров И. Н., 313  
Крупенников Е. А., 223  
Куликов А. Н., 69  
Куликов Д. А., 69, 72  
Култышев С. Ю., 316  
Лаптинский В. Н., 75  
Латышова Д. М., 372  
Лебедев П. Д., 196  
Липанов А. М., 319  
Литвинова К. В., 322  
Лошкарева Е. А., 57  
Лубягина Е. Н., 246  
Лукоянов Н. Ю., 170  
Лукьянов В. В., 199  
Магазев А. А., 282  
Майков Д. В., 326  
Макаров Е. К., 78  
Маковецкая О. А., 82  
Максимов В. И., 201  
Максимов В. П., 85  
Мальгина В. В., 89  
Мансуров Р. Р., 329  
Марданов А. П., 301  
Мартыненко С. И., 332  
Мастерков Ю. В., 205  
Можегова Е. С., 207  
Мулюков М. В., 92  
Нарманов О. А., 95  
Недожогин Н. С., 336  
Осмоловский Н. П., 178  
Павлов А. В., 340  
Переварюха А. Ю., 342  
Перовошикова Д. А., 346  
Перов А. И., 97  
Петров Н. Н., 207  
Плаксин А. Р., 170, 210  
Плаксина В. П., 100  
Плаксина И. М., 100, 103  
Попова С. Н., 106  
Поторочин М. Д., 349  
Равчеев А. В., 109  
Ражабов Э. О., 253  
Рахимова М. А., 112  
Роголев Д. В., 114  
Родина Л. И., 214  
Родионов В. И., 275  
Родионова А. Г., 275  
Румянцев А. Н., 118  
Русаков С. В., 352  
Русских В. Н., 356  
Русяк И. Г., 319  
Сабатулина Т. Л., 119  
Самсолюк О. Н., 217  
Седова Н. О., 121  
Селезнева А. В., 359  
Селезнёва А. С., 363  
Семёнова А. В., 306  
Сергеев И. Н., 124  
Серков Д. А., 219  
Сидорова А. А., 366  
Сметанин Ю. М., 368, 372  
Сметанина Л. П., 372  
Субботина Н. Н., 223  
Сумин В. И., 128  
Сурков П. Г., 226  
Суфиянов В. Г., 319  
Тахиров Ж. О., 376  
Тенев В. А., 319, 378  
Тонков Л. Е., 366  
Тукмачёв Н. А., 382  
Тюхтина А. А., 288, 385

Успенский А. А., 196  
Ухоботов В. И., 185  
Ушаков А. В., 232  
Ушаков В. Н., 230, 232  
Федорова М. В., 106  
Филиппова О. В., 132  
Хазияхметов Р. Т., 387  
Хаитов Т. О., 301  
Хамидуллин Р. Р., 285  
Ходырева А. А., 49  
Худойбердиев Д., 145  
Чебакова В. Ю., 271  
Черникова А. В., 214  
Чернов А. В., 233  
Чудинов К. М., 135  
Чупин И. А., 181  
Шабуров А. А., 237  
Шамолин М. В., 138  
Шарипов А. С., 255  
Шаура А. С., 378  
Шишкин В. А., 390  
Шурмина М. С., 393  
Щелчков К. А., 240  
Эберлейн Н. В., 52  
Юмагулов М. Г., 142, 145

*Научное издание*

## **ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Материалы Всероссийской конференции с международным участием  
«Теория управления и математическое моделирование», посвященной  
памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова

Ответственные за выпуск А.С. Банников, С.Н. Попова

*Авторская редакция*

Подписано в печать 30.05.2022. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 23,25. Уч. -изд. л. 22,2.

Тираж 70 экз. Заказ № 937.

Издательский центр «Удмуртский университет»

426004, Ижевск, Ломоносова, 4Б, каб. 021

Тел./факс: + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Издательство «Шелест».

426060, Удмуртская Республика, г. Ижевск, ул. Энгельса, 164,  
shelest.izd@yandex.r.

+7 (904) 317-76-93. +7 (963) 548-51-43

Типография Издательского центра

«Удмуртский университет»

426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.

Тел. 68-57-18, 91-73-05