

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

# ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Материалы Всероссийской конференции  
с международным участием  
«Теория управления и математическое моделирование»,  
посвященной памяти  
профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова

Ижевск, Россия  
15–19 июня 2020 г.



Ижевск  
2020

УДК 517.9 (О63)

ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431

Т338

Редакционная коллегия:

А. С. Банников, В. А. Зайцев, Н. Н. Петров, С. Н. Попова

Т338 Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 15–19 июня 2020 г.). — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. — 370 с.

**ISBN 978–5–4312–0790–7**

В сборнике анонсируются результаты исследований по теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, математическому моделированию, общей топологии. Представлены следующие научные направления: теория устойчивости, теория управления, функционально-дифференциальные уравнения, управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, задачи оценивания и идентификации в динамических системах, обратные задачи, краевые задачи, численные алгоритмы решения задач оптимального управления, краевых задач, математическое моделирование в механике сплошной среды, математическое моделирование в механике жидкости и газа, математическое моделирование в экономике, общая топология.

УДК 517.9

ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

**ISBN 978–5–4312–0790–7**

© ФГБОУ ВО «Удмуртский  
государственный университет», 2020

# Содержание

<b>Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>15</b>
Lapin A.V., Levinskaya K.O. Locally one-dimensional scheme for a quasilinear parabolic equation with a fractional-time derivative . . . . .	15
Miller B.M. Generalized solutions of differential equations with Lie algebra structure . . . . .	17
Romanenko A.D., Lapin A.V. Numerical solution of a time-fractional one-phase Stefan problem . . . . .	19
Vetchanin E.V. Stability of rotations of a rigid body with a fixed point under periodic controls . . . . .	21
Yuldashev T.K. Integro-differential equations of third order with spectral parameters . . . . .	23
Алдашев С.А., Казез Е. Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперβολо-параболических уравнений . . . . .	24
Алдашев С.А., Канапьянова З.Н. Корректность смешанной задачи для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений . . . . .	26
Андреева И.А., Андреев А.Ф. Фазовые портреты некоторых классов кубических динамических систем в круге Пуанкаре . . . . .	28
Байков А.Е. Усреднение взрывных решений дифференциальных уравнений в стандартной форме . . . . .	31
Баладин А.С. Представление решения и его производной для линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа . . . . .	33
Банщикова И.Н. Пропорциональная локальная управляемость спектра показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем . . . . .	35
Барабанов Е.А., Карпук М.В., Быков В.В. Потеря устойчивости в линейной системе с экспоненциально убывающим параметрическим возмущением . . . . .	37
Баранов В.Н., Родионов В.И. Обобщенный вариант уравнения Эйлера . . . . .	39
Беляев Ю.Н. Полиномиальный метод решения уравнений упругих волн в слоистых средах . . . . .	41
Бенараб С. Теорема типа Чаплыгина о неявном интегральном неравенстве в пространстве суммируемых функций . . . . .	43
Бравый Е. И. О семействах гибридных функционально-дифференциальных уравнений . . . . .	44

Буркин И.М., Кузнецова О.И. Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов . . .	46
Быкова Т.С. О приближении систем с последствием системами обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	48
Васильев В.Б. Об интегральном представлении решений эллиптических краевых задач . . . . .	50
Васильев В.Б. О дискретных приближениях для решений эллиптических краевых задач . . . . .	52
Ватолкин М.Ю. О структуре спектра одной краевой задачи второго порядка . . . . .	54
Ватолкин М.Ю. Примеры на исследование спектра одной краевой задачи второго порядка . . . . .	56
Вельмисов П.А., Анкилов А.В. Об устойчивости решений нелинейной начально-краевой задачи о динамике трубопровода . . . . .	58
Ветохин А.Н. О бэровской классификации топологической энтропии семейств неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра . . . . .	60
Долгий Ю.Ф., Дигас Б.В. Точные решения операторного уравнения Ляпунова для системы с последствием нейтрального типа	62
Егорова А.В. Об оптимальном режиме эксплуатации для достижения наибольшего дисконтированного дохода от извлечения ресурса . . . . .	64
Жуковская Т.В., Жуковский Е.С. Об одном подходе к исследованию уравнений в метрических пространствах . . . . .	66
Запов А.С. Исследование математической модели дивергенции крыла . . . . .	68
Зарубин А.Н. Аналог задачи Трикоми для нелокального уравнения смешанного типа . . . . .	70
Иванов Д.Ю. Решение краевых задач для двумерного эллиптического уравнения с операторным коэффициентом в абстрактном гильбертовом пространстве . . . . .	72
Ильин А.В., Атамась Е.И. О методах поиска ограниченных решений неустойчивых линейных уравнений . . . . .	74
Кадиев Р.И. К вопросу об устойчивости решений нелинейных уравнений Ито с последствием . . . . .	75
Кандаков А.А. Об устойчивости линейных разностных уравнений с тремя запаздываниями . . . . .	77

Ковалева А.М. Бифуркации пространственно неоднородных решений в периодической краевой задаче для одного функционально-дифференциального уравнения, моделирующего процесс эрозии . . . . .	79
Колшаков И.Ю. О разрешимости одной периодической краевой задачи для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной . . . . .	81
Котлованов К.Ю., Бычков Е.В. Об одной стохастической модели акустических волн . . . . .	83
Куликов А.Н., Куликов Д.А. Нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау . . . . .	85
Ласунский А.В. Оценки центральных показателей одного класса линейных систем дифференциальных уравнений . . . . .	87
Макаров Е.К., Попова С.Н. К вопросу об управляемости показателей Ляпунова вполне управляемых систем . . . . .	89
Мальгина В.В. О различных видах устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений . . . . .	91
Мегралиев Я.Т., Исмаилов А.И. Об одной нелинейной обратной краевой задаче для псевдо-параболического уравнения третьего порядка с неклассическими краевыми условиями . . . . .	93
Мерчела В. Накрывающие отображения обобщенных метрических пространств в исследовании интегральных уравнений . . . . .	94
Мулюков М.В. Равномерная устойчивость дифференциального уравнения с двукратным запаздыванием . . . . .	96
Перов А.И., Коструб И.Д. Теорема Сильвестра, матрица Вандермонда и некоммутативные формулы Вьета . . . . .	98
Петросян Г.Г. О разрешимости дифференциальных включений дробного порядка, заданных в неявном виде . . . . .	101
Плаксина В.П. О разрешимости периодической краевой задачи . . . . .	103
Плаксина И.М. О применимости $W$ -метода Н. В. Азбелева к сингулярному дифференциальному уравнению, заданному на положительной полуоси . . . . .	104
Равчев А.В. О локальных классах Бэра ляпуновских инвариантов	107
Рахимова М.А. О решениях одного класса уравнений в частных производных с двумя комплексными независимыми переменными . . . . .	109
Родина Л.И., Хаммади А.Х. Оценка промыслового дохода в вероятностной модели эксплуатируемой популяции . . . . .	110
Румянцев А.Н. Об одном классе вычислимых операторов . . . . .	112

Сабатулина Т.Л. О достаточных признаках экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных уравнений с последствием . . . . .	114
Седова Н.О. О задаче экспоненциальной стабилизации с оценкой некоторого интегрального критерия качества для систем с запаздыванием . . . . .	116
Сергеев И.Н. Неразличимость некоторых ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости дифференциальных систем . . . . .	118
Симонов П.М. Об устойчивости системы линейных гибридных функционально-дифференциальных уравнений с последствием . . . . .	120
Соловьёва Н.Н., Загребина С.А., Свиридок Г.А. Стохастическое уравнение Хоффа с многоточечным начально-конечным условием . . . . .	122
Сумин В.И. Вольтерровы функциональные уравнения и распределенные оптимизационные задачи . . . . .	124
Тинюкова Т.С., Чубурин Ю.П. Собственные значения гамильтониана Боголюбова–де Жена вблизи границы сверхпроводящей щели . . . . .	126
Усков В.И. Асимптотическое решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве . . . . .	128
Хубиев К.У. Краевые задачи со смещением для уравнения гипербола-параболического типа с нагрузкой на характеристике . . . . .	130
Чернов А.В. О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с максимальным монотонным оператором . . . . .	132
Чудинов К.М. Об осцилляции решений дифференциальных уравнений первого порядка с последствием . . . . .	134
Чуйко С.М. Нетерова дифференциально-алгебраическая краевая задача с запаздыванием в случае параметрического резонанса . . . . .	136
Чуйко С.М., Несмелова О.В. Метод Ньютона–Канторовича в теории нелинейных автономных краевых задач . . . . .	138
Шагалова Л.Г. Обобщенное решение уравнения Гамильтона–Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом . . . . .	140
Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией . . . . .	141

**Теория управления и дифференциальные игры . . . . . 145**

Czornik A., Niezabitowski M., Makarov E.K., Popova S.N., Zaitsev V.A. Sufficient conditions for global asymptotic stabilization of semi-linear discrete-time systems with periodic coefficients . . . . . 145

Kim A.V., Ivanov A.V. Nonlinear differential games with aftereffects. Application of *i*-smooth analysis . . . . . 147

Максимов В.И. A feedback in problems of tracking dynamical characteristics for ordinary differential equations . . . . . 149

Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. Оптимизация интегрального вырожденного квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы . . . . . 151

Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задачах группового преследования . . . . . 152

Бортаковский А.С. Оптимальное управление гибридными системами переменной размерности . . . . . 154

Гомоюнов М.И. О минимаксном решении уравнений Гамильтона–Якоби с дробными коинвариантными производными . . . . . 156

Горохова И.В., Сумин В.И. Об особых управлениях принципа максимума в задачах оптимизации систем Гурса–Дарбу . . . . . 159

Гусев М.И. Асимптотика множеств достижимости нелинейных управляемых систем на малых интервалах времени и метод линеаризации . . . . . 161

Данилин А.Р., Шабуров А.А. Об одной сингулярно возмущенной задаче с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого аддитивно зависит от медленных и быстрых переменных . . . . . 162

Данилов Л.И. Измеримые сечения многозначных отображений и динамические системы сдвигов . . . . . 163

Деменчук А.К. Признак разрешимости задачи управления асинхронным спектром почти периодических линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов . . . . . 166

Журавлева М.А., Зайцев В.А. К вопросу о лямбда-преобразовании линейных стационарных управляемых систем в гильбертовом пространстве . . . . . 168

Зайцев В.А. Достаточные условия глобальной асимптотической стабилизации стационарной билинейной однородной системы с комплексными коэффициентами . . . . . 169

Зайцев В.А., Ким И.Г. Об управлении спектром линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием посредством статической обратной связи по выходу . . . . .	171
Зыков И.В. О способе приближенного построения множеств достижимости линейных управляемых систем с интегральными ограничениями . . . . .	173
Изместьев И.В., Анфалов Е.Д., Ушаков А.В. Параллельная реализация одного алгоритма построения множества достижимости нелинейной управляемой системы . . . . .	175
Изместьев И.В., Ухоботов В.И. Об одной дифференциальной игре с невышуклой терминальной платой . . . . .	177
Калинин А.И., Лавринович Л.И. Сингулярные возмущения в линейно-квадратичных задачах оптимального управления . . . . .	178
Ким И.Г., Зайцев В.А. Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с соизмеримыми запаздываниями статической обратной связью по выходу . . . . .	180
Клейменов А.Ф. Пример построения решений в одной гибридной двухшаговой динамической управляемой системе с тремя участниками и различными типами поведения . . . . .	182
Козлов А.А., Калита К.Д. О равномерной глобальной достижимости линейных управляемых периодических систем с дискретным временем . . . . .	184
Коржавина М.С. О первой краевой задаче для управляемого полуплоскостного параболического уравнения . . . . .	186
Краютко В.В., Размыслович Г.П. Управляемость каузальных 2D линейных дискретных систем . . . . .	188
Лукоянов Н.Ю. Об одной задаче управления в условиях помех с оптимальной гарантией результата . . . . .	190
Лукьянов В.В. Дифференцируемость функции быстродействия линейной управляемой докритической системы . . . . .	191
Мастерков Ю.В. К задаче оптимизации дорожного движения . . . . .	193
Матвийчук О.Г., Матвийчук А.Р. Об одной задаче оценивания множества достижимости динамической системы в условиях неопределенности . . . . .	194
Мачтакова А.И. Групповое преследование жестко скоординированных убегающих в некоторых задачах с дробными производными . . . . .	196
Метельский А.В., Хартовский В.Е. О проблеме управления спектром линейных систем нейтрального типа . . . . .	197



Пацко В.С., Федотов А.А. Принцип максимума Понтрягина и математическая машина Дубинса . . . . .	199
Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Поимка заданного числа убегающих в нестационарном примере Л. С. Понтрягина . . . . .	201
Плаксин А.Р. О вязкостных решениях уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана для систем с запаздыванием . . . . .	203
Родин А.С. Точки бифуркации решения уравнения Гамильтона–Якоби в модели молекулярной генетики . . . . .	205
Руденко Е.А. Ковариационные приближения к рекуррентному логико-динамическому фильтру оптимальной структуры большого порядка . . . . .	207
Субботина Н.Н., Крупенников Е.А. О регуляризованном решении задачи динамической идентификации параметров управляемых систем . . . . .	209
Сумин М.И. О регуляризации принципа Лагранжа в задачах условной оптимизации . . . . .	211
Сурков П.Г. Об одном методе приближенного вычисления дробной производной Капуто . . . . .	213
Успенский А.А., Лебедев П.Д. Процедуры построения сингулярного множества в плоской задаче управления по быстродействию для случая невыпуклого целевого множества с границей переменной гладкости . . . . .	215
Ухоботов В.И., Никитина С.А. Об одной игре с выпуклой целью и вектограммами, линейно зависящими от заданных множеств . . . . .	217
Федюков А.А. Синтез робастного управления для динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные . . . . .	219
Федюков А.А. Стабилизация по выходу тела в электромагнитном подвесе при ограничениях на фазовые переменные . . . . .	220
Хартовский В.Е. О проблеме асимптотической оценки решения линейных систем нейтрального типа . . . . .	222
Шевченко Р.И. Одна аппроксимация в задаче аналитического конструирования регулятора для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием . . . . .	224
Щелчков К.А. Построение разрешающих управлений в одной нелинейной дифференциальной игре . . . . .	226
Эгамов А.И. Оптимизационная задача колеблющейся струны с фазовым ограничением . . . . .	227

**Математическое моделирование . . . . . 229**

Alalykin S. S., Vetchanin E. V. Experimental investigation of the fall of toroidal bodies in a fluid . . . . . 229

Khaziyakhmetov R. T. The problem of the sum of integer vectors . . . 231

Абденова Г. А., Аканова К. М., Базинова К. М. Описание динамики денежных накоплений одной семьи с помощью линейных стохастических распределенных моделей в форме пространства состояний . . . . . 232

Адилов Ф. Ф., Абирова Р. А. Исследование сходимости метода СН-ЭВМ для траекторий в виде трехзвенных ломанных . . . . . 234

Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование динамики упругих элементов вибрационного устройства . . . . 236

Антоновская О. Г. Метод точечных отображений и задача синхронизации квазигармонического осциллятора . . . . . 238

Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С. Математическое моделирование контактного взаимодействия нескольких упругих тел на несогласованных сетках . . . . . 240

Асхатов Р. М., Кашапов Н. Ф., Кашапов Р. Н., Чебакова В. Ю. Математическая модель процессов электролиза раствора гидроксида натрия с инертными электродами . . . . . 241

Бадриев И. Б., Бандеров В. В., Макаров М. В. Численное моделирование потери устойчивости трехслойных пластин . . . . . 243

Бадриев И. Б., Макаров М. В., Смирнова Е. В. Численное моделирование процессов изгиба трехслойных пластин . . . . . 245

Бастрыков Е. С. Доказательства корректности распределенных алгоритмов . . . . . 247

Бедин Д. А. Линейные эквивариантные оценки в задаче траекторного слежения . . . . . 249

Бедин Д. А., Иванов А. Г., Ганебный С. А. Задача оценки траектории самолета, улучшение точности при помощи генетического алгоритма . . . . . 251

Беляева Н. А. Формирование плоского изделия в условиях связанной теории термовязкоупругости . . . . . 253

Беспалов М. С., Малкова М. К. Моделирование автоматической многоканальной системы кодирования цифровой информации . 255

Бойков И. В., Кривулин Н. П. Приближенные методы определения динамических характеристик информационно-измерительных систем . . . . . 256

Буланов С.Г. Компьютерная схема анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений . . . . .	258
Васёв П. А., Федотов А. А. Визуализация трехмерного множества достижимости для машины Дубинса . . . . .	260
Васючкова К. В., Манакова Н. А., Свиридюк Г. А. Обобщенная математическая модель Буссинеска. Вырожденная нелинейная полугруппа . . . . .	262
Гаврилова О. В., Манакова Н. А., Свиридюк Г. А. Неединственность решений задачи Шоултера–Сидорова для одной математической модели распространения нервного импульса в мембране . . . . .	264
Гладков С. О., Богданова С. Б. О режиме синхронизации в системе двух маятников . . . . .	266
Гладков С. О., Зо Аунг. О поправках к уравнению Навье–Стокса . . . . .	270
Данченко В. И., Данченко Д. Я. Метод масок получения рекуррентной формулы для пятидиагональных определителей Теплица . . . . .	271
Ерохин В. И., Сугак В. П., Кадочников А. П. Устойчивое решение задачи линейного программирования с приближенной целевой функцией и расширенной матрицей коэффициентов . . . . .	274
Загребина С. А., Конкина А. С. Численное решение многоточечной начально-конечной задачи для линейной системы уравнений Навье–Стокса . . . . .	275
Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н. Численное решение задачи оптимального управления в модели ионно-звуковых волн в плазме . . . . .	277
Захаров В. К. Математическая оптимизационная модель подчинительной войны между двумя государствами . . . . .	279
Заяц Г. М., Комаров А. Ф. Численное моделирование диффузии имплантированной примеси в кремниевой структуре при наносекундном лазерном отжиге . . . . .	282
Иванов В. Н., Шимановский В. А. Выбор оптимальной по быстродействию математической модели колонны трубоукладчиков при укладке трубопровода . . . . .	284
Кадыров И. Р., Копысов С. П. Методы вычислительной топологии в задачах построения эффективных численных алгоритмов трехмерных областях . . . . .	286
Караваев А. С., Копысов С. П. Воксельный генератор сеток из CAD-моделей . . . . .	288

Китаева О. Г., Шафранов Д. Е., Свиридюк Г. А. Модель Баренблатта–Желтова–Кочинной в пространстве дифференциальных форм с «шумами» . . . . .	290
Клочков М. А. К вопросу об использовании электрического поля в системах с обратной связью для управления частотой колебаний гармонического осциллятора . . . . .	292
Копысов С. П., Караваев А. С. Метод конечных элементов со сглаживанием производных в контактных задачах динамики деформируемых тел . . . . .	295
Корнилов А. Я., Васильева Е. В. Тандем тонких профилей с прогибными участками на контурах . . . . .	297
Королев С. А., Майков Д. В. Моделирование метаногенеза при изменении условий теплообмена с окружающей средой . . . . .	298
Кудрявцев К. Н. Слабое равновесие по Бержу в играх $N$ лиц . . . . .	300
Кузьмин И. М., Тонков Л. Е. Распределенная реализация решения сопряженных задач FSI в многосвязных областях . . . . .	302
Култышев С. Ю., Култышева Л. М. О построении математической модели функционирования мозга человека . . . . .	304
Кумков С. И., Пятко С. Г., Овчинников М. М. Управление бесконфликтной посадкой и вылетом воздушных судов . . . . .	306
Литвинов В. Л. Исследование продольных колебаний бесконечного неоднородного стержня при помощи метода Римана . . . . .	308
Мартыненко С. И. Перспективные численные методы для решения задач механики сплошных сред . . . . .	310
Мартыненко С. И. Численное решение краевых задач на многоблочных сетках . . . . .	312
Минаев В. А., Купцов М. И. О математическом моделировании распространения информации в телекоммуникационных системах . . . . .	314
Мисюра Н. Е., Ламоткин А. Е., Митюшов Е. А. Терминальное управление сферическим движением . . . . .	316
Митюшов Е. А., Мисюра Н. Е., Ламоткин А. Е. Моделирование эталонных групп вращений . . . . .	318
Недожогин Н. С., Копысов С. П., Новиков А. К. Решение систем уравнений при коллективном использовании CPU и GPU . . . . .	319
Новиков А. К., Копысов С. П., Караваев А. С. Многоуровневое распараллеливание при решении задачи контактной динамики . . . . .	323
Ощепкова Н. В. Математическая модель группы роботов, находящейся в эмоциональном ступоре . . . . .	325
Переварюха А. Ю. Уравнения для моделирования затухающих инвазивных процессов насекомых . . . . .	327

Рыбаков К. А. Представление повторных стохастических интегралов Стратоновича в спектральной форме математического описания . . . . .	329
Рыбаков К. А., Ющенко А. А. Моделирование дробного броуновского движения с применением ортогональных разложений случайных процессов . . . . .	331
Сидорова А. А., Тонков Л. Е. Проекционные методы с коррекцией скорости для численного решения задач гидродинамики . . . . .	333
Спиридонов А. А., Кумков С. С. Процедура оптимизации слитой очереди воздушных судов с учетом их типов . . . . .	335
Стабулит И. С. К вопросу о выборе равновесий в нечетких биматричных играх . . . . .	336
Сугак В. П., Ерохин В. И., Сотников С. В. Модели и методы исследования устойчивости управления динамическими активными системами . . . . .	338
Таташев А. Г., Караева М. Э., Яшина М. В. Анализ показателей рейтинга математических журналов по межгосударственным и междисциплинарным корреляциям . . . . .	340
Тененев В. А., Шаура А. С., Шаура Д. С. Применение генетических алгоритмов для решения задач оптимального управления и условной оптимизации . . . . .	342
Хазияхметов Р. Т. Многосеточное предобуславливание на графическом процессоре . . . . .	344
Шаклеин А. А., Карпов А. И. Учет выгорания при распространении пламени по поверхности горючего материала . . . . .	346
Шушкевич Г. Ч. Рассеяние поля электрического диполя на многослойном биизотропном шаре . . . . .	347
Яшин В. Б. Аспекты задачи о колесном экипаже для приложений в модели коллективного движения автомобилей . . . . .	349
Яшина М. В., Таташев А. Г., Лавров О. С. О спектральных свойствах модели пересечения транспортных траекторий с двумя конфликтными точками . . . . .	351
<b>Общая топология . . . . .</b>	<b>353</b>
Abdushukurova G. M., Narmanov A. Ya. On the group of diffeomorphisms of foliated manifolds . . . . .	353
Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. О полукольце непрерывных частичных числовых функций, рассматриваемом с расширенным сложением . . . . .	355

Головастов Р. А. Связь тесноты и псевдохарактера в T1 компактах	357
Ражабов Э. О., Шарипов Х. Ф. Геометрия орбит конформных векторных полей . . . . .	358
Селиверстов А. В. Достаточные условия гомеоморфности вещественных кубических гиперповерхностей . . . . .	360
Цигвинцева К. Н. Условия сходимости последовательности . . . . .	362
Ченцов А. Г. Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств . . . . .	364

---

# Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения

## Locally one-dimensional scheme for a quasilinear parabolic equation with a fractional-time derivative

A. V. Lapin, K. O. Levinskaya

*Kazan, Kazan Federal University*

e-mail: avlapine@mail.ru, sisina.kseniya@yandex.ru

We consider a quasilinear parabolic equation with a time-fractional derivative and homogeneous Dirichlet boundary conditions:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha y - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x, t, \frac{\partial y}{\partial x_i}) = f(x, t), & (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T]; \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial Q = \partial\Omega \times (0, T]; \quad y(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Above  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\mathcal{D}_t^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial y}{\partial s}(s) ds$  is Caputo fractional derivative of order  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  is gamma-function, and the nonlinear coefficients of the equation satisfy the following assumptions:

$$\begin{cases} \text{the functions } g_i(p) = g_i(x, t, p) \text{ are continuous in } \bar{Q} \times \mathbb{R}, \\ (g_i(x, t, p) - g_i(x, t, q))(p - q) \geq c_0(p - q)^2, \quad c_0 > 0, \\ |g_i(p) - g_i(q)| \leq c_1 |p - q|. \end{cases} \quad (2)$$

**Theorem 1.** *Under the formulated assumptions, for any  $f \in L^2(Q)$  problem (1) has a unique solution  $u \in H^{\alpha/2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .*

Problem (1) is approximated by a finite difference scheme on a uniform mesh  $\omega_h \times \omega_\tau$ . To approximate Caputo fractional derivative at a point  $t_k = k\tau$  we use  $L1$ -approximation (cf., e.g. [1]):

$\mathcal{D}_t^\alpha y(t_k) \approx \partial_t^\alpha y(t_k) = d_1 y^k + \sum_{j=1}^{k-1} (d_{j+1} - d_j) y^{k-j}$ , where  $y^j = y(t_j)$ , and  $d_j = \tau^{-\alpha} (\Gamma(2 - \alpha))^{-1} (j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha})$ . The approximation of the elliptic part of the problem leads to the mesh operator of the form  $A(t_k)y = A_1(t_k)y + A_2(t_k)y$  with the locally one-dimensional mesh operators  $A_i(t_k)$ . The locally one-dimensional scheme approximating problem (1) is as follows (for a parabolic problem with integer derivatives, such a locally one-dimensional scheme was proposed in [2]):

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.5d_1 w_1^k + A_1(t_k)w_1^k = -0.5 \sum_{j=1}^{k-1} (d_{j+1} - d_j) y^{k-j} + 0.5f^k, \\ 0.5d_1 w_2^k + A_2(t_k)w_2^k = -0.5 \sum_{j=1}^{k-1} (d_{j+1} - d_j) y^{k-j} + 0.5f^k, \\ y^k = 0.5(w_1^k + w_2^k). \end{array} \right. \quad (3)$$

**Theorem 2.** a) Mesh problem (3) has a unique solution.

b) Denote by  $y_1^k$  and  $y_2^k$  the solutions of problem (3), corresponding to the right-hand sides  $\phi_{1i}^k$  and  $\phi_{2i}^k$ , respectively, and  $y^k = y_1^k - y_2^k$  and  $\phi_i^k = \phi_{1i}^k - \phi_{2i}^k$ . Then the stability estimate holds:

$$\|y\| \leq C_1 \tau \|\phi_1 + \phi_2\| + C_2 \tau^\alpha (\|\phi_1\|^2 + \|\phi_2\|^2)$$

in the norm  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\omega_t; L^2(\omega_x))}$  with the constants  $C_1, C_2$ , which do not depend on  $h$  and  $\tau$ .

c) Let the input data and the solution  $u(x, t)$  of the differential problem be sufficiently smooth. Then the following accuracy estimate is valid

$$\|y - u\|_{L^2(\omega_t; L^2(\omega_x))} = O(\tau^{\alpha/2} + h^2).$$

To numerically implement equations (3) at a fixed time level  $t_k$  we use stationary one-step iterative method with the preconditioners  $d_1 I + R_i$ , where  $R_i$  corresponds to the approximation of  $-\partial^2 / \partial x_i^2$ . The convergence rate of this method does not depend on  $h$  and  $\tau$ . Its implementation consists of parallel solving linear equations with tridiagonal matrices.

The results of computational experiments are presented, which confirm the obtained theoretical estimates.

The work is supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 19-01-00431.



1. *Oldham K., Spanier J.* The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Mathematics in Science and Engineering, vol. 111, Academic Press, New York and London, 1974.
2. *Gordeziani D. T., Meladze D. V.* The simulation of the third boundary value problem for multidimensional parabolic equations in an arbitrary domain by one-dimensional equations // USSR Comp. Math. Math. Phys. 1974. Vol. 14. No. 1. Pp. 249–253.

## Generalized solutions of differential equations with Lie algebra structure

B. M. Miller

*Moscow, IITP RAS*

*Monash University, VIC, Australia*

*Kazan, Kazan Federal University*

e-mail: bmiller@iitp.ru

Consider the system described by the differential equation, which is affine in an unbounded control

$$\dot{X}(t) = B(X(t), t)w(t), \tag{1}$$

with control  $w \in K$ , where  $K \in R^m$  is a convex cone. The control  $w(t)$  corresponds to the controls which are unbounded in the norm but restricted in the integral sense so that  $w(t)$  satisfies the constraint

$$\int_0^T \|w(t)\| dt \leq M < \infty, \tag{2}$$

with some constant  $M$ .

The equation in (1) is affine with respect to a control variable  $w(t)$ . This type of controls admits the generalized inputs such as  $\delta$ - functions which could produce the jumps of phase variable  $X(t)$  [1]. The general representation of solution is given by Theorem 2.14 [2].

Suppose that  $f(x)$  and  $g(x)$  are two smooth vector-fields in  $R^n$ .

**Definition 1.** The *product* or the *Lie bracket*  $[f, g]$  of two smooth vector-fields in  $R^n$  will be defined as  $[f, g](x) = f'_x(x)g(x) - g_x(x)f(x)$ , where  $f'_x(x), g'_x(x)$  are  $(n \times n)$  matrices of partial derivatives of the vector-field components.

If  $[f, g] = 0$ , then the pair of the vector-fields  $f, g$  will be called *commutative*.

**Theorem 1.** *In the commutative case that is if the columns of matrix function  $B(x, t)$  satisfies  $[B_i, B_j] = 0$  for all  $i, j$  the general solution of the system*

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^N B_i(X(t))w_i(t) \quad (3)$$

*with the initial condition  $X(0) = x_0$ , admits the representation*

$$X(t) = \Phi_N(\xi_N(t), \Phi_{N-1}(\xi_{N-1}(t), \dots, \Phi(\xi_1(t), x_0) \dots)), \quad (4)$$

*where*

$$\xi_k = \int_0^t w_k(s) ds,$$

*and  $\Phi_k(t, y)$  is the solution of the differential equation*

$$\dot{y}(t) = B_k(y(t)), \quad y(0) = y. \quad (5)$$

The same representation one can be obtained if the columns of matrix function  $B(x, t)$  are in involution.

**Definition 2.** The set of the vector-fields  $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$  will be called *involutive* if the Lie brackets of any  $f_i, f_j$  are the linear combinations of  $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$ , i.e. there exists the set of constants  $\{c_{i,j}^k, i, j, k = 1, \dots, N\}$  such that

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^N c_{i,j}^k f_k. \quad (6)$$

The set  $\{c_{i,j}^k, i, j, k = 1, \dots, N\}$  will be called *the set of structural constants* of the Lie algebra  $\mathcal{L}\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$  generated by vector-fields  $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$ .

**Theorem 2.** *If the columns of matrix function  $B(x, t)$  are in involution the general solution of (3) admits representation (4), where functions  $\vec{\xi}(t) = \{\xi_i(t)\}$  corresponding to controls  $\vec{w}(t) = \{w_i(t)\}$  are the solution of the system*

$$L(\vec{\xi})\dot{\vec{\xi}}(t) = \vec{w}(t), \quad \vec{\xi}(0) = 0, \quad (7)$$

*where analytical functions  $L^{i,j}$  depend on the structural constants of the Lie algebra  $\mathcal{L}\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$*

The work is partially supported by the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University

1. *Miller B.M., Rubinovich E.Ya.* Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.
2. *Miller B.M., Rubinovich E.Ya.* Optimization of Dynamical Systems with Impulse Controls and Shocks. M: LENAND, 2019.

## Numerical solution of a time-fractional one-phase Stefan problem

**A. D. Romanenko, A. V. Lapin**

*Kazan, Kazan Federal University*

e-mail: romart92@mail.ru, avlapine@mail.ru

We consider a time-fractional one-phase Stefan melting problem which involve a memory of the latent-heat accumulation, namely, the problem in the enthalpy formulation, when diffuse interface is assumed and the memory of the accumulation is «distributed» throughout the liquid phase.

This formulation is discussed in [1, 2]. The presented results generalize the results of [3, 4], where «classical» Stefan problems with integer derivatives were investigated.

Let  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\partial\Omega = \sum_{1 \leq i \leq 3} \Gamma_i$ , where  $\Gamma_1 = \{x_1 = 0\}$  and  $\Gamma_3 = \{x_1 = 1\}$ . Assume that the initial state of the substance is solid with the phase transition temperature  $u = 0$  and enthalpy function  $H(u) = 0$ , the positive temperature  $\theta(x_2)$  is set to  $\Gamma_1$  and the homogeneous Neumann boundary condition is set to  $\Gamma_2$ . The formulation of this problem is as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_t^\alpha H(u) - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T] \\ u = \theta(x_2) \geq 0, \quad (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T]; \quad u = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_3 \times (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T], \quad H(u) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \{t = 0\}, \end{array} \right. \quad (1)$$

where  $H(u) = \{0 \text{ for } u < 0; [0, L] \text{ for } u = 0; ku + L \text{ for } u > 0\}$ , ( $k > 0$ ), is the multivalued enthalpy function,  $-\Delta$  means Laplace operator,

$$\mathcal{D}_t^\alpha H(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial H}{\partial s}(s) ds, \quad \alpha \in (0, 1), \text{ is fractional derivative.}$$

We approximate problem (1) by an implicit finite difference scheme on a uniform mesh  $\omega_h \times \omega_\tau$ . Namely, the time fractional derivative at a point  $t_k \in$

$\omega_\tau$  is approximated using so-called  $L1$ -approximation:  $\mathcal{D}_t^\alpha H(t_k) \approx \partial_t^\alpha H^k$ , by  $A_h$  we denote the finite difference Laplacian with corresponding homogeneous boundary conditions, and the mesh function  $f = f(\theta) \geq 0$  is originated by the boundary condition  $u^k = \theta$  on  $\Gamma_1$ . Then the finite difference scheme is as follows:

$$\partial_t^\alpha H^k + A_h u^k = f, \quad k = 1, 2, \dots, N_t; \quad H^k \in H(u^k), \quad (2)$$

$$H^0 = 0.$$

**Theorem 1.** (a) Problem (2) has a unique  $\{(u^k, H^k)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_t$ .

(b) If  $\omega_0(t_k) = \{x \in \omega_h : y^k = 0\}$ ,  $\omega_+(t_k) = \{x \in \omega_h : y^k > 0\}$ , and  $S(t_k)$  is the mesh boundary of the phase transition at a time  $t_k$  (mesh «curve», separating  $\omega_0(t_k)$  and  $\omega_+(t_k)$ ), then

$$\omega_+(t_{k-1}) \subseteq \omega_+(t_k), \quad (3)$$

and the distance between  $S(t_{k-1})$  and  $S(t_k)$  is estimated as follows:

$$\rho(x, S(t_{k-1})) \leq C\tau^{\alpha/2} + h \quad \text{for any point } x \in S(t_k), \quad (4)$$

where the constant  $C$  is determined by an explicit formula through the input data of the problem.

The estimates (3), (4) provide us the knowledge on the location of the phase transition boundary, namely, on a current time level  $t_k$  we can find a «narrow» strip, which contains free boundary. Thus, we must solve the nonlinear problem at the points of this strip and the linear equation in the rest, a larger region. Various domain decomposition methods (DDM) can be used to implement the constructed mesh problem using this information, either overlapping DDM (see [3, 4] for the case of Stefan problem with integer derivatives) or non-overlapping DDM.

The work is supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 19-01-00431.

1. Voller V. R., Falcini F., Garra R. Fractional Stefan problems exhibiting lumped and distributional latent-heat memory effects // Physical Review E. 2013. Vol. 87. 042401.
2. Cerentani A. N. A note on models for anomalous phase-change processes // Frac. Calc. Appl. Anal. 2020. Vol. 23. No. 1. Pp. 167–182.
3. Kuznetsov Yu. A., Lapin A. V. Domain decomposition method to realize an implicit difference scheme for one-phase Stefan problem // Sov. J. Numer. Anal. Math. Model. 1988. Vol. 3. Pp. 487–504.

4. *Lapin A. V.* Domain decomposition method for grid approximation of two-phase Stefan problem // *Sov. J. Numer. Anal. Math. Model.* 1991. Vol. 6. Pp. 25–42.

## Stability of rotations of a rigid body with a fixed point under periodic controls

**E. V. Vetchanin**

*Izhevsk, Udmurt State University*

e-mail: eugene186@mail.ru

This paper is concerned with rotation of a rigid body with a fixed point, an internal rotor. It is assumed that the moments of inertia of the body are periodic functions of time with the same period. We make the following assumptions concerning the system:

- 1° The center of mass of the system is at the fixed point.
- 2° The system is acted upon no dissipative forces.
- 3° Directions of the principal axes of inertia do not change during the motion. The components of the tensor of inertia and the gyrostatic momentum of the system are *tau*-periodic functions of time.

To describe the motion of the system, we introduce two coordinate systems: a fixed frame  $Oxyz$  and a moving frame  $Cx_1x_2x_3$  attached to the body. The motion of the system is governed by the following equations:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \left( \mathbf{I}^{-1}(t)(\mathbf{M} - \mathbf{k}(t)) \right), \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \left( \mathbf{I}^{-1}(t)(\mathbf{M} - \mathbf{k}(t)) \right), \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \left( \mathbf{I}^{-1}(t)(\mathbf{M} - \mathbf{k}(t)) \right), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \left( \mathbf{I}^{-1}(t)(\mathbf{M} - \mathbf{k}(t)) \right), \quad (2)$$

where  $\mathbf{I}(t)$  is the tensor of inertia,  $\mathbf{k}(t)$  is the gyrostatic momentum (the angular momentum of the rotor),  $\mathbf{M} = \mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}(t)$  is the angular momentum of the system,  $\boldsymbol{\omega}$  is the angular velocity, and  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  are the unit vectors directed along the axes of the fixed coordinate system.

The first equation of (1) can be investigated separately. At  $\mathbf{I} = \text{const}$  and  $\mathbf{k} = \text{const}$  this equation admits partial solutions (fixed points) corresponding to permanent rotations  $\mathbf{M} = \text{const}$ . Their stability at  $\mathbf{k} = 0$  (the Euler–Poinsot case) and at  $\mathbf{k} \neq 0$  (the Joukowskii–Volterra case) is studied and is determined by corresponding bifurcation diagrams [1, 2]. In particular, in the

case where  $\mathbf{k} = 0$ , the rotations about minor and major axes of inertia are stable, and rotation about middle axis of inertia is unstable.

Stable permanent rotations may become unstable due to the parametric resonance in the case of periodically changing moments of inertia. In contrast to this, unstable rotations may become stable. As an example we consider rotation of the body when the tensor of inertia depends on time and the gyrostatic momentum absents:

$$\mathbf{I}(t) = \text{diag}(2 + \delta^2 \sin^2 \Omega t, 3, 4 + \delta^2 \sin^2 \Omega t), \quad \mathbf{k} = 0.$$

An example of a chart of stability on the parameter plane  $(\Omega, \delta)$  is shown in Fig. 1. It can be seen from Fig. 1 that instability regions (so-called ‘‘Arnol’d tongues’’ [3]) arise near resonance points.

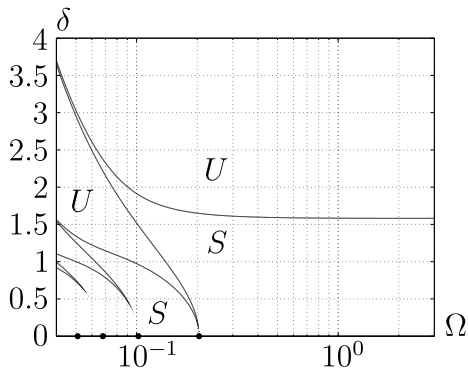


Figure 1: Regions of stability  $S$  and instability  $U$  for permanent rotation  $\mathbf{M} = (1, 0, 0)$

This work was supported by the Russian Science Foundation under grant 18-71-00111.

1. *Bolsinov A.V., Fomenko A.T.* Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC, 2004.
2. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid Body Dynamics: Hamiltonian Methods, Integrability, Chaos. Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2005 (Russian).
3. *Arnold V.I.* Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer, 2006.

# Integro-differential equations of third order with spectral parameters

**T. K. Yuldashev**

*Tashkent, National University of Uzbekistan*

e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Integro-differential equations are mathematical models of the course of many physical processes and the operation of technical systems. In the matter of studying solvability and constructing solutions, the presence of spectral parameters plays an important role. The values of the spectral parameters are calculated, for which the solvability of the problem with non-local integral conditions is established and the corresponding solutions are constructed.

On the segment  $[0; T]$  the following integro-differential equation is considered

$$u'''(t) + \lambda u(t) + \nu \int_0^T K(t, s)u(s) ds = 0$$

under the following integral conditions

$$u(0) = \psi, u(T) + \int_0^T u(t) dt = \alpha, u'(T) + \int_0^T u'(t) t dt = \beta,$$

where  $T$  is given positive number,  $\lambda$  is positive spectral parameter,  $\nu$  is real nonzero spectral parameter,  $\psi, \alpha, \beta = \text{const}$ ;  $K(t, s) = \sum_{i=1}^k a_i(t) b_i(s)$ ,  $0 \neq a_i(t), b_i(s) \in C[0; T]$ . Here it is assumed that each of the systems of functions  $\{a_i(t)\}_{i=1}^k, \{b_i(s)\}_{i=1}^k$ , linearly independent.

The problems of solvability and construction of solutions of a nonlocal boundary value problem for the third-order Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel, integral conditions and spectral parameters are considered. Using the method of the degenerate kernel, the boundary value problem is integrated as an ordinary differential equation. When we define the arbitrary integration constants there are possible some cases with respect to the first spectral parameter. Calculated values of the spectral parameter for each case. Further, the problem is reduced to solving systems of linear algebraic equations. Irregular values of the second spectral parameter are determined. At irregular values of the second spectral parameter the

Fredholm determinant is degenerate. Other values of the second spectral parameter, for which the Fredholm determinant does not degenerate, are called regular values. Taking the values of the first spectral parameter into account for regular values of the second spectral parameter the corresponding solutions were constructed for each of five cases. The stability of the solution of the boundary value problem for given values in integral conditions is proved. The conditions under which the solution of the boundary value problem will be small are studied. For the irregular values of the second spectral parameter in each cases is checked separately. The orthogonality conditions are used. Cases are determined in which the problem has an infinite number of solutions and these solutions are constructed. For other cases, the absence of nontrivial solutions of the problem is proved.

## Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений

С. А. Алдашев, Е. Казез

*г. Алматы, Казахстан, Институт математики, физики и  
информатики, КазНПУ им. Абая*

e-mail: aldash51@mail.ru, ertai\_kazez@mail.ru

**Введение.** Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах исследована в работах [1, 2]. В [3, 4] доказана корректность этой задачи и получен явный вид классического решения.

Насколько известно, эти вопросы для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений не изучены.

В данной работе показана однозначная разрешимость и получено явное представление классического решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений.

**Постановка задачи и результат.** Пусть  $\Omega_{\alpha\beta}$  — цилиндрическая область евклидова пространства  $E_{m+1}$  точек  $(x_1, \dots, x_m, t)$ , ограниченная цилиндром  $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ , плоскостями  $t = \alpha > 0$  и  $t = \beta < 0$ , где  $|x|$  — длина вектора  $x = (x_1, \dots, x_m)$ .

Обозначим через  $\Omega_\alpha$  и  $\Omega_\beta$  части области  $\Omega_{\alpha\beta}$ , а через  $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$  — части поверхности  $\Gamma$ , лежащие в полупространствах  $t > 0$  и  $t < 0$ ;  $\sigma_\alpha$  — верхнее,



а  $\sigma_\beta$  — нижнее основание области  $\Omega_{\alpha\beta}$ .

В области  $\Omega_{\alpha\beta}$  рассмотрим вырождающиеся многомерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} p(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u, & t > 0, \\ q(t)\Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(x, t)u_{x_i} + e(x, t)u, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $p(t) > 0$  при  $t > 0$ ,  $p(0) = 0$ ,  $\rho(t) \in C([0, \alpha]) \cap C^2((0, \alpha))$ ,  $g(t) > 0$  при  $t > 0$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(t) \in C([\beta, 0])$ , а  $\Delta_x$  — оператор Лапласа по переменным  $x_1, \dots, x_m$ ,  $m \geq 2$ .

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат  $x_1, \dots, x_m, t$  к сферическим  $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ,  $i = 2, 3, \dots, m-1$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ .

**Задача 1.** Найти решение уравнения (1) в области  $\Omega_{\alpha\beta}$  при  $t \neq 0$  из класса  $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u \Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta),$$

$$u \Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad u \Big|_{\sigma_\beta} = \varphi(t, \theta),$$

при этом  $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$ ,  $\psi_2(\beta, \theta) = \varphi(1, \theta)$ .

Пусть

$$\begin{aligned} a_i(r, \theta, t), \quad b(r, \theta, t), \quad c(r, \theta, t) &\in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\bar{\Omega}_\alpha), \\ d_i(r, \theta, t), \quad e(r, \theta, t) &\in W_2^l(\Omega_\beta), \quad i = 1, \dots, m, \quad l \geq m + 1, \\ e(r, \theta, t) &\leq 0 \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\beta. \end{aligned}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Если  $\varphi(r, \theta) \in W_2^\rho(S)$ ,  $\psi_1(t, \theta) \in W_2^\rho(\Gamma_\alpha)$ ,  $\psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$ ,  $\rho > \frac{3m}{2}$  и  $\cos \mu_{s,n} \alpha' \neq 0$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , то задача 1 однозначно разрешима. Здесь  $\mu_{s,n}$  — положительные нули функций Бесселя первого рода  $J_{n+\frac{m-2}{2}}(z)$ ,

$$n = 0, 1, \dots; \quad \alpha' = \int_0^\alpha \sqrt{g(\xi)} d\xi.$$

1. Барановский Ф.Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости // Ученые записки Ленингр. пед. института. 1958. Т. 183. С. 23–58.

2. *Краснов М.Л.* Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб. 1959. Т. 49 (91). С. 29–84.
3. *Алдашев С.А.* Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Журнал вычислительной и прикладной математики. Киев: КНУ им. Т.Г. Шевченко. 2019. № 2 (131). С. 5–14.
4. *Aldashev S.A.* Well-posedness of the mixed problem for degenerate multidimensional hyperbolic equations // Материалы конференции «Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methods and information». Киев, КНУ им. Т.Г. Шевченко, 2018. С. 14–15.

## Корректность смешанной задачи для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений

С. А. Алдашев, З. Н. Канапьянова

*г. Алматы, Казахстан, Институт математики, физики и  
информатики, КазНПУ им. Абая*

e-mail: [aldash51@mail.ru](mailto:aldash51@mail.ru), [kanapyanova81@bk.ru](mailto:kanapyanova81@bk.ru)

**Введение.** Известно, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать многомерными гиперболическими уравнениями. Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, приходим к многомерным гиперболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач.

Смешанная задача для вырождающихся линейных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах изучена в [1]. В [2, 3] установлена корректность смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с операторами Геллерстедта и Чаплыгина.

В работе найден новый класс вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений, для которых однозначно разрешима смешанная задача, и приведен явный вид ее классического решения.

**Постановка задачи и результат.** Пусть  $D_\beta$  — цилиндрическая область евклидова пространства  $E_3$  точек  $(x_1, x_2, t)$ , ограниченная цилин-

дром  $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ , плоскостями  $t = \beta > 0$  и  $t = 0$ , где  $|x|$  — длина вектора  $x = (x_1, x_2)$ . Части этих поверхностей, образующих границу  $\partial D_\beta$  области  $D_\beta$ , обозначим через  $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$  соответственно.

В области  $D_\beta$  рассмотрим взаимосопряженные трехмерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^2 k_i(t) u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^2 a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0, \quad (1)$$

где  $k_i(t) > 0$  при  $t > 0$  и могут обращаться в нуль при  $t = 0$ ,

$$k_i(t) \in C([0, \beta]) \cap C^2((0, \beta)), \quad i = 1, 2, \quad d(x, t) = C - \sum_{i=1}^2 a_{ix_i} - b_t.$$

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат  $x_1, x_2, t$  с полярными  $r, \theta, t$ :  $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ .

В качестве смешанной задачи рассмотрим следующую задачу.

**Задача 1.** Найти решение уравнения (1) в области  $D_\beta$  из класса  $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u \Big|_{S_0} = \tau(r, \theta), \quad u_t \Big|_{S_0} = \nu(r, \theta), \quad u \Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t, \theta),$$

при этом  $\tau(1, \theta) = \psi(0, \theta), \nu(1, \theta) = \psi_t(0, \theta)$ .

Пусть  $a_i(r, \theta, t), b(r, \theta, t), c(r, \theta, t) \in C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta), i = 1, 2$ .

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Если  $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in C^1(\bar{S}_0) \cap C^3(S_0), \psi(t, \theta) \in C^1(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^3(\Gamma_\beta)$  и выполняется условие

$$\cos \mu_{s,n} \beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots,$$

то задача 1 имеет единственное решение. Здесь  $\mu_{s,n}$  — положительные нули функций Бесселя первого рода  $J_n(z), n = 0, 1, \dots$ ,

$$\beta' = \int_0^\beta \sqrt{\frac{[k_1(\xi) + k_2(\xi)]}{2}} d\xi.$$

Отметим, что в случае, когда младшие коэффициенты уравнения (1) равны нулю, приведенная теорема получена в [4].

1. *Краснов М.Л.* Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб. 1959. Т. 49 (91). С. 29–84.
2. *Aldashev S.A.* Well-posedness of the mixed problem for degenerate multi-dimensional hyperbolic equations // материалы конференций «Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational Methods and Information», Киев, КНУ им. Т. Шевченко, 2018. С. 14–15.
3. *Алдашев С.А.* Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Журнал вычислительной и прикладной математики. 2019. № 2 (131). С. 5–14.
4. *Канапьянова З.Н.* Смешанная задача для вырождающегося трехмерного гиперболического уравнения // Вестник КазНПУ им. Абая. Сер. физ-мат. 2019. № 1 (65). С. 45–48.

## Фазовые портреты некоторых классов кубических динамических систем в круге Пуанкаре

**И. А. Андреева**

*г. Санкт-Петербург, СПбПГУ*

e-mail: irandr@inbox.ru

**А. Ф. Андреев**

*г. Санкт-Петербург, СПбПУ Петра Великого*

В работе подробно изучается на вещественной плоскости их фазовых переменных  $x$  и  $y$  весьма широкий класс динамических систем, содержащих в своих правых частях полиномы:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad (1)$$

где  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  — взаимно простые многочлены от  $x$  и  $y$ , причем  $X$  — кубическая форма,  $Y$  — квадратичная,  $X(0, 1) > 0$ ,  $Y(0, 1) > 0$ . Поставлен и решается вопрос о построении в круге Пуанкаре всех топологически различных фазовых портретов (1)-систем с установлением (близких к коэффицентным) критериев возникновения каждого. Для решения такой задачи применен метод последовательных отображений, предложенный Анри Пуанкаре:

1) центрального (из центра  $(0, 0, 1)$  сферы  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) плоскости

$x, y$ , дополненной бесконечно удаленной прямой (т.е. плоскости  $\bar{R}_{x,y}^2$ ) на сферу (Пуанкаре)  $\Sigma$  с отождествленными диаметрально противоположными точками;

2) ортогонального отображения нижней замкнутой полусферы  $\Sigma$  на круг (Пуанкаре)  $\bar{\Omega}: x^2 + y^2 \leq 1$  с отождествленными граничными диаметрально противоположными точками  $\Gamma$  [1, с. 241–249].

При изучении описанного класса динамических систем применен целый ряд методов, специально для целей данного исследования разработанных профессором СПбГУ А. Ф. Андреевым (1923–2017) совместно с автором статьи. Постановка задачи также принадлежит профессору А. Ф. Андрееву, классику в области локальной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Исходный обширный класс систем подразделяется на семейства, которые, в свою очередь, расщепляются на подсемейства ряда последовательных иерархических уровней. Как следствие, алгоритм достижения поставленной цели предусматривает несколько разделов.

Вступая на первый уровень иерархии подсемейств, начинаем изучение с тех (1)-систем, разложения полиномов  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  которых на вещественные формы низжайших степеней содержат соответственно по 3 и 2 сомножителя, т.е. имеют вид (3.2)-систем:

$$X(x, y) = p_3(y - u_1x)(y - u_2x)(y - u_3x), \quad Y(x, y) = c(y - q_1x)(y - q_2x),$$

где  $p_3 > 0, c > 0, u_1 < u_2 < u_3, q_1 < q_2, u_i \neq q_j$  при любых  $i$  и  $j$ .

Для (3.2)-систем вводим понятия, аналогичные которым далее появятся и для всех прочих типов подсемейств, лежащих на первом уровне иерархии.  $P(u), Q(u)$  — полиномы системы  $P, Q$  :

$$P(u) := X(1, u) \equiv p_3(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3),$$

$$Q(u) := Y(1, u) \equiv c(u - q_1)(u - q_2).$$

ПКР (ПКQ) — возрастающая последовательность всех вещественных корней полинома системы  $P(u)$  ( $Q(u)$ ).

ПКРQ — возрастающая последовательность всех вещественных корней обоих полиномов системы  $P(u), Q(u)$ .

ДЗ-преобразование — это выполняемая в системе двойная замена:  $(t, y) \rightarrow (-t, -y)$ . Для полученной ДЗ-преобразованием новой системы направления движения по траекториям (с возрастанием  $t$ ), знаки корней полиномов  $P(u), Q(u)$ , как и нумерация этих корней, противоположны по отношению к аналогичным характеристикам системы-прообраза. Две исследуемые (3.2)-системы мы называем:

- а) взаимно обратными (относительно двойной замены), если ДЗ преобразует одну из них в другую;
- б) независимыми (от двойной замены) в обратном случае.

Для (3.2)-систем возникают 10 видов ПКРQ. ДЗ-преобразование (1)-систем демонстрирует, что 6 из них будут попарно независимыми, а для каждой из прочих найдется ДЗ-взаимно обратная среди шести первых. Каждой из различных ПКРQ (3.2)-систем присвоим уникальный номер  $r \in \{1, \dots, 10\}$  таким образом, чтобы  $(ПКРQ)_r$  с номерами  $r = \overline{1, 6}$  оказывались попарно независимыми, в то время как системы с номерами  $r = \overline{7, 10}$  — взаимно обратными системам под номерами  $r = \overline{1, 4}$ . Вводим понятие  $(3.2)_r$ -семейство (1)-систем := совокупность всех систем (3.2)-семейства, для каждой из которых  $ПКРQ = (ПКРQ)_r$ . Затем, придерживаясь единой программы, исследуем  $(3.2)_r$ -семейства (1)-систем,  $r = \overline{1, 6}$ . Результаты для  $(3.2)_r$ -семейств,  $r = \overline{7, 10}$ , выводим из найденных для  $(3.2)_r$ -семейств,  $r = \overline{1, 4}$ , за счет ДЗ-преобразования. Фазовые портреты для систем  $(3.2)_r$ -семейства строим графически и таблично. Приводим критерии возникновения каждого.

Впоследствии (на верхнем уровне иерархии изучаемых подсемейств динамических систем) основная задача решается для двух подклассов  $A$  и  $B$  (2.2)-семейств и для (3.1)-семейства (1)-систем [3, 6, 8]. Дается полное решение также для (2.1)-систем. Детальное изложение алгоритма и определенного им исследовательского процесса, описание принципов перехода на нижайшие ступени иерархии подсемейств изучаемых широких классов динамических систем, как и самой сути этих ступеней иерархии, а также результатов их изучения (в совокупности с обоснованием новых методов исследования и форм их применения) можно найти в монографии [2] и статьях [4, 5, 7].

1. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
2. *Андреева И.А., Андреев А.Ф.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. Germany, Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2017.
3. *Андреев А.Ф., Андреева И.А.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I // Вестник РАЕН. 2017. № 4. С. 8–18.
4. *Andreeva I.A., Andreev A.F., Detchenya L.V., Makovetskaya T.V., Sadovskii A.P.* Nilpotent Centers of Cubic Systems // Differential Equations. 2017. Vol. 53. No. 8. P. 975–980.
5. *Andreeva I.A., Andreev A.F.* On a Behavior of Trajectories of a Certain Family of Cubic Dynamic Systems in a Poincare Circle // IOP Journal of Physics: Conference Series. 2018. No. 1141.

6. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые портреты семейства кубических систем в круге Пуанкаре. II // Вестник РАЕН. 2018. № 4. С. 11–15.
7. Andreeva I.A., Efimova T.O. Phase Portraits of a Special Class of Dynamic Systems in a Poincare Circle // IOP Journal of Physics: Conference Series. 2019. No. 1236.
8. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые портреты некоторого семейства кубических динамических систем в круге Пуанкаре. III // Вестник РАЕН. 2019. Т. 19. № 4. С. 20–24.

## Усреднение взрывных решений дифференциальных уравнений в стандартной форме

**А. Е. Байков**

*Москва, Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)  
e-mail: alexbaikov16@gmail.com*

Рассмотрим систему в стандартной форме Крылова–Боголюбова [1]

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t) \tag{1}$$

с периодической по времени правой частью:  $X(x, t + 2\pi) \equiv X(x, t)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $t \in \mathbb{R}$ . Здесь  $\varepsilon$  — положительный малый параметр. Обозначим через  $\bar{X}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(u, t) dt$  временное среднее отображения  $X$  и рассмотрим усреднённую систему

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u). \tag{2}$$

**Определение.** *Взрывным решением* или *blow-up* системы (2) называется частное решение  $u = u(t)$  с начальным условием  $u(0) = u^0$ , существующее на  $[0, T^*)$  и неограниченное при  $t \rightarrow T^* - 0$ . Величина  $T^*$  есть *время blow-up* системы (2).

Аналогично определяется blow-up системы (1). Предположим, что известно одно взрывное решение или семейство blow-up усреднённой системы (2). Существуют ли тогда blow-up точной системы (1) и, если существуют, то как они соотносятся с blow-up усреднённой системы (2)? Ответ на вопрос даёт следующая теорема.

**Теорема.** Пусть правая часть системы (1) непрерывна по  $x \in \mathbb{R}^n$ , периодически зависит от времени, удовлетворяет локальному условию Липшица по фазовым переменным:  $\forall K \in \mathbb{R}^n \exists L > 0 \forall x, x' \in K \forall t \in \mathbb{R} |X(x, t) - X(x', t)| \leq L|x - x'|$ . Если система (2) имеет blow-up с начальным условием  $u(0) = u^\circ$  и временем  $T^*$ , то система (1) также имеет blow-up с начальным условием  $x(0) = u^\circ$  и временем  $T$  при достаточно малом  $\varepsilon$ , причём  $T - T^* = O(1)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Доказательство теоремы конструктивно и восходит к явным оценкам метода усреднения, для получения которых используется техника дифференциальных неравенств [2]. Таким образом, первое приближение метода усреднения позволяет найти некоторые начальные условия и приблизительное время blow-up системы (1).

Однако, как показывают простейшие примеры, не все blow-up системы (1) можно найти с помощью усреднённой системы (2). Поэтому мы обращаемся к высшим приближениям метода усреднения и с их помощью находим новые начальные условия blow-up системы (1) и уточняем время  $T$ . Сформулированы и доказаны соответствующие утверждения. Для иллюстрации предложенного метода, мы строим область начальных условий blow-up одной системы дифференциальных уравнений с двумя фазовыми переменными и периодически зависящими от времени правыми частями.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. Sanders J.A., Verhulst F., Murdock J. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 2007.



# Представление решения и его производной для линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа

А. С. Баландин

*Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет  
e-mail: balandin-anton@yandex.ru*

Рассмотрим дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$(I - S)\dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

в следующих предположениях и обозначениях:

$$S = \sum_{j=1}^J a_j S_{h_j}, \quad (S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geq 0, \\ 0, & t-h < 0, \end{cases}$$

$$(Ty)(t) = \int_0^\omega (S_\xi y)(t) dr(\xi),$$

$J \in \mathbb{N}$ ,  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $h_j, \omega \in \mathbb{R}_+$ , функция  $r: [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$  имеет ограниченную вариацию,  $r(0) = 0$ , интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса, функция  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  суммируема на каждом конечном отрезке.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию  $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую (1) почти всюду на  $\mathbb{R}_+$ .

Введём функции  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Функция  $X$  определяется как решение однородного уравнения вида (1)

$$(I - S)\dot{x}(t) = (Tx)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

дополненного начальным условием  $x(0) = 1$ . Функция  $Y$  — решение уравнения

$$y(t) = 1 + (Sy)(t) - (Ry)(t),$$

где  $(Ry)(t) = \int_0^t y(t-s)r(s) ds$ . Функция  $Z$  однозначно определяется на  $\mathbb{R}_+$  через  $\dot{X}$  по правилу:

$$(I - S)Z(t) = \dot{X}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Используя [1, 2], устанавливаем следующие два утверждения.

**Теорема 1.** Уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s)f(s) ds. \quad (2)$$

**Теорема 2.** Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} X(t) &= (I - S)Y(t), \\ X(t) &= 1 - (RY)(t). \end{aligned}$$

Как во всяком дифференциальном уравнении, информацию о производной следует учитывать и правильно её использовать. Для уравнений запаздывающего типа (таким будет уравнение (1) при всех  $a_j = 0$ ) асимптотические свойства производной легко выводятся из свойств самого решения. Но, если хотя бы какое-то  $a_j \neq 0$ , то уравнение (1) уже не является разрешённым относительно производной, и для него вопрос об асимптотических свойствах производной, оставаясь содержательным, перестаёт быть тривиальным. Поэтому было бы полезно располагать для  $\dot{x}$  формулой, аналогичной формуле (2).

Заметим, что прямое дифференцирование равенства (2) невозможно, так как функция  $Y$  разрывна и, следовательно, не имеет производной в классическом смысле. Тем не менее, удаётся получить формулу для представления производной любого решения уравнения (1), аналогичную формуле (2).

**Теорема 3.** Пусть  $x$  — решение уравнения (1). Тогда при любом  $t \in \mathbb{R}_+$  справедливо представление

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t)x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (S^k f)(t) + \int_0^t Z(t-s)f(s) ds.$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-01-00928.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Баландин А.С.* О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. № 1. С. 13–25.

## Пропорциональная локальная управляемость спектра показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем

И. Н. Банщикова

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A_0(k)x(k) + B_0(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Будем предполагать, что функция  $B_0(\cdot)$  ограничена на  $\mathbb{N}$ , а  $A_0(\cdot)$  *вполне ограничена* [1], то есть при каждом  $k$  существует  $A_0^{-1}(k)$ , и найдется такое  $a_0$ , что  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_0(k)\| \leq a_0$ ,  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_0^{-1}(k)\| \leq a_0$ .

Систему (1) отождествим с функцией  $k \mapsto \sigma_0(k) \doteq (A_0(k), B_0(k)) \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ . Обозначим  $\sigma_s(k) \doteq \sigma_0(k+s)$  — сдвиг  $\sigma_0$  на  $s \in \mathbb{N}$  и рассмотрим множество  $\mathfrak{R}(\sigma_0)$  — замыкание множества  $\{\sigma_s(\cdot) : s \in \mathbb{N}\}$  в топологии, порожденной поточечной сходимостью. Метрика в  $\mathfrak{R}(\sigma_0)$  может быть задана равенством  $\rho(\sigma, \hat{\sigma}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \min\{\|\sigma(k) - \hat{\sigma}(k)\|, k^{-1}\}$ . Пространство  $(\mathfrak{R}(\sigma_0), \rho)$  компактно. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы  $\sigma_0$ .

Каждый элемент  $\sigma(\cdot) \doteq (A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$  отождествим с линейной управляемой системой

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Замкнем систему (2) линейной обратной связью  $u(k) = U(k)x(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , получим систему

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Замкнутую систему (3) также отождествим с  $\sigma(\cdot) = (A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ .

**Определение.** Полный спектр показателей Ляпунова системы (3) называется *пропорционально локально управляемым*, если существуют такие  $\delta > 0$  и  $\ell > 0$ , что для любого набора чисел  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ , такого, что  $\max_{j=1, \dots, n} |\mu_j - \lambda_j(A)| \leq \delta$ , найдется допустимое для (3) управление  $U(\cdot)$ , удовлетворяющее оценке  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U(k)\| \leq \ell \max_{j=1, \dots, n} |\mu_j - \lambda_j(A)|$  и обеспечивающее выполнение равенств  $\lambda_j(A + BU) = \mu_j$  при всех  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Здесь

$\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$  — полный спектр показателей Ляпунова свободной системы, то есть системы

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Получены достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова [2].

**Теорема 1.** Пусть система (2) равномерно вполне управляема, а полный спектр показателей Ляпунова системы (4) устойчив. Тогда полный спектр показателей Ляпунова системы (3) пропорционально локально управляем.

Получены необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова всех систем, входящих в оболочку Бebutова заданной линейной управляемой системы [3].

**Теорема 2.** Пусть система

$$x(k+1) = A_0(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

интегрально разделена. Система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой системы  $\sigma \in \mathfrak{X}(\sigma_0)$  соответствующая замкнутая система (3) обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект 0827-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00293.

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Babiarz A., Bانشchikova I.N., Czornik A., Makarov E.K., Niezabitowski N., Popova S.N. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2019. Vol. 57. No. 2. Pp. 1355–1377.
3. Банщикова И.Н., Попова С.Н. Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 122–132.

# Потеря устойчивости в линейной системе с экспоненциально убывающим параметрическим возмущением

**Е. А. Барабанов, М. В. Карпук**

*Минск, Институт математики НАН Беларуси*  
e-mail: bar@im.bas-net.by, m.vasilitch@gmail.com

**В. В. Быков**

*Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова*  
e-mail: vvbykov@gmail.com

Пусть  $M$  — метрическое пространство. Для каждого  $\mu \in M$  обозначим через  $S(\mu; A)$  линейное пространство решений системы

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами.

Зафиксировав  $\alpha \in \mathbb{R}$ , положим

$$L_\alpha(\mu; A) = \{x \in S(\mu; A) : \lambda[x] < \alpha\} \text{ и } N_\alpha(\mu; A) = \{x \in S(\mu; A) : \lambda[x] \leq \alpha\},$$

где  $\lambda[x]$  — характеристический показатель функции  $x$  (для нулевого решения считаем его равным  $-\infty$ ). Как известно, для каждого  $\alpha \in \mathbb{R}$  множества  $L_\alpha(\mu; A)$  и  $N_\alpha(\mu; A)$  являются линейными подпространствами пространства  $S(\mu; A)$ . Обозначим их размерности через  $d_\alpha(\mu; A)$  и  $D_\alpha(\mu; A)$  соответственно. Величина  $d_0(\mu; A)$  называется *индексом экспоненциальной устойчивости*.

Обозначим через  $\mathcal{E}^n(M)$  класс семейств (1) с матрицами коэффициентов вида  $A(t, \mu) = B(t) + Q(t, \mu)$ , где  $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  непрерывно и ограничено, а  $Q : \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  — непрерывно и экспоненциально убывает при  $t \rightarrow +\infty$  равномерно по  $\mu \in M : \|Q(t, \mu)\| \leq C_Q \exp(-\alpha_Q t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mu \in M$ , где  $C_Q$  и  $\alpha_Q$  — положительные постоянные.

Пример Перрона [1, с. 23] показывает, что существует семейство  $A \in \mathcal{E}^2(M)$ , для которого функции  $d_0(\mu; A)$  и  $D_0(\mu; A)$  равны двум при  $\mu = 0$  и равны единице при любом  $\mu \neq 0$ , т.е. имеет место частичная потеря экспоненциальной устойчивости при экспоненциально убывающем возмущении коэффициентов.

Ниже получено обобщение этого результата, а именно, для каждого  $\alpha \in \mathbb{R}$ , натурального  $n \geq 2$  и метрического пространства  $M$  приведено

полное описание классов функций

$$d_\alpha^n(M) = \{d_\alpha(\cdot; A) : A \in \mathcal{E}^n(M)\}, \quad D_\alpha^n(M) = \{D_\alpha(\cdot; A) : A \in \mathcal{E}^n(M)\}. \quad (2)$$

Следуя [2, с. 221], для каждого числа  $r \in \mathbb{R}$  и функции  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  условимся обозначать через  $[f \geq r]$  (называемое лебеговским) множество  $\{\mu \in M : f(\mu) \geq r\}$ . Кроме того, через  $\mathcal{Z}_n$  будем обозначать множество  $\{0, 1, \dots, n\}$ .

**Теорема 1.** *Для каждого метрического пространства  $M$  и чисел натурального  $n \geq 2$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$  функция  $f : M \rightarrow \mathcal{Z}_n$  принадлежит классу  $d_\alpha^n(M)$  (классу  $D_\alpha^n(M)$ ), если и только если для любого  $r \in \mathbb{R}$  множество  $[f \geq r]$  является  $F_\sigma$ -множеством ( $F_{\sigma\delta}$ -множеством).*

**Пример.** Пусть  $F_1, \dots, F_n$  — попарно непересекающиеся счётные подмножества пространства  $M$ . Тогда функция  $f : M \rightarrow \mathcal{Z}_n$ , равная  $k$  на множестве  $F_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  и равная нулю при остальных  $\mu \in M$ , принадлежит классу  $d_\alpha^n(M)$ . В частности, для  $M = [0, 1]$  в качестве  $f$  годится функция Дирихле.

Как видно из теоремы 1, описание каждого из классов (2) не зависит от числа  $\alpha$ . Очевидно, описание следующих классов вектор-функций, напротив, должно зависеть от чисел  $\alpha$  и  $\beta$ . Зафиксировав  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , положим

$$V_{\alpha, \beta}^n(M) = \{(d_\alpha(\cdot; A), D_\beta(\cdot; A)) : A \in \mathcal{E}^n(M)\}.$$

**Теорема 2.** *Для каждого метрического пространства  $M$  и чисел натурального  $n \geq 2$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  вектор-функция  $(g, h) : M \rightarrow \mathcal{Z}_n \times \mathcal{Z}_n$  тогда и только тогда принадлежит классу  $V_{\alpha, \beta}^n(M)$ , когда для любого  $r \in \mathbb{R}$  множества  $[g \geq r]$  и  $[h \geq r]$  являются  $F_\sigma$ - и  $F_{\sigma\delta}$ -множествами соответственно и выполняется неравенство  $h(\mu) \geq g(\mu)$ ,  $\mu \in M$ , если  $\beta \geq \alpha$ , и неравенство  $h(\mu) \leq g(\mu)$ ,  $\mu \in M$ , если  $\beta < \alpha$ .*

**Замечание.** Полные описания аналогичных классов функций, отвечающих семействам (1), непрерывным в смысле равномерной топологии, получены в работе [3] и совпадают с приведёнными выше.

1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.
2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.—Л.: ОНТИ, 1937.
3. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318.

## Обобщенный вариант уравнения Эйлера

В. Н. Баранов, В. И. Родионов

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: v.n.baranov@gmail.com, rodionov@uni.udm.ru

Полное метрическое пространство  $\langle \overline{\mathbb{R}}, \varrho \rangle$  состоит из расширенной числовой оси  $\overline{\mathbb{R}}$  и метрики  $\varrho(\xi, \eta) \doteq |f(\xi) - f(\eta)|$ ,  $\xi, \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ , где

$$f(z) \doteq \frac{z}{1+|z|} \quad \text{при } z \in \mathbb{R}, \quad f(-\infty) \doteq -1, \quad f(\infty) \doteq 1.$$

Если  $I$  — это отрезок, интервал или полуинтервал, то через  $I_*^2$  обозначаем множество  $\{(\tau, s) \in I^2 : \tau \neq s\}$  («квадрат без диагонали»).

**I. Пространство прерывистых функций.** Зафиксируем отрезок  $[a, b]$ . Через  $\overline{G}^\infty[a, b]$  обозначим пространство, состоящее из всех тех функций  $x : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , у которых существуют пределы  $x(t-0)$ ,  $x(t+0) \in \overline{\mathbb{R}}$ :

$$\forall t \in (a, b) \quad \lim_{\tau \rightarrow t-0} \varrho(x(\tau), x(t-0)) = 0,$$

$$\forall t \in [a, b) \quad \lim_{\tau \rightarrow t+0} \varrho(x(\tau), x(t+0)) = 0.$$

Пространство  $\overline{G}^\infty[a, b]$  прерывистых функций — метрическое в метрике

$$d_G(x, y) \doteq \sup_{t \in [a, b]} \varrho(x(t), y(t)),$$

оно полное и является замыканием пространства ступенчатых функций.

**II. Регулярно непрерывные и регулярно гладкие функции.** Всякая функция  $x : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  порождает функцию двух переменных

$$\Phi_x(\tau, s) \doteq \frac{x(s) - x(\tau)}{s - \tau}, \quad (\tau, s) \in [a, b]_*^2.$$

Функция  $x : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  называется *RL-функцией*, если существуют числа  $A_x(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $t \in (a, b)$ , и  $B_x(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $t \in [a, b)$ , такие, что

$$\forall t \in (a, b) \quad \lim_{(a, t]_*^2 \ni (\tau, s) \rightarrow (t, t)} \varrho(\Phi_x(\tau, s), A_x(t)) = 0,$$

$$\forall t \in [a, b) \quad \lim_{[t, b)_*^2 \ni (\tau, s) \rightarrow (t, t)} \varrho(\Phi_x(\tau, s), B_x(t)) = 0.$$

1°. Любая кусочно-гладкая функция  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  является RL-функцией, то есть  $\text{KC}^1[a, b] \subset \text{RL}[a, b]$ , в частности,  $\text{C}^1[a, b] \subset \text{RL}[a, b]$ .

2°. Всякая функция  $x \in \text{RL}[a, b]$  имеет ограниченное изменение.

3°. Если  $x \in \text{RL}[a, b]$ , то для почти всех  $t \in [a, b]$  существует конечная производная  $\dot{x}(t)$ . Если  $\dot{x}(t)$  конечно для некоторого  $t \in (a, b)$ , то справедливы равенства  $A_x(t) = B_x(t) = \dot{x}(t) \in \mathbb{R}$ . Если  $\dot{x}(a)$  конечно, то  $B_x(a) = \dot{x}(a) \in \mathbb{R}$ . Если  $\dot{x}(b)$  конечно, то  $A_x(b) = \dot{x}(b) \in \mathbb{R}$ .

4°. Если  $x \in \text{RL}[a, b]$ , то функция  $A_x : (a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  непрерывна слева, а функция  $B_x : [a, b) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  непрерывна справа.

5°. Пусть  $x \in \text{RL}[a, b]$ . Функция  $A_x$  непрерывна в точке  $t \in (a, b)$  тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна функция  $B_x$ . При этом имеет место равенство  $A_x(t) = B_x(t)$ .

Пространство всех абсолютно непрерывных функций  $x \in \text{RL}[a, b]$  обозначим через  $\text{RC} \doteq \text{RC}[a, b]$ , а его линейное подпространство, состоящее из функций, у которых все предельные числа  $A_x(t)$  и  $B_x(t)$  конечны, обозначим через  $\text{RS} \doteq \text{RS}[a, b]$ . Функции  $x \in \text{RC}[a, b]$  называются *регулярно непрерывными*, а функции  $x \in \text{RS}[a, b]$  — *регулярно гладкими*.

Пространство  $\text{RS}[a, b]$  банахово по норме

$$\|x\|_{\text{Lip}} \doteq |x(a)| + \sup_{(\tau, s) \in [a, b]_*^2} |\Phi_x(\tau, s)|$$

(оно является замыканием пространства ломаных по норме  $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ ), а  $\text{RC}[a, b]$  — полное пространство в метрике

$$d(x, y) \doteq |x(a) - y(a)| + \sup_{(\tau, s) \in [a, b]_*^2} \varrho(\Phi_x(\tau, s), \Phi_y(\tau, s)).$$

**III. Простейшая вариационная задача в пространстве RS. Формула Эйлера.** Пусть непрерывная по совокупности переменных функция  $L \doteq L(t, x, y)$  определена на множестве  $\Omega \doteq [a, b] \times \mathbb{R}^2$  и имеет на этом множестве непрерывные по совокупности переменных частные производные  $L_x(t, x, y)$  и  $L_y(t, x, y)$ . Зафиксируем числа  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , и пусть

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} \doteq \{x \in \text{RS}[a, b] : x(a) = \alpha, x(b) = \beta\}.$$

**Теорема.** Если функция  $x_0 \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$  является точкой локального экстремума (по норме  $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ ) задачи  $J(x(\cdot)) \doteq \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \inf$ ,  $x \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ , то для п.в.  $t \in [a, b]$  имеет место равенство

$$L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) - \int_a^t L_x(s, x_0(s), \dot{x}_0(s)) ds = \text{const}.$$



## Полиномиальный метод решения уравнений упругих волн в слоистых средах

Ю. Н. Беляев

*Сыктывкар, кафедра математического моделирования и кибернетики  
Сыктывкарского государственного университета  
e-mail: ybelyayev@mail.ru, ynbelyayev@gmail.com*

В результате воздействия упругой волны на слоистую структуру (плотность и упругие постоянные среды зависят только от одной координаты  $x_3$  вдоль нормали к поверхности слоёв) в каждом из слоёв возникает от двух до шести упругих волн. Напряжённо-деформированное состояние анизотропной слоистой среды описывается системой уравнений движения и обобщённым законом Гука, которая редуцируется в матричное дифференциальное уравнение  $d\Psi/dx_3 = \mathbf{W}\Psi$ , где вектор-столбец  $\Psi$  составляют компоненты вектора смещений  $u_1, u_2, u_3$  и тензора напряжений  $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$  в декартовой системе координат. Элементы матрицы  $\mathbf{W}$  зависят от толщины  $d$ , плотности, компонент тензора упругой податливости слоя, частоты и углов падения упругой волны. Решение задачи Коши для структуры из  $N$  однородных слоёв имеет вид  $\Psi(d) = \prod_{i=N}^1 \exp \mathbf{A}_i \Psi(0)$ , где  $\mathbf{A}_i = \mathbf{W}_i d_i$ .

Развивается метод вычислений экспоненты матрицы, основанный на определении  $\exp \mathbf{A} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j / (j!)$  и представлении  $\mathbf{A}^j$  с помощью коэффициентов  $p_1, \dots, p_n$  характеристического уравнения матрицы  $\mathbf{A}$  [1]:

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{h=0}^{n-1} \mathbf{A}^h \sum_{g=0}^h p_{n-h+g} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}_{j-1-g}(n), \quad (1)$$

где многочлены  $\mathcal{B}_g(n)$  определяются рекуррентными формулами

$$\mathcal{B}_0(n) = \dots = \mathcal{B}_{n-2}(n) = 0, \quad \mathcal{B}_{n-1}(n) = 1, \quad \mathcal{B}_j(n) = \sum_{l=1}^n p_l \mathcal{B}_{j-l}(n), \quad j \geq n. \quad (2)$$

Выражение  $\exp \mathbf{A}$  с помощью формул (1) и (2), в отличие от представлений Лагранжа–Сильвестра, Бэкера–Вандермонда и Ньютона [2], не зависит от вида матрицы  $\mathbf{A}$ , позволяет вычислять матричную экспоненту без нахождения собственных значений  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{A}$ , а также даёт большие возможности для аналитических представлений  $\exp \mathbf{A}$ . Последние основаны на использовании следующих двух теорем.

**Теорема 1.** Если только два коэффициента  $p_h$  и  $p_{2h}$  ( $2h \leq n$ ) характеристического уравнения матрицы  $\mathbf{A}$  отличны от нуля, то многочлены  $\mathcal{B}_g(n)$  выражаются формулами:

$$\mathcal{B}_g(n) = \begin{cases} (-p_{2h})^{\frac{j-1}{2}} U_{j-1}(b), & g = h(j-1) + n - 1, \\ 0, & g \neq h(j-1) + n - 1, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $U_j(b) = \sin[(j+1) \arccos b] / \sqrt{1-b^2}$  и  $b = p_h / (2\sqrt{-p_{2h}})$ .

**Теорема 2.** Многочлены  $\mathcal{B}_g(n)$  выражаются через собственные значения  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  матрицы  $\mathbf{A}$  формулами:

$$\mathcal{B}_g(n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^g \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^g \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Даны примеры использования формул (3) и (4) при интегрировании волновых уравнений 2, 4 и 6-го порядков.

В общем случае для матриц, порядок которых  $n > 4$ , для нахождения  $\exp \mathbf{A}$  необходимо использовать численные методы расчётов, например, с помощью процедуры масштабирования и кратного квадрирования. Последний подход, с использованием разложения (1) применительно к матрице шестого порядка даёт следующую расчётную формулу:

$$\exp \mathbf{A} = \left[ \exp \frac{\mathbf{A}}{m} \right]^m \approx \left[ \sum_{h=0}^5 \left( \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^h \sum_{g=0}^h p_{6-h+g} \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{\mathcal{B}_{j-1-g}(6)}{j!} \right]^m. \quad (5)$$

Здесь равенство становится приближённым в результате усечения ряда по  $j$  до суммы конечного числа  $N_1$  слагаемых. Совместное вычисление степеней матрицы  $\mathbf{A}/m$  и коэффициентов  $p_j$  выполняется по методу Лаверье. Применение (1) в процедуре масштабирования (5) позволяет, в сравнении с аппроксимацией Паде и простым усечением ряда (определяющего матричную экспоненту), более точно и надёжно вычислять элементы матрицы  $\exp \mathbf{A}$ . Необходимая точность расчётов достигается выбором величины параметра масштабирования  $m = 2^j$  и числа слагаемых  $N_1$ . Это показано на примерах расчётов акустических напряжений, возникающих при шестилучевом рассеянии различных упругих волн в анизотропном слое.

1. *Беляев Ю.Н.* К вычислению функций матриц // Математические заметки. 2013. Т. 94. № 2. С. 177–184.
2. *Moler C., Van Loan C.* Nineteen dubious ways to compute the exponential of matrix, Twenty-five years later // SIAM Review. 2003. Vol. 45. No. 1. Pp. 3–49.

## Теорема типа Чаплыгина о неявном интегральном неравенстве в пространстве суммируемых функций

**С. Бенараб**

*Тамбов, Тамбовский гос. университет им. Г.Р. Державина*  
e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

В докладе рассматривается понятие накрывания для отображений, действующих в пространствах с бинарными отношениями, в частности, в частично упорядоченных пространствах, формулируются утверждения о разрешимости уравнений с такими отображениями. Эти результаты применяются к исследованию интегральных уравнений.

Обозначим через  $\mathbb{S}$  пространство измеримых (по Лебегу) на  $[0, 1]$  функций, с «естественным» порядком, т.е. для любых  $x, u \in \mathbb{S}$  полагаем, что выполнено неравенство  $x \geq u$ , если  $x(t) \geq u(t)$  при п.в.  $t \in [0, 1]$ .

Пусть заданы функции  $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , относительно которых будем предполагать, что при п.в.  $t \in [0, 1]$ , любых  $x, u \in \mathbb{R}$  выполнены следующие условия:

- 1) функция  $f(\cdot, x, u): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  измерима, функция  $f(t, \cdot, u): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не возрастает и непрерывна справа, функция  $f(t, x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна;
- 2) функция  $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  измерима и неотрицательна.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$f(t, \int_0^1 k(t, s)x(s)ds, x(t)) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Решением уравнения (1) будем называть функцию  $x \in \mathbb{S}$ , удовлетворяющую рассматриваемому уравнению при п.в.  $t \in [0, 1]$ .

**Теорема.** Пусть для некоторых функций  $z, \eta \in \mathbb{S}$  таких, что  $z \geq \eta$ , при п.в.  $t \in [0, 1]$  существуют конечные интегралы

$$\int_0^1 k(t, s)z(s)ds < \infty, \quad \int_0^1 k(t, s)\eta(s)ds < \infty$$

и выполнены неравенства

$$f(t, \int_0^1 k(t, s)z(s)ds, z(t)) \geq 0, \quad f(t, \int_0^1 k(t, s)\eta(s)ds, \eta(t)) \leq 0.$$

Тогда существует решение  $x \in \mathbb{S}$  уравнения (1), удовлетворяющее неравенствам  $\eta \leq x \leq z$ .

Сформулированное утверждение является аналогом известной теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве [1]. Его доказательство основано на результатах [2] об упорядоченно накрывающих отображениях и результатах [3, 4] об уравнениях в пространствах с бинарным отношением.

1. Чаплыгин С.А. Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919. (Собрание сочинений. Т. I. М: Гостехиздат, 1948. С. 348–368).
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. Vol. 179. Iss. 1. Pp. 13–33.
3. Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерцела В. Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63.
4. Бенараб С., Жуковский Е.С. О накрывающих отображениях со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 122. С. 210–215.

## О семействах гибридных функционально-дифференциальных уравнений

**Е. И. Бравый**

*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

e-mail: bravyi@perm.ru

Функционально-дифференциальные системы, сочетающие непрерывное и дискретное время, принято называть гибридными (или непрерывно-

дискретными) дифференциальными системами. Несмотря на значительное число работ, посвящённых таким объектам, они продолжают привлекать внимание исследователей [1–4]. К гибридным системам относятся также уравнения на временных шкалах [5, 6].

В работах [7–9] предложен метод изучения функционально-дифференциальных уравнений, позволяющий получать неуплучшаемые (в заданном семействе уравнений) условия разрешимости краевых задач, условия сохранения знака решений, неуплучшаемые в заданном семействе оценки решений. Этот метод реализован в рамках школы профессора Н.В. Азбелева по функционально-дифференциальным уравнениям [10] и основывается на изучении *семейств* функционально-дифференциальных уравнений. Выбор достаточно узкого исходного семейства позволяет достигать хороших с практической точки зрения условий и оценок.

Здесь мы переносим на гибридные системы подход работы [7]. Описаны используемые семейства гибридных дифференциальных систем с различными видами ограничений на коэффициенты (интегральными и поточечными). Получены достаточные условия однозначной разрешимости краевых задач для систем гибридных функционально-дифференциальных уравнений, в том числе уравнений высших порядков. Кроме того, получены точные достаточные условия положительности решений краевых задач для гибридных систем.

Эти достаточные условия оказываются и необходимыми для семейств гибридных систем: если условия не выполнены, то в заданном семействе найдется система, для которой краевая задача не является однозначно разрешимой (или решение не является положительным). Полученные условия, по-видимому, не могут быть получены прямым использованием принципа сжимающих отображений. Нахождение наилучших констант в условиях разрешимости сводится к минимизации функции, заданном на конечномерном множестве.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FSNM-2020-0028) и при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00332).

1. *Shvartsman S.Y., Kevrekidis I.G.* Low-dimensional approximation and control of periodic solutions in spatially extended systems // *Physical Review E*. 1998. V. 58, 1. P. 361–368.
2. *Prepelita V.* Generalized 2D continuous-discrete systems with boundary conditions // *Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on System Science And Simulation In Engineering*. 2009. P. 67–72.

3. *Chadov A., Maksimov V.* Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // *Functional Differential Equations*. 2012. V. 19, 1-2. P. 49–62.
4. *Passenberg, B., Caines, P. E., Leibold, M., Stursberg, O., Buss, M.* Optimal control for hybrid systems with partitioned state space // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 58(8) (2013) 2131–2136.
5. *Murty K.N., Rao Y.S.* Two-point boundary value problems in homogeneous time-scale linear dynamic process // *J. Math. Anal. Appl.* 1994. V. 184, 1. P. 22–34.
6. *Bohner M., Peterson A.* *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications.* Springer Science & Business Media. 2001.
7. *Бравый Е.И.* Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.
8. *Бравый Е.И.* О положительных периодических решениях функционально-дифференциальных уравнений первого порядка // *Известия Института математики и информатики УдГУ*. 2015. № 2 (46). С. 21–28.
9. *Бравый Е.И.* О разрешимости периодической задачи для линейных функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 51, № 4. С. 563–577.
10. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Разматуллина Л.Ф.* *Методы современной теории линейных функционально-дифференциальных уравнений.* Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

## **Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов**

**И. М. Буркин, О. И. Кузнецова**

*Тула, Тульский государственный университет*

e-mail: i-burkin@yandex.ru, oхху4893@mail.ru

Проблемы конструирования мегастабильных систем, то есть систем, обладающих при постоянных значениях входящих в них параметров счетным числом сосуществующих аттракторов, в последние годы привлекают внимание многих исследователей [1, 2]. Такой интерес обусловлен широким спектром потенциальных приложений систем, содержащих хаотиче-

ские аттракторы. В настоящее время хаотические сигналы и системы широко используются, например, в шифровании изображений, безопасной связи, при обнаружении слабого сигнала, в системах радиолокации. Чем сложнее структура хаотической системы, тем больше возможностей она предоставляет для потенциального прикладного использования.

Известно множество примеров систем в форме Лурье, обладающих как самовозбуждающимися, так и скрытыми хаотическими аттракторами. Речь идет о системах

$$\dot{X} = AX + bf(\sigma), \quad \sigma = c^T X, \quad (1)$$

где  $A$  — постоянная  $n \times n$ -матрица,  $b$  и  $c$  — постоянные  $n$ -векторы,  $f(\sigma)$  — непрерывная и кусочно-дифференцируемая скалярная функция. В работах [3, 4] предложены методы конструирования мегастабильных систем с 1-D и  $(n - 1)$ -D решетками хаотических аттракторов с использованием систем вида (1).

В докладе предлагается метод конструирования мегастабильных систем  $n$ -го порядка, обладающих  $n$ -D решеткой идентичных хаотических аттракторов-клонов. Пример применения предлагаемого метода приведен ниже.

**Пример.** Рассмотрим классическую систему Чуа, то есть систему (1), в которой

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$f(\sigma) = m_1\sigma + 0.5(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|).$$

Хорошо известно, что при значениях параметров  $m_1 = -1.1468$ ,  $m_0 = -0.0768$ ,  $\alpha = 8.4562$ ,  $\beta = 12.0732$ ,  $\gamma = 0.0052$  рассматриваемая система имеет скрытый хаотический аттрактор. Положим  $k = -\beta(\gamma + \beta)^{-1}$ ,  $\varphi(\sigma) = f(\sigma) - k\sigma$ . Функция  $\varphi(\sigma)$  имеет три нуля:  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = \pm(\gamma + \beta)\rho$ , где  $\rho = (m_0 - m_1)[\beta + m_1(\gamma + \beta)]^{-1}$ . Заменим функцию  $\varphi(\sigma)$  на периодическую функцию  $\psi(\sigma)$  периода  $\Delta = -2(\gamma + \beta)\rho$ , совпадающую с функцией  $\varphi(\sigma)$  на  $[(\gamma + \beta)\rho, -(\gamma + \beta)\rho]$ . После этого заменим в исходной системе  $f(\sigma)$  на  $\psi(\sigma)$ , а матрицу  $A$  на матрицу  $A_1 = A + kbc^T$ . Полученная таким образом система

$$\dot{X} = A_1X + b\psi(c^T X) \quad (2)$$

будет обладать 1-D решеткой скрытых хаотических аттракторов.

Неособым линейным преобразованием  $X = MY$  систему (2) приведем к виду

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -a_0x - a_1y - a_2z - \psi(\sigma), \quad \sigma = -c_0x - c_1y - c_2z, \quad (3)$$

где  $a_0 = \alpha[\beta(m_1 + 1) + \gamma m_1]$ ,  $a_1 = \gamma + \beta + \alpha\gamma(m_1 + 1) + \alpha m_1$ ,  $a_2 = \gamma + \alpha(m_1 + 1) + 1$ ,  $c_0 = \alpha(\beta + \gamma)$ ,  $c_1 = \alpha(1 + \gamma)$ ,  $c_2 = \alpha$ . Наконец, заменим в системе (3) переменные  $y$  и  $z$  на периодические функции:  $y \mapsto 0.49 \sin 2y$ ,  $z \mapsto 0.51 \sin 2z$ . Сконструированная таким образом система будет содержать 3-D решетку самовозбуждающихся хаотических аттракторов.

1. *Li C., Thio W. J.-C., Sprott J. C., Iu H. H.C., Xu Y.* Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit // IEEE Access. 2018. Vol. 6. Pp. 29003–29012.
2. *Zhang X., Chen G.* Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors // Chaos. 2017. Vol. 27. No. 7. Art. no. 071101.
3. *Burkin I.M., Kuznetsova O.I.* On some methods for generating extremely multistable systems // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. 1368 042050.
4. *Буркин И.М., Кузнецова О.И.* Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье // Вестник СПбГУ. Математика, Механика, Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 555–564.

## О приближении систем с последствием системами обыкновенных дифференциальных уравнений

**Т. С. Быкова**

*Ижевск, ФГБОУ ВО ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*

e-mail: tsbykova@gmail.com

Рассмотрим линейную систему с последствием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x_t(s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \quad (1)$$

которую будем отождествлять с функцией  $A$ , ее задающей. Запись  $x_t$  означает функцию  $s \rightarrow x_t(s) \doteq x(t + s)$  переменного  $s \in [-r, 0]$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ , функция  $A: \mathbb{R} \times [-r, 0] \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$  удовлетворяет естественным условиям (см., например, [1, 2]).



В качестве пространства начальных функций рассматривается пространство  $\mathfrak{S}$  всех непрерывных функций  $u: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с  $L_2$ -нормой  $\|u(\cdot)\|_2 = (\int_{-r}^0 |u(s)|^2 ds)^{1/2}$ . Всякое решение  $t \rightarrow x(t, u)$  системы (1), соответствующее начальному условию  $x(t) = u(t)$ ,  $t \in [-r, 0]$ , порождает *движение*  $t \rightarrow x_t(\cdot, u) \doteq x_t(u)$  в пространстве  $\mathfrak{S}$ ,  $t \geq 0$ . Для  $x_t(u)$  определим  $L_2$ -показатель Ляпунова  $\varkappa(u) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|x_t(u)\|_2$ ,  $\varkappa(0) \doteq -\infty$ .

Пусть  $\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) = -\infty\}$ ,  $\mathfrak{S}^+$  — прямое дополнение подпространства  $\mathfrak{S}^-$  до пространства  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathbb{S}_0^p$  — линейное подпространство в  $\mathfrak{S}^+$  размерности  $p$ ,  $t \rightarrow x_t(\mathbb{S}_0^p) \doteq \mathbb{S}_t^p$  — движение пространства  $\mathbb{S}_0^p$ . Сужение системы  $A$  на подпространство  $(\mathbb{S}_0^p)$  обозначим  $(A, \mathbb{S}_0^p)$ .

Наряду с системой  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  рассмотрим систему

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad (2)$$

с непрерывной на полуоси  $\mathbb{R}_+$  функцией  $t \rightarrow B(t)$ . Систему (2) будем отождествлять с ее матрицей и называть системой  $B$ . Обозначим  $\mathbb{R}_t^p$  линейное пространство размерности  $p$  с базисом  $y^1(t), \dots, y^p(t)$ , образующем столбцы матрицы Коши  $Y(t, 0)$  системы  $B$ .

Пусть  $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$  — пространство линейных операторов, действующих из  $\mathbb{S}_t^p$  в  $\mathbb{R}_t^p$  с нормой  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}^p}$ .

**Определение.** Функцию  $t \rightarrow L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$  будем называть *обобщенным ляпуновским преобразованием* систем  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  и  $B$ , если: 1) функция  $t \rightarrow L(t)$  непрерывна на  $\mathbb{R}_+$ ; 2) при  $t \geq 0$  оператор  $L(t)$  является гомеоморфизмом пространств  $\mathbb{S}_t^p$  и  $\mathbb{R}_t^p$  и 3) выполнено неравенство  $\sup_{t \geq 0} (\|L(t)\|_{\mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{L}_2}) < \infty$ .

Будем говорить также, что система  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  *приводима* обобщенным ляпуновским преобразованием  $L$  к системе  $B$ , или что системы  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  и  $B$  *асимптотически подобны*.

**Теорема [3, 4].** Пусть  $\mathbb{S}_0^p \subset \mathfrak{S}^+$ . Тогда:

а) найдется ортогональное  $(L^*(t)L(t) = I_p)$  обобщенное ляпуновское преобразование, приводящее систему  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  к системе  $B$  с непрерывной на  $\mathbb{R}_+$ , верхней треугольной матрицей  $B(t)$ ;

б) если, кроме того, всякое решение системы  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  «продолжаемо влево», то есть найдется константа  $\alpha > 0$  такая, что для каждого  $u \in \mathbb{S}_0^p$ , любого  $\tau \in [-r, 0]$  и всех  $t \in \mathbb{R}_+$  выполнено неравенство  $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\|_2 \leq \alpha \|x_t(\cdot, u)\|_2$ , то в множестве  $\{B\}$  всех систем, асимптотически подобных системе  $(A, \mathbb{S}_0^p)$ , найдется система  $B$  с ограниченной на полуоси  $\mathbb{R}_+$  верхней треугольной матрицей  $B(t)$ .

Пусть  $\mathfrak{S}_\mu^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) < \mu\}$  и  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\mu^+ \oplus \mathfrak{S}_\mu^-$ .

**Следствие.** Если  $\dim \mathfrak{S}_\mu^+ = p$  и  $L$  — ляпуновское преобразование, приводящее систему  $(A, \mathfrak{S}_\mu^+)$  к системе  $B$ , то всякое движение  $x_t$ , порожденное решением системы  $A$ , представимо в виде суммы

$$x_t = L^{-1}(t)y(t) + z_t = U_t Y(0, t)y(0) + z_t,$$

где  $U_t \doteq U_t(s) = (x_t^1(s) \dots x_t^p(s))$ ,  $x_t^i(s) = x_t(s, u^i)$ ,  $s \in [-r, 0]$ ,  $u^1, \dots, u^p$  — базис пространства  $\mathfrak{S}_\mu^+$ ,  $Y(t, \tau)$  — матрица Коши системы (2),  $y(t)$  — решение системы  $B$ ,  $z(t)$  — такая функция, что  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|z_t(\cdot)\|_2 < \mu$ .

Данная работа продолжает исследования [3, 4].

1. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. *Быкова Т.С., Тонков Е.Л.* Асимптотическая теория линейных систем с последствием // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2006. Вып. 2 (36). С. 21–26.
4. *Быкова Т.С.* Системы с последствием и с конечномерным пространством существенных решений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2012. Вып. 1 (39). С. 21–23.

## Об интегральном представлении решений эллиптических краевых задач

**В. Б. Васильев**

Белгород, НИУ «БелГУ»

e-mail: vbv57@inbox.ru

Мы изучаем разрешимость линейного однородного уравнения

$$(Au)(x) = 0. \quad x \in C_+^{ab}. \quad (1)$$

в пространстве Соболева–Слободецкого  $H^s(C_+^{ab})$ , где  $A$  — эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом  $A(\xi)$  порядка  $\alpha$  [1, 2],  $C_+^{ab}$  — конус в трехмерном пространстве вида  $C_+^{ab} = \{x \in \mathbb{R}^3: x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + b|x_2|, a, b > 0\}$ .

Введем следующие два одномерных сингулярных интегральных оператора [3, 4]

$$(S_1 u)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\tau, \xi_2, \xi_3) d\tau}{\xi_1 - \tau},$$

$$(S_2 u)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi_1, \eta, \xi_3) d\eta}{\xi_2 - \eta}.$$

Предполагая, что символ  $A(\xi)$  допускает волновую факторизацию  $A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$  относительно конуса  $C_+^{ab}$  с индексом  $\varkappa$ ,  $\varkappa - s = 1 + \delta$ ,  $|\delta| < 1/2$ , общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$A_{\neq}(\xi) \tilde{u}(\xi) = \tilde{C}_1(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + \tilde{C}_2(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \tilde{C}_3(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + \tilde{C}_4(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3), \quad (2)$$

где функции  $\tilde{C}_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  строятся по одной функции  $\tilde{c}_0$  с помощью операторов  $S_1, S_2$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\varkappa - s = 1 + \delta$ ,  $|\delta| < 1/2$ . Общее решение уравнения 1 в пространстве  $H^s(C_+^{ab})$  определяется формулой 2, где  $c_0(x_1, x_2)$  — произвольная функция из пространства  $H^{s-ae+1/2}(\mathbb{R}^2)$ .

Для однозначного определения произвольной функции  $c_0(x_1, x_2)$  мы задаем дополнительное интегральное условие в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) dx_3 \equiv g(x_1, x_2), \quad (3)$$

Учитывая (3) в (2), можно установить, что

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\neq}(\xi) \tilde{u}(\xi) &= \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_k(\xi_1, \xi_2) = \\ &= \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \\ &+ \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) - (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \\ &+ \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) - (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + (S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) = \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2),$$

откуда следует, что функция  $\tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2)$  определяется формулой

$$\tilde{c}_0(\xi') = \tilde{A}_{\neq}(\xi', 0)\tilde{g}(\xi'). \quad (4)$$

**Теорема 2.** Пусть  $\varkappa - s = 1 + \delta$ ,  $|\delta| < 1/2$ ,  $g \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$ . Единственное решение краевой задачи (1), (3) дается формулой (2), где  $c_0(x_1, x_2)$  определяется формулой (4).

1. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // *Opusc. Math.* 2019. Vol. 39. Pp. 109–124.
2. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2018. Vol. 41. Pp. 9252–9263.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
4. *Мухомлишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1969.

## О дискретных приближениях для решений эллиптических краевых задач

**В. Б. Васильев**

*Белгород, НИУ «БелГУ»*

e-mail: vbv57@inbox.ru

Мы рассматриваем дискретный вариант следующей краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} (Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^m, \\ (Bu)|_{\partial D} = g, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $A, B$  — простейшие псевдодифференциальные операторы [1] с символами  $\tilde{A}(\xi), \tilde{B}(\xi)$ , действующие в пространствах Соболева–Слободецкого  $H^s(\mathbb{R}_+^m)$ ,  $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$  — полупространство,  $g$  — заданная функция.

Мы приводим определение дискретных функциональных пространств, которые определим сначала на дискретном аналоге пространства Шварца  $S(h\mathbb{Z}^m)$ . Пусть  $h > 0$ ,  $\tilde{h} = h^{-1}$ ,  $\zeta^2 = h^{-2} \sum_{k=1}^m (e^{-ih \cdot \xi_k} - 1)^2$ ,  $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ .

**Определение 1.** Пространством  $H^s(h\mathbb{Z}^m)$  называется замыкание пространства  $S(h\mathbb{Z}^m)$  по норме

$$\|u_d\|_s = \left( \int_{h\mathbb{T}^m} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Если  $\tilde{A}_d(\xi)$  — периодическая функция на  $\mathbb{R}^m$  с основным кубом периодов  $h\mathbb{T}^m$ , то мы рассматриваем ее как символ некоторого оператора.

**Определение 2.** Дискретным псевдодифференциальным оператором  $A_d$  в дискретной области  $h\mathbb{Z}_+^m$  называется оператор вида [3, 4]

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}_+^m} \int_{h\mathbb{T}^m} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d,$$

Предполагается, что

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\beta/2} \leq |\tilde{B}_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\beta/2}$$

с универсальными постоянными  $c_1, c_2$ , и аналогичному условию удовлетворяет символ  $\tilde{A}_d(\xi)$  с показателем  $\alpha$ .

Далее мы вводим дискретную краевую задачу

$$\begin{cases} (A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, & \tilde{x} \in h\mathbb{Z}_+^m, \\ (B_d u_d)|_{\tilde{x}_m=0} = g_d(\tilde{x}'), & \tilde{x}' \in h\mathbb{Z}^{m-1}, \end{cases} \quad (2)$$

с тем, чтобы получить дискретные приближения к исходной краевой задаче (1).

Построение решений задач (1) и (2) дается с помощью метода факторизации символов  $\tilde{A}(\xi), \tilde{A}_d(\xi)$  [1, 2] и для определенных значений индекса факторизации  $\varkappa$  и выбора дискретизации правой части граничного условия приводит к следующей оценке для решений задач (1) и (2).

**Теорема.** Пусть  $g \in H^{s-\beta-1/2}(\mathbb{R}^{m-1})$ . Тогда для решений задач (1) и (2) справедлива оценка

$$|\tilde{u}_d(\xi) - \tilde{u}(\xi)| \leq ch^{\varkappa-1-\beta}.$$

1. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. Васильев А.В., Васильев В.Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 9. С. 1123–1135.

3. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // *Math. Model. Anal.* 2018. Vol. 23. No. 3. Pp. 492–506.
4. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* On some discrete boundary value problems in canonical domains. In: *Differential and Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. & Stat.*, Vol. 230. Cham: Springer, 2018. Pp. 569–579.

## О структуре спектра одной краевой задачи второго порядка

**М. Ю. Ватолкин**

*Ижевск, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова*

e-mail: vmyu6886@gmajll.com

Пусть  $I \subseteq \mathbb{R}$  — открытый интервал,  $\mathcal{P} = (p_{ik})_0^2$  — нижняя треугольная матрица,  $p_{ik}: I \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $p_{00}(\cdot)$  и  $p_{22}(\cdot)$  измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а  $\frac{1}{p_{11}(\cdot)}$ ,  $\frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}$ ,  $\frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$ ,  $\frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$  локально суммируемы в  $I$ . Определим квазипроизводные  ${}^0x$ ,  ${}^1x$ ,  ${}^2x$  функции  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$  равенствами:  ${}^0x \doteq p_{00}x$ ,  ${}^1x \doteq p_{11} \frac{d({}^0x)}{dt} + p_{10}({}^0x)$ ,  ${}^2x \doteq p_{22} \frac{d({}^1x)}{dt} + p_{21}({}^1x) + p_{20}({}^0x)$ .

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение [1]

$$({}^2x)(t) = 0, \quad t \in I \tag{1}$$

(в работе [1] рассматривается квазидифференциальное уравнение произвольного порядка).

Его решением называется всякая функция  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющая локально абсолютно непрерывные нулевую и первую квазипроизводные и удовлетворяющая (1) почти всюду в  $I$ .

Рассмотрим двухточечную квазидифференциальную краевую задачу на собственные значения

$$({}^2x)(t) = -\lambda ({}^0x)(t) \quad (t \in J = [a, b]), \tag{2}$$

$$x(a) = x(b) = 0. \tag{3}$$

Последовательность решений  $\{x_k(\cdot)\}_0^\infty$  построим следующим образом:  $x_0(\cdot)$  — решение задачи  $({}^2x)(t) = 0$  ( $t \in J$ ),  ${}^0x(a) = 0$ ,  ${}^1x(a) = 1$ ;

$x_k(\cdot)$  находятся рекуррентно как решения задач

$$({}_p^2x_k)(t) = ({}_p^0x_{k-1})(t) \quad (t \in J),$$

$${}_p^0x_k(a) = 0, \quad {}_p^1x_k(a) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Решение  $u(t, \lambda)$  уравнения (2), удовлетворяющее первому из условий (3), представимо в виде ряда [2]

$$u(t, \lambda) = x_0(t) - \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) - \lambda^3 x_3(t) + \dots \quad (4)$$

Собственные значения задачи (2), (3) представляют собой корни уравнения  $\Phi(\lambda) = 0$ , где  $\Phi(\cdot)$  — сумма ряда (4) при  $t = b$ . Функция  $u(t, \lambda^*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda^*)^k x_k(t)$  ( $t \in J$ ) есть собственная функция задачи (2), (3), отвечающая собственному значению  $\lambda^*$ .

Рассмотрим следующую задачу Коши с вещественным параметром  $\beta$  в одном из коэффициентов уравнения

$$p_{22}(t) (p_{11}(t)v'(t))' + (p_{20}(t) - \beta)v(t) = 0, \quad (5)$$

$$v(a) = 0, \quad p_{11}(a)v'(a) = 1. \quad (6)$$

Будем предполагать, что задача (5), (6) однозначно разрешима при некотором значении параметра  $\beta$  и известно значение её решения в точке  $b$ , т.е.  $v(b)$  (это будет иметь место, например, в случае, если решение задачи (5), (6), функция  $v(t)$ , выражается в элементарных функциях).

**Теорема 1.** Пусть

$$p_{21}(t)p_{11}(t) - p_{22}(t)p_{10}(t) \equiv 0 \quad (7)$$

при  $t \in J$ , и задача (5), (6) однозначно разрешима при некотором значении параметра  $\beta = \beta^*$ . Тогда решение  $u(t, \lambda)$  уравнения (2), удовлетворяющее первому из условий (3), представимо в виде ряда (ср. с (4))

$$u(t, \lambda) = x_0(t) - (\lambda - \beta^*)x_1(t) + (\lambda - \beta^*)^2x_2(t) - (\lambda - \beta^*)^3x_3(t) + \dots \quad (8)$$

Если решение задачи (5), (6) в точке  $b$  равно нулю, т.е.  $v(b) = 0$ , то тогда любое вещественное число  $\lambda > \beta^*$  является собственным значением задачи (2), (3), то есть спектр задачи (2), (3) непрерывен. Если же  $v(b) \neq 0$ , то тогда спектр задачи (2), (3) дискретен, а, именно, собственные значения задачи (2), (3) расположены на вещественной оси

правее точки  $\beta^*$ , и они представляют собой корни уравнения  $\Phi(\lambda) = 0$ , где  $\Phi(\cdot)$  — сумма ряда (8) при  $t = b$ . Функция

$$u(t, \lambda^*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda^* - \beta^*)^k x_k(t) \quad (t \in J) \quad (9)$$

есть собственная функция задачи (2), (3), отвечающая собственному значению  $\lambda^*$ .

1. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. Ижевск. 1999. Вып. № 1 (16). С. 3–105.
2. Ватолкин М.Ю., Дерр В.Я. О представлении решений квазидифференциального уравнения // Изв. вузов. 1995. № 10 (401). С. 27–34.

## Примеры на исследование спектра одной краевой задачи второго порядка

М. Ю. Ватолкин

Ижевск, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

e-mail: vmyu6886@gmmail.com

Пусть функция  $p(t)$  почти всюду положительна на отрезке  $[0, 1]$  и  $\int_0^1 \frac{ds}{p(s)} < +\infty$ . Определим функцию  $\varphi(t) \doteq \int_0^t \frac{ds}{p(s)}$ .

Рассмотрим двухточечную квазидифференциальную краевую задачу на собственные значения с вещественным параметром  $\alpha$

$$p(t)\varphi^{2-\alpha}(t) \cdot (p(t)\varphi^\alpha(t)x'(t))' = -\lambda x(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (2)$$

((1), (2) — частный случай (2), (3) из [1], а именно, в последней нужно положить:  $p_{00}(t) = 1$ ,  $p_{11}(t) = p(t)\varphi^\alpha(t)$ ,  $p_{10}(t) = 0$ ,  $p_{22}(t) = p(t)\varphi^{2-\alpha}(t)$ ,  $p_{20}(t) = 0$ ,  $p_{21}(t) = 0$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ; задача (5), (6) из [1] в этом случае однозначно разрешима при  $\beta^* = (1 - \alpha)^2/4$ , а её решением является функция  $v(t) = \varphi^{\frac{1-\alpha}{2}}(t) \cdot \ln \varphi(t)$ , условие (7) (см. теорему 1 из [1]) выполнено).

Если функция  $p(t)$  такова, что

$$\varphi(1) = 1, \quad (3)$$



то будем говорить, что выполнено условие (3) (выполнение условия (3) для задачи (1), (2) эквивалентно тому, что  $v(1) = 0$  (см. теорему 1 из [1])).

При  $p(x) \equiv 1$  (1) есть уравнение Эйлера, т.к.  $t^{2-\alpha}(t^\alpha x')' = t^2 x'' + \alpha t x'$ .

**Теорема 1.** Пусть параметр  $\alpha < 1$ . Если условие (3) не выполнено, то спектр задачи (1), (2) дискретен, а именно, собственные значения задачи (1), (2) есть  $\lambda_k = \frac{(1-\alpha)^2}{4} + \left(\frac{\pi k}{\ln \varphi(1)}\right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; то есть  $\lambda_k = O(k^2)$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Соответствующие им собственные функции имеют вид:  $u(t, \lambda_k) = \varphi^{\frac{1-\alpha}{2}}(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k \cdot \ln \varphi(t)}{\ln \varphi(1)}\right)$  ( $u(t, \lambda_k)$  является суммой ряда (9) (см. теорему 1 из [1])). Если же выполнено условие (3), то любое вещественное число  $\lambda > (1-\alpha)^2/4$  является собственным значением задачи (1), (2), то есть спектр задачи (1), (2) непрерывен. Функция  $u(t, \lambda) = \varphi^{\frac{1-\alpha}{2}}(t) \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda - ((1-\alpha)^2/4) \ln \varphi(t)}\right)$  является собственной функцией этой задачи, отвечающей собственному значению  $\lambda$  ( $u(t, \lambda)$  является суммой ряда (8) (см. теорему 1 из [1])).

Рассмотрим краевые условия

$$\lim_{t \rightarrow +0} \left( \varphi^{[\alpha]}(t) \cdot x(t) \right) = 0, \quad x(1) = 0. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Пусть параметр  $\alpha \geq 1$ . Тогда для задачи (1), (4) имеют место все утверждения теоремы 1, сформулированные для задачи (1), (2).

**Следствие 1.** Пусть  $p(t) \doteq 1/(1+\varepsilon t)$ , где  $\varepsilon$  положительно (условие (3) не выполнено), пусть параметр  $\alpha < 1$  ( $\alpha \geq 1$ ). Тогда  $\lambda_k = \frac{(1-\alpha)^2}{4} + \left(\frac{\pi k}{\ln(1+(\varepsilon/2))}\right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , являются собственными значениями задачи (1), (2) ((1), (4)). Соответствующие им собственные функции имеют вид:  $u(t, \lambda_k) = \left(t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi k \ln(t + (\varepsilon t^2/2))}{\ln(1+(\varepsilon/2))}\right)$ . Следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow +0$   $\lambda_1 \rightarrow +\infty$ . Пусть  $p(t) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1+\varepsilon t}\right) = 1$ , тогда условие (3) выполнено, и при  $\alpha < 1$  ( $\alpha \geq 1$ ) спектр задачи (1), (2) ((1), (4)) непрерывен, а, именно, любое вещественное число  $\lambda > (1-\alpha)^2/4$  является собственным значением задачи (1), (2) ((1), (4)). Функция  $u(t, \lambda) = t^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda - ((1-\alpha)^2/4) \ln t}\right)$  является собственной функцией задачи (1), (2) ((1), (4)), отвечающей собственному значению  $\lambda$ .

Таким образом, спектр задачи (1), (2) ((1), (4)) при любом сколь угодно малом значении  $\varepsilon$  дискретен и наименьшее собственное число  $\lambda_1$  может быть сделано сколь угодно большим за счёт уменьшения значения  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$  спектр этой задачи уже непрерывен. Аналог следствия 1 может быть сформулирован, например, для  $p(t) \doteq 1/(1 - \varepsilon t)$ , где  $0 < \varepsilon < 1$ .

**Следствие 2.** Пусть  $p(t) \doteq t + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  положительно (условие (3) не выполнено), пусть параметр  $\alpha < 1$  ( $\alpha \geq 1$ ). Тогда  $\lambda_k = (1 - \alpha)^2/4 + (\pi k / \ln \ln(1 + (1/\varepsilon)))^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , являются собственными значениями задачи (1), (2) ((1), (4)). Соответствующие им собственные функции имеют вид:  $u(t, \lambda_k) = \ln^{\frac{1-\alpha}{2}} \left( 1 + \frac{t}{\varepsilon} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi k \ln \ln(1 + (t/\varepsilon))}{\ln \ln(1 + (1/\varepsilon))} \right)$ . Следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , сколь угодно большое конечное количество первых собственных значений задачи (1), (2) ((1), (4)) будет принадлежать любой правой окрестности точки  $(1 - \alpha)^2/4$ .

1. Ватолкин М.Ю. О структуре спектра одной краевой задачи второго порядка [см. настоящий сборник].

## Об устойчивости решений нелинейной начально-краевой задачи о динамике трубопровода

П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов

Ульяновск, Ульяновский государственный технический университет  
e-mail: velmisor@ulstu.ru, ankil@ulstu.ru

Пусть на плоскости  $Oxy$  упругому трубопроводу (полуму стержню, внутри которого протекает жидкость) соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $[0, l]$  (рис. 1). Скорость жидкости  $V$  может зависеть от времени  $t$ . Введем обозначения:  $u(x, t), w(x, t)$  — функции, описывающие продольные и поперечные колебания трубопровода.

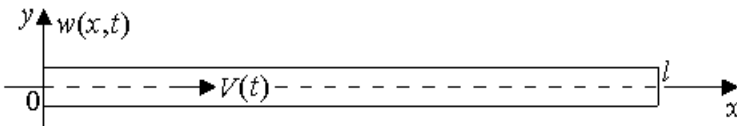


Рис. 1: Полностью упругий трубопровод

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$-ES(u'(x, t) + 0,5w'^2(x, t))' + M\ddot{u}(x, t) - \beta_2 S\dot{u}''(x, t) = 0, \quad (1)$$

$$-ES[w'(x, t)(u'(x, t) + 0,5w'^2(x, t))]' + Dw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + (N(t) + M_*V^2(t))w''(x, t) + \beta_2 I\dot{w}''''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t) + \quad (2)$$

$$+ 2V(t)M_*\dot{w}'(x, t) + M_*\dot{V}(t)w'(x, t) = 0, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0,$$

$$w(0, t) = w'(0, t) = u(0, t) = w(l, t) = w'(l, t) = u(l, t) = 0, \quad (3)$$

где штрих обозначает частную производную по  $x$ , а точка — по  $t$ . Коэффициенты  $S$ ,  $M_0$ ,  $M_*$ ,  $I$ ,  $D$  вычисляются по формулам:

$$S = \pi(R_*^2 - R_0^2), \quad M_0 = S\rho_0, \quad M_* = \pi R_0^2 \rho_*, \quad I = \frac{\pi}{4}(R_*^4 - R_0^4), \quad D = EI.$$

Здесь  $M_*$  — масса жидкости (газа) на единицу длины;  $\rho_*$  — плотность жидкости (газа);  $R_*$ ,  $R_0$ ,  $S$  — внешний и внутренний радиусы и площадь поперечного сечения трубопровода;  $M_0$  — масса металла на единицу длины трубы;  $M = M_* + M_0$  — общая погонная масса;  $D$  — изгибная жесткость трубопровода;  $E$ ,  $\rho_0$  — модуль упругости и плотность трубопровода;  $N(t)$  — сжимающая (растягивающая) трубопровод сила;  $I$  — момент инерции сечения трубопровода;  $\beta_2$ ,  $\beta_1$  — коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\beta_0$  — коэффициент жесткости слоя обжатия.

Введем обозначения:  $\lambda_1, \mu_1, \vartheta_1$  — наименьшие собственные значения [1] краевых задач для уравнений  $\phi'''' = -\lambda\phi''$ ,  $\phi'''' = \mu\phi$ ,  $\phi'' = -\vartheta\phi$  с условиями (3) для функции  $w(x, t)$ ,  $\eta_1$  — наименьшее собственное значение краевой задачи для уравнения  $\phi'' = -\eta\phi$  с условиями (3) для функции  $u(x, t)$ . С помощью исследования функционала

$$\Phi(t) = \int_0^l \left[ EF(u'(x, t) + 0,5w'^2(x, t))^2 + M(\dot{u}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, t)) + \right. \\ \left. + 2\beta_2 F\theta u'^2(x, t) + (D + \beta_2 I\theta)w''^2(x, t) - (N(t) + M_*V^2(t))w'^2(x, t) + \right. \\ \left. + (\beta_0 + \beta_1\theta)w^2(x, t) + 4M\theta u(x, t)\dot{u}(x, t) + 2\theta M w(x, t)\dot{w}(x, t) \right] dx,$$

где  $\theta > 0$  — положительный параметр, доказана теорема.

**Теорема.** Пусть для любого момента времени  $t$  найдутся числа  $\theta > 0$ ,  $\chi \in (0, 1)$ ,  $\psi \in (0, 1)$ , для которых выполнены условия

$$\beta_0 \geq 0, \quad \beta_2 S\eta_1 - 2M\theta \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 I\mu_1 - M\theta > 0,$$

$$\begin{aligned}
& \psi\beta_2 S\eta_1 - 2M\theta > 0, \quad N(t) + M_*V^2(t) < (D + \beta_2 I\theta) \lambda_1, \\
& [(D + \beta_2 I\theta) \lambda_1 - (N(t) + M_*V^2(t))] \chi\vartheta_1 + \beta_0 + \beta_1\theta > M\theta^2, \\
& 4 \left( \theta D\lambda_1 + 0.5\dot{N}(t) + M_*V(t)\dot{V}(t) - \theta(N(t) + M_*V^2(t)) \right) \times \\
& \quad \times (\beta_1 + \beta_2 I\mu_1 - M\theta) \geq M_*^2 \left( \dot{V}(t) - 2\theta V(t) \right)^2.
\end{aligned}$$

Тогда решение  $u(x, t), w(x, t)$  системы уравнений (1), (2) и производные  $\dot{u}(x, t), u'(x, t), \dot{w}(x, t), w'(x, t)$  устойчивы по отношению к возмущениям начальных значений  $u(x, 0), \dot{u}(x, 0), u'(x, 0), w(x, 0), \dot{w}(x, 0), w'(x, 0), w''(x, 0)$ , если  $u(x, t), w(x, t)$  удовлетворяют краевым условиям (3).

Приведены примеры значений параметров механической системы, для которых выполняются условия теоремы. Представлены методики исключения введенных в процессе исследования параметров  $\theta, \chi, \psi$ . Произведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Ульяновской области, проект № 18–41–730015.

1. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.

## О бэровской классификации топологической энтропии семейств неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра

А. Н. Ветохин

Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова,

МГТУ имени Н. Э. Баумана

e-mail: anveto27@yandex.ru

На компактном метрическом пространстве  $X$  по последовательности  $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$  непрерывных отображений из  $X$  в  $X$ , наряду с исходной метрикой  $d$ , определим дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)), \quad f^{\circ i} \equiv f_i \circ \dots \circ f_1 \circ \text{id}_X, \quad x, y \in X, \quad i, n \in \mathbb{N}.$$

Для каждых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\varepsilon > 0$  через  $N_d(f, \varepsilon, n)$  обозначим максимальное количество точек в  $X$ , попарные  $d_n^f$ -расстояния между которыми больше  $\varepsilon$ , а *топологическую энтропию* [1] системы  $(X, f)$  определим формулой

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n)$$

(в которой правая часть не зависит от метрики  $d$ , задающей в  $X$  фиксированную топологию).

По метрическому пространству  $\mathcal{M}$  и последовательности непрерывных отображений

$$f \equiv (f_1, f_2, \dots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \rightarrow X, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f(\mu, \cdot)). \quad (2)$$

В статье [2] установлена следующая

**Теорема 1.** *Для произвольных  $\mathcal{M}$ ,  $X$  и последовательности отображений (1) функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу.*

Возникает естественный вопрос об уменьшении бэровского класса, которому принадлежит функция (2). Построим метрическое пространство  $\mathcal{B}$  следующим образом: точками пространства  $\mathcal{B}$  являются, по определению, всевозможные (счетные) последовательности  $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$  натуральных чисел. Расстояние между двумя точками  $\mu$  и  $\nu$  определяется формулой

$$d_{\mathcal{B}}(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu; \\ \frac{1}{\min\{k: \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Отметим, что пространство  $\mathcal{B}$  гомеоморфно множеству иррациональных чисел на отрезке  $[0, 1]$  с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. В статье [2] доказана следующая

**Теорема 2.** *Пусть  $\mathcal{M} = \mathcal{B}$  и  $X$  — канторово совершенное множество на отрезке  $[0; 1]$  с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой, тогда найдется последовательность отображений (1), для которой функция (2) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

В работе [3] для  $X = [0; 1]$ , произвольного  $\mathcal{M}$  и стационарной последовательности функций (1) установлено, что функция (2) является всюду

полунепрерывной снизу, а следовательно принадлежит первому бэровскому классу на пространстве  $\mathcal{M}$ . Возникает естественный вопрос о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (2) в случае неавтономных динамических систем на отрезке. В статье [4] доказана следующая

**Теорема 3.** Пусть  $\mathcal{M} = \mathcal{B}$  и  $X = [0; 1]$ , тогда существует последовательность непрерывных отображений (1) такая, что для всех  $\mu \in \mathcal{M}$  и  $k \in \mathbf{N}$  функции  $f_k(\mu, \cdot)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[0; 1]$ , функция (2) всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве  $\mathcal{M}$ .

1. Kolyada S., Snoha L. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random & Computational dynamics. 1996. Vol. 1. No. 2&3. Pp. 205–233.
2. Ветохин А. Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 341–348.
3. Misiurewicz M. Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. et Phys. 1979. Vol. 27. Pp. 167–169.
4. Ветохин А. Н. О непринадлежности второму бэровскому классу топологической энтропии одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 133–136.

## Точные решения операторного уравнения Ляпунова для системы с последствием нейтрального типа

Ю. Ф. Долгий, Б. В. Дигас

Екатеринбург, УрФУ, ИММ УрО РАН

e-mail: yurii.dolgiil@imm.uran.ru, digas@imm.uran.ru

При решении задачи обращения теоремы об асимптотической устойчивости для автономной линейной системы с последствием используется операторное уравнение Ляпунова [1]. Точные решения операторного уравнения Ляпунова для системы с последствием запаздывающего типа построены в [2]. Для системы с последствием нейтрального типа

проблема нахождения точных решений операторного уравнения Риккати исследовалась в [3].

Рассматривается автономная линейная система дифференциальных уравнений с последствием нейтрального типа

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^0 [d\eta(\vartheta)]x(t + \vartheta) + \int_{-r}^0 [d\mu(\vartheta)] \frac{dx(t + \vartheta)}{d\vartheta}, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty). \quad (1)$$

Здесь  $x: [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ ; матричнозначные функции  $\eta, \mu$  имеют ограниченные вариации на отрезке  $[-r, 0]$ ;  $\eta(0) = 0$ ,  $\mu(0) = \mu(-0) = 0$ ,  $\det \eta(-r) \neq 0$ .

В функциональном пространстве состояний  $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_H = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^{-0} \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H},$$

уравнению (1) ставится в соответствие уравнение

$$\frac{d\mathbf{z}_t}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}_t, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Здесь неограниченный оператор  $\hat{\mathbf{A}}$  задается формулами  $(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{z})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{z}(\vartheta)}{d\vartheta}$ ,  $\vartheta \in [-r, 0)$ ,  $(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{z})(0) = \int_{-r}^{-0} [d\hat{\mu}(s)]\mathbf{z}(s) - \eta(-r)\mathbf{z}(0)$  и имеет область определения

$\mathfrak{D}(\hat{\mathbf{A}}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{W}_2^1([-r, 0], \mathbb{R}^n) : \mathbf{z}(-0) = \int_{-r}^{-0} [d\hat{\mu}(s)]\mathbf{z}(s) - \eta(-r)\mathbf{z}(0)\}$ ,  $\hat{\mu}(\vartheta) = \mu(\vartheta) + \eta(-r)\vartheta + \int_{\vartheta}^0 \eta(s)ds$ ,  $\vartheta \in [-r, 0]$  [3].

Проблема обращения теоремы об асимптотической устойчивости связана с разрешимостью операторного уравнения Ляпунова

$$\mathbf{U}\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^*\mathbf{U} + \mathbf{W} = 0, \quad (2)$$

в котором линейный ограниченный самосопряженный оператор  $\mathbf{W}$  допускает следующее представление:

$$(\mathbf{W}\mathbf{z})(\vartheta) = M(\vartheta, 0)\mathbf{z}(0) + \int_{-r}^0 M(\vartheta, s)\mathbf{z}(s)ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad \mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{H}.$$

При нахождении решения уравнения (2) используется форма его представления  $(\mathbf{U}\mathbf{z})(\vartheta) = K(\vartheta, 0)\mathbf{z}(0) + \int_{-r}^0 K(\vartheta, s)\mathbf{z}(s)ds$ ,  $\vartheta \in [-r, 0]$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{H}$ .

**Теорема.** Матричнозначная функция  $K$ , определяющая решение операторного уравнения Ляпунова (2), удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \hat{K}^\top(s, \vartheta)}{\partial s} = M(\vartheta, s), \quad \vartheta, s \in [-r, 0),$$

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, 0)}{\partial \vartheta} + (K(\vartheta, 0) + K(\vartheta, -0)) \eta(-r) = M(\vartheta, 0), \quad \vartheta \in [-r, 0),$$

$$K(\vartheta, 0) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0],$$

$$(K(0, 0) + K(0, -0)) \eta(-r) + \eta^\top(-r) (K(0, 0) + K(-0, 0)) = M(0, 0),$$

где  $\hat{K}(\vartheta, s) = K(\vartheta, s) - \hat{\mu}^\top(\vartheta) (K(0, s) + K(-0, s))$ ,  $\vartheta \in [-r, 0)$ ,  $s \in [-r, 0]$ .

Предложен метод нахождения решения определяющей системы уравнений, описанной в теореме.

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. Долгий Ю.Ф. Вычисление квадратичных функционалов Ляпунова–Красовского для линейных автономных систем с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 95–106.
3. Долгий Ю.Ф. Точные решения обратной задачи оптимальной стабилизации для систем с последействием нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 35–44.

## Об оптимальном режиме эксплуатации для достижения наибольшего дисконтированного дохода от извлечения ресурса

**А. В. Егорова**

*г. Владимир, Владимирский государственный университет*

e-mail: nastik.e@bk.ru

Задача рационального управления природными ресурсами состоит в нахождении наилучших или оптимальных способов эксплуатации естественных и искусственных экосистем. Особый интерес вызывают задачи максимизации дохода от промысла популяции с учетом дисконтирования или без него [1]. Современное состояние работ по вопросам оптимальной добычи ресурса более подробно описано в [2, 3].



Рассмотрим неоднородную структурированную популяцию, особи которой разделены на возрастные или типические группы. Пусть развитие популяции описывается нормальной автономной системой разностных уравнений. Для такой популяции исследуем задачу оптимального сбора возобновляемого ресурса на конечном промежутке времени.

Обозначим через  $x_i(k)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , количество ресурса каждого из  $n \geq 2$  видов или классов в момент  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Будем рассматривать модель эксплуатируемой популяции вида

$$x(j+1) = F((1 - u(j))x(j)), \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

где  $x(j) = (x_1(j), \dots, x_n(j)) \in R_+^n$ ,  $R_+^n \doteq \{x \in R^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ ,  $u(j) = (u_1(j), \dots, u_n(j)) \in [0, 1]^n$  — управление, которым можно варьировать для достижения лучшего результата сбора,  $(1 - u_i(j))x_i(j)$  — количество оставшегося ресурса  $i$ -го вида в момент  $k$  после сбора,  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_i(x)$  — вещественные неотрицательные функции, заданные для всех  $x \in R_+^n$  такие, что  $f_i(0) = 0$ ,  $f_i \in C^2(R_+^n)$ , и матрица Якоби  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$  является невырожденной для всех  $x \in R_+^n$ .

Пусть  $C_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  — стоимость условной единицы каждого из классов, тогда стоимость всей добываемой продукции в момент  $k$  равна  $h(k) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(k) u_i(k) e^{-\alpha d j}$ , где  $\alpha > 0$  — коэффициент дисконтирования,  $d > 0$  — временной интервал между моментами сбора (без ограничения общности будем полагать  $d = 1$ ). Обозначим  $\bar{u}(k) \doteq (u(0), \dots, u(k-1))$ , где  $u(j) = (u_1(j), \dots, u_n(j)) \in [0, 1]^n$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Для любого  $k = 1, 2, \dots$  определим дисконтированный доход от извлечения ресурса

$$H_\alpha(\bar{u}, x(0)) \doteq \sum_{j=0}^{k-1} h(j) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j}.$$

**Теорема.** *Предположим, что  $D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (f_i(x) - x_i e^{\alpha d})$  достигает максимального значения в единственной точке  $x^* \in \mathbb{R}_+^n$  и  $x_i^* \leq f_i(x^*) \neq 0$  для любого  $i = 1, \dots, n$ . Тогда для любого  $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$  такого, что  $x_i(0) \geq x_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , функция  $H_\alpha(\bar{u}, x(0))$  достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha(\bar{u}^*(k), x(0)) = \sum_{i=1}^n C_i (f(x^*) - x^*) \frac{e^{-\alpha(k+1)}}{1 - e^{-\alpha}}$$

на множестве  $U$  при следующем режиме эксплуатации:

$$u^*(0) = \left(1 - \frac{x_1^*}{x_1(0)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{x_n(0)}\right), \quad u^*(k) = \left(1 - \frac{x_1^* e^{-\alpha}}{f_1(x^*)}, \dots, 1 - \frac{x_n^* e^{-\alpha}}{f_n(x^*)}\right)$$

при всех  $k \geq 1$ .

Работа выполнена под руководством профессора кафедры ФАиП Владимирского государственного университета Л. И. Родиной.

1. *Belyakov A.O., Veliov V.M.* On optimal harvesting in age-structured populations // *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making*. 2016. Pp. 149–166.
2. *Фрисман Е.Я., Кулаков М.П., Ревуцкая О.Л., Жданова О.Л., Неверова Г.П.* Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2019. Т. 11. № 1. С. 119–151.
3. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2018. Т. 28. № 2. С. 213–221.

## Об одном подходе к исследованию уравнений в метрических пространствах

**Т. В. Жуковская**

*Тамбов, ТГТУ*

e-mail: t\_zhukovskaia@mail.ru

**Е. С. Жуковский**

*Тамбов, ТГУ имени Г.Р. Державина*

e-mail: zukovskys@email.ru

В докладе обсуждаются теоремы сравнения операторных уравнений, в том числе уравнений, определяющих неподвижные точки и точки совпадения. К теоремам сравнения можно отнести, например, теорему Милютина [1] о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, теорему Арутюнова [2] о точке совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств, теорему об операторном уравнении [3]. Эти теоремы позволяют исследовать уравнения в метрических пространствах на основе их сравнения с «модельным» уравнением, порожденным накрывающим отображением.

В теореме Канторовича [5, гл. XVIII, п. 1.2, теорема 1] устанавливается существование неподвижной точки оператора  $S$ , действующего в банаховом пространстве  $X$ , на основе сравнения оператора  $S$  с «модельной» функцией  $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , имеющей неподвижную точку. В этой теореме предполагается, что при некоторых  $x_0 \in X$ ,  $R > 0$  отображение  $S$  непрерывно дифференцируемо в открытом шаре

$$O_X(x_0, R) = \{x \in X : \|x - x_0\| < R\},$$

а функция  $\varphi$  не убывает, дифференцируема на интервале  $[0, R)$ , в котором имеет неподвижную точку, справедливо неравенство  $\|S(x_0) - x_0\| \leq \varphi(0)$  и

$$\forall t \in [0, R) \quad \forall x \in X \quad \|x - x_0\| \leq t \Rightarrow \|S'(x)\| \leq \varphi'(t).$$

В [6] получено утверждение о существовании точки совпадения отображений, действующих в банаховых пространствах, аналогичное теореме Канторовича. В [7] теорема Канторовича обобщена на неподвижные точки отображений метрических пространств и на точки совпадения отображений, действующих из одного метрического пространства в другое (причем рассмотрены не только «однозначные», но и многозначные отображения).

В докладе рассматривается уравнение

$$F(x) = y, \tag{1}$$

где оператор  $F: X \rightarrow Y$  представим в виде  $F(x) = G(x, x)$ , для оператора  $G: X \times X \rightarrow Y$  существует «модельная» функция  $g: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , являющаяся по первому аргументу непрерывной и неубывающей, а по второму аргументу невозрастающей. Получены условия, при выполнении которых из разрешимости «модельного» уравнения  $g(t, t) = 0$  следует существование решений уравнения (1). Из этого утверждения выводятся теорема Канторовича о неподвижной точке и полученная в [7] теорема о точках совпадения отображений метрических пространств.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 17-51-12064.

1. *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6 (216). С. 11–46.
2. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

3. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. Vol. 75, No. 3. Pp. 1026–1044.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
6. Zubelevich O. Coincidence points of mappings in Banach spaces // <https://arxiv.org/pdf/1804.10501.pdf>
7. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Теорема Канторовича о неподвижных точках в метрических пространствах и точки совпадения // Труды МИАН. 2019. Т. 304. С. 68–82.

## Исследование математической модели дивергенции крыла

А. С. Запов

Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова

e-mail: yar.promo.zapov.a@gmail.com

В работе рассматривается следующая краевая задача для нелинейного эволюционного уравнения гиперболического типа:

$$u_{tt} + gu_t = u_{xx} + au + ac_2u^2 + ac_3u^3, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \quad (2)$$

В текущей постановке  $a \geq 0, c_2, c_3 > 0$ , а  $x \in [0, \pi]$ . Краевая задача (1), (2) возникает в теории упругой устойчивости и описывает крутильные колебания крыла в сверхзвуковом потоке газа. Уравнение (1) получено из классического уравнения В.В. Болотина (см. [1], а также [2]) после перенормировок и использования формулы Тейлора с оставлением членов, имеющих первый, второй и третий порядок малости.

Для изучения вопроса об устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (1), (2) в линейном приближении рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_{tt} + gu_t = Au, \quad (3)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \tag{4}$$

где линейный дифференциальный оператор (ЛДО)  $A = A(a)$  определен равенством

$$A(a)v = v'' + av$$

на достаточно гладких функциях  $v(x)$ , удовлетворяющих краевым условиям  $v(0) = v(\pi) = 0$ .

**Лемма 1.** ЛДО  $A(a)$  обладает следующими свойствами:

1. Симметричен;
2. Имеет счетный набор простых собственных значений  $\mu_k = a - k^2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;
3. Набору собственных значений  $\mu_k$  соответствуют собственные функции  $\sin kx$ , образующие в  $L_2(0, \pi)$  полную ортогональную систему.

**Теорема 1.** Решения краевой задачи (3), (4), а также нулевое решение нелинейной КЗ (1), (2) асимптотически устойчиво в случае  $a < 1$ . При  $a > 1$  нулевое решение КЗ (1), (2) неустойчиво. При  $a = a_0 = 1$  реализуется критический случай в задаче об устойчивости.

Пусть  $u = u(t, x)$  — решение исходной краевой задачи (1), (2) при  $a = 1 + \gamma\varepsilon$ , где  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \neq 0$ .

Решения задачи (1), (2) из окрестности состояния равновесия  $u \equiv 0$  будем искать в следующем виде:

$$u(x, z, \varepsilon) = \varepsilon u_1(x, z) + \varepsilon^2 u_2(x, z) + O(\varepsilon^3), \tag{5}$$

где  $z = z(s)$ ,  $s = \varepsilon t$ ,  $u_1 = z \sin x$ . Выделяя члены при  $\varepsilon$ , для определения  $u_2 = u_2(x, z)$  получаем линейную неоднородную краевую задачу:

$$gz' \sin x = u_{2.xx} + u_2 + \gamma u_1 + u_1^2 c_2, \tag{6}$$

$$u_2(0, z) = u_2(\pi, z) = 0. \tag{7}$$

Условие разрешимости краевой задачи (6), (7) в классе функций  $u_2 = u_2(x, z)$ , т.е. явным образом не зависящих от  $t$ , приводит к уравнению — нормальной форме (далее — НФ) для определения  $z(s)$ :

$$z' = \frac{1}{g}(\gamma z + lz^2), l = \frac{8c_2}{3\pi} \neq 0. \tag{8}$$

**Лемма 2.** Дифференциальное уравнение (8) (НФ) имеет ненулевое состояние равновесия  $S_0 : z_0 = \frac{\gamma}{l}$ . Данное состояние устойчиво, если  $\gamma > 0$ , и неустойчиво при  $\gamma < 0$ . Нулевое состояние равновесия НФ (8) асимптотически устойчиво, если  $\gamma < 0$ , и неустойчиво, если  $\gamma > 0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $a = 1 + \gamma\varepsilon$ . Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  состоянию равновесия  $H\Phi$  (8) соответствует нетривиальное состояние равновесия краевой задачи (1), (2)  $S(\varepsilon)$ :

$$u(x, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\gamma}{l} \sin x + O(\varepsilon^2)$$

с наследованием устойчивости  $S_0$ .

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961.
2. *Куликов А.Н.* Ненулевые состояния равновесия одной краевой задачи, моделирующей явление дивергенции крыла в сверхзвуковом потоке газа // Математическое моделирование и анализ информационных систем. Ярославль. 1997. Вып 4. С. 69–72.

## Аналог задачи Трикоми для нелокального уравнения смешанного типа

**А. Н. Зарубин**

*Орёл, ОГУ*

e-mail: aleks\_zarubin@mail.ru

Уравнение

$$U_{xx}(x, y) + (\operatorname{sgn} y) \sum_{n=-1}^1 a_{n+1} U_{yy}(x - n\tau, y) = 0 \quad (1)$$

рассматривается в области  $D = D^+ \cup D^-$ , где

$$D^+ = \{(x, y): 0 < x < 2\tau, y > 0\} = D_0^+ \cup D_1^+$$

и  $D^- = D_0^- \cup D_1^-$  — эллиптическая и гиперболическая части области  $D$ , причём

$$\begin{aligned} D_k^+ &= \{(x, y): k\tau < x < (k+1)\tau, y > 0\} \quad (k = \overline{-1, 2}), \\ D_n^- &= \{(x, y): -y + \gamma_j n\tau < x < y + \gamma_j (n+1)\tau, -\gamma_j \tau/2 < y < 0\} \\ &\quad (n = \overline{-1, 2}), \quad 0 < \tau \equiv \operatorname{const}; \quad \gamma_j = \sqrt{a_1 + (-1)^j a_0} \quad (j = 0, 1). \end{aligned}$$

Пусть

$$D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k \quad (k = \overline{-1, 2}); \quad I = \bigcup_{n=-1}^2 I_n,$$

$$I_n = \{(x, y) : n\tau < x < (n+1)\tau, y = 0\}; \quad J = \{(x, y) : x = \tau, y > 0\}.$$

**Задача Т.** Найти в области  $D = D_0 \cup D_1 \cup J \cup I_0 \cup I_1$  решение  $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D \setminus (J \cup I_0 \cup I_1))$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$U(x, y) = r(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D_{-1}};$$

$$U(x, y) = \rho(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D_2};$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} U(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\tau;$$

$U(x, \gamma_j(k\tau - x)) = \psi_k(x), \quad k\tau \leq x \leq (2k+1)\tau/2 \quad (k = 0, 1)$ , причём  $\psi_0(0) = r(0, 0)$ ;  $r_{yy}(x, +\infty) = \rho_{yy}(x, +\infty) = 0$ , где  $r(x, y), \rho(x, y), \psi_k(x)$  — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

**Теорема.** Если выполнены условия:

$$r(x, y) \in C(\overline{D_{-1}}) \cap C^4(D_{-1});$$

$$\rho(x, y) \in C(\overline{D_2}) \cap C^4(D_2); \quad \psi_k(x) \in C[k\tau, (2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau, (2k+1)\tau/2) \quad (k = 0, 1);$$

$$\psi_0(0) = r(0, 0); \quad a_0 = a_2, \quad a_1 > a_0;$$

$$r(x, +\infty) = \rho(x, +\infty) = 0,$$

то существует единственное решение  $U(x, y)$  задачи Т.

Вопрос существования и единственности решения задачи Т сводится к разрешимости матричной системы

$$\overline{U}_{xx}(x, y) + (\operatorname{sgn} y)A\overline{U}_{yy}(x, y) = B\overline{F}(x, y), \quad (x, y) \in D_0,$$

где

$$\overline{U}(x, y) = (U_0(x, y), U_1(x + \tau, y))^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix},$$

$$U_k(x, y) = U(x, y), \quad (x, y) \in D_k \quad (k = 0, 1),$$

$$\overline{F}(x, y) = (r_{yy}(x - \tau, y), \rho_{yy}(x + 2\tau, y))^T.$$

# Решение краевых задач для двумерного эллиптического уравнения с операторным коэффициентом в абстрактном гильбертовом пространстве

Д. Ю. Иванов

Москва, Российский университет транспорта

e-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Пусть  $\Omega^+$  — плоская открытая ограниченная односвязная область с границей  $\partial\Omega \in C^2$ , и  $\Omega^- \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \Omega^+$ . Рассмотрим четыре краевые задачи:

$$\Delta_2 \mathbf{u}_i^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \mathbf{u}_i^\pm(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega^\pm, i = 1, 2), \quad (1^\pm)$$

$$\mathbf{u}_1^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_1^\pm(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \quad (2a)$$

$$\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_2^\pm(\mathbf{x}) - \eta \mathbf{u}_2^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_2^\pm(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \quad (2b)$$

где  $\mathbf{u}_i^\pm(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{w}_i^\pm(\mathbf{x})$  — функции со значениями в произвольном комплексном гильбертовом пространстве  $H$ , заданные на множествах  $\Omega^\pm$  и  $\partial\Omega$  соответственно;  $\mathbf{n}$  — внутренняя нормаль к кривой  $\partial\Omega$  в точке  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ;  $\mathbf{B}$  — замкнутый всюду плотно определенный в пространстве  $H$  линейный оператор, порождающий экспоненциально убывающую  $C_0$ -полугруппу сжимающих операторов  $\mathbf{T}(\tau): \|\mathbf{T}(\tau)\| \leq \exp(-p\tau)$  ( $\mathbf{B} \mathbf{f} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1} [\mathbf{f} - \mathbf{T}(\tau) \mathbf{f}]$ ,  $\mathbf{f} \in D(\mathbf{B})$ );  $\eta \geq 0$  и  $p > 0$  — постоянные.

Пусть  $C^n(\Omega; H)$  — банаховы пространства  $n$  раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве  $\Omega$  функций  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  со значениями в гильбертовом пространстве  $H$  и нормой  $\|\mathbf{f}\|_{C^n(\Omega; H)} = \max_{k=0, \dots, n} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \|\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x})\|_H$  ( $C(\Omega; H) \equiv C^0(\Omega; H)$ ).

**Определение 1.** Решением уравнения  $(1^\pm)$  будем называть функцию  $\mathbf{u}_i^\pm(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega^\pm; H)$  со значениями в области определения  $D(\mathbf{B})$  оператора  $\mathbf{B}$ , обращающую уравнение  $(1^\pm)$  в истинное равенство.

**Определение 2.** Решением задачи  $\{P_1^\pm\}$  будем называть функцию  $\mathbf{u}_1^\pm \in C(\bar{\Omega}^\pm; H)$ , являющуюся решением уравнения  $(1^\pm)$  и удовлетворяющую граничному условию  $(2a)$ . В случае задачи  $\{P_1^-\}$  будем требовать также выполнение условия:  $\|\mathbf{u}_1^-(\mathbf{x})\|_H \rightarrow 0$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

**Определение 3.** Решением задачи  $\{P_2^\pm\}$  будем называть функцию  $\mathbf{u}_2^\pm \in C(\bar{\Omega}^\pm; H)$ , являющуюся решением уравнения  $(1^\pm)$  и имеющую с внутренней (внешней) стороны  $\partial\Omega$  правильную нормальную производную  $\partial_{\mathbf{n}}^\pm \mathbf{u}_2^\pm$



$(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_2^{\pm}(\mathbf{x} \pm \xi \mathbf{n}) \rightarrow \partial_{\mathbf{n}}^{\pm} \mathbf{u}_2^{\pm}(\mathbf{x})$  при  $\xi \rightarrow +0$  равномерно относительно  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ), определяемую равенством (2b):  $\partial_{\mathbf{n}}^{\pm} \mathbf{u}_2^{\pm} = \mathbf{w}_2^{\pm} + \eta \mathbf{u}_2^{\pm}$ . В случае задачи  $\{P_2^{-}\}$  будем требовать также выполнение условия  $|\mathbf{x}| \|\mathbf{u}_2^{-}\|_H \|\nabla \mathbf{u}_2^{-}\|_H \rightarrow 0$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , где  $\|\nabla \mathbf{u}\|_H^2 \equiv \|\partial_{x_1}^2 \mathbf{u}\|_H^2 + \|\partial_{x_2}^2 \mathbf{u}\|_H^2$ .

При помощи равенств:  $\mathbf{K}(r) \mathbf{f} \equiv \int_0^{\infty} a(r, \tau) \mathbf{T}(\tau) \mathbf{f} d\tau$ , где  $\mathbf{f} \in H$ ,  $a(r, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4\tau)]$  ( $\tau > 0$ ), определим ограниченные линейные операторы  $\mathbf{K}(r)$  ( $r > 0$ ) в пространстве  $H$ . С помощью криволинейных интегралов первого рода  $\mathbf{g}_1^{\pm} \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}_1} \mathbf{K}(r) \mathbf{v}_1^{\pm}(\mathbf{x}') ds'$ ,  $\mathbf{g}_2^{\pm} \equiv \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}(r) \mathbf{v}_2^{\pm}(\mathbf{x}') ds'$  определим на множестве  $\Omega^{\pm}$  функции  $\mathbf{g}_i^{\pm}(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2$ ) со значениями в пространстве  $H$ . Здесь  $\mathbf{v}_i^{\pm} \in C(\partial\Omega; H)$ ,  $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ;  $\mathbf{n}_1$  — внутренняя нормаль к кривой  $\partial\Omega$ , проходящая через точку  $\mathbf{x}' \in \partial\Omega$ . Кроме того, обозначим через  $H_{\mathbf{B}}^n$  гильбертово пространство функций  $\mathbf{f} \in H$ , таких, что  $\mathbf{B}^m \mathbf{f} \in H$  ( $m = \overline{1, n}$ ), с нормой  $\|\mathbf{f}\|_{H_{\mathbf{B}}^n} = [\sum_{m=0}^n \|\mathbf{B}^m \mathbf{f}\|_H^2]^{1/2}$  ( $H_{\mathbf{B}}^0 \equiv H$ ). В работе [1] получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $\partial\Omega \in C^2$ . Задача  $\{P_i^{\pm}\}$  ( $i = 1, 2$ ) однозначно разрешима с любой граничной функцией  $\mathbf{w}_i^{\pm} \in C(\partial\Omega; H)$ . Ее решение представимо в виде функции  $\mathbf{g}_i^{\pm}$  с неизвестной  $\mathbf{v}_i^{\pm}$ , однозначно определяемой соответствующим уравнением  $\mathbf{G}_i^{\pm} \mathbf{v}_i^{\pm} = \mathbf{w}_i^{\pm}$ , где

$$\mathbf{G}_i^{\pm} \equiv \mp(-1)^i 2^{-1} + \mathbf{G}_i, \quad (\mathbf{G}_i \mathbf{f})(\mathbf{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{f}(\mathbf{x}') ds',$$

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \partial_{\mathbf{n}_1} \mathbf{K}(r), \quad \mathbf{K}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{K}(r) - \eta \mathbf{K}(r),$$

и обладает устойчивостью. А именно: пусть  $\mathbf{u}_i^{(1)\pm}$ ,  $\mathbf{u}_i^{(2)\pm}$  — решения задачи  $\{P_i^{\pm}\}$  с соответствующими граничными функциями  $\mathbf{w}_i^{(1)\pm}$ ,  $\mathbf{w}_i^{(2)\pm}$  из пространства  $C(\partial\Omega; H)$ . Тогда  $\|\mathbf{u}_i^{(1)\pm} - \mathbf{u}_i^{(2)\pm}\|_{C(\overline{\Omega^{\pm}}; H)} \rightarrow 0$ , если выполнено условие  $\|\mathbf{w}_i^{(1)\pm} - \mathbf{w}_i^{(2)\pm}\|_{C(\partial\Omega; H)} \rightarrow 0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\partial\Omega \in C^{k+2}$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ). Операторы  $\mathbf{G}_i^{\pm}: C^k(\Omega; H_{\mathbf{B}}^n) \rightarrow C^k(\Omega; H_{\mathbf{B}}^n)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ;  $i = 1, 2$ ) всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы.

1. Иванов Д.Ю. Решение краевых задач для двумерного эллиптического дифференциально-операторного уравнения в абстрактном гильбертовом пространстве с помощью метода граничных интегральных уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 60. С. 11–31.

# О методах поиска ограниченных решений неустойчивых линейных уравнений

А. В. Ильин, Е. И. Атамась

Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова

e-mail: iline@cs.msu.ru, eatamas@cs.msu.ru

Задача обращения динамических систем, т.е. получения оценки неизвестного входного сигнала по известным измерениям выходного, является классической в математической теории управления и имеет большое значение как для теории, так и для приложений.

При рассмотрении различных постановок задачи обращения часто возникает следующая задача: найти (в том или ином смысле) ограниченное решение неустойчивого линейного уравнения. Сами эти уравнения могут иметь различную природу и относиться к обыкновенным дифференциальным, функционально-дифференциальным или разностным уравнениям. Все указанные классы уравнений обладают значительным сходством и являются связанными друг с другом.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t). \quad (1)$$

Нас будет интересовать следующая постановка задачи. В момент времени  $t$  необходимо получить оценку (асимптотическую или с заданной степенью точности) для ограниченного решения уравнения (1) решения на отрезке  $[t_0, t]$ , если значения правой части  $f(t)$  известны только на отрезке  $[t_0, t]$ .

Известен следующий классический результат [1].

**Теорема 1.** Пусть в уравнении (1) функция  $f(t)$  является непрерывной и ограниченной на полуоси  $[t_0; +\infty)$ ,  $A$  — линейный постоянный непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве, а спектр оператора  $A$  не пересекается с мнимой осью и целиком расположен в правой полуплоскости. Тогда уравнение (1) имеет асимптотически единственное ограниченное на полуоси  $[t_0; +\infty)$  решение.

Таким образом, искомое решение существует при выполнении условий теоремы. Далее возникает вопрос о том, как отыскать его на практике.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть функция  $\hat{f}(t)$  задана на сегменте  $[t_0, t_1]$ ,  $t_0 \leq t_1$ , непрерывна и удовлетворяет условиям  $|\hat{f}(t)| \leq f_0$ ,  $f_0 > 0$ . Далее, пусть значение  $\hat{f}_0$  таково, что на сегменте  $[t_0, t_1]$  решение  $x(t)$  системы (1) с начальным условием  $\hat{f}_0$  удовлетворяет оценке  $|x(t)| < C f_0$ , где константа  $C$  зависит только от матрицы  $A$ . Тогда  $\hat{f}(t)$  можно продолжить до функции  $f(t)$ , определенной и непрерывной на  $[t_0, +\infty)$  и удовлетворяющей тем же ограничениям, так, что соответствующее решение уравнения (1) с начальным условием  $\hat{f}_0$  ограничено.

Из приведенной теоремы следует, что для решения поставленной задачи необходимо привлечение дополнительной информации о системе.

В докладе будет рассказано о возможных практических подходах к решению рассматриваемой задачи (в том числе о том, какую дополнительную информацию для её решения можно привлекать) и об их робастности по отношению к различным классам возмущений.

Также аналогичные задачи рассматриваются для систем разностных и функционально-дифференциальных уравнений.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты № 20-57-00001, 18-37-00106.

1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В. О задаче поиска ограниченного решения неустойчивого дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 111–116.
3. Атамась Е.И. Восстановление ограниченных решений неустойчивых уравнений запаздывающего типа // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 8. С. 1113.

## К вопросу об устойчивости решений нелинейных уравнений Ито с последствием

**Р. И. Кадиев**

г. Махачкала, Дагестанский государственный университет,  
Дагестанский государственный университет народного хозяйства  
e-mail: kadiev\_r@mail.ru

Для нелинейных дифференциальных уравнений Ито с последствием

ем вопросы устойчивости мало изучены. Для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений изучались вопросы локальной и глобальной устойчивости решений. В случае линейных уравнений локальная и глобальная устойчивость решений эквивалентны, а в нелинейном случае из глобальной устойчивости решения следует локальная устойчивость этого же решения, а обратное неверно. Кроме того, в случае линейных уравнений из локальной устойчивости некоторого решения уравнения следует локальная устойчивость любого решения этого же уравнения, а в случае нелинейных уравнений этот факт не имеет места.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$  — стохастический базис;  $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, m$  — независимые стандартные винеровские процессы;  $\mu$  — мера Лебега на  $[0, +\infty)$ .

Объектом исследования является система дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями вида

$$\begin{aligned} dx(t) &= F(t, x(t), x(h_{01}(t)), \dots, x(h_{0m_0}(t)))dt + \\ &+ \sum_{l=1}^m G^l(t, x(t), x(h_{l1}(t)), \dots, x(h_{lm_l}(t)))d\mathcal{B}_l(t) \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t < 0), \quad (1a)$$

$$x(0) = b, \quad (1b)$$

где:

1.  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$  — неизвестный  $n$ -мерный случайный процесс;
2.  $F(\cdot, u)$  — измеримая по Борелю  $n$ -мерная функция, заданная на  $[0, \infty)$ ,  $F_{ij}(\cdot, \cdot)$  — непрерывная функция на  $R^{m_0+1}$ ;
3.  $G^l(\cdot, u)$  — измеримая по Борелю  $n$ -мерная функция, заданная на  $[0, \infty)$ ,  $G^l(\cdot, \cdot)$  — непрерывная функция на  $R^{m_l+1}$  при  $l = 1, \dots, m$ ;
4.  $h_{lj}$  — измеримая по Борелю функция, заданная на  $[0, \infty)$  такая, что  $0 \leq t - h_{lj}(t)$  ( $t \in [0, \infty)$ )  $\mu$ -почти всюду при  $l = 0, \dots, m, j = 1, \dots, m_l$ ;
5.  $\varphi$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримый  $n$ -мерный случайный процесс;
6.  $b$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримая  $n$ -мерная случайная величина.

Пусть в дальнейшем функции  $F(t, u)$ ,  $G^l(t, u)$ ,  $l = 1, \dots, m$  таковы, что  $F(t, 0) = 0$ ,  $G^l(t, 0) = 0$ ,  $l = 1, \dots, m$ , ( $t \in [0, \infty)$ )  $\mu$ -почти всюду. Тогда задача (1), (1a), (1b) с нулевыми начальными условиями (1a), (1b) имеет тривиальное решение. Это решение будем называть тривиальным решением системы (1).

В докладе исследуются вопросы глобальной моментной устойчивости системы (1) относительно начальных данных и локальной моментной

устойчивости тривиального решения системы (1) относительно начальных данных. Исследование проведено методом вспомогательных или модельных уравнений с использованием теории положительно обратимых матриц. Такой подход позволяет получить новые результаты не только для нелинейных уравнений, но и для линейных уравнений, как частный случай нелинейных уравнений. Получены достаточные условия глобальной моментной устойчивости системы (1) относительно начальных данных и локальной моментной устойчивости тривиального решения системы (1) относительно начальных данных в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам системы (1).

## Об устойчивости линейных разностных уравнений с тремя запаздываниями

А. А. Кандаков

*Пермь, Пермский национальный исследовательский университет*

e-mail: kandakov.sasha@gmail.com

Работа посвящена описанию областей экспоненциальной устойчивости линейных автономных разностных уравнений произвольного порядка с тремя идущими подряд запаздываниями. Границы областей получены в явном виде, при этом показано, что эти границы линейчатые.

Рассмотрим уравнение

$$x(n) = ax(n - (k - 1)) + bx(n - k) + cx(n - (k + 1)), \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (1)$$

где  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Определение 1.** *Решением* уравнения (1) назовем функцию  $x: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую равенству (1) для всех  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Очевидно, что равенства  $x(-n) = \varphi(-n)$  однозначно определяют решение для каждой *начальной функции*  $\varphi: \{-k, \dots, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Понятие устойчивости решения отражает непрерывность зависимости решения от начальной функции.

**Определение 2.** Уравнение (1) будем называть *экспоненциально устойчивым*, если существует такая константа  $\gamma > 0$ , что для каждого решения  $x$  при некотором  $M > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}_0$  имеем  $|x(n)| \leq Me^{-\gamma n}$ .

**Определение 3.** Областью экспоненциальной устойчивости уравнения (1) называется множество точек  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , соответствующих экспоненциально устойчивым уравнениям.

**Определение 4.** Назовем границу области в  $\mathbb{R}^3$  *линейчатой*, если она является объединением отрезков, полупрямых и прямых.

Задачу построения области устойчивости уравнения (1) помогает решить известный метод D-разбиения [1]. При этом удается показать, что границы области линейчатые (что совсем не очевидно визуально, даже для низких порядков, см. рис. 1), а их описание включает многочлены Чебышёва  $T_k(s)$  и  $U_{k-1}(s)$  первого и второго рода соответственно.

Отметим, что эффективность использования линейчатости границ области устойчивости при исследовании условий устойчивости квазиполиномов показана в недавних работах М. В. Мулюкова [2–4].

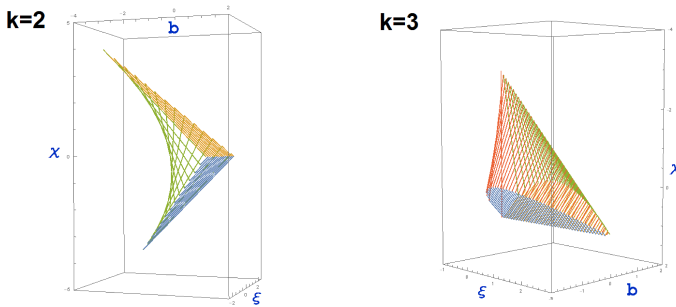


Рис. 1: Область устойчивости уравнения (1) при  $k = 2$  и  $k = 3$ .

**Теорема.** Уравнение (1) экспоненциально устойчиво, если и только если точка  $(a - c; b; a + c)$  попадает в область в системе координат  $O\xi b\chi$ , содержащую точку  $(0; 0; 0)$  и ограниченную поверхностями

$$\begin{aligned}
 b &= 1 - \chi, & b &= (-1)^k + \chi, \\
 \begin{cases} T_k(s) = \chi s + b, \\ U_{k-1}(s) = \xi; \end{cases} & & s &\in [-1, 1].
 \end{aligned}$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-01-00928.

1. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949. 140 с.
2. *Мулюков М.В.* Устойчивость двухпараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 51. С. 79–122.
3. *Мулюков М.В.* Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Часть I // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 2019–2054.
4. *Мулюков М.В.* Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Часть II // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 2055–2079.

## Бифуркации пространственно неоднородных решений в периодической краевой задаче для одного функционально-дифференциального уравнения, моделирующего процесс эрозии

**А. М. Ковалева**

*Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова*

e-mail: anastasia2kovaleva@gmail.com

В работе рассмотрено функционально-дифференциальное уравнение

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - cw_x + c_1 w_x^2. \quad (1)$$

В приведенном уравнении  $w(t, x) = u(t, x - h)$ . Считаем, что параметр  $c > 0$ .

Уравнение (1) моделирует процесс формирования рельефа на поверхности полупроводников под влиянием потока ионов [1, 2]. Изучаемая математическая модель объединяет идеи по учету нелокальных эффектов [3] с другой, традиционной математической моделью данного технологического процесса (моделью Бредли-Харпера).

При изучении данной модели было рассмотрено два варианта пространственного отклонения  $h = \pi/2$ ,  $h = \pi/3$ .

Данное уравнение изучалось с периодическим краевым условием

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi) \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(0, x) = f(x).$$

Для краевой задачи (1), (2) был изучен вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений. Было показано, что для однородных состояний равновесия могут быть реализованы критические случаи трех типов, и для каждого критического случая была рассмотрена соответствующая ему бифуркационная задача:

1. Критический случай одной пары чисто мнимых собственных значений. В этом случае бифурцируют зависящие от  $x$  и периодические по  $t$  решения второго рода.
2. Критический случай двукратного нулевого собственного значения спектра устойчивости. Изучение соответствующей бифуркационной задачи показало возможность появления решений, которые являются по переменной  $t$  периодическими функциями второго рода.
3. Критический случай коразмерности два, когда на мнимой оси находятся две пары чисто мнимых нерезонансных собственных значений. В этом случае могут возникнуть решения, которые являются периодическими решениями второго рода, а также пространственно неоднородные решения, у которых есть две составляющие: линейная функция от  $t$  и квазипериодическая функция переменного  $t$  (квазипериодическими решениями второго рода).

В работе был проведен анализ линеаризованных задач, построены и изучены нормальные формы, изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесий, были получены асимптотические формулы пространственно неоднородных решений и условия их устойчивости.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-01-00672.

1. *Bradley R.M., Harper J.M.F.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // *J. Vac. Sci. Technol. A*. 1988. Vol. 6. No. 4. Pp. 2390–2395.
2. *Sigmund P.* A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment // *J. Mat. Sci.* 1973. Vol. 8. Pp. 1545.
3. *Bachurin V.I., Rudy A.S., Smirnov V.K.* Nanoscale Model of Surface Erosion by Ion Bombardment // *Radiation Effects and Defects in Solids*. 2006. Vol. 161. No. 6. Pp. 319–329.



# О разрешимости одной периодической краевой задачи для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

**И. Ю. Колпаков**

*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический  
университет, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет*

e-mail: kolpakov.ilia@mail.ru

Рассмотрим нелинейную периодическую задачу для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

$$\dot{x} = f(t, (Ax)(t), (B\dot{x})(t)), \quad x(0) = x(T), \quad t \in [0; T], \quad (1)$$

где функция  $f: [0; T] \times R \times R \rightarrow R$  удовлетворяет условию Каратеодори,  $A: D_p \rightarrow L_p$ ,  $B: L_p \rightarrow L_p$  — линейные ограниченные операторы.

Пусть  $L_p$  — пространство суммируемых в степени  $p$  на отрезке  $[0; T]$  функций,  $D_p$  — пространство абсолютно непрерывных на отрезке  $[0; T]$  функций с нормой  $\|x\|_{D_p} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_p}$ . Под решением понимается такой элемент пространства  $D_p$ , который почти всюду на отрезке  $[0; T]$  удовлетворяет уравнению и краевому условию задачи (1).

Исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, в том числе и задачи (1), посвящено большое количество работ. Среди них следует особо выделить работы Н. В. Азбелева, Л. Ф. Рахматуллиной, В. П. Максимова и др. (в частности, [1]), в основе которых лежит применение «W-метода», а также работы А. В. Арутюнова, Е. С. Жуковского и др. (в частности, [2]), в основе которых лежит применение теории накрывающих отображений. В настоящей работе для получения условий разрешимости задачи (1) применяется подход [3], основанный на применении теоремы о неявном операторе. Для этого задача (1) заменяется эквивалентным ей квазилинейным операторным уравнением:

$$Lx = Fx$$

в пространстве  $X = \{x \in D_p[0; T] \mid x(0) = x(T)\}$ , где операторы  $L, F: X \rightarrow Y = L_p[0; T]$  определены равенствами:  $(Lx)(t) = \dot{x}(t)$ ,  $(Fx)(t) = f(t, (Ax)(t), (B\dot{x})(t))$ . Отметим, что краевая задача (1) является резонансной, так как оператор  $L: X \rightarrow Y$  не обратим.

**Теорема.** Пусть  $A: D_p \rightarrow L_p$ ,  $B: L_p \rightarrow L_p$  — линейные ограниченные операторы, функция  $f(t, \nu, w)$  удовлетворяет условию Каратеодори и вместе со своей частной производной по второму аргументу удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(t, \nu_1, w_1) - f(t, \nu_2, w_2)| \leq k_1|\nu_1 - \nu_2| + k_2|w_1 - w_2|,$$

$$|f'_2(t, \nu_1, w_1) - f'_2(t, \nu_2, w_2)| \leq c_1|\nu_1 - \nu_2| + c_2|w_1 - w_2|.$$

Тогда если  $f'_2(t, \nu, w)$  непрерывна в точке  $x = 0$ , и выполнены условия:

$$\int_0^T f(s, 0, 0)ds = 0, \quad |f(t, \nu, w)| \leq a_0 + b_0|\nu| + b_1|w|, \quad bT^{1/q} < 1,$$

$$\frac{T^{1/q}(a_0T^{1/p} + b\rho)}{1 - bT^{1/q}} \leq \frac{1}{mc(\sqrt{mk} + 1 + \sqrt{mk})^2},$$

где

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \quad (p > 1), \quad \rho = \frac{\sqrt{mk}}{mc(\sqrt{mk} + 1 + \sqrt{mk})}, \quad m = \frac{T^{1+1/p}}{\left| \int_0^T f'_2(s, 0, 0)e(s)ds \right|},$$

$e(t)$  — значение оператора  $A$  на единичном элементе  $D_p$ ,

$$b = \max(b_0 \|A\| T^{1/p}; b_0 \|A\| T + b_1 \|B\|),$$

$$c = \|e(t)\|_{L_q} T^{-1/q} \max(c_1 \|A\| T^{1/p}; c_1 \|A\| T + c_2 \|B\|),$$

$$k = \max(k_1 \|A\| T^{1/p}; k_1 \|A\| T + k_2 \|B\|),$$

то существует решение задачи (1) на шаре  $\overline{S_R(0)} \subset D_p[0; T]$  с центром в точке  $x = 0$  и радиусом  $R = \frac{T^{1/q}(a_0T^{1/p} + b\rho)}{1 - bT^{1/q}}$ .

1. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 5. С. 771–797.
2. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
3. Колпаков И.Ю. О разрешимости квазилинейных операторных уравнений // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. 2002. С. 21–27.

## Об одной стохастической модели акустических волн

К. Ю. Котлованов, Е. В. Бычков

Челябинск, ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)»

e-mail: kotlovanovki@susu.ru, bychkovev@susu.ru

В докладе представлены результаты, полученные для абстрактного стохастического гиперболического уравнения и их приложение к математической модели распространения акустических волн в ограниченной области из  $R^n$  с гладкой границей.

Рассмотрим задачу

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} u(\tau) = u_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} \overset{\circ}{u}_t(\tau) = u_1, \quad (1)$$

для абстрактного уравнения

$$u_{tt} = B_0 u + Nf, \quad (2)$$

где  $B_0 \in L(V_K L_2; V_K L_2)$ ,  $u \in C^{l+2}(I; V_K L_2)$  — искомый случайный  $K$ -процесс,  $f \in C^{l+1}(I; V_K L_2)$  — «белый шум».

**Определение 1.** Случайный  $K$ -процесс  $u \in C^{l+2}(I; V_K L_2)$  назовем решением уравнения (2), если почти наверное все его траектории удовлетворяют уравнению (2) при всех  $t \in I$ . Решение  $u = u(t)$  уравнения (2), назовем решением задачи (1)–(2), если оно удовлетворяет условию (2).

**Теорема 1.** Пусть оператор  $B_0 \in L(V_K L_2; V_K L_2)$ . Тогда при случайном процессе  $f$  таком, что  $Nf \in C^{l+1}(I, V_K L_2)$ , и независимых случайных величинах  $u_0, u_1$ , независимых с  $Nf$  при фиксированных  $t \in [0, \tau]$ , существует единственное решение  $u$  задачи (1)–(2).

Причем решение имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^1 U_k^t u_k + \int_0^t U_1^{t-s} Nf(s) ds.$$

В качестве приложения рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного стохастического гиперболического уравнения. Начальными данными являются случайные  $K$ -величины, а функция неоднородности — случайный  $K$ -процесс. При рассмотрении приложения функция

неоднородности задается как «белый шум». В данном случае под термином «белый шум» понимается первая производная в смысле Нельсона–Гликлиха винеровского  $K$ -процесса.

Пусть  $\Omega \subset R^n$  — ограниченная область с гладкой границей  $\partial\Omega$ . В цилиндре  $\Omega \times R_+$  рассмотрим уравнение

$$\overset{\circ}{u}_{tt} = a^2 \Delta u + \overset{\circ}{\omega}_{K_t} \quad (3)$$

с начальными условиями Коши

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} u(\tau) = u_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} \overset{\circ}{u}_t(\tau) = u_1, \quad (4)$$

где  $a$  — фазовая скорость распространения волны (скорость звука в среде), а  $\overset{\circ}{\omega}_{K_t}$  — «белый шум», характеризующий источники звука внутри области,  $u_0$  и  $u_1$  — начальная форма волны и начальная скорость волны (случайные величины), соответственно. Символом  $\overset{\circ}{u}_t$  ( $\overset{\circ}{u}_{tt}$ ) обозначим первую (вторую) производную Нельсона–Гликлиха случайного процесса  $u$ . Под «белым шумом»  $\overset{\circ}{\omega}_{K_t}(t)$  будем понимать первую производную Нельсона–Гликлиха винеровского процесса  $\omega_K(t)$ , т.е.  $\overset{\circ}{\omega}_{K_t}(t) = \frac{\omega_K(t)}{2t}$ . На границе области зададим однородное условие Дирихле

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times R. \quad (5)$$

Таким образом, в силу теоремы 1 решение (3)–(5) имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda_k a t) \langle u_0, \phi_k \rangle \phi_k + \sum_{k=0}^{\infty} a \lambda_k \sin(\lambda_k a t) \langle u_1, \phi_k \rangle \phi_k + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda_k a(t-s)) \langle \omega_K(s), \phi_k \rangle \phi_k ds.$$

1. Гликлих Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 27 (256). С. 24–34.
2. Патент РФ № 2018134860, 02.10.2018. Способ оценивания акустической безопасности // Патент на изобретение RU 2699737, 09.09.2019 / Богомолов А.В., Драган С.П., Харитонов В.В., Свиридюк Г.А., Манакова Н.А.

# Нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Ярославль, Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

e-mail: kulikov\_d\_a@mail.ru

Рассматривается периодическая краевая задача для интегро-дифференциального уравнения с частными производными

$$u_t = u - (b + ic)u|u|^2 - (b_1 + ic_1)uV(u) - idu_{xx}, \quad (1)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Здесь  $b, c, b_1, c_1 \in \mathbb{R}, b_1 + b = 1, b, b_1 \geq 0, d > 0, u = u(t, x)$  — комплекснозначная функция,  $V(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx$ . Уравнение (1) часто называют

нелокальным уравнением Гинзбурга–Ландау. Подчеркнем, что вариант, когда  $b_1 = c_1 = 0$ , достаточно известен под названием слабодиссипативный вариант уравнения Гинзбурга–Ландау. Иногда такой вариант уравнения называют обобщенным кубическим уравнением Шредингера [1, 2]. Нелокальное уравнение (1), включающее интегральное слагаемое, имеет содержательные физические приложения (см. [3] и статьи из списка литературы в данной работе).

Пусть  $b > 0$ . В таком случае справедливо утверждение.

**Теорема 1.** *У краевой задачи (1), (2) существует счетный набор одномерных  $t$  периодических решений вида*

$$u_n(t, x) = \exp(i\sigma_n t + inx), \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3)$$

где  $\sigma_n = dn^2 - (c + c_1)$ . Все решения семейства (3) устойчивы, если  $d > 2c$  и неустойчивы, если  $d < 2c$ . При  $d = 2c$  для каждой волны семейства (3) реализуется критический случай в задаче об устойчивости.

Пусть  $d = 2c - \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ .

**Теорема 2.** *Существует  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  в окрестности каждого решения из семейства (3) существует двумерное интегральное многообразие  $M_2(n, \varepsilon)$ , сформированное дупараметрическим семей-*

ством периодических по переменной  $t$  решений, для которых справедливы асимптотические формулы

$$u = u_n(t, x, \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\omega_n(\varepsilon)t + i\varphi_n) \times \left[ 1 + \varepsilon^{1/2}(-c + ib)\eta_{\pm} \cos(x + \alpha_n) + O(\varepsilon) \right], \quad (4)$$

где  $\omega_n(\varepsilon) = \omega(\varepsilon) = c\varepsilon(c(b^2 + 2c^2(b-1)) + 2bc^2c_1)/l + o(\varepsilon)$ ,  $\varphi_n, \alpha_n \in R$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{c}{l}}$ ,  $l = \frac{2(12b+3)c^4 + (2b^2 - 11b^3)c^2 + b^4}{6} > 0$  при всех  $c, b \in (0, 1]$ .

Эти все решения устойчивы в смысле определения Ляпунова.

Специальный случай  $b = c = 0$ . При таком варианте выбора коэффициентов уравнения (1) можно утверждать следующее.

**Теорема 3.** Краевая задача (1), (2) ( $b = c = 0$ ) имеет глобальный аттрактор  $V_{\infty}$ , выделяемый условиями:

$$f(x) \in V_{\infty}, \text{ если } 1) f(x) \in H_2^2; 2) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi.$$

Решения краевой задачи (1), (2) при указанном варианте выбора  $b$  и  $c$ , принадлежащие  $V_{\infty}$ , имеют вид

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(i(dn^2 - c_1)t) \exp(inx), \quad f_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) dx.$$

**Замечание 1.** Через  $H_2^2$  обозначено пространство Соболева периодических функций  $f(x)$ , для которых  $f(x), f'(x), f''(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ .

**Замечание 2.** Аттрактор  $V_{\infty}$  глобальный в следующем смысле: все решения краевой задачи при  $t \rightarrow \infty$  приближаются к нему, за исключением нулевого состояния равновесия.

Работа поддержана РФФИ, проект № 18-01-00672.

1. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. New-York: John Wiley and Sons Inc., 1974.
2. *Kulikov A.N., Kulikov D.A.* Local bifurcations of plane running waves of the generalized cubic Schrodinger equation // Differential Equations. 2010. Vol. 46. No. 9. Pp. 1299–1308.
3. *Duan J., Hung V.L., Titi E.S.* The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation // ZAMP. 1996. Vol. 47. No. 3. Pp. 432–455.

# Оценки центральных показателей одного класса линейных систем дифференциальных уравнений

**А. В. Ласунский**

*Великий Новгород, Новгородский государственный университет  
имени Ярослава Мудрого*

e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru

Рассмотрим линейную неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A(t) \in C(\mathbb{R}^+), \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\| \leq M. \quad (1)$$

Хорошо известно, что связь между поведением решений этой системы и собственными числами  $\lambda_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$  матрицы  $A(t)$  в общем случае отсутствует. Подборку соответствующих контрпримеров разных авторов можно найти, например, в [1].

Будем предполагать, что матрица  $A(t)$  системы (1) удовлетворяет для всех  $t, s \in \mathbb{R}^+$  неравенству

$$\|A(t) - A(s)\| \leq \delta |t - s|^\alpha \quad (2)$$

с некоторыми положительными постоянными  $\alpha$  и  $\delta$ . Случай  $\alpha > 1$  не интересен, так как в этом случае из неравенства (2) следует, что  $\dot{A}(t) = \mathbb{O}$  и система (1) автономна. Случай  $\alpha = 1$ , который при существовании  $\dot{A}(t)$  равносильен [2, с. 136] неравенству  $\|\dot{A}(t)\| \leq \delta$ , изучался в классических работах по методу замораживания. С историей этого вопроса можно ознакомиться в монографии [3]. Если  $\alpha \in (0; 1)$ , то  $\|\dot{A}(t)\|$  может быть неограниченной.

Положим

$$\rho = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(t), \quad \sigma = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \min_i \operatorname{Re} \lambda_i(t). \quad (3)$$

Для случая  $\alpha = 1$  в неравенстве (2) В. М. Алексеев получил оценку сверху верхнего особого показателя  $\Omega_0$  системы (1)

$$\Omega_0 \leq \rho + 2M \left( \frac{\delta n(n+1)}{8M^2} \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Методом В. М. Алексеева для случая  $\alpha \in (0; 1]$  получена оценка снизу нижнего особого показателя  $\omega_0$  и оценка сверху верхнего особого показателя  $\Omega_0$ , а следовательно, аналогичные оценки мы имеем для центральных  $\omega$ ,  $\Omega$ , младшего и старшего показателей  $\lambda$  и  $\Lambda$  системы (1). Эти оценки уточняют константы в оценках, полученных автором в [1] для показателей  $\lambda$  и  $\Lambda$ . Заметим, что для  $\alpha = 1$  оценка следующей теоремы обращается в оценку, полученную В. М. Алексеевым.

**Теорема.** Пусть матрица  $A(t)$  системы (1) удовлетворяет неравенству (2) с постоянными  $\alpha \in (0; 1]$  и  $\delta > 0$ , параметры  $\rho$  и  $\omega$  заданы соотношениями (3), тогда для верхнего особого показателя  $\Omega_0$  и для нижнего особого показателя  $\omega_0$  справедливы оценки

$$\Omega_0 \leq \rho + 2M \left( (2M)^{-1-\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+\alpha)}{(k-1)!} \right)^{\frac{1}{n+\alpha}} \delta^{\frac{1}{n+\alpha}}.$$

$$\omega_0 \geq \sigma - 2M \left( (2M)^{-1-\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+\alpha)}{(k-1)!} \right)^{\frac{1}{n+\alpha}} \delta^{\frac{1}{n+\alpha}},$$

Здесь  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция.

**Замечание.** Система (1) с матрицей  $A(t)$ , удовлетворяющей неравенству (2) с  $\alpha \in (0; 1]$ , может быть как правильной, так и неправильной. Это можно подтвердить соответствующими примерами.

1. Ласунский А.В. Оценки решений линейных и квазилинейных систем в неавтономном случае // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 177–185.
2. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
3. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: Изд-во БГУ, 2006.



## К вопросу об управляемости показателей Ляпунова вполне управляемых систем

**Е. К. Макаров**

*Минск, Институт математики НАН Беларуси*

e-mail: jcm@im.bas-net.by

**С. Н. Попова**

*Ижевск, УдГУ*

e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

с ограниченными и кусочно непрерывными матрицами коэффициентов  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ . Систему (1) при  $u = 0$  будем называть свободной системой. Ее матрицу Коши будем обозначать через  $X(\cdot, \cdot)$ .

Пусть управление  $u$  в системе (1) определяется по принципу линейной обратной связи, т.е.  $u = Ux$ , где  $m \times n$ -матрица  $U(\cdot)$  также предполагается ограниченной и кусочно непрерывной. Тогда исходная система (1) переходит в замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Матрицу Коши системы (2) обозначим через  $X_U(\cdot, \cdot)$ . Поскольку система (2) является однородной и имеет ограниченные коэффициенты, для нее определен обычный спектр показателей Ляпунова и другие ляпуновские инварианты. Под действием выбора матричного коэффициента обратной связи  $U$ , который мы будем называть *матричным управлением*, эти инварианты могут изменяться. Тем самым будет осуществляться управление ими. Вопрос об условиях различным образом понимаемой управляемости ляпуновских инвариантов системы (2) детально рассматривается в [1] в предположении равномерной полной управляемости исходной системы (1).

Система (1) называется *вполне управляемой* на положительной полуоси  $t \geq 0$ , если для любого  $t_0 \geq 0$  существует  $\sigma(t_0) > 0$ , такое что для любого  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  на отрезке  $[t_0, t_0 + \sigma(t_0)]$  определено управление  $u(t, t_0, x_0)$ , переводящее состояние  $x_0$  в нулевое состояние на этом отрезке. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* на положительной

полуоси  $t \geq 0$ , если она вполне управляема там, и существуют такие положительные числа  $\sigma$  и  $\gamma$ , что при всех  $t_0 \geq 0$  выполнены неравенства  $\sigma(t_0) \leq \sigma$  и, при всех  $t \in [t_0, t_0 + \sigma(t_0)]$ ,  $\|u(t, t_0, x_0)\| \leq \gamma \|x_0\|$ .

В [1, с. 340] приведен пример, показывающий, что равномерная полная управляемость исходной системы (1) не является необходимым условием (глобальной) управляемости показателей системы (2). Нетрудно проверить, что система в данном примере является вполне управляемой. В [2] установлено, что старшим показателем системы (2) можно управлять, если исходная система (1) вполне управляема (т.е. в отсутствие условия равномерности). При этом, однако, возможно возникновение необходимости использования неограниченного матричного управления  $U$ .

В случае ограниченности коэффициентов и используемых управлений достаточным условием управляемости показателей Ляпунова является достижимость системы (2). Обобщенно говоря, система (2) называется достижимой в том или ином смысле, если для любой матрицы  $H$  из некоторого целевого множества найдется допустимое матричное управление  $U(\cdot)$ , обеспечивающее выполнение при всех  $t \geq 0$  равенства  $X_U(t + \theta(t), t) = X(t + \theta(t), t)H$ , в котором  $\theta$  – некоторая заданная функция. В зависимости от выбора этой функции, целевого множества и множества допустимых управлений различаются отдельные виды достижимости, точные определения которых можно найти в [1, с. 146].

**Теорема.** *Если система (1) вполне управляема, то система (2) локально достижима.*

Если для некоторой системы (2) управления, построенные в доказательстве этой теоремы, ограничены на полуоси, то ее показатели Ляпунова локально управляемы. Однако, потенциально возможное в данной ситуации возникновение неограниченных управлений делает неэффективным прямое использование достижимости в качестве условия управляемости показателей для вполне управляемой системы в общем случае.

Работа первого автора поддержана БРФФИ, договор № Ф20Р–005. Работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00293.

1. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларуская навука, 2012.
2. *Anderson B.D.O., Ilchmann A., Wirth F.R.* Stabilizability of linear time-varying systems // *Systems & Control Letters*. 2013. Vol. 65. Pp. 747–755.

# О различных видах устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений

В. В. Малыгина

Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет  
e-mail: mavera@list.ru

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) + \int_a^t x(s) d_s r(t, s) = f(t), \quad t \geq a, \quad (1)$$

где  $r(t, \cdot)$  — функция ограниченной вариации,  $\rho(t) = \text{var}_{s \in [a, t]} r(t, s)$ , интеграл понимается в смысле Римана-Стилтьеса,  $r(t, a) = 0$ , функция  $r(\cdot, s)$  измерима, а функции  $\rho$  и  $f$  — локально суммируемы.

Как известно [1], уравнение (1) с заданным начальным условием однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций и его решение представимо в виде

$$x(t) = C(t, a)x(a) + \int_0^t C(t, s)f(s) ds. \quad (2)$$

Функция  $C$  называется *функцией Коши* уравнения (1). Из (2) следует, что любые асимптотические свойства решений уравнения (1) определяются асимптотическими свойствами функции Коши.

Обозначим  $h(t) = \sup\{s \in [0, t] : r(t', s') = 0 \forall t' \geq t \forall s' \leq s\}$ .

Назовем (1) *уравнением с ограниченным последствием*, если

$$\sup_{t \geq a} \int_{h(t)}^t \rho(s) ds < \infty. \quad (3)$$

**Замечание.** Требование (3) заведомо выполнено, если функции  $\rho(t)$  и  $t - h(t)$  ограничены в существенном или выполняется условие Массера:

$$t - h(t) \leq \omega, \quad \sup_{t \geq a} \int_t^{t+\omega} \rho(s) ds < \infty.$$

Для уравнений с ограниченным последствием определения устойчивости, даваемые в терминах начальных функций [2, с. 130], могут быть заменены соответствующими свойствами функции Коши.

**Определение.** Назовем уравнение (1)

- *устойчивым по Ляпунову*, если  $|C(t, s)| \leq K_s$ ;
- *асимптотически устойчивым*, если  $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t, s) = 0$ ;
- *экспоненциально устойчивым*, если  $|C(t, s)| \leq K_s e^{-\gamma s t}$ ;
- *равномерно устойчивым*, если  $|C(t, s)| \leq K$ ;
- *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и  $\lim_{t-s \rightarrow \infty} C(t, s) = 0$  равномерно по  $s$ ;
- *равномерно экспоненциально устойчивым*, если выполнено неравенство  $|C(t, s)| \leq K e^{-\gamma(t-s)}$ .

**Теорема.** Пусть (1) является уравнением с ограниченным последствием. Тогда равномерная асимптотическая устойчивость совпадает с равномерной экспоненциальной.

Требование ограниченности последствия в теореме отбросить нельзя. Это показывает следующий пример, приведенный в работе [3].

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + x(t) = \frac{x(0)}{(1+t)^2}, \quad t \geq 0.$$

Легко видеть, что  $C(t, 0) = e^{-t} + \int_0^t \frac{e^{\zeta-t}}{(1+\zeta)^2} d\zeta \geq \frac{1}{(1+t)^2}$ , а при  $s > 0$  имеем  $C(t, s) = e^{s-t}$ , т.е. уравнение равномерно асимптотически устойчиво, но не является экспоненциально устойчивым. Очевидно, что в этом примере нарушено условие (3).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-01-00928.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1991.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. *Kulikov A., Malygina V.* On relation between uniform asymptotic stability and exponential stability of linear differential equations // Electron. J. Qualitat. Theory Differential Equations. 2015. No. 65. Pp. 1–8.

## Об одной нелинейной обратной краевой задаче для псевдо-параболического уравнения третьего порядка с неклассическими краевыми условиями

Я. Т. Мегралиев, А. И. Исмаилов

*Баку, Бакинский государственный университет*

e-mail: yashar\_aze@mail.ru, ismayilov.arif58e@mail.ru

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. Основы теории и практики исследования обратных задач математической физики были заложены и развиты в фундаментальных работах выдающихся ученых — А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2], В. К. Иванова [3] и их учеников.

Пусть  $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ . Предположим, что  $\alpha(t) > 0$ ,  $\beta(t) > 0$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $h(t)$  — заданные функции, определенные при  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$ . Рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти пару  $\{u(x, t), p(t)\}$  функций  $u(x, t)$ ,  $p(t)$ , удовлетворяющих уравнению

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \alpha(t)u_{txx}(x, t) - \beta(t)u_{xx}(x, t) = \\ = p(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (x, t) \in D_T, \end{aligned} \tag{1}$$

нелокальному начальному условию

$$u(x, 0) + \delta u(x, T) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \tag{2}$$

граничному условию Дирихле

$$u(0, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

неклассическому краевому условию

$$u_x(1, t) + du_{xx}(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T),$$

где  $x_0 \in (0, 1)$ ,  $d > 0$ ,  $\delta \geq 0$  — заданные числа.

Введем обозначение:

$$\tilde{C}^{2,1}(D_T) = \{u(x, t) : u(x, t) \in C^{2,1}(D_T), u_{txx}(x, t) \in C(D_T)\}.$$

**Определение 1.** Пару  $\{u(x, t), p(t)\}$  функций  $u(x, t) \in \tilde{C}^{2,1}(D_T)$  и  $p(t) \in C[0, T]$ , удовлетворяющих уравнению (1) в  $D_T$ , условию (2) на  $[0, 1]$  и условиям (3)–(5) на  $[0, T]$ , назовем *классическим решением* обратной краевой задачи (1)–(5).

Сначала исходная задача сводится к эквивалентной в определенном смысле задаче. С помощью метода Фурье эквивалентная задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказываются существование и единственность решения системы интегральных уравнений, которое также является единственным решением эквивалентной задачи. Пользуясь эквивалентностью, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

1. *Тихонов А.И.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.
2. *Лаврентьев М.М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 3. С. 520–521.
3. *Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

## Накрывающие отображения обобщенных метрических пространств в исследовании интегральных уравнений

**В. Мерчела**

*Тамбов, Тамбовский гос. университет им. Г.Р. Державина*

e-mail: merchela.wassim@gmail.com

Обозначим  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ,  $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ ,  $X = (X, \rho)$  — пространство с  $\infty$ -метрикой  $\rho: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ . Обозначим  $P(x) = \{u \in X \mid \rho(x, u) < \infty\}$ ,  $x \in X$ . Пусть на множестве  $Y \neq \emptyset$  определено расстояние  $d: Y \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , удовлетворяющее условию

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

Пусть  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha > 0$  и задано отображение  $f: X \rightarrow Y$ . Следуя работе [1], определим множества:

$$\text{Lip}_\beta[f] := \{(x, y) \in X \times Y \mid \forall u \in X \quad f(u) = y \Rightarrow d(f(x), y) \leq \beta \rho(x, u)\};$$

$\text{Cov}_\alpha[f] := \{(x, y) \in X \times Y \mid \exists u \in P(x) \ f(u) = y, \ \rho(x, u) \leq \alpha^{-1}d(f(x), y)\}$ .

В терминах этих множеств ниже формулируются условия разрешимости интегрального уравнения в пространстве  $\mathbb{S}$  измеримых по (Лебегу) функций  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Пусть задана функция  $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Будем предполагать, что функция  $\theta$  непрерывна по каждому аргументу,  $\theta(z, z) = 0$  при всех  $z \in \mathbb{R}$  и имеет место соотношение

$$\forall \delta > 0 \ \exists \gamma > 0 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R} \quad |z_1 - z_2| \geq \delta \Rightarrow \theta(z_1, z_2) \geq \gamma.$$

Зададим расстояние в пространстве  $\mathbb{S}$  отображением

$$d^\theta : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad d^\theta(z_1, z_2) = \text{vrai sup}_{t \in [0, 1]} \theta(z_1(t), z_2(t)), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{S}.$$

Для  $d^\theta$  очевидно выполнена аксиома тождества, но это расстояние не обязано быть симметричным и может не удовлетворять неравенству треугольника. Но, например, для функции  $\theta_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , определенной формулой

$$\theta_0(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,$$

соответствующее отображение  $d^{\theta_0} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  является  $\infty$ -метрикой в пространстве  $\mathbb{S}$ .

В [2] найдены условия разрешимости уравнений в метрических пространствах, использующие множества  $\text{Lip}_\beta[f]$  и  $\text{Cov}_\alpha[f]$ . В данном сообщении этот результат распространен на уравнения в пространствах с обобщенными метриками, полученное утверждение применено к исследованию интегрального уравнения.

Пусть функция  $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, функция  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  измерима и  $k_0 := \text{vrai sup}_{t \in [0, 1]} \int_0^1 |K(t, s)| ds < \infty$ . Рассмотрим уравнение

$$g(t, \int_0^1 K(t, s)x(s)ds, x(t)) = 0, \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

относительной неизвестной функции  $x \in \mathbb{S}$ .

**Теорема.** Пусть заданы  $\alpha > \beta \geq 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{S}$  такие, что

$$R = \text{vrai sup}_{t \in [0, 1]} \frac{\theta(g(t, w_0(t), x_0(t)), 0)}{\alpha - \beta} < \infty, \quad \text{где } w_0(t) = \int_0^1 K(t, s)x_0(s)ds.$$

Обозначим  $I(t) = [x_0(t) - R, x_0(t) + R]$ ,  $J(t) = [w_0(t) - k_0R, w_0(t) + k_0R]$ .  
 Предположим, что при п.в.  $t \in [0, 1]$  выполнены следующие условия:

$$\forall x, z \in I(t) \quad (x, 0) \in \text{Lip}_{\widehat{\beta}}[g(t, \cdot, z)], \quad \text{где } \widehat{\beta} = \beta/k_0;$$

$$\forall w \in J(t) \quad \forall x \in I(t) \quad (x, 0) \in \text{Cov}_{\alpha}[g(t, w, \cdot)].$$

Тогда существует решение  $x \in \mathbb{S}$  уравнения (1) такое, что  $x(t) \in I(t)$  при п.в.  $t \in [0, 1]$ .

1. Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В. Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63.
2. Жуковский Е.С., Мерчела В. О непрерывной зависимости от параметра множества решений операторного уравнения // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 27–37.

## Равномерная устойчивость дифференциального уравнения с двукратным запаздыванием

**М. В. Мулюков**

*Пермь, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет  
e-mail: Mulykoff@gmail.com*

Дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x(t - 1) + \gamma x(t - 2) = 0 \tag{1}$$

интересно не только с теоретической точки зрения в качестве представителя класса уравнений с различными запаздываниями, но и с практической: оно используется для моделирования эпидемического процесса [1].

Отметим, что для любого  $h > 0$  изменением масштаба оси  $t$  можно добиться того, чтобы в уравнении (1) величины запаздывания стали равны  $h$  и  $2h$  соответственно.

Для корректной постановки задачи Коши для уравнения (1) его решение  $x$  доопределяется на полуинтервале  $[-2, 0)$  суммируемой начальной функцией  $\psi$  и начальными условиями  $x(0) \in \mathbb{R}$ .



**Определение 1.** *Фундаментальным решением уравнения (1) называется решение данного уравнения при  $\psi(t) \equiv 0$  и  $x(0) = 1$ .*

**Определение 2.** Уравнение (1) называется *равномерно устойчивым*, если его фундаментальное решение ограничено.

Равномерная устойчивость уравнения эквивалентна ограниченности его решения при любых  $\psi$  и  $x(0)$ .

**Определение 3.** Функция  $\Phi(z) = z + a + be^{-z} + ce^{-2z}$  называется *характеристической функцией* уравнения (1).

Как известно, ограниченность фундаментального решения эквивалентна выполнению двух условий: во-первых, вещественная часть всех корней функции  $\Phi$  неположительна, во-вторых, корни с нулевой вещественной частью просты.

Критерий того, что все корни функции  $\Phi$  лежат слева от мнимой оси, получен в работе [2]: область устойчивости является линейно связная неограниченная трёхмерная область  $\mathcal{O}$ , которая наиболее просто описывается в параметрах  $\chi = \alpha + \gamma$ ,  $\beta$ ,  $\zeta = \alpha - \gamma$ .

Таким образом, исследование равномерной устойчивости сводится к изучению кратности корней функции  $\Phi$  на границе области  $\mathcal{O}$ .

**Теорема.** *Для того, чтобы уравнение (1) было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия  $\zeta > -1$ ,  $\chi + \beta \geq 0$ , и выполнялось одно из следующих условий:*

- $\zeta = 0$  и  $\beta \in [-3\pi/2, \pi/2]$ ,
- $\zeta \in (-1, 0)$  и  $\beta \in [\eta_1 \sin \eta_1 - \chi \cos \eta_1, \eta_2 \sin \eta_2 - \chi \cos \eta_2]$ ,
- $\zeta > 0$  и  $\chi \geq (\psi \sin \psi - \beta) / \cos \psi$ ,

где  $\eta_m$  — корень уравнения  $\zeta = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$  из интервала  $(\pi(n-1), \pi n)$ ,  $n \geq 1$ ,

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta \in [-\sqrt{\eta_2^2 + \zeta^2} - \zeta, \sqrt{\eta_1^2 + \zeta^2} - \zeta), \\ \eta_1, & \text{если } \beta \in [\sqrt{\eta_1^2 + \zeta^2} - \zeta, \sqrt{\eta_1^2 + \zeta^2} + \sqrt{\eta_3^2 + \zeta^2}), \\ \eta_2, & \text{если } \beta \in [-\sqrt{\eta_2^2 + \zeta^2} - \sqrt{\eta_4^2 + \zeta^2}, -\sqrt{\eta_2^2 + \zeta^2} - \zeta), \\ \eta_m, & \text{если выполнено неравенство (2), где } m \geq 2. \end{cases}$$

$$\sqrt{\eta_{m-2}^2 + \zeta^2} + \sqrt{\eta_m^2 + \zeta^2} \leq \beta(-1)^{m-1} < \sqrt{\eta_m^2 + \zeta^2} + \sqrt{\eta_{m+2}^2 + \zeta^2}. \quad (2)$$

Характер потери устойчивости при выходе из области  $\mathcal{O}$  устойчивости различен. На границе  $\mathcal{O}$  за исключением плоскости  $\zeta = -1$  фундаментальное решение ограничено. В плоскости  $\zeta = -1$  сечение замыкания  $\mathcal{O}$  — отрезок. На данном отрезке фундаментальное решение — линейная функция за исключением точки  $\beta = -\chi = 2$ , в которой фундаментальное решение — квадратичная функция.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18–01–00928.

1. *Малыгина В.В., Мулюков М.В., Перцев Н.В.* О локальной асимптотической устойчивости одной модели эпидемического процесса // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 1301–1310. DOI 10.17377/semi.2018.15.106
2. *Мулюков М.В.* Устойчивость линейного дифференциального уравнения с двукратным запаздыванием // Сборник трудов VIII международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». Воронеж, 2015. С. 258–260.

## Теорема Сильвестра, матрица Вандермонда и некоммутативные формулы Вьета

**А. И. Перов, И. Д. Коструб**

*Воронеж, Воронежский государственный университет*  
e-mail: anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru

В комплексной банаховой алгебре  $\mathbb{B}$  рассмотрим линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{p}_1 \mathbf{x}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{p}_{n-1} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_n \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами. Если по методу Эйлера искать решение этого уравнения в виде  $\exp(t\mathbf{a})$ , где  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{B}$ , то мы придем к алгебраическому уравнению  $n$ -й степени, называемому *характеристическим*:

$$\mathbf{l}_n(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a}^n + \mathbf{p}_1 \mathbf{a}^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{a} + \mathbf{p}_n = \mathbf{0}.$$

Предположим, что это уравнение имеет  $n$  корней  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , причем выполнено *условие разделенности*: разности  $\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k$  обратимы при всех  $j \neq k$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ .

**Теорема 1.** При выполнении условия разделенности общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{x} = e^{t\mathbf{a}_1} \mathbf{c}_1 + \dots + e^{t\mathbf{a}_n} \mathbf{c}_n,$$

где  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  — произвольные постоянные из  $\mathbb{B}$ .

Наряду с характеристическим многочленом  $\mathbf{I}_n(\mathbf{a})$ , рассмотрим скалярный характеристический многочлен (пучок)

$$\mathbf{I}_n(\lambda) \equiv \lambda^n + \mathbf{p}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_{n-1} \lambda + \mathbf{p}_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}.$$

Те  $\lambda$  из  $\mathbb{C}$ , для которых  $\mathbf{I}_n(\lambda)$  обратим, образуют резольвентное множество  $R$ .  $R$  есть непустое неограниченное открытое множество. Дополнение  $S = \mathbb{C} \setminus R$  называется спектром скалярного характеристического многочлена.  $S$  есть непустое ограниченное замкнутое множество. Определенная на резольвентном множестве функция  $\mathbf{r}_n(\lambda) \equiv \mathbf{I}_n^{-1}(\lambda) : R \rightarrow \mathbb{B}$  называется резольвентой  $n$ -го порядка.

**Теорема 2 (Сильвестр).** Спектр  $S(\mathbf{a})$  любого корня  $\mathbf{a}$  характеристического уравнения содержится в спектре  $S$  скалярного характеристического многочлена  $S(\mathbf{a}) \subseteq S$  ( $R(\mathbf{a}) \supseteq R$ ).

Перейдем от одного уравнения  $n$ -го порядка к системе  $n$  уравнений первого порядка  $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_3, \dots, \dot{\mathbf{x}}_n = -\mathbf{p}_n \mathbf{x}_1 - \dots - \mathbf{p}_1 \mathbf{x}_n$ , или

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x},$$

где  $\mathbf{x}$  из  $\mathbb{B}^n = \underbrace{\mathbb{B} \times \dots \times \mathbb{B}}_{n \text{ раз}}$ . Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} \\ -\mathbf{p}_n & -\mathbf{p}_{n-1} & -\mathbf{p}_{n-2} & \dots & -\mathbf{p}_1 \end{pmatrix}$$

называется сопровождающей матрицей Фробениуса.

**Теорема 3.** Спектр  $S(\mathbf{A})$  матрицы (оператора)  $\mathbf{A}$  совпадает со спектром  $S$  скалярного характеристического многочлена  $\mathbf{I}_n(\lambda) : S(\mathbf{A}) = S$  ( $R(\mathbf{A}) = R$ ).

По элементам  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  составим матрицу Вандермонда

$$\mathbf{W}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_1^{n-1} & \mathbf{a}_2^{n-1} & \dots & \mathbf{a}_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

**Теорема 4.** Матрица  $\mathbf{W}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  обратима тогда и только тогда, когда выполнено условие разделенности.

Если положить  $\mathbf{C} = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  и  $\mathbf{C} = (c_{jk})$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ , то справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть выполнено условие разделенности. Тогда согласно теореме 4 матрица Вандермонда  $\mathbf{W}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  обратима. В этом случае все элементы  $c_{jn}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , последнего  $n$ -го столбца обратной матрицы  $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  обратимы.

**Теорема 6.** Если выполнено условие разделенности, то

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \text{diag}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Из последней формулы вытекает, что

$$-\mathbf{p}_j = \mathbf{a}_1^n c_{1,n+1-j} + \dots + \mathbf{a}_n^n c_{n,n+1-j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Мы выписали коэффициенты характеристического многочлена  $\mathbf{l}_n(\mathbf{a})$  через его корни  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Назовем эти формулы *некоммутативными формулами Вьета*. Если банахова алгебра  $\mathbb{W}$  является коммутативной, т. е. гельфандовой, то они принимают привычный вид:

$$\mathbf{p}_1 = -(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n), \dots, \mathbf{p}_n = (-1)^n \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n.$$

**Теорема 7 (Вьет).** Если выполнено условие разделенности, то справедливы некоммутативные формулы Вьета.

В этом сообщении использованы работы [1–11].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 19-01-00732.

1. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шиллов Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
2. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.

3. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
6. Курбатов В.Г., Курбатова И.В. Вычислительные методы спектральной теории. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019.
7. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. М.: ИЛ, 1960.
8. Перов А.И., Коструб И.Д. Об ограниченных решениях слабо нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 4. С. 830–849.
9. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
10. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964.
11. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М. : ИЛ, 1962.

## О разрешимости дифференциальных включений дробного порядка, заданных в неявном виде

Г. Г. Петросян

*Воронеж, Воронежский государственный университет  
инженерных технологий,*

*Воронежский государственный педагогический университет*

e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Рассматривается задача Коши для дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве  $E$  следующего вида:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) \in F(t, x(t), D^\alpha x(t)), & t \in [0, a], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где  $D^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) — дробная производная Капуто,  $F: [0, a] \times E \times E \rightarrow Kv(E)$  — мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, удовлетворяющее условиям:

(F1) Для всех  $(x, \xi) \in E \times E$  мультифункция  $F(\cdot, x, \xi): [0, a] \rightarrow Kv(E)$

допускает сильно измеримое сечение;

(F2) Для п.в.  $t \in [0, a]$  мультиотображение  $F(t, \cdot, \cdot): E \times E \rightarrow Kv(E)$  полунепрерывно сверху;

(F3) Для каждого  $n \in N$  существует функция  $\omega_n \in L^\infty([0, a])$  такая, что для любой функции  $x \in \bar{B}(0, n) \subset C([0, a]; E)$  выполнено:

$$\|F(t, x, D^\alpha x)\| := \sup \{\|f\|_E : f \in F(t, x(t), D^\alpha x(t))\} \leq \omega_n(t)$$

для п.в.  $t \in [0, a]$ ;

(F4) найдется функция  $\mu \in L^\infty([0, a])$ ,  $\mu(t) \neq 1$  для п.в.  $t \in [0, a]$  такая, что для любых ограниченных множеств  $\Delta \subset E$  и  $Q \subset E$  мы имеем:

$$\chi(F(t, Q, \Delta)) \leq \mu(t)(\chi(Q) + \chi(\Delta))$$

для п.в.  $t \in [0, a]$ , где  $\chi$  — мера некомпактности Хаусдорфа в  $E$ .

**Теорема 1.** При выполнении условий (F1) – (F4) множество решений поставленной задачи Коши на  $[0, \tau]$ ,  $0 < \tau \leq a$ , пусто.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

1. *Afanasova M., Liou Y. Ch., Obukhoskii V., Petrosyan G.* On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space // *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*. 2019. Vol. 20. No. 9. Pp. 1919–1935.
2. *Афанасова М.С., Петросян Г.Г.* О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве // *Известия вузов. Математика*. 2019. № 9. С. 3–15.
3. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C.* On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces // *Fixed Point Theory*. 2017. Vol. 18. No. 1. Pp. 269–292.
4. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C.* Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // *Applicable Analysis*. 2018. Vol. 97. No. 4. Pp. 571–591.
5. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C.* On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces // *Fixed Point Theory Appl*. 2017. Vol. 28. No. 4. Pp. 1–28.
6. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C.* Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential inclusions // *Fixed Point Theory Appl*. 2019. No. 2.

7. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C.* On a periodic boundary value problem for a fractional-order semilinear functional differential inclusions in a Banach space // Mathematics, Special Issue “Fixed Point, Optimization, and Applications”. 2019. Vol. 7. No. 12. Pp. 5–19.
8. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. Berlin–New–York: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter. 2001.
9. *Петросян Г.Г., Афанасова М.С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2017. Вып. 1. С. 135–151.
10. *Петросян Г.Г.* Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 1355–1358.

## О разрешимости периодической краевой задачи

**В. П. Плаксина**

*Пермь, ПНИПУ*

e-mail: vpplaksina@list.ru

Пусть  $W$  — пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций  $x: [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ , вторая производная которых принадлежит пространству  $L$  суммируемых на  $[0, \omega]$  функций; оператор  $T: W \rightarrow L$  вполне непрерывен;  $f \in L$ .

Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{x} + Tx = f, \tag{1}$$

$$x(\omega) - x(0) = 0, \quad \dot{x}(\omega) - \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

Пусть оператор  $G: L \rightarrow W$  является оператором Грина задачи для уравнения  $\ddot{x} - x = z$  с краевыми условиями (2). Тогда он определен равенством

$$(Gf)(t) = \int_0^\omega G(t, s)f(s) ds,$$

где

$$G(t, s) = -\frac{\operatorname{ch}\left(t-s+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2}}\theta(t-s) - \frac{\operatorname{ch}\left(s-t+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2}}\theta(s-t),$$
$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \geq 0, \\ 0, & \text{если } \tau < 0. \end{cases}$$

Применим к обеим частям уравнения (1) оператор  $G$ . Обозначим  $g = Gf$ . Задача (1)–(2) примет вид

$$x(t) + \int_0^{\omega} G(t, s)[x(s) + (Tx)(s)] ds = g. \quad (3)$$

Однозначная разрешимость уравнения (3) гарантирует однозначную разрешимость задачи (1)–(2) при любой правой части.

**Теорема.** Пусть оператор  $I + T: W \rightarrow L$  положителен в смысле теории конусов,  $I$  — тождественный оператор. Пусть, далее, существует положительная функция  $u \in W$ , удовлетворяющая условиям (2) и неравенству  $\ddot{u} + Tu < 0$ . Тогда задача (1)–(2) однозначно разрешима и ее решение неотрицательно при  $f \leq 0$ .

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Разматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютер. исследований, 2002.

## О применимости $W$ -метода Н. В. Азбелева к сингулярному дифференциальному уравнению, заданному на положительной полуоси

И. М. Плаксина

Пермь, ПНИПУ

e-mail: impl@list.ru

В задачах для радиального уравнения Шредингера, задачах газовой динамики, уравнении химического реактора исследуются свойства оператора  $\delta$ , определенного равенством  $(\delta x)(t) = \ddot{x}(t) + \frac{k}{t}\dot{x}(t)$ . Впервые оператор



$\delta$  был рассмотрен при изучении уравнения  $\delta x = -x^n$ , характеризующего плотность распределения вещества звезды в некоторой области [1].

Положим для простоты  $k > 1$ . Свойства оператора  $\delta$  будем изучать с помощью  $\tilde{W}$ -метода Н. В. Азбелева. В качестве множества значений оператора  $\delta$  примем пространство  $L^p$  функций  $z: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , таких что  $\|z\|_{L^p}^p = \int_0^{+\infty} |z(s)|^p ds < \infty$ ,  $1 < p < \infty$ . В качестве пространства решений уравнения

$$(\delta x)(t) = f(t), \quad t \in (0, +\infty) \quad (1)$$

выберем пространство  $\tilde{W}^p$  функций  $x: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) на каждом отрезке положительной полуоси функции  $x$  и  $\dot{x}$  абсолютно непрерывны, а функция  $\ddot{x}$  суммируема со степенью  $p$ ;
- 2)  $\delta x \in L^p$ .

**Лемма 1.** *Пространство  $\tilde{W}^p$  изоморфно прямому произведению  $L^p \times \mathbb{R}^2$ .*

Изоморфизм определим в соответствии с монографией [2, с. 14] операторами  $[\delta, r]: \tilde{W}^p \rightarrow L^p \times \mathbb{R}^2$  и  $\{\Lambda, X\}: L^p \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{W}^p$  так, чтобы выполнялись условия [2, с. 15]  $\Lambda\delta + Xr = I$ ,  $\delta\Lambda = I$ ,  $\delta X = 0$ ,  $r\Lambda = 0$ ,  $rX = I$ . Здесь  $I$  — тождественный оператор;  $X = (x_1, x_2)$ ,  $x_i \in \ker \delta$ ,  $i = 1, 2$ ;  $r = (r_1, r_2): \tilde{W}^p \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Оператор  $\Lambda$  определим на пространстве  $L^p$  равенством

$$(\Lambda z)(t) = \frac{1}{k-1} \int_0^t \left( s - \frac{s^k}{t^{k-1}} \right) z(s) ds.$$

Тот факт, что  $\Lambda z \in \tilde{W}^p$ , может быть проверен с помощью теста Шура [3, с. 33], [4, 5]. Условие  $\Lambda\delta = I - Xr$  определяет вектор-функционал  $r: W^p \rightarrow \mathbb{R}^2$  равенствами

$$r_1 x = \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ x(s) + \frac{1}{k-1} s \dot{x}(s) \right], \quad r_2 x = -\frac{1}{k-1} \lim_{s \rightarrow 0^+} s^k \dot{x}(s),$$

так как  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{t^{k-1}}$ .

Поскольку функционалы  $r_1, r_2$  содержат условия в левом конце положительной полуоси, то задачу  $[\delta, r]x = \{f, \alpha\}$  удобно рассматривать как аналог задачи Коши, оператор  $\Lambda$  — как оператор Коши.

Норму на пространстве  $\tilde{W}^p$  определим равенством  $\|x\|_{\tilde{W}^p} = \|\delta x\|_{L^p} + |r_1 x| + |r_2 x|$ .

Через  $W^p$  обозначим пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций  $x: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющих вторую производную из пространства  $L^p$ . Норму на пространстве  $W^p$  определим равенством  $\|x\|_{W^p} = \|\ddot{x}\|_{L^p} + |x(0+)| + |\dot{x}(0+)|$ . Здесь  $x(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} x(t)$ ,  $\dot{x}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} \dot{x}(t)$ .

**Лемма 2.** *Пространство  $\tilde{W}^p$  представляет собой прямую сумму пространства  $W^p$  и множества  $\ker \delta$ , или  $W^p \oplus \{x_2\}$ .*

Отметим, что решения  $x(t)$  полуоднородной задачи  $[\delta, r]x = \{f, 0\}$  обладают следующими свойствами:  $x(0+) = \dot{x}(0+) = 0$ , что вытекает из представления  $x = \Lambda z$  и неравенства Гельдера. Далее,  $\ddot{x} \in L^p$  в силу теста Шура. Наконец, если  $\int_0^{+\infty} t|f(t)| dt < \infty$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) < \infty$ .

**Теорема.** *Пусть некоторый оператор  $T: \tilde{W}^p \rightarrow L^p$  вполне непрерывен и уравнение  $z + T\Lambda z = 0$  однозначно разрешимо. Тогда уравнение  $\delta x + Tx = f$  при любой правой части имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям  $x(0+) = 0$ ,  $\dot{x}(0+) = 0$ .*

1. *Etden R.* Gaskugeln. Leipzig; Berlin, 1907.
2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютер. исследований, 2002.
3. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах  $L^2$ . М.: Наука, 1985.
4. *Абдуллаев А.Р., Плаксина И.М.* Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора // Известия вузов. Математика. 2015. № 2. С. 3–9.
5. *Плаксина И.М.* Об одном методе оценки норм сингулярных интегральных операторов // Прикладная математика и вопросы управления. 2015. № 3. С. 17–24.

## О локальных классах Бэра Ляпуновских инвариантов

А. В. Равчев

Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова

e-mail: rav4eev@yandex.ru

Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\mathcal{M}^n$  множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями  $A$  (отождествляемыми с соответствующими системами).

В теории показателей Ляпунова на множестве  $\mathcal{M}^n$  чаще всего рассматриваются две топологии — *равномерная*, задаваемая нормой

$$\|A\| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |A(t)|, \quad A \in \mathcal{M}^n,$$

и *компактно-открытая*, задаваемая метрикой

$$\rho_C(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 2^{-t}\}, \quad A, B \in \mathcal{M}^n,$$

где  $|A(t)| = \sup_{|x|=1} |A(t)x|$ ,  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Полученные топологические пространства будем обозначать через  $\mathcal{M}_U^n$  и  $\mathcal{M}_C^n$  соответственно.

И. Н. Сергеев в докладе [1] предложил следующее

**Определение 1.** Пусть  $X$  — метрическое пространство. Функция  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  принадлежит  $k$ -му ( $k \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ ) классу Бэра относительно точки  $x_0 \in X$ , если существует такая окрестность  $U$  точки  $x_0$ , что сужение  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  функции  $\varphi$  на  $U$  принадлежит  $k$ -му классу Бэра [2, §39.2]. Если функция  $\varphi$  принадлежит  $k$ -му классу Бэра относительно точки  $x_0$  и не принадлежит  $(k-1)$ -му классу относительно той же точки, то будем говорить, что  $\varphi$  принадлежит в точности  $k$ -му классу.

**Определение 2.** Функционал  $\varphi : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , принимающий одинаковые значения на любых ляпуновски (обобщённо ляпуновски) эквивалентных системах [3, с. 63; с. 88], будем называть *ляпуновским (обобщённо ляпуновским) инвариантом*.

Известно [1], что каждый из показателей Ляпунова в пространстве  $\mathcal{M}_C^n$  относительно любой точки принадлежит в точности второму классу

Бэра. В то же время в пространстве  $M_U^n$  найдутся точки, относительно которых все показатели Ляпунова принадлежат нулевому классу, а для каждого отдельного показателя найдутся точки, относительно которых он принадлежит в точности второму классу. Кроме того, два младших показателя не могут принадлежать в точности первому классу относительно какой-либо точки (про остальные показатели это неизвестно).

Возникает естественный вопрос: какие классы Бэра может иметь в этих пространствах относительно различных точек произвольный ляпуновский инвариант? Ответ содержится в следующих утверждениях.

**Теорема 1.** *Для каждого натурального  $n$  существует множество систем  $\{A_i \in M^n : i \in \mathbb{N}\}$  и обобщённо ляпуновский инвариант  $\varphi: M_U^n \rightarrow [0, 1]$ , имеющий относительно точки  $A_i$  в точности  $i$ -й класс Бэра.*

**Теорема 2.** *Для любых натуральных чисел  $n$  и  $K \geq N \geq 2$  существует множество систем  $\{A_i \in M^n : i = 1, \dots, N\}$  и ляпуновский инвариант  $\varphi: M_U^n \rightarrow [0, 1]$ , имеющий относительно точки  $A_i$  в точности  $i$ -й класс Бэра и такой, что на пространстве  $M_C^n$  функционал  $\varphi$  принадлежит в точности  $K$ -му классу Бэра.*

**Теорема 3.** *Пусть  $\varphi: M_C^n \rightarrow \mathbb{R}$  — ляпуновский инвариант в точности  $k$ -го ( $k \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ ) класса Бэра. Тогда  $\varphi$  имеет в точности  $k$ -й класс Бэра относительно любой точки  $A \in M^n$ .*

**Замечание.** В [4] установлено, что ляпуновских инвариантов в точности первого класса Бэра на пространстве  $M_C^n$  не бывает.

1. *Сергеев И.Н.* О локальных классах Бэра показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 11. С. 1577.
2. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.—Л.: ОНТИ, 1937.
3. *Адрианова Л.Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С. Петербургского ун-та, 1992.
4. *Ветохин А.Н.* О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 5. С. 909–910.

## О решениях одного класса уравнений в частных производных с двумя комплексными независимыми переменными

М. А. Рахимова

*Худжанд, Таджикский государственный университет  
права, бизнеса и политики  
e-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru*

В докладе рассматривается задача нахождения многообразия решений одного класса комплексных уравнений с частными производными от двух комплексных независимых переменных. Такие уравнения возникают при исследовании необходимых условий полной разрешимости многомерных переопределенных систем уравнений в частных производных [1].

Рассмотрим комплексное уравнение с частными производными вида

$$\omega_{\bar{z}_2} = \lambda \omega_{\bar{z}_1}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — комплексная постоянная. Это уравнение как вещественная система двух уравнений при  $\lambda \neq 0$  является системой неклассического типа.

Пусть  $\omega \in C^1$  — решение уравнения (1). Тогда, полагая  $\vartheta(z_1, z_2) = \omega_{z_1}(z_1, z_2)$ , имеем следующие равенства

$$\begin{cases} \omega_{\bar{z}_2} = \vartheta(z_1, z_2), \\ \omega_{\bar{z}_1} = \lambda \vartheta(z_1, z_2). \end{cases} \quad (2)$$

Систему (2) будем рассматривать как переопределенную систему относительно  $\omega$  с известными правыми частями. Из (2) следует, что  $\omega_{\bar{z}_1 \bar{z}_2} = \vartheta_{\bar{z}_2}$ ,  $\omega_{\bar{z}_2 \bar{z}_1} = \lambda \vartheta_{\bar{z}_1}$ . Поэтому необходимое условие разрешимости системы (2) имеет вид

$$\vartheta_{\bar{z}_2} = \lambda \vartheta_{\bar{z}_1},$$

т.е.  $\vartheta$  должна удовлетворять уравнению (1).

**Теорема.** *Многообразиями решений уравнения (1) являются функции вида*

$$\omega(z_1, z_2) = \phi(z_1, z_2) + \Phi(z_1, z_2) - S_1 S_2 \Phi(z_1, z_2)$$

*и*

$$\omega(z_1, z_2) = \phi(z_1, z_2) + (\bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2) \vartheta(z_1, z_2) - S_1 (\bar{z}_1 \vartheta) - \lambda S_2 (\bar{z}_2 \vartheta).$$

Здесь  $\phi(z_1, z_2)$  и  $\vartheta(z_1, z_2)$  являются произвольными аналитическими по  $z_1$  и  $z_2$  функциями,

$$\Phi(z_1, z_2) = \psi(z_1 + \lambda z_2), \quad \psi(z) = \int_0^{\bar{z}} \varphi(\bar{\xi}) d\bar{\xi},$$

$\varphi(z)$  — произвольная аналитическая функция от  $z$ ,

$$S_1 u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{u(t, z_2)}{t - z_1} dt, \quad z_1 \in D_1,$$

$$S_2 u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{u(z_1, t)}{t - z_2} dt, \quad z_2 \in D_2,$$

$\Gamma_1, \Gamma_2$  — границы областей  $D_1, D_2$ .

1. Байзаев С., Рахимова М.А. Об условиях совместности и общем решении одного класса многомерных переопределенных систем уравнений с частными производными // Материалы международной научно-теоретической конференции «Современные проблемы математики и их приложения», посвященной 70-летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, профессора Н. Раджабова, 25 – 26 сентября 2018 г. Душанбе. Душанбе, 2018. С. 9–14.
2. Веква И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988. 513 с.

## Оценка промыслового дохода в вероятностной модели эксплуатируемой популяции

**Л. И. Родина**

г. Владимир, Владимирский государственный университет  
имени А. Г. и Н. Г. Столетовых  
e-mail: LRodina67@mail.ru

**А. Х. Хаммади**

г. Аль-Дивания, Ирак, Аль-Кадисия университет  
e-mail: alaa.hammadi@qu.edu.iq

Задачи моделирования и оптимизации добычи возобновляемого ресурса начали вызывать интерес ученых, начиная с семидесятых годов про-

шлого века [1]. В настоящее время множество работ посвящено вопросам эксплуатации популяций, в которых случайным воздействиям подвержены размер популяции, коэффициент рождаемости или цена продукции (см. обзор литературы в [2]).

Предположим, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции задано уравнением  $\dot{x} = g(x)$ ; длины интервалов  $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1} \in \Omega_1$  между моментами изъятий  $\tau_k$  являются случайными величинами и в моменты времени  $\tau_k$  из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса  $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Пусть имеется возможность остановить заготовку, если ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения  $u_k \in [0, 1)$  в момент  $\tau_k$ ), тогда часть ресурса сохранится для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна  $\ell_k = \ell(v_k, u_k) = v_k$ , если  $v_k < u_k$  и  $\ell_k = u_k$ , если  $v_k \geq u_k$ .

Пусть  $X_k$  — количество ресурса до сбора в момент  $\tau_k$ ,  $x_0$  — начальное количество ресурса,  $\bar{\theta} \doteq (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$ ,  $\bar{\ell} \doteq (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots)$ . Для любого  $x_0 \geq 0$  введем в рассмотрение функцию

$$H_\alpha(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} X_k \ell_k e^{-\alpha \tau_k},$$

равную *доходу от извлечения ресурса* на бесконечном промежутке времени. Показатель дисконтирования  $\alpha > 0$  указывает здесь на то, что ценность позднее получаемого дохода снижается.

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ , описанное в работе [3]. Обозначим через  $\varphi(t, x_0)$  решение уравнения  $\dot{x} = g(x)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\varphi(0, x_0) = x_0$ . Положим  $u(\theta, x) = 1 - \frac{x}{\varphi(\theta, x)}$ , где  $\theta \in \Omega_1$ . Рассмотрим функцию  $\ell(\omega, x) = \ell(\theta, v, x) \doteq v$ , если  $v < u(\theta, x)$  и  $\ell(\omega) \doteq u(\theta, x)$ , если  $v \geq u(\theta, x)$ ; здесь  $\omega = (\theta, v) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ .

Предполагаем, что уравнение  $\dot{x} = g(x)$  имеет асимптотически устойчивое решение  $\varphi(t) \equiv K$  и интервал  $(K_1, K_2)$  является областью асимптотической устойчивости этого решения ( $0 \leq K_1 < K < K_2$ ).

**Лемма.** *Для любых  $x \in (K_1, K)$ ,  $x_0 \in [x, K]$  существует управление  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots)$  такое, что для всех  $\sigma \in \Sigma$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\theta_k, x) \ell(\omega_k, x) e^{-\alpha \tau_k} \leq H_\alpha(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \leq K \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\omega_k, x) e^{-\alpha \tau_k}.$$

Обозначим  $\bar{\theta}^p \doteq (\theta_1^p, \dots, \theta_k^p, \dots)$ ,  $\bar{\ell}^p \doteq (\ell_1^p, \dots, \ell_k^p, \dots)$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . Буквой  $M$  будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

**Теорема.** Для любых  $x \in (K_1, K)$ ,  $x_0 \in (x, K)$  найдется управление  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots)$  такое, что для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  выполнены неравенства

$$\frac{M(\varphi(\theta, x)\ell(\omega, x)e^{-\alpha\theta})}{1 - Me^{-\alpha\theta}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n H_\alpha(\bar{\theta}^p, \bar{\ell}^p, x_0) \leq \frac{K \cdot M(\ell(\omega, x)e^{-\alpha\theta})}{1 - Me^{-\alpha\theta}}.$$

Рассматривается также задача выбора управления, при котором оценка снизу для среднего дохода от извлечения ресурса максимальная.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00293.

1. *Reed W.J.* Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management. 1979. Vol. 6. Pp. 350–363.
2. *Jensen F., Frost H., Abildtrup J.* Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. Vol. 21. Pp. 167–178.
3. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 48–58.

## Об одном классе вычислимых операторов

**А. Н. Румянцев**

*Пермь, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет  
e-mail: arumyanzev@gmail.com*

В докладе обсуждаются условия вычислимости линейного оператора  $\mathcal{L}: \mathcal{D}_{[l, \infty]} \rightarrow L_{[0, 1]}$  [1–4]:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}x)(t) &\equiv \dot{x}(t) + x[h(t)], \quad h(t) \leq t, \quad t \in [0, 1], \\ x(\xi) &= 0, \quad \xi < 0; \end{aligned} \tag{1}$$

$p \in L_{[0, 1]}$ ,  $h(t) = at + b$ ,  $D_{[0, 1]}$  — линейное пространство абсолютно непрерывных функций  $x: R \rightarrow [0, 1]$  с нормой  $\|x\|_{D_{[0, 1]}} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_{[0, 1]}}$ ;  $L_{[0, 1]}$  — линейное пространство суммируемых функций  $y: R \rightarrow [0, 1]$  с нормой  $\|y\|_{L_{[0, 1]}} = \int_0^1 |y(s)| ds$ . Через  $\mathcal{P}_c$  обозначим множество многочленов с



рациональными коэффициентами  $p: [0, 1] \rightarrow R$ . Зафиксируем рациональное разбиение отрезка  $[0, 1]$ :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1; \quad (2)$$

Обозначим  $\mathcal{B}_0 = (-\infty, 0)$ ,  $\{\mathcal{B}_j = [t_{j-1}, t_j]\}_{j=1}^m$ ,  $\mathcal{B}_{m+1} = [t_m, 1]$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что функция  $h \in \mathcal{P}_c$  вычислима на разбиении (2), если для каждого  $j = 1, \dots, m$  существует единственное целое  $q_j$ ,  $0 \leq q_j \leq j$ , такое, что  $h(t) \in \mathcal{B}_{q_j}$  для  $t \in \mathcal{B}_j$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что оператор  $\mathcal{L}(1)$  вычислим, если он отображает множество  $\mathcal{P}_c$  в себя.

Оператор  $\mathcal{L}(1)$  будет вычислим, например, если  $p \in \mathcal{P}_c$ , а функция  $h$  вычислима на некотором разбиении вида (2).

Пусть  $h \in \mathcal{P}_c$ ,  $a > 0$ ,  $-a < b < 0$ ,  $h(1) < 1$ . Построим последовательность точек  $\tilde{t}_j$ :  $\tilde{t}_0 = 0$ ,  $\tilde{t}_j = \tilde{t}_{j-1} - b/a^j$ ,  $j = 1, \dots, m_0$ ,  $\tilde{t}_{m_0+1} = 1$ . Значение  $m_0$  таково, что  $\tilde{t}_{m_0} \leq 1$  и  $\tilde{t}_{m_0} - b/a^{(m_0+1)} > 1$ . Определим множество точек:

$$\Omega_{m_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{m_0}, 1\}. \quad (3)$$

**Определение 3.** Множество точек  $\Omega_{m_0}$  (3) будем называть базовым разбиением для функции  $h$ .

**Теорема 1.** Функция  $h$  вычислима на базовом разбиении  $\Omega_{m_0}$  (3).

Построим последовательность рациональных точек  $\tau_i$ :  $\{\tilde{t}_1 < \tau_1 < \dots < \tau_{\tilde{m}} < \tau_{\tilde{m}+1}\}$ ,  $\tau_{\tilde{m}+1} = \begin{cases} 1, & m_0 = 1, \\ \tilde{t}_2, & m_0 > 1. \end{cases}$  Для каждой из точек  $\tau_i$  определим последовательность точек  $t_i^\nu$ :  $t_i^0 = \tau_i$ ,  $t_i^\nu = t_i^{\nu-1} - b/a^{\nu-1} - \tau_i/a^{\nu-1} + \tau_i/a^\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, \tilde{m}_\nu$ ,  $\tilde{m}_\nu = \begin{cases} m_0, & t_i^{m_0} \leq 1, t_i^{m_0+1} > 1, \\ m_0 - 1, & t_i^{m_0} > 1. \end{cases}$  Определим множество точек:

$$\Omega_{m_0}^{\tilde{m}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ 0, \{\tilde{t}_j\}_{j=1}^{m_0}, \left\{ \{t_i^\nu\}_{\nu=1}^{\tilde{m}_\nu} \right\}_{i=1}^{\tilde{m}}, 1 \right\}. \quad (4)$$

**Определение 4.** Множество точек  $\Omega_{m_0}^{\tilde{m}}$  (4) будем называть опорным разбиением для функции  $h$ .

**Теорема 2.** Функция  $h$  вычислима на опорном разбиении  $\Omega_{m_0}^{\tilde{m}}$  (4).

Определим функции  $h_+^\nu(t) = \frac{t_1}{(1-\tau_\nu)} * t - \frac{t_1 \tau_\nu}{(1-\tau_\nu)}$ ,  $\nu = 0, \dots, \tilde{m}+1$ , и функции  $h_-^\sigma(t) = \chi_{[t_1, 1]}(t) \left\{ -\frac{t_1}{(\tau_\sigma - t_1)} * t + \frac{t_1 \tau_\sigma}{(\tau_\sigma - t_1)} \right\}$ ,  $\sigma = 1, \dots, \tilde{m} + 1$ ,  $\chi_{[t_1, 1]}(\cdot)$  — характеристическая функция отрезка  $[t_1, 1]$ . Множество функций  $\mathcal{H}_{m_0}^{\tilde{m}} = \left\{ \{h_+^\nu\}_{\nu=0}^{\tilde{m}+1}, \{h_-^\sigma\}_{\sigma=1}^{\tilde{m}+1} \right\}$  является инвариантным по отношению к разбиению  $\Omega_{m_0}^{\tilde{m}}$ .

**Теорема 3.** *Всякая функция  $h \in \mathcal{H}_{m_0}^{\tilde{m}}$  вычислима на опорном разбиении  $\Omega_{m_0}^{\tilde{m}}$  (4).*

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. New York, Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2007.
3. *Румянцев А.Н.* Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач. Пермь: Издательство Пермского государственного университета, 1999.
4. *Rumyantsev A.* The reliable computing experiment in the study of boundary value problems for functional differential equations // Functional Differential Equations. Israel, 2002. No. 3–4. Pp. 499–519.

## О достаточных признаках экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных уравнений с последствием

Т. Л. Сабатулина

*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

e-mail: tlsabatulina@list.ru

Как известно [1,2], решения функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) первого порядка, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, не обладают свойствами знакоопределённости и монотонности. Однако для некоторых классов ФДУ эти свойства сохраняются. Используя их, удаётся получать более точные и эффективно проверяемые признаки устойчивости.

1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t - h_1) + a_2 x(t - h_2) = \sum_{m=1}^M b_m \int_0^{\tau_m} x(t - s) dk_m(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

где  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $h_1, h_2 > 0$ , при всех  $m$   $b_m \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_m > 0$  и функции  $k_m: [0, \tau_m] \rightarrow \mathbb{R}$  имеют ограниченную вариацию,  $k_m(0) = 0$ . Не теряя общности, можно считать, что  $h_1 < h_2$ . Обозначим  $K_m = \int_0^{\tau_m} |dk_m(s)|$ .

Зададим функцию  $v = \varphi(u)$  параметрически равенствами

$$\left\{ u = -\frac{1 + \zeta h_2}{h_2 - h_1} e^{\zeta h_1}, \quad v = \frac{1 + \zeta h_1}{h_2 - h_1} e^{\zeta h_2}, \quad \zeta \in \left[ -\frac{1}{h_2}, -\frac{1}{h_1} \right] \right\}.$$

Множество  $P$  определим следующим образом:

$$P = \{(u, v): 0 \leq v \leq \varphi(u)\}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\{a_1, a_2\} \in P$  и  $\sum_{m=1}^M |b_m| K_m < a_1 + a_2$ . Тогда уравнение (1) экспоненциально устойчиво.

Приведём два следствия теоремы 1.

**Следствие 1.** Пусть  $\{a_1, a_2\} \in P$  и  $\sum_{m=1}^M |b_m| < a_1 + a_2$ . Тогда уравнение

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t - h_1) + a_2 x(t - h_2) = \sum_{m=1}^M b_m x(t - \tau_m), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

экспоненциально устойчиво.

**Следствие 2.** Пусть  $0 < ah \leq \frac{1}{e}$  и  $\sum_{m=1}^M |b_m| < a_1 + a_2$ . Тогда уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t - h) = \sum_{m=1}^M b_m x(t - \tau_m), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

экспоненциально устойчиво.

2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a \int_{t-h}^t x(s) ds = \sum_{m=1}^M b_m \int_0^{\tau_m} x(t - s) dk_m(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $h > 0$ , при всех  $m$   $b_m \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_m > 0$  и функции  $k_m: [0, \tau_m] \rightarrow \mathbb{R}$  имеют ограниченную вариацию,  $k_m(0) = 0$ . Обозначим  $K_m = \int_0^{\tau_m} |dk_m(s)|$ .

Пусть  $\alpha = \zeta_0(2 - \zeta_0)$ , где  $\zeta_0$  — положительный корень уравнения  $e^{-\zeta} = 1 - \frac{\zeta}{2}$ . Заметим, что  $\zeta_0 \approx 1.59362\dots$  и  $\alpha \approx 0.64761\dots$

**Теорема 2.** Пусть  $0 < ah \leq \alpha$  и  $\sum_{m=1}^M |b_m| K_m < ah$ . Тогда уравнение (2) экспоненциально устойчиво.

**Следствие 3.** Пусть  $0 < ah \leq \alpha$  и  $\sum_{m=1}^M |b_m| < ah$ . Тогда уравнение

$$\dot{x}(t) + a \int_{t-h}^t x(s) ds = \sum_{m=1}^M b_m x(t - \tau_m), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

экспоненциально устойчиво.

**Следствие 4.** Пусть  $0 < ah \leq \alpha$  и  $\sum_{m=1}^M |b_m| \tau_m < ah$ . Тогда уравнение

$$\dot{x}(t) + a \int_{t-h}^t x(s) ds = \sum_{m=1}^M b_m \int_{t-\tau_m}^t x(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

экспоненциально устойчиво.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-01-00928.

1. Малыгина В.В., Сабатулина Т.Л. Знакоопределённость решений и устойчивость линейных дифференциальных уравнений с переменным распределённым запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2008. № 8. С. 73–77.
2. Sabatulina T., Malygina V. On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay // Electron. J. Qualit. Theory Diff. Equat. 2014. No. 61. Pp. 1–16.

## О задаче экспоненциальной стабилизации с оценкой некоторого интегрального критерия качества для систем с запаздыванием

Н. О. Седова

Ульяновск, Ульяновский государственный университет

e-mail: sedovano@ulsu.ru

Используем общепринятые обозначения:  $R^+ = [0, +\infty)$ ,  $R^n$  — действительное линейное пространство  $n$ -векторов с нормой  $|\cdot|$ ; для фиксированной постоянной  $r > 0$  определим пространство  $C := C([-r, 0], R^n)$  функций  $\varphi$  с нормой  $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : -r \leq s \leq 0\}$ . Если  $x(t) \in$

$C([t_0 - r, t_0 + \beta], R^n)$  ( $t_0 \in R^+$ ,  $\beta > 0$ ), то элемент  $x_t \in C$  для каждого  $t \in [t_0, t_0 + \beta)$  определяется равенством  $x_t(s) = x(t + s)$ ,  $-r \leq s \leq 0$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

с правосторонней производной функции  $x(t)$  в левой части, где  $f : R^+ \times C \rightarrow R^n$ ,  $f(t, 0) \equiv 0$ .

Предположим, что для каждой начальной точки  $(t_0, \varphi) \in R^+ \times C$  существует непродолжаемое решение уравнения (1), определенное для  $t \in [t_0 - r, \beta)$  ( $\beta > t_0$ ) и такое, что  $x_{t_0} = \varphi$  (будем обозначать его  $x(t; t_0, \varphi)$ ). Из условия  $f(t, 0) \equiv 0$  следует существование нулевого решения  $x(t; t_0, 0) \equiv 0$  для любого  $t_0 \in R^+$ .

Отправной точкой исследования является доказательство следующего результата:

**Лемма.** *Предположим, что существуют положительные постоянные  $c, a_1, a_2, a_3$  и функция  $V \in C^1(R^+ \times R^n, R^+)$ , удовлетворяющие следующим условиям:*

1.  $a_1|x|^c \leq V(t, x) \leq a_2|x|^c$ ;
2. для некоторого  $q > 1$  производная  $V'(t, \varphi)$  в силу уравнения (1) удовлетворяет неравенству  $V'(t, \varphi) \leq -a_3|\varphi(0)|^c$  для всех  $\varphi \in C$  таких, что  $\max_{-r \leq s \leq 0} V(t + s, \varphi(s)) \leq qV(t, \varphi(0))$ .

Тогда нулевое решение уравнения (1) глобально равномерно экспоненциально устойчиво. При этом любое решение  $x(t; t_0, \varphi)$  удовлетворяет интегральной оценке вида  $\int_{t_0}^{\infty} V(t, x(t)) dt \leq \frac{1}{b}V(t_0, \varphi(0)) \leq \frac{a_2}{b}|\varphi(0)|^c$ , где  $b = \min\{a_3/a_2, \ln q/r\}$ .

**Замечание.** Производная непрерывно дифференцируемой функции Ляпунова в силу уравнения вычисляется непосредственно, однако оказывается функционалом, эффективно оценить который возможно лишь на «более узком множестве» с использованием идей Б. С. Разумихина [1]. Результирующая оценка, как правило, вновь является функцией. Использование «конечномерной» функции, а не функционала Ляпунова, оказывается более гибким подходом при наличии переменного запаздывания (зависящего как от  $t$ , так и от состояния системы), в частности, естественным образом адаптируется к задачам дискретного управления (sampled-data control), возникающим при моделировании цифровых регуляторов для непрерывных систем [2]; кроме того, в случае отсутствия глобальной устойчивости именно конечномерную функцию удобнее использовать для оценки области притяжения.

Результат приведенной леммы используется для решения задачи экспоненциальной стабилизации некоторых классов систем с запаздыванием. Конструктивные условия для параметров управления в виде линейных матричных неравенств формулируются, прежде всего, для линейных систем с квадратичной функцией Ляпунова. Дополнительно получается гарантированная оценка (зависящая от начальной точки) интегрального критерия, определяемого функцией Ляпунова (для квадратичной функции получаем квадратичный критерий). Последний результат связан с известной задачей обратной оптимальности [3], а также с задачей гарантированной оценки качества переходного процесса стабилизации [4].

1. *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.
2. *Fridman E.* Introduction to time-delay and sampled-data systems // 2014 European Control Conference (ECC). Strasbourg, 2014. Pp. 1428–1433.
3. *Freeman R.A., Kokotovic P.V.* Inverse optimality in robust stabilization // SIAM J. Control and Optimization. 1996. Vol. 34 (4). Pp. 1365–1391.
4. *Андреев А.С., Безгласный С.П.* О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 44–51.

## Неразличимость некоторых ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости дифференциальных систем

**И. Н. Сергеев**

*Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова*

e-mail: igniserg@gmail.com

Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty), \quad x, 0 \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где  $G$  — область и  $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G)$ . Пусть  $\mathcal{S}(f)$  и  $\mathcal{S}_\delta(f)$  — множества таких решений системы (1), что  $|x(0)| \neq 0$  и соответственно  $0 < |x(0)| \leq \delta$ .

**Определение 1.** Скажем, что для системы (1) имеет место следующее *перроновское* или соответственно *верхнепредельное* свойство:

1) *устойчивость*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что любое решение  $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$  удовлетворяет требованию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{или соответственно} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \varepsilon; \quad (2)$$

2) *неустойчивость*, если нет устойчивости;

3) *частичная устойчивость*, если для любых  $\varepsilon, \delta > 0$  некоторое решение  $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$  удовлетворяет требованию (2);

4) *полная неустойчивость*, если нет частичной неустойчивости;

5) *тотальная неустойчивость*, если для некоторого  $\varepsilon > 0$  любое её решение  $x \in \mathcal{S}(f)$  не удовлетворяет требованию (2);

6) *асимптотическая устойчивость*, если при  $\varepsilon = 0$  для некоторого  $\delta > 0$  любое решение  $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$  удовлетворяет требованию (2);

7) *глобальная устойчивость*, если при  $\varepsilon = 0$  любое решение  $x \in \mathcal{S}(f)$  удовлетворяет требованию (2).

**Определение 2.** *Ляпуновские* аналоги свойств 1–5 из определения 1 получают заменой в них требования (2) требованием  $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| \leq \varepsilon$ , а аналоги свойств 6 и 7 — добавлением ляпуновской устойчивости к верхнепредельным свойствам 6 и 7 соответственно.

**Определение 3.** Данные свойства системы (1) назовём *неразличимыми*, если выполнение одного из них влечёт за собой выполнение остальных.

**Теорема 1.** *Полная и тотальная ляпуновские неустойчивости любой системы неразличимы.*

**Теорема 2.** *Любые одноимённые ляпуновские и верхнепредельные свойства любой одномерной системы неразличимы.*

**Теорема 3.** *Полная и тотальная неустойчивости любого одного типа любой одномерной системы неразличимы.*

**Теорема 4.** *Все ляпуновские, перроновские и верхнепредельные полные и тотальные неустойчивости любой автономной системы неразличимы.*

**Теорема 5.** *Все ляпуновские, перроновские и верхнепредельные частичные устойчивости и нетотальные неустойчивости любой автономной системы неразличимы.*

**Теорема 6.** *Любые одноимённые ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства любой одномерной автономной системы неразличимы.*

**Теорема 7.** Любые одноимённые ляпуновские и верхнепредельные свойства любой линейной системы неразличимы.

**Теорема 8.** Асимптотическая и глобальная устойчивости любого одного типа любой линейной системы неразличимы.

**Теорема 9.** Полная и тотальная неустойчивости любого одного типа любой линейной системы неразличимы.

**Теорема 10.** Неустойчивость и полная неустойчивость любого одного типа любой одномерной линейной системы неразличимы.

**Теорема 11.** Устойчивость и частичная устойчивость любого одного типа любой одномерной линейной системы неразличимы.

**Теорема 12.** Любые одноимённые ляпуновские и перроновские свойства любой автономной линейной системы неразличимы.

1. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.
2. *Сергеев И.Н.* Зависимость и независимость свойств перроновской и ляпуновской устойчивости от фазовой области системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1338–1346.
3. *Сергеев И.Н.* Исследование свойств перроновской и ляпуновской устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 84–93.

## Об устойчивости системы линейных гибридных функционально-дифференциальных уравнений с последствием

П. М. Симонов  
Пермь, ПГНИУ  
e-mail: simpm@mail.ru

Запишем абстрактную СЛГФДУП в виде

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \quad \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta x - F_{21}x - F_{22}y = g. \quad (1)$$



Здесь и ниже  $\mathbb{R}^n$  — пространство векторов  $\alpha = \text{col}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$  с действительными компонентами и с нормой  $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$ . Пусть пространство  $L$  локально суммируемых  $f, g, y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  с полунормами  $\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt$  для всех  $T > 0$ . Пространство  $D$  локально абсолютно непрерывных функций  $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  с полунормами  $\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$  для всех  $T > 0$ . Операторы  $\mathcal{L}_{11}, F_{11}: D \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{12}, F_{12}: L \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{21}, F_{21}: D \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{22}, F_{22}: L \rightarrow L$  предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми. Обозначим  $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-h)$ , где  $t \geq h > 0$ , и  $(\Delta y)(t) = y(t)$ ,  $t \in [0, h)$ .

Пусть модельное уравнение  $\mathcal{L}_{11}x = z$  и банахово пространство  $B$  с элементами из пространства  $L$  ( $B \subset L$ ) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть оператор Коши  $W_{11}$  для уравнения  $\mathcal{L}_{11}x = z$  непрерывно действует из пространства  $B$  в пространство  $B$  и вольтерров, и пусть столбцы матрицы фундаментальных решений  $X$  принадлежат пространству  $B$ . Кроме того, пусть производная решения  $\dot{x}$  непрерывно лежит в  $B$  в зависимости от  $z \in B$ . Можно для банахова пространства  $B \subset L$  ввести банахово пространство  $D(\mathcal{L}_{11}, B)$  с нормой  $\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11}, B)} = \|\mathcal{L}_{11}x\|_B + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$ . Это пространство линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева  $W_B^{(1)}([0, \infty))$  с нормой  $\|x\|_{W_B^{(1)}([0, \infty))} = \|\dot{x}\|_B + \|x\|_B$ . Дальше будем это пространство обозначать как  $W_B$ . При этом,  $W_B \subset D$ , и это вложение непрерывно. Операторы  $\mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{21}, F_{11}, F_{21}: D \rightarrow L$  рассматриваются как приведения на пару  $(W_B, B): \mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{21}, F_{11}, F_{21}: W_B \rightarrow B$ . Операторы  $\Delta, \mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{22}, F_{12}, F_{22}: L \rightarrow L$  также рассматриваются как приведения на пару  $(B, B): \Delta, \mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{22}, F_{12}, F_{22}: B \rightarrow B$  предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Поставим задачу, когда для уравнения (1) при любом  $\{f, g\} \in B \times B$  ее решения  $\{x, y\} \in W_B \times B$ .

Рассмотрим второе уравнение  $\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = g$ . Будем считать, что оператор  $\mathcal{L}_{22}: B \rightarrow B$  вольтеррово обратим, то есть существует  $\mathcal{L}_{22}^{-1}: B \rightarrow B$  и оператор  $\mathcal{L}_{22}^{-1}: B \rightarrow B$  вольтерров. Тогда это уравнение запишется в виде  $\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x + y = \mathcal{L}_{22}^{-1}g$ . Выразим  $y: y = -\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}^{-1}g$ , и подставим в первое уравнение  $\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = f: (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21})x = f - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$ .

Обозначим  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}$  и  $f_1 = f - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$ . Получили уравнение  $\mathcal{L}_1x = f_1$ . Предположим, что вольтерров оператор  $\mathcal{L}_1: W_B \rightarrow B$  вольтеррово обратим, то есть, если для уравнения  $\mathcal{L}_1x = f_1$  при любом  $f_1 \in B$  его решения  $x \in W_B$  и оператор  $\mathcal{L}_1^{-1}: B \rightarrow W_B^0$  вольтерров, где  $W_B^0 = \{x \in W_B, x(0) = 0\}$ . Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом  $\{f, g\} \in B \times B$  его решение  $\{x, y\} \in W_B \times B$ .

То же самое получим для уравнения  $\mathcal{L}_2 x = g_1$ , где  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21} \mathcal{L}_{11}^{-1} \mathcal{L}_{12}$  и  $g_1 = g - \mathcal{L}_{21} \mathcal{L}_{11}^{-1} f$ .

Исследованию по устойчивости решений СЛГФДУП в случае  $n = 1$  посвящены работы [1–3]. В статье [4] приведен пример для  $n = 2$ . В предлагаемом докладе получено достаточное условия устойчивости решений СЛГФДУП для  $n \geq 2$ .

Работа поддержана РФФИ, проект № 18–01–00332 А.

1. Ларионов А.С., Симонов П.М. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Темат. номер «Дифференциальные уравнения». 2013. Т. 13. № 4. С. 34–37.
2. Симонов П.М. Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естеств. и технич. науки. 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2670–2672.
3. Ларионов А.С., Симонов П.М. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II. // Вестник РАЕН. Темат. номер «Дифференциальные уравнения». 2014. Т. 14. № 5. С. 38–45.
4. Симонов П.М. Об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Материалы Междунар. конфер. «Воронеж. зимняя математ. школа С. Г. Крейна–2020». Воронеж: Изд.-полиграф. центр «Научная книга», 2020. С. 256–263.

## Стохастическое уравнение Хоффа с многоточечным начальным-конечным условием

Н. Н. Соловьёва, С. А. Загребина, Г. А. Свиридюк

Челябинск, Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)

e-mail: nsolowjowa@mail.ru, zagrebinasa@susu.ru, sviridiukga@susu.ru

Пусть  $\mathfrak{H}$  ( $\mathfrak{F}$ ) — вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом  $\{\varphi_k\}$  ( $\{\psi_k\}$ ). Введем в рассмотрение монотонную последовательность  $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \{0\} \cup \mathbb{R}$  такую, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$  [1].

Символом  $\mathbf{U}_{\mathbf{K}\mathbf{L}_2}$  ( $\mathbf{F}_{\mathbf{K}\mathbf{L}_2}$ ) обозначим гильбертово пространство, являющееся пополнением линейной оболочки *случайных  $\mathbf{K}$ -величин*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k, \quad \xi_k \in \mathbf{L}_2, \quad \left( \zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \zeta_k \psi_k, \quad \zeta_k \in \mathbf{L}_2 \right),$$

по норме

$$\|\eta\|_{\mathbf{U}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k \quad \left( \|\omega\|_{\mathbf{F}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \mathbf{D}\zeta_k \right).$$

Пусть операторы  $L, M, N \in \mathcal{L}(\mathbf{U}_{\mathbf{K}\mathbf{L}_2}; \mathbf{F}_{\mathbf{K}\mathbf{L}_2})$ . Рассмотрим линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$L \overset{\circ}{\eta} = M\eta + N\omega, \tag{1}$$

где  $\eta = \eta(t)$  — искомый, а  $\omega = \omega(t)$  — заданный стохастический  $\mathbf{K}$ -процесс.

Возьмем  $\tau_0 = 0, \tau_j \in \mathbb{R}_+, (\tau_{j-1} < \tau_j), j = \overline{1, m}$ . Пусть выполнено условие

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^L(M) = \bigcup_{j=0}^m \sigma_j^L(M), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset, \\ \text{существует замкнутый контур } \gamma_j \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } D_j \supset \sigma_j^L(M), \\ \text{такой, что } \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset, \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \quad \forall j, k, l = \overline{1, m}, k \neq l. \end{array} \right. \tag{2}$$

Тогда для уравнения (1) можно сформулировать многоточечное начально-конечное условие [2]

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P_0(\eta(t) - \xi_0) = 0, \quad P_j(\eta(\tau_j) - \xi_j) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{3}$$

**Определение 1.** Назовем стохастический  $\mathbf{K}$ -процесс  $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2)$  (*классическим*) решением уравнения (1), если п.н. все его траектории удовлетворяют уравнению (1) при некотором  $\mathbf{K}$ -«шуме»  $\omega \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2)$  и всех  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Определение 2.** Решение  $\eta = \eta(t)$  уравнения (1) назовем *решением задачи* (1), (3), если выполнено условие (2) при некоторых случайных  $\mathbf{K}$ -величинах  $\xi_k \in \mathbf{U}_{\mathbf{K}\mathbf{L}_2}, k = \overline{0, l}$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , и выполнено условие (2). Тогда для любых  $\tau_j \in \mathbb{R}_+, j = \overline{1, m}$ , оператора  $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}; \mathfrak{F})$ ,

монотонной последовательности  $K \subset \{\lambda_k\}$ , такой что  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$ ,

$\mathbf{K}$ -«шума»  $\omega = \omega(t)$  такого, что  $(\mathbb{I} - Q)N\omega \in \mathbf{C}^{p+1}(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$  и  $QN\omega \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ , и случайных  $\mathbf{K}$ -величин  $\xi_j \in \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ ,  $j = \overline{0, m}$ , не зависящих от  $\omega$ , существует единственное решение  $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ , задачи (1), (3), которое к тому же имеет вид

$$\eta(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) \overset{\circ}{\omega}^{(q)}(t) + \sum_{j=0}^m \left[ U_j^{t-\tau_j} \xi_j + \int_{\tau_j}^t U_j^{t-\tau_j-s} L_{1j}^{-1} Q_j N \omega(s) ds \right], \quad t \in \mathfrak{J}.$$

В докладе предполагается полученный абстрактный результат проиллюстрировать конкретным примером.

1. *Sviridyuk G.A., Manakova N.A.* The dynamical models of Sobolev type with Showalter–Sidorov condition and additive «noise» // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2014. Vol. 7. No. 1. Pp. 90–103.
2. *Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A.* Multipoint initial-final value problems for dynamical Sobolev-type equations in the space of noises // Electrical Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018, article no. 128.

## Вольтерровы функциональные уравнения и распределенные оптимизационные задачи

**В. И. Сумин**

*Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского;*

*Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина*

e-mail: v\_sumin@mail.ru

В [1] было предложено при изучении распределенных оптимизационных задач использовать *вольтерровы функциональные уравнения* (ВФУ)

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \equiv \{t_1, \dots, t_n\} \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m(\Pi), \quad (1)$$

где  $\Pi \subset \mathbf{R}^n$  и  $f(\cdot, \cdot, \cdot) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$  заданы;  $v(\cdot) \in \mathbf{D} \subset L_k^s$  — управление;  $A : L_p^m \rightarrow L_q^l$  — линейный оператор, вольтерров на неко-

торой системе  $T$  подмножеств  $\Pi$  в том смысле, что для любого  $H \in T$  сужение  $A[z]|_H$  не зависит от значений  $z|_{\Pi \setminus H}$  (это прямое многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра);  $p, q, k \in [1, +\infty]$ . К ВФУ (1) обращением главной части приводятся самые разнообразные *управляемые начально-краевые задачи* (УНКЗ) для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др., см., например, [2], обзоры в управление  $v(\cdot)$  в (1) так или иначе соответствует распределенному и/или начальному управлению в УНКЗ, а, например, наличие управляемых старших коэффициентов или управляемых запаздываний в основном уравнении УНКЗ означает, что управляем и оператор  $A$ . Переход от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации (получение условий сохранения разрешимости УНКЗ при возмущении управлений; обоснование численных методов оптимального управления; вывод *необходимых условий оптимальности* (НУО) и, в частности, «сингулярных систем оптимальности» в смысле Ж.-Л. Лионса [7]; вырождение НУО, изучение соответствующих «особых управлений»; расширение оптимизационных задач и др., см., например, [2], обзоры в [3]–[6]. Как эквиваленты УНКЗ в теории оптимизации бывают удобны и другие ВФУ, отметим здесь результаты А. В. Чернова (изучение свойства глобальной разрешимости УНКЗ, численных методов распределенной оптимизации, «распределенных игр» и др., см., например, [8], обзоры [3, 4].

Доклад посвящен обзору конкретных результатов, полученных методом ВФУ в теории оптимизации распределенных систем. Особое внимание уделяется результатам, так или иначе связанным с проблемой вывода НУО: способам обращения главной части УНКЗ; способам получения требующихся для такого вывода условий сохранения (при возмущении управлений) глобальной разрешимости УНКЗ; возможностям применения при этом принципа сжимающих отображений (см. [6]).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00199.

1. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
2. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

3. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: Тр. Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н.Н.Красовского (Екатеринбург, 2014). Екатеринбург: ИММ УрО РАН; УРФУ, 2015. С. 293–300.
4. *Sumin V.* Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Iss. 32. Pp. 759–764. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454>
5. *Сумин В.И.* Вольтерровы функциональные уравнения и оптимизация распределенных систем // Оптимальное управление и дифференциальные игры. Материалы Междунар. конф., посвящ. 110-летию со дня рожд. Льва Семеновича Понтрягина. (Москва, 2018). М.: МИАН им. В. А. Стеклова РАН, МАКС Пресс, 2018. С. 266–268.
6. *Сумин В.И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278.
7. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
8. *Чернов А.В.* О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2095–2111.

## Собственные значения гамильтониана Боголюбова–де Жена вблизи границы сверхпроводящей щели

**Т. С. Тинюкова**

*Ижевск, ФГБОУ ВО «УдГУ»*

e-mail: ttinyukova@mail.ru

**Ю. П. Чубурин**

*Ижевск, УдмФИЦ УрО РАН*

e-mail: chuburin@udman.ru

Гамильтониан Боголюбова–де Жена (БдЖ) (см. обзоры [1, 2]) описывает возбужденные состояния (квазичастицы, являющиеся с определенными вероятностями электронами или дырками), возникающие в сверхпроводящей щели (лакуне спектра). Данный гамильтониан представляет собой оператор Шрёдингера в случае сверхпроводящих структур.

Гамильтониан БдЖ имеет вид [1, 2]

$$H = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \mu & -\Delta\partial_x \\ \Delta\partial_x & \partial_x^2 + \mu \end{pmatrix},$$

где вещественное число  $\Delta \neq 0$  — величина спаривающего потенциала,  $\mu$  — химический потенциал. Пусть  $|\mu| \ll \Delta^2/2$ , тогда спектр  $H$  описывается неравенством  $|E| \geq |\mu|$  (см. [3]) и сверхпроводящая щель равна  $(-|\mu|, |\mu|)$ .

Рассмотрим моделирующий примесь потенциал вида

$$V = \varepsilon V(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где  $V(x)$  удовлетворяет неравенству

$$|V(x)| \leq C e^{-\gamma|x|},$$

$C, \gamma > 0$  и

$$V_0 = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) dx \neq 0.$$

Функция Грина оператора  $H$  имеет полюс в точке

$$p_+ = \sqrt{\mu + a - \Delta^2/2} = 0,$$

где  $a = \sqrt{E^2 + \Delta^4/4 - \mu\Delta^2}$  (см. [3]). Будем рассматривать  $p = p_+$  из малой окрестности нуля, что позволит в силу альтернативы Фредгольма исследовать собственные значения оператора  $H + V$ .

Описываемая гамильтонианом  $H$  сверхпроводящая структура имеет топологически тривиальную (при  $\mu < 0$ ) и топологически нетривиальную фазу (при  $\mu > 0$ ) фазы.

**Теорема 1.** *В топологически нетривиальной фазе в достаточно малой окрестности граничной точки сверхпроводящей щели при  $V_0 > 0$  и всех достаточно малых  $\varepsilon$  существует единственное собственное значение  $E$  оператора  $H + V$ , для которого справедливо равенство*

$$E = \mp \left( \mu + \frac{2i\Delta^2 p}{\varepsilon V_0} \right), \tag{1}$$

где знак «+» в правой части (1) соответствует верхней границе щели, а «-» — нижней. Это же верно в топологически тривиальной фазе при  $V_0 < 0$ ; знак «+» («-») соответствует нижней (верхней) границе щели.

Работа первого автора выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем».

1. *Elliot S.R., Franz M.* Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics // *Rev. Mod. Phys.* 2015. Vol. 87. Iss. 1. Pp. 137–163. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.137>
2. *Alicea J.* New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // *Rep. Prog. Phys.* 2012. Vol. 75, 076501. 36 pp. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501>
3. *Тимокова Т.С.* Майорановские состояния вблизи примеси в  $p$ -волновой сверхпроводящей нанопроволоке // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 222–230. DOI: [10.20537/vm180208](https://doi.org/10.20537/vm180208)

## Асимптотическое решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве

**В. И. Усков**

*Воронеж, ВГЛУ им. Г. Ф. Морозова*

e-mail: [vum1@yandex.ru](mailto:vum1@yandex.ru)

Рассматривается задача:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon B)x(t, \varepsilon) + F(t), \quad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \quad (2)$$

где  $A$  — замкнутый линейный фредгольмов оператор с нулевым индексом,  $B$  — ограниченный линейный оператор, действующие в банаховом пространстве  $E$ ,  $\overline{\text{dom}} A = \overline{\text{dom}} B = E$ ,  $F(t)$  — заданная достаточно гладкая функция со значениями в  $E$ ,  $x^0$  — заданный элемент из  $E$ ;  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ;  $t \in [0, T]$ .

Системами с малым параметром при старшей производной описывается движение вязкого потока [1], поведение тонких и гибких пластин



и оболочек, явление дифракции [2], явления в социально-экономических системах [3] и т.д.

Цель работы: 1) исследование поведения решения  $x(t, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , выявление условий, при которых имеет место явление погранслоя; 2) построение асимптотического разложения решения по степеням параметра  $\varepsilon$  методом Васильевой–Вишика–Люстерника [4]:

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}_m(t, \varepsilon) + \bar{v}_m(t, \varepsilon) + R_m(t, \varepsilon),$$

$$\bar{x}_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^m \varepsilon^k x_k(t), \quad \bar{v}_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k v_k(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

где  $\bar{x}_m(t, \varepsilon)$  — регулярная часть,  $\bar{v}_m(t, \varepsilon)$  — погранслоевая часть, а  $R_m(t, \varepsilon)$  есть остаточная часть разложения.

Для вычисления компонент регулярной части разложения, используя свойство фредгольмовости оператора  $A$  [5], применяется метод каскадной декомпозиции уравнения, позволяющий расщеплять исходное уравнение на уравнения в подпространствах уменьшающихся размерностей.

Настоящая работа является продолжением [6], где рассматривалась задача Коши (1), (2) без возмущения  $\varepsilon B$ .

1. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049–1070.
2. Треногин В. А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника–Вишика // Успехи математических наук. 1970. Т. 25. Вып. 4 (154). С. 123–156.
3. Грибковская И. В., Дмитриев М. Г. Управляемость в больших социально-экономических системах с позиции разделения движений // Теория активных систем. Труды международной научно-практической конференции «Управление большими системами–2011». Т. 2. ИПУ РАН Москва, Россия, 2011. С. 93–96.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
5. Никольский С. М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. Вып. 3. С. 147–166.
6. Зубова С. П., Усков В. И. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 3. С. 147–155.

# Краевые задачи со смещением для уравнения гиперболо-параболического типа с нагрузкой на характеристике

К. У. Хубиев

Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН

e-mail: khubiev\_math@mail.ru

Рассмотрим нагруженное [1] модельное уравнение смешанного типа

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x, 0) = f_1(x, y), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) = f_2(x, y), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области  $\Omega$ , ограниченной отрезками прямых  $x = 0$ ,  $x = r$ ,  $y = h > 0$  при  $y > 0$  и характеристиками  $x + y = 0$ ,  $x - y = r$  уравнения (1) при  $y < 0$ ;  $u = u(x, y)$ ,  $\lambda_i = const$ ,  $f_i(x, y)$  – заданные функции,  $i = 1, 2$ .

Ранее автор в своих работах, как и многие другие, рассматривал в основном уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с нагруженными слагаемыми на линии изменения типа (см., например, [2–5]). Отличительной особенностью уравнения (1) является то, что нагруженное слагаемое в гиперболической части области попадает на границу области (характеристику  $x + y = 0$ ), а не на линию изменения типа. Обозначим через  $\theta_0(x)$ ,  $\theta_r(x)$  аффиксы точек пересечения характеристик, исходящих из точки  $(x, y)$ , с характеристиками  $x + y = 0$  и  $x - y = r$  соответственно [6, 7].

Для уравнения (1) исследованы следующие задачи со смещением [6].

**Задача  $N_1$ .** Найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1) из класса  $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cap \{y < 0\}) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega \cap \{y > 0\})$ , удовлетворяющее условиям:

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(r, y) = \varphi_r(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$\alpha u[\theta_0(x)] + \beta u[\theta_r(x)] = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq r,$$

$\varphi_0(y)$ ,  $\varphi_r(y)$ ,  $\psi_1(x)$  – заданные функции,  $\alpha, \beta = const$ , причем  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

**Задача  $N_2$ .** Найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1) из класса  $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cap \{y < 0\}) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega \cap \{y > 0\})$ , удовлетворяющее условиям (2) и условию

$$\alpha \frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] + \beta \frac{d}{dx} u[\theta_r(x)] = \psi_2(x), \quad 0 < x < r,$$

$\varphi_0(y)$ ,  $\varphi_r(y)$ ,  $\psi_2(x)$  – заданные функции,  $\alpha, \beta = const$ , причем  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

Здесь отметим, что при  $\beta = 0$  задача  $N_1$  будет совпадать с аналогом задачи Трикоми для гиперболо-параболического уравнения.

Понятие краевых задач со смещением было введено в работе [7], там же исследован ряд нелокальных краевых задач с разными смещениями для гиперболических и смешанного типа уравнений. В настоящее время теория нелокальных краевых задач, к которым относятся задачи для нагруженных уравнений, которые, в свою очередь, тесно связаны с задачами со смещением [8], продолжает активно развиваться. Обширная библиография научных работ, посвященных исследованию нагруженных уравнений и задач со смещением приведена в монографиях [1] и [6].

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. *Хубиев К.У.* Аналог задачи Трикоми и задача со смещением для модельного нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // Доклады АМАН. 2008. Т. 10. № 2. С. 67–71.
3. *Хубиев К.У.* Аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами // Уфимск. матем. журн. 2017. Т. 9. № 2. С. 94–103.
4. *Хубиев К.У.* Внутреннекраевая задача для уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2017. № 27 (276). С. 52–56.
5. *Хубиев К.У.* Задачи со смещением для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 82–90.
6. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
7. *Нахушев А.М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44–59.
8. *Нахушев А.М.* О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 92–101.

# О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с максимальным монотонным оператором

**А. В. Чернов**

*Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского,*

*Нижегородский государственный технический  
университет им. П. Е. Алексеева*

e-mail: chavnn@mail.ru

Пусть  $X$  — гильбертово пространство со скалярным произведением  $[\cdot, \cdot]_X$ ;  $Z = L_2([0; T]; X)$ ;  $\mathbb{C}_w([0; T]; X)$  — пространство слабо непрерывных функций  $[0; T] \rightarrow X$  (содержится в  $L_\infty([0; T]; X)$ );  $G : X \rightarrow X$  — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор с областью определения  $D(G) \subset X$ . Рассмотрим уравнение

$$x'(t) = Gx(t) + z(t), \quad t \in [0; T]; \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Как известно [1, теорема 4.8.3, следствие 4.8.1], в случае, когда  $G$  является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы  $S(t)$ ,  $t \in [0; T]$ , уравнение (1) имеет единственное слабое решение в  $\mathbb{C}_w([0; T]; X)$ :  $x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)z(s) ds$ ,  $t \in [0; T]$ , для любых  $x_0 \in X$ ,  $z \in Z$ . Далее будем предполагать, что при некотором  $\lambda \in \mathbb{R}$  имеем:

**G $_\lambda$ )** Оператор  $B_\lambda = \lambda I - G$  является максимальным монотонным, то есть  $[B_\lambda x, x]_X \geq 0$  для всех  $x \in D(B_\lambda) = D(G)$  (монотонность) и множество значений  $\{(I + B_\lambda)[x] : x \in D(G)\} = X$  (максимальность).

**Лемма 1.** Пусть выполнено условие **G $_\lambda$ )** при некотором  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда для всех  $x_0 \in X$ ,  $z \in Z$  задача (1) имеет единственное слабое решение в  $\mathbb{C}_w([0; T]; X)$ :  $x(t) = \theta_\lambda(t) + \mathcal{A}_\lambda[z](t)$ , где  $\theta_\lambda(t) = e^{\lambda t} S_\lambda(t)x_0$ ,  $\mathcal{A}_\lambda[z](t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} S_\lambda(t-s)z(s) ds$ ,  $\{S_\lambda(t), t \geq 0\}$  — сильно непрерывная полугруппа сжатий, порождаемая оператором  $(-B_\lambda)$ , см. [2, remark 5, p.190]. Следовательно,

$$\|\mathcal{A}_\lambda[z](t)\|_X \leq K_\lambda \int_0^t \|z(s)\|_X ds, \quad \text{н.в. } t \in [0; T]; \quad K_\lambda = \{1, \lambda \leq 0; e^T, \lambda > 0\}.$$

Пусть  $U$  — банахово пространство;  $\mathcal{D}$  — заданное множество функций  $u : [0; T] \rightarrow U$ ;  $E = L_\infty([0; T]; X)$ . Предположим, кроме того, что задана функция (оператор)  $f : [0; T] \times X \times U \rightarrow X$ , удовлетворяющая условиям.

**F<sub>1</sub>)** Для всех  $u \in \mathcal{D}$ ,  $x \in E$  отображение  $[0; T] \ni t \rightarrow f(t, x(t), u(t))$  принадлежит классу  $Z = L_2([0; T]; X)$ .

**F<sub>2</sub>)** Существует функция  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t, M) : [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , суммируемая по  $t \in [0; T]$  и неубывающая по  $M \in \mathbb{R}_+$  такая, что для всех  $u \in \mathcal{D}$ ,  $x, y \in X$ ,  $\|x\|_X, \|y\|_X \leq M$ , п.в.  $t \in [0; T]$  имеем:

$$\|f(t, x, u(t)) - f(t, y, u(t))\|_X \leq \mathcal{N}(t, M) \|x - y\|_X.$$

**F<sub>3</sub>)** Существует функция  $\mathcal{N}_1(t, r) : [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , неубывающая по  $r$  и суммируемая по Лебегу по  $t$  такая, что  $\|f(t, \xi, u(t))\|_X \leq \mathcal{N}_1(t, M)$  для всех  $M > 0$ ,  $\xi \in X$ ,  $\|\xi\|_X \leq M$ ,  $u \in \mathcal{D}$ , п.в.  $t \in [0; T]$ .

Будем рассматривать управляемое полулинейное уравнение

$$x'(t) = Gx(t) + f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0; T]; \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

понимая его (слабое) решение как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$x(t) = \theta_\lambda(t) + \mathcal{A}_\lambda \left[ f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \right](t), \quad t \in [0; T]; \quad x \in E; \quad u \in \mathcal{D}.$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия **F<sub>1</sub>)**, **F<sub>2</sub>)**, **G<sub>λ</sub>)**. Тогда, каково бы ни было  $u \in \mathcal{D}$ , задача (2) не может иметь более одного решения.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия **F<sub>1</sub>)**–**F<sub>3</sub>)**, **G<sub>λ</sub>)**. Тогда справедливо следующее утверждение. Пусть  $\|\theta_\lambda(t)\|_X \leq \alpha(t)$  для п.в.  $t \in [0; T]$ , где  $\alpha \in L_\infty[0; T]$ . Предположим, что задача Коши

$$\frac{d}{dt} \beta(t) = K_\lambda \mathcal{N}_1(t, \alpha(t) + \beta(t)), \quad t \in (0; T]; \quad \beta(0) = 0,$$

имеет решение — неотрицательную функцию  $\beta \in \mathbb{A}\mathbb{C}[0; T]$ . Тогда для любого  $u \in \mathcal{D}$  задача (2) имеет решение  $x \in \mathbb{C}_w([0; T], X)$ , удовлетворяющее оценке  $\|x(t)\|_X \leq \|\theta_\lambda(t)\|_X + \beta(t)$ , п.в.  $t \in [0; T]$ .

1. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
2. Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. N.Y., Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2011.

## Об осцилляции решений дифференциальных уравнений первого порядка с последствием

К. М. Чудинов

Пермь, Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет  
e-mail: cyril@list.ru

Будем говорить, что функция, определенная на полуоси  $\mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$ , осциллирует, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей. Исследования условий осцилляции решений дифференциальных уравнений с последствием восходят к работам А. Д. Мышкиса середины XX в. В статье [1] исследованы асимптотические свойства решений уравнения

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

где  $a(t) \geq 0$ ,  $h(t) \leq t$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$ . Следующий хорошо известный факт [2] уточняет результаты Мышкиса.

**Теорема 1.** Если  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{h(t)}^t a(s) ds > 1/e$ , то все решения уравнения (1) осциллируют.

Обобщение теоремы 1 на уравнение с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где  $a_k(t) \geq 0$ ,  $h_k(t) \leq t$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_k(t) = +\infty$ ,  $k = 1, \dots, n$ , оказалось нетривиальной задачей. Условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{h_k(t)}^t a_k(s) ds > 1/e$$

не гарантирует осцилляции решений уравнения (2), а известные до недавнего времени достаточные условия осцилляции либо не учитывали в равной мере влияние на осцилляцию решений всех входящих в уравнение слагаемых, либо накладывали на коэффициенты уравнения весьма жесткие условия.

Недавно был установлен следующий результат [3]. Определим  $n$  семейств множеств  $E_k(t) = \{s \geq t \mid h_k(s) < t\}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Теорема 2.** Если  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{E_k(t)} a_k(s) ds > 1/e$ , то все решения уравнения (2) осциллируют.

**Следствие.** Пусть функции  $h_k$  непрерывны и строго возрастают. Если

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_t^{h_k^{-1}(t)} a_k(s) ds > 1/e$ , то все решения уравнения (2) осциллируют.

**Замечание.** Даже в случае  $n = 1$  область применимости теоремы 2 шире, чем теоремы 1.

Таким образом, оценка интеграла от коэффициентов уравнения (2) по множествам  $E_k(t)$  дает существенно более точную информацию об осцилляции решений, чем оценка интегралов от коэффициентов по длинам запаздываний. Более того, сопоставление полученных результатов с недавними исследованиями условий устойчивости линейного дифференциального уравнения с последствием [4] показывает, что использованный при изучении условий осцилляции подход может быть применен для уточнения известных эффективных условий устойчивости уравнений (1) и (2).

Отметим, что описанный подход допускает также перенос на разностные уравнения и на уравнения с распределенным запаздыванием.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-01-00928.

1. *Мышкис А.Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Матем. сб. 1951. № 3. С. 641–658.
2. *Коплатадзе Р.Г., Чантурия Т.А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравн. 1982. Т. 18. № 8. С. 1463–1465.
3. *Чудинов К.М.* Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последствием и обобщении теоремы Коплатадзе–Чантурия // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 1. С. 224–233.

4. *Kulikov A., Malygina V.* On relation between uniform asymptotic stability and exponential stability of linear differential equations // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. No. 65. Pp. 1–8.

## Нетерова дифференциально-алгебраическая краевая задача с запаздыванием в случае параметрического резонанса

**С. М. Чуйко**

*Славянск, Донбасский государственный педагогический университет*

e-mail: chujko-slav@inbox.ru, chujko-slav@ukr.net

Исследована задача о нахождении условий разрешимости и построении решения [1–3]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\{[0, T] \setminus \{k\Delta\}_I\}, \quad T := (q+1)\Delta, \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

дифференциально-алгебраической системы с сосредоточенным запаздыванием

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + C(t)z(t - \Delta) + f(t), \quad t \neq k\Delta, \quad (1)$$

непрерывного в точках  $t = k\Delta$ , и удовлетворяющего условиям

$$\ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad z(t) := \varphi(t) := \sum_{i=1}^p \varphi_i(t)h_i, \quad \varphi_i(t) \in \mathbb{C}^1[0, \Delta] \quad (2)$$

с начальной функцией  $\varphi(t)$ , зависящей от собственного вектора  $h \in \mathbb{R}^q$  краевой задачи (1), (2). В точках  $t = k\Delta$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , искомое решение краевой задачи (1), (2), возможно, претерпевает ограниченный разрыв производной. Здесь

$$A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{C}_{p \times n}[\Delta, T] := \mathbb{C}[\Delta, T] \otimes \mathbb{R}^{p \times n}, \quad f(t) \in \mathbb{C}[\Delta, T],$$

$\ell z(\cdot)$  — линейный ограниченный векторный функционал:

$$\mathbb{C}^1\{[0, T] \setminus \{k\Delta\}_I\} \otimes \mathbb{R}^n := \mathbb{C}_n^1\{[0, T] \setminus \{k\Delta\}_I\} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$



Поставленная таким образом краевая задача (1), (2) является, с одной стороны, обобщением линейных нетеровых ( $m \neq n$ ) краевых задач для систем функционально-дифференциальных уравнений [1–3], с другой стороны, частным случаем нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса [4–7]. Кроме того, краевая задача (1), (2) является обобщением дифференциально-алгебраических краевых задач [8, 9], в том числе с сосредоточенным запаздыванием [10], на задачи в случае параметрического резонанса. Существенной особенностью краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса является зависимость условий разрешимости от собственного вектора  $h$  краевой задачи (1), (2). Построение решений краевой задачи (1), (2) в более традиционном классе функций [2, 3] по сравнению с [1] обусловлено спецификой приложений краевых задач в случае параметрического резонанса. Получены условия разрешимости, а также обобщенный оператор Грина нетеровой краевой задачи с запаздыванием (1), (2) в случае параметрического резонанса.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины. Номер регистрации 0118U003390.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter, 2016.
3. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. К.: Изд-во Киев. ун-та, 1969.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. М.: Мир, 1978.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
6. *Chuiiko S.M.* Nonlinear Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 205. Pp. 859–870.
7. *Chuiiko S.M., Chuiiko A.S., Sysoev D.V.* Weakly nonlinear matrix boundary-value problem in the case of parametric resonance // Journ. of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 223. Pp. 337–350.
8. *Chuiiko S.M.* On a reduction of the order in a differential-algebraic system // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 235. Pp. 2–14.
9. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1980. 178 p.
10. *Чуйко С.М.* О разрешимости задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы с сосредоточенным запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2019. № 12. С. 91–105.

# Метод Ньютона–Канторовича в теории нелинейных автономных краевых задач

**С. М. Чуйко**

*Славянск, Донбасский государственный педагогический университет*  
e-mail: chujko-slav@inbox.ru, chujko-slav@ukr.net

**О. В. Несмелова**

*Славянск, Институт прикладной математики и механики НАН Украины*  
e-mail: star-o@ukr.net

Исследована задача о нахождении решений [1–3]

$$z(t, \varepsilon): z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad b(\varepsilon), h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса [4, 5]

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z, h(\varepsilon), \varepsilon), \quad (1)$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Решения краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad b_0 = b(0), \quad h_0 = h(0) \in \mathbb{R}^q,$$

нетривной ( $m \neq n$ ) порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha.$$

Здесь  $A$  — постоянная ( $n \times n$ )-мерная матрица,  $Z(z, h(\varepsilon), \varepsilon)$  — нелинейная вектор-функция, дважды непрерывно-дифференцируемая по неизвестным  $z(t, \varepsilon)$  и  $h(\varepsilon)$  в малой окрестности решения порождающей задачи, и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру  $\varepsilon$  на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ ;  $\ell z(\cdot, \varepsilon)$  — линейный и  $J(z(\cdot, h(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)$  — нелинейный векторный функционалы,  $\ell z(\cdot, \varepsilon), J(z(\cdot, h(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon): \mathbb{C}[a, b(\varepsilon)] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , причем второй функционал дважды непрерывно-дифференцируем по неизвестным  $z(t, \varepsilon)$  и  $h(\varepsilon)$  в малой окрестности решения порождающей задачи и по малому

параметру  $\varepsilon$  в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ .

Найдены конструктивные условия разрешимости и схема построения решений нелинейной автономной краевой задачи в случае параметрического резонанса. Для нахождения решения краевой задачи (1), (2) в окрестности порождающего решения использован метод Ньютона–Канторовича [6, 7]. Построена сходящаяся итерационная схема для нахождения приближений к решению нелинейной автономной непервой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса. В качестве примера применения построенной итерационной схемы, найдены приближения к решению периодической краевой задачи для автономного уравнения типа Дюффинга с параметрическим возмущением. Для контроля точности найденных приближений к решению периодической краевой задачи для автономного уравнения типа Дюффинга использованы невязки в исходном уравнении.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины. Номер регистрации 0118U003390.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter, 2016.
3. *Boichuk A., Chuiko S.* Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases // *Differential Equations*. 1992. Vol. 28. No. 10. Pp. 1353–1358.
4. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
5. *Chuiko S.M.* Nonlinear Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance // *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 205. Pp. 859–870.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
7. *Chuiko S.M.* To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem // *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics*. 2017. No. 1. Pp. 62–68.

# Обобщенное решение уравнения Гамильтона – Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом

Л. Г. Шагалова

Екатеринбург, Институт математики и механики

им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: shag@imm.uran.ru

Рассматривается следующая задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad t \in (0, T), \quad x \in R, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

Здесь  $T$  — заданный момент,  $T > 0$ ,  $u_0(\cdot)$  — заданная непрерывная функция.

Предполагается, что заданы непрерывно дифференцируемые функции  $f(\cdot): R \rightarrow R$  и  $g(\cdot): R \rightarrow R$  такие, что  $f(\cdot)$  является монотонно возрастающей, а  $g(\cdot)$  — монотонно убывающей. Пусть  $f(x_*) = 0$ ,  $g(x^*) = 0$  и справедливо неравенство  $x_* < x^*$ . Обозначим

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad g^+(x) = \max\{g(x), 0\}, \quad x \in R.$$

В задаче (1), (2) в предположении, что гамильтониан  $H(x, p)$  имеет вид

$$H(x, p) = f^+(x)e^p + g^+(x)e^{-p}, \quad (3)$$

осуществляется построение обобщенного решения. Построения основываются на минимаксном [1] и вязкостном [2] подходе. При этом область  $(0, T) \times R$  разбивается на три подобласти, в каждой из которых гамильтониан (3) непрерывен:

$$H(x, p) = \begin{cases} g(x)e^{-p}, & (t, x) \in G_- = \{(t, x) | x < x_*\}, \\ f(x)e^p + g(x)e^{-p}, & (t, x) \in G_0 = \{(t, x) | x_* < x < x^*\}, \\ f(x)e^p, & (t, x) \in G_+ = \{(t, x) | x > x^*\}. \end{cases}$$

В области  $G_0$  выполнено условие коэрцитивности гамильтониана

$$\frac{H(x, p)}{p} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty$$

а в областях  $G_-$  и  $G_+$  это условие нарушается.

Задачи с экспоненциальной зависимостью гамильтониана от импульсной переменной нетипичны для теории уравнений Гамильтона–Якоби. Вместе с тем такие уравнения возникают в прикладных исследованиях, в частности, в молекулярной генетике [3]. Ранее уравнение с гамильтонианом вида (3) исследовалось (см., например, [4]) в ограниченной по  $x$  области  $G_0 = \{(t, x) | 0 < t < T, -1 \leq x \leq 1\}$  в случае  $f(x) = (x + 1)/2$ ,  $g(x) = (1 - x)/2$ .

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00362.

1. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. Москва: Наука, 1991.
2. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277. No. 1. Pp. 1–42.
3. *Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Physical Review E. 2008. Vol. 78. 041908.
4. *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* Конструкция непрерывного минимаксного / вязкостного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с неподолжимыми характеристиками // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 247–257.

## Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией

**М. В. Шамолин**

*Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова*

e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В работе показана интегрируемость классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (третьего, пятого, седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расщеплении к гладкому многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные.

Дать общее определение системы с диссипацией довольно затруднительно. В каждом случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определенные коэффициенты указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на ее подкачку. Это и приводит к потере известных первых интегралов, являющимися гладкими функциями [1].

Исследуются системы нечетного порядка (ср. с [2, 3]). Мы проиллюстрируем подход на примере систем третьего порядка. Пусть  $v, \alpha, z$  — переменные в гладкой системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным  $v, z$  с коэффициентами, зависящими от  $\alpha$ . Выбирая в качестве независимой переменной  $q$  ( $dq = vdt$ ,  $d/dq = \langle' \rangle$ ), а также переменную  $Z$  ( $z = Zv$ ), система переписывается как

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \quad (1)$$

$$\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \quad Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \quad (2)$$

при этом уравнение (1) отделяется. Особняком стоит случай

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \quad (3)$$

Тогда система (1), (2) имеет аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}. \quad (4)$$

Если выполнены следующие условия  $a(\alpha) = h^2(\alpha)c(\alpha)/i^2(\alpha)$ ,  $b(\alpha) = h(\alpha)c(\alpha)/i(\alpha)$ ,  $g(\alpha) = h^2(\alpha)/i(\alpha)$ , где  $c(\alpha)$ ,  $h(\alpha)$ ,  $i(\alpha)$  — гладкие функции на своей области определения, то система (1), (2) при условии (3) имеет два гладких первых интеграла, а именно, (4), а также  $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z) = C_0 = \text{const}$ , где  $\gamma(\alpha)$  и  $\epsilon(\alpha)$  — некоторые гладкие функции.

Внутреннее силовое поле (зависящее от функций  $c(\alpha)$ ,  $h(\alpha)$  и  $i(\alpha)$ ) в системе (1), (2) при условии (3) не нарушает консервативности системы. Ограничимся частным случаем системы (1), (2):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0Z^2\tilde{\delta}(\alpha), \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad (5)$$

$$\alpha' = -Z + b_0Z^2\delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \quad (6)$$

$b_0 \geq 0$  — параметр,  $\delta(\alpha)$  — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил. Система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла:  $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0Z\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}$ ,  $\Phi_1(v; Z) =$

$vZ = C_1 = \text{const}$ . Другими словами, независимая подсистема (6) на многообразии  $N^2\{Z; \alpha\}$  имеет рациональный по  $Z$  первый интеграл вида  $\Phi(Z; \alpha) = (1 - 2b_0Z\delta(\alpha))/Z^2 = C = \text{const}$ , не имеющий существенно особых точек. Тогда подсистема (6) не имеет асимптотических предельных множеств.

Добавляя в систему (5), (6) внешнее поле  $F(\alpha)$  при  $b_0 > 0$ :

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{7}$$

$$\alpha' = -Z + b_0Z^2\delta(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \tag{8}$$

создается впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при  $b_0 = 0$ ). Консервативность «подтвердилась» бы наличием двух гладких интегралов. Действительно, при некотором условии у системы (7), (8) существует гладкий первый интеграл  $\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}$ ,  $dF_1(\alpha)/d\alpha = 2F(\alpha)$ , структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого интеграла система не имеет.

Если  $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$ , то система (7), (8) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла:  $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - b_0Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha))\arctan \delta(\alpha)/Z) = C_0 = \text{const}$ ,  $\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}$ .

Модифицируем далее систему (7), (8), при наличии двух ключевых параметров  $b_0, b_1 \geq 0$ , введя внешнее поле. Получим систему

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0Z^2\tilde{\delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \\ \tilde{f}(\alpha) &= (\mu - \delta^2(\alpha))/\tilde{\delta}(\alpha), \quad \mu = \text{const}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\alpha' = -Z + b_0Z^2\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \tag{10}$$

Мы ввели поле, добавив коэффициент  $F(\alpha)$  в уравнение на  $Z'$  системы (7), (8), и убедились, что полученная система не будет консервативной. Консервативность будет при условии:  $b_0 = 0$ . Расширим введение силового поля, положив  $b_1 > 0$ . Система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения  $TM^1\{Z; \alpha\}$  примет вид (9), (10). Только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

**Теорема.** *Если выполнено условие  $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$ , то система (9), (10) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) интегралами.*

1. *Шамолин М.В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1: Твердое тело в неконсервативном поле. М.: ЛЕНАНД, 2019.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. 2019. Т. 489. № 6. С. 592–598.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией // Доклады РАН. 2019. Т. 487. № 4. С. 381–386.



---

---

# Теория управления и дифференциальные игры

## Sufficient conditions for uniform global asymptotic stabilization of semi-linear discrete-time systems with periodic coefficients

**A. Czornik, M. Niezabitowski**

*Gliwice, Poland, Silesian University of Technology*  
e-mail: adam.czornik@polsl.pl, michal.niezabitowski@polsl.pl

**E. K. Makarov**

*Minsk, Belarus, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences  
of Belarus*  
e-mail: jcm@im.bas-net.by

**S. N. Popova, V. A. Zaitsev**

*Izhevsk, Russia, Udmurt State University*  
e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com, verba@udm.ru

Consider a semi-linear time-varying control discrete-time system

$$x(t+1) = A(t)x(t) + g(t, x(t))u(t). \quad (1)$$

Here  $x \in \mathbb{R}^n$  is the state,  $u \in \mathbb{R}^r$  is the control input,  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{n,n}$ ,  $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow M_{n,r}$ ;  $M_{n,r}$  is the space of real  $n \times r$ -matrices. We study the problem of asymptotic stabilization of system (1): one needs to construct feedback control

$$u(t) = \hat{u}(t, x(t)) \quad (2)$$

with  $\hat{u}(t, 0) \equiv 0$  in system (1) such that the equilibrium  $x = 0$  of the closed-loop system

$$x(t+1) = A(t)x(t) + g(t, x(t))\hat{u}(t, x(t))$$

is asymptotically stable.

Suppose that system (1) is periodic, i.e., there exists an  $\omega \in \mathbb{N}$  such that  $A(t + \omega) = A(t)$ ,  $g(t + \omega, x) = g(t, x)$  for all  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Consider the free system corresponding to (1) (i.e., (1) with  $u(t) \equiv 0$ )

$$x(t + 1) = A(t)x(t). \quad (3)$$

Let  $\Phi(t, s)$ ,  $t \geq s$ , denote the transition matrix of the free system (3). The periodic system (3) is Lyapunov stable (non-asymptotically) iff there exists a  $P(t) \in M_{n,n}$  such that the following conditions hold for all  $t \in \mathbb{Z}$ :

$$P(t + \omega) = P(t), \quad P^T(t) = P(t) > 0, \quad (4)$$

$$A^T(t)P(t + 1)A(t) - P(t) \leq 0, \quad (5)$$

where inequalities are understood in the sense of quadratic forms.

Set  $G(t, x) = I + \frac{1}{2}g^T(t, x)P(t + 1)g(t, x)$ , where  $I \in M_{r,r}$ . Then  $G(t, x) \in M_{r,r}$ ,  $G(t, x) = G^T(t, x) \geq I > 0$ ,  $G(t, x) = G(t + \omega, x)$ , and  $G^{-1}(t, x)$  is defined for all  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Let us construct the control function

$$\widehat{u}(t, x) = -G^{-1}(t, x)g^T(t, x)P(t + 1)A(t)x \quad (6)$$

and the following matrices:

$$N_1(\tau, x) = g(\tau, x),$$

$$N_{i+1}(\tau, x) = [A(\tau + i)N_i(\tau, x), g(\tau + i, \Phi(\tau + i, \tau)x)],$$

$i \geq 1$ . Note that  $N_i(\tau + \omega, x) = N_i(\tau, x) \in M_{n,ir}$  for any  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Theorem.** *Let system (1) be  $\omega$ -periodic, the free system (3) be Lyapunov stable, and the following condition holds:*

$$\exists t_0 \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \exists \nu \geq 1 \quad \text{rank } N_\nu(t_0, x) = n.$$

*Then the state feedback control (2), (6) uniformly globally asymptotically stabilizes the origin of (1); here  $P(t)$  is a matrix satisfying conditions (4), (5).*

Theorem extends results obtained in [1, 2] for bilinear systems.

The research presented here by first and second author were financed by the grant from the Silesian University of Technology — subsidy for maintaining and developing the research potential in 2020 and by the National Science Centre in Poland granted according to decision DEC-2017/25/B/ST7/02888, respectively. The work of the fourth author was funded by the Ministry Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00232-20-01 (project 0827-2020-0010 “Development of the theory and methods of control and stabilization of dynamical systems”) and by RFBR (project number 20-01-00293). The work of the fifth author was done as part of the project funded by the Polish National Agency for Academic Exchange (NAWA) granted according to the decision No. PPN/ULM/2019/1/00287/DEC/1.

1. *Zaitsev V.A.* Sufficient conditions for uniform global asymptotic stabilization of discrete-time periodic bilinear systems // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. Issue 1. Pp. 11529–11534.
2. *Zaitsev V.A.* Uniform global asymptotic stabilization of bilinear non-homogeneous periodic discrete-time systems // 2018 14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference), STAB. IEEE, 2018. Pp. 1–4.

## Nonlinear differential games with aftereffects. Application of $i$ -smooth analysis

A. V. Kim, A. V. Ivanov

*Ekaterinburg, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics*

e-mail: avkim@imm.uran.ru, av.ivanov.2014@yandex.ru

The paper presents some results of the theory of differential games of systems with aftereffects obtained using  $i$ -smooth analysis. Fundamentals of the theory of positional differential games of systems with aftereffects was developed by Yu. S. Osipov [1] and his followers in the second half of the XX century. Based on the functional approach, a theory was developed that includes analogs of main results of the theory of Krasovskii-Subbotin positional differential games [2]. However, as in other areas of the FDE, the infinite-dimensional nature of systems with delays makes it difficult to implement the theoretical results constructively. As in other branches of FDE theory application of  $i$ -smooth analysis allows one obtain in FDE differential game theory results which, if there is no delays, coincide exactly to the notation with Krasovskii-Subbotin theory. The report presents one of such results.

**Problem statement.** Consider a control system with delays

$$\dot{x} = f(t, x, y(\cdot), u, v), \quad (1)$$

$$u \in P \subset R^r, v \in Q \subset R^q, \quad (2)$$

where  $P, Q$  are compacts;  $f(t, x, y(\cdot), u, v): [t_0, \theta] \times H \times P \times Q \rightarrow R^n$  is an invariantly continuous and Lipschitz with respect to  $h$  mapping;  $H = R^n \times Q[-\tau, 0)$  is the phase space.

**Definition 1.** A program control of the first (second) player is any summable function  $u(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow P$  ( $v(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow Q$ ).

**Definition 2.** Strategy of the first (second) player is a rule that matches to any position  $p = \{t, h\} \in R \times H$  a set  $U(t, h) = U(p) \subset P$  ( $V(t, h) = V(p) \subset Q$ ).

**Theorem.** Let's assume that we found an invariantly continuous functional  $\varepsilon(t, x, y(\cdot))$ , which satisfies the boundary condition

$$\varepsilon(\theta, x, y(\cdot)) = \sigma(x, y(\cdot));$$

has in the region

$$\sigma_0 < \varepsilon(t, x, y(\cdot)) < \sigma^0, \quad t_0 < t < \theta,$$

invariantly continuous partial and invariant derivatives  $\partial\varepsilon/\partial t$ ,  $\partial\varepsilon/\partial x_i$ ,  $\partial_{y_i}\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ );

satisfies in this region the condition

$$\begin{aligned} & \min_{u \in P} \max_{v \in Q} ([\partial\varepsilon/\partial x_i]' f(t, x, y(\cdot), u, v) + \partial\varepsilon/\partial t) = \\ & = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} ([\partial\varepsilon/\partial x_i]' f(t, x, y(\cdot), u, v) + \partial\varepsilon/\partial t) = 0. \end{aligned}$$

Let strategies  $U^0 \doteq u^0(t, x, y(\cdot))$  and  $V^0 \doteq v^0(t, x, y(\cdot))$  are defined in the region (2) by conditions

$$\max_{v \in Q} ([\partial\varepsilon/\partial]' f(t, x, y(\cdot), u^0(t, x, y(\cdot), v))) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} ([\partial\varepsilon/\partial]' f(t, x, y(\cdot), u, v)),$$

$$\min_{u \in P} ([\partial\varepsilon/\partial]' f(t, x, y(\cdot), u, v^0(t, x, y(\cdot)))) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} ([\partial\varepsilon/\partial]' f(t, x, y(\cdot), u, v)),$$

and outside of this area they take any valid values.

Then for any initial position  $\{t_0, h_0\}$  strategies  $U^0, V^0$  form the saddle point  $\{U^0, V^0\}$  of the differential game on minimax-maximin of the functional  $\phi$ , and the cost of the game is defined by the equality

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \varepsilon(t_0, h^0).$$

1. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. Positional Differential Games [Pozicionnye differencial'nye igry]. Moscow: Nauka, 1974.
2. Osipov Yu.S. Differential games of systems with aftereffect [Differencial'nye igry sistem s posledeystviem] // DAN SSSR. 1971. Vol. 196. No. 4. Pp. 779–782.
3. Kim A.V. Functional differential equations. Application of  $i$ -smooth analysis. Kluwer Academic Publishers, 1998.
4. Kim A.V.  $i$ -smooth analysis. Theory and applications. Wiley, 2015.

5. *Kim A.V., Ivanov A.V.* Systems with delays. Analysis, control and simulation. Wiley, 2015.

## A feedback in problems of tracking dynamical characteristics for ordinary differential equations

**V. I. Maksimov**

*Ekaterinburg, IMM UB RAS*

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

The problem of stable reconstruction of an unknown input of a dynamical system by inaccurate observations of some characteristics of its trajectory is considered. The problem is formulated as follows. Let a dynamical system be described by ordinary differential equations on some time interval. Let also trajectories of the system depend on a time-varying parameter; in what follows, it is considered as an input. The input, as well as the trajectory, is not specified in advance. It is assumed that some characteristics of the phase states are directly observed and that these observations are inaccurate. It is required to construct a stable dynamical algorithm of the approximate reconstruction of the phase coordinates and the input. The dynamic property means that the current values of approximations of the corresponding coordinates and the input are generated online (i.e., in real time). In its turn, the stability property means that the algorithm produces an approximation that is as precise as one likes under a sufficient accuracy of the observations.

The problem is referred to the class of inverse problems of dynamics. The algorithms presented in this report are based on constructions from the theory of robust dynamic inversion. These constructions are obtained by the combination of methods of the theory of ill-posed problems and the theory of positional control. The methodology discussed in our report consists in the interpretation of a reconstruction algorithm as a control algorithm for an auxiliary dynamical system (a model). The control in the model is adapted to the results of current observations in such a way that its realization approximates the unknown input. Note that this methodology is based on the idea of stabilizing appropriate Lyapunov-type functionals by means of the extremal shift. Thus, the method combines the stabilization and extremal shift principles in the control scheme with a model.

In the present report, we give the review of results from the Ekaterinburg school developing the theory of dynamic inversion. At that, we concentrate only on the input (and unmeasured phase states) reconstruction problems for systems described by ordinary differential equations, not concerning other classes of systems, for example, systems with distributed parameters or delay systems. Our goal is to specify a set of algorithms for solving dynamical inverse problems for systems of ordinary differential equations of different structures under different informational conditions on measured characteristics of the phase coordinates, on restrictions imposed on the input actions and so on.

The problem under consideration in this report can be formulated by the following way. Let a dynamical system described by the nonlinear system of differential equations

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

with the initial condition  $x(0) = x_0$ , operate on a interval  $T = [0, \vartheta]$ ,  $0 < \vartheta < +\infty$ . An unknown input (disturbance)  $u(\cdot)$  acts on system (1). At discrete, frequent enough, times

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad (\tau_0 = 0, \tau_m = \vartheta, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta),$$

the system's output  $y(\tau_i) = Cx(\tau_i) \in \mathbb{R}^q$  is measured ( $C$  is a constant  $(q \times r)$ -matrix). The measurement results are vectors  $\xi_i^h \in \mathbb{R}^q$ ,  $i \in [0 : m - 1]$ , satisfying the inequalities

$$|y(\tau_i) - \xi_i^h|_q \leq h.$$

Here,  $h \in (0, 1)$  is the accuracy of measurements; the symbol  $|\cdot|_q$  stands for the Euclidean norm in the space  $\mathbb{R}^q$ . The problem is to construct an algorithm for reconstructing both the phase vector  $x(\cdot)$  and disturbance  $u(\cdot)$  generating the output  $y(\cdot)$  through the results of inaccurate measurements of  $y(\cdot)$  in the real time mode. In other words, it is required to form a pair "trajectory-control" that is close (in the sense explained below) to the pair  $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ . In the case when  $y \in \mathbb{R}^n$  and  $C$  is the identity matrix, the problem formulated above is equivalent to the problem of input reconstruction on the base of measurements of the whole phase vector  $x(\tau_i)$ . If the matrix  $C$  has the block structure, i.e.  $C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , the problem is equivalent to the problem of input reconstruction on the base of measurements of a "part" of the phase coordinates.

# Оптимизация интегрального вырожденного квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы

**И. Ю. Андреева**

*Екатеринбург, Уральский федеральный университет*

e-mail: i.y.andreeva@urfu.ru

**А. Н. Сесекин**

*Екатеринбург, Уральский федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: sesekin@list.ru

На траекториях квазилинейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \mu f(x, t) + B(t)\dot{v}(t)$$

с граничными условиями  $x(t) = x_0$ ,  $x_{t_f} = 0$  рассматривается задача минимизации функционала

$$J[u(\cdot)] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)Q(t)x(t)dt.$$

Здесь  $x(t)$  —  $n$ -мерная функция ограниченной вариации,  $v(t)$  —  $m$ -мерная вектор-функция ограниченной вариации (для определенности будем полагать  $v(t_0) = 0$ ),  $\mu$  — малый параметр,  $t_0$  и  $t_f$  — фиксированные начальный и конечный моменты времени ( $t_0 < t_f$ ),  $x(t)$  — фазовый вектор-функция размерности  $n$ ,  $f(x, t)$  — нелинейная вектор-функция размерности  $n$ ,  $A(t)$  — непрерывная матрица-функция размерности  $n \times n$ ,  $Q(t)$  — симметричная неотрицательно определенная матрица-функция размерности  $n \times n$ ,  $B(t)$  — непрерывно дифференцируемая матрица-функция размерности  $n \times m$ .

В работе [1] отмечалось, что при  $\mu = 0$  в классе абсолютно непрерывных траекторий рассматриваемая задача решения не имеет и необходимо расширять множество допустимых управлений  $v(t)$  до класса функций ограниченной вариации. В связи с тем, что в уравнение движения входит производная  $v(t)$ , производную нужно понимать в обобщенном смысле [2], на систему будут действовать в том числе импульсные управления, и траектории системы станут разрывными. Очевидно, что эти эффекты сохранятся и для квазилинейных систем. Задача минимизации невырожденно-

го квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы рассматривалась в [3].

В работе [4] построено программное управление для рассматриваемой задачи. Данная работа продолжает исследования [4]. Рассмотрен вариант позиционного оптимального управления. Построен импульсно-скользящий режим [5], который возникает при позиционном управлении. Приведены иллюстрирующие примеры.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 19-01-00371.

1. *Завалицын С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е.* Динамические системы с импульсной структурой. Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1983. 112 с.
2. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
3. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 3–12.
4. *Андреева И.Ю., Сесекин А.Н.* Вырожденная линейно-квадратичная задача для квазилинейной системы // Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения Н. Н. Красовского «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019). Екатеринбург. 2019. С. 34–36.
5. *Завалицын С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсно-скользящие режимы в нелинейных динамических системах // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 5. С. 790–799.

## Одновременная многократная поимка в задачах группового преследования

А. И. Благодатских

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: aiblag@mail.ru

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma$   $n + m$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и  $m$  убегающих  $E_1, \dots, E_m$  с



законами движения и начальными условиями

$$\begin{aligned} P_i &: \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E_j &: \dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad j \in I(m), \end{aligned}$$

где  $x_i, y_j \in \mathbb{R}^k$ ,  $A(t)$  — непрерывная на  $[t_0, \infty)$  квадратная матрица порядка  $k$ ,  $U(t) \in \text{comp}(\mathbb{R}^k)$  — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа на  $[t_0, \infty)$ , множество  $I(q) = \{1, \dots, q\}$  для всех  $q \geq 1$ .

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на  $[t_0, \infty)$  со значениями из множества  $U(t)$  будем называть *допустимыми*.

Пусть  $\sigma$  — некоторое разбиение —  $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_q < \dots$  — интервала  $[t_0, \infty)$ , не имеющее конечных точек сгущения.

**Определение 1.** *Кусочно-программной стратегией убегающих  $E_j$ , соответствующей разбиению  $\sigma$* , будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие  $\theta_q$ ,  $x_i(\theta_q)$ ,  $y_j(\theta_q)$  допустимое управление  $v(t)$ , определенное для  $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ , то есть для всех  $q = 0, 1, 2, \dots$

$$v(t) = v(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y_j(\theta_q)), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}).$$

Здесь и далее, если  $\theta_{q+1}$  не определен ( $\theta_q$  — последняя точка разбиения  $\sigma$ ), то считаем  $\theta_{q+1} = \infty$ .

Действия убегающих можно трактовать так: имеется центр, который для всех убегающих выбирает одно и то же управление  $v(t)$ .

**Определение 2.** *Кусочно-программной контрстратегией преследователей  $P_i$ , соответствующей разбиению  $\sigma$* , будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие  $\theta_q$ ,  $x_i(\theta_q)$ ,  $y_j(\theta_q)$  и допустимому управлению  $v(s)$ ,  $s \in [\theta_q, \theta_{q+1})$  убегающих  $E_j$  допустимые управления  $u_i(t)$ , определенные для  $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ , то есть для всех  $q = 0, 1, 2, \dots$

$$u_i(t) = u_i(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y_j(\theta_q), v(s), s \in [\theta_q, \theta_{q+1})), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}).$$

Для каждого  $q = 1, 2, \dots, n$  определим множество

$$\Omega(q) = \{\{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q, \quad i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n)\}.$$

**Определение 3.** *В игре  $\Gamma$  возможна  $b$ -кратная поимка (нестрогая одновременная  $b$ -кратная поимка)*, если существует конечный момент  $T_0$  такой, что для любых разбиения  $\sigma$  и кусочно-программной стратегии убегающих  $E_j$ , существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей  $P_i$ , что найдутся множество  $\Lambda \in \Omega(b)$ , номера  $j_\alpha \in I(m)$  и моменты  $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$  (момент  $\tau \in [t_0, T_0]$ ),  $\alpha \in \Lambda$ , для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha) \quad (x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau)) \quad \text{при всех } \alpha \in \Lambda.$$

**Определение 4.** В игре  $\Gamma$  возможна одновременная  $b$ -кратная поимка, если существует конечный момент  $T_0$  такой, что для любых разбиения  $\sigma$  и кусочно-программной стратегии убегающих  $E_j$ , существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей  $P_i$ , что найдутся множество  $\Lambda \in \Omega(b)$ , номера  $j_\alpha \in I(m)$  и момент  $\tau \in [t_0, T_0]$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при  $b = 1$  определения поимок совпадают. Если  $b \geq 2$ , то возможность  $b$ -кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной  $b$ -кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной  $b$ -кратной поимки.

Введем обозначения:  $S(a, b)$  — шар в  $\mathbb{R}^k$  с центром в точке  $a$  радиуса  $b$ ;  $O$  — нуль-матрица.

**Теорема.** Пусть  $A(t) \equiv O$  (задача простого преследования),  $m = 1$  (одного убегающего),  $U(t) = S(0, 1)$  (с максимальными по модулю скоростями игроков равными 1). Тогда для осуществления одновременной  $b$ -кратной поимки необходимо и достаточно, чтобы  $Y_1^0 \in \text{Intco}\{X_p^0, p \in K\}$  для всех множеств  $K \in \Omega(n - b + 1)$ .

В докладе планируется привести и другие условия разрешимости исследуемых задач.

1. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: УдГУ, 2009.
2. *Blagodatskikh A.I., Petrov N.N.* Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // *Dynamic Games and Applications*. 2019. Vol. 9. No. 3. Pp. 594–613.

## Оптимальное управление гибридными системами переменной размерности

**А. С. Бортакoвский**

*Москва, Московский авиационный институт*

e-mail: asbortakov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления гибридной системой переменной размерности (ГСНР), непрерывное движение которой че-

редуется с дискретными переключениями, при которых меняется размерность пространства состояний. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Они определяются в результате минимизации функционала, в котором учитываются затраты на каждое переключение. Смена пространства состояний происходит, например, при изменении количества управляемых объектов, что характерно, в частности, для задач управления группами летательных аппаратов переменного состава.

Необходимые условия оптимальности для гибридных систем с промежуточными условиями, обобщающие принцип максимума [1], получены в работах [2, 3]. В этих работах количество переключений задано, а сами переключения неуправляемы. В докладе обсуждаются достаточные условия оптимальности ГСПР, а также уравнения для нахождения оптимальных позиционных управлений и параметров. В поставленной задаче оптимальные процессы определяются целым «управляющим комплексом», который включает: количество переключений, моменты переключений, управление непрерывным движением, управление переключениями. При этом не исключаются мгновенные многократные переключения [4]. В некоторых задачах размерности пространств состояний также относятся к ресурсам управления и определяются при минимизации.

Пусть на заданном промежутке времени  $T = [t_0, t_F]$  динамическая система совершает  $N$  переключений в моменты времени  $t_1, \dots, t_N$ :  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$ . Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad (1)$$

а в моменты переключений — дискретно:

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где  $x_i(t) \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$  — состояние системы после  $i$ -го переключения,  $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$  — управление непрерывным движением,  $v_i \in V_i \subset \mathbb{R}^{q_i}$  — управление переключением. Начальное состояние системы задано, конечное состояние удовлетворяет терминальному ограничению

$$x_0(t_0) = x_0, \quad \Gamma_N(t_F, x_N(t_F)) = 0. \quad (3)$$

На множестве допустимых процессов  $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$  задан функционал

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) dt + \sum_{i=1}^N g_i^+(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i) +$$

$$+F_N(t_N, x_N(t_F)), \quad (4)$$

где  $g_i^+$  — неотрицательная функция. Все предположения о функциях в (1)–(4) обычные [4]. Требуется найти наименьшее значение функционала (4) и оптимальный процесс  $(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ , на котором это значение достигается. Количество  $N$  и моменты переключений  $t_1, \dots, t_N$  заранее не заданы и находятся в результате минимизации (4).

Достаточные условия оптимальности доказываются на основе метода динамического программирования, причем функция цены (функция Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ)) строится как нижняя огибающая семейства вспомогательных функций, так называемых *образующих* функции цены [4]. Рекуррентные уравнения для образующих записываются при помощи еще одной вспомогательной функции — *двухпозиционной* функции цены, удовлетворяющей уравнению ГЯБ. Применение условий оптимальности демонстрируется на академических примерах.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18–08–00128.

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М: Физматгиз, 1961.
2. *Sussmann H.J.* A maximum principle for hybrid optimal control problems // Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
3. *Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.* The hybrid maximum principle is a consequence of Pontryagin maximum principle // Systems and Control Letters. 2008. Vol. 57. Pp. 964–970.
4. *Бортаковский А.С.* Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 57–74.

## О минимаксном решении уравнений Гамильтона–Якоби с дробными коинвариантными производными

**М. И. Гомоюнов**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Пусть  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $T > 0$ . Для  $t \in [0, T]$  через  $AC^\alpha([0, t], \mathbb{R}^n)$  обозначим множество функций  $x: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для каждой из которых

существует измеримая и ограниченная функция  $\psi: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что  $x(\tau) = x(0) + (I_{0+}^\alpha \psi)(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$ , где  $I_{0+}^\alpha$  — оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля порядка  $\alpha$  (см. [1]). Рассмотрим множество  $G^\alpha$  пар  $(t, w(\cdot))$  таких, что  $t \in [0, T]$  и  $w(\cdot) \in AC^\alpha([0, t], \mathbb{R}^n)$ .

Функционал  $\varphi: G^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  называется [2] коинвариантно (*ci*-) дифференцируемым порядка  $\alpha$  в точке  $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$ ,  $t < T$ , если существуют такие  $\partial_t^\alpha \varphi = \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$  и  $\nabla^\alpha \varphi = \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ , что для любой функции  $x(\cdot) \in AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n)$ , удовлетворяющей условию  $x(\xi) = w(\xi)$ ,  $\xi \in [0, t]$ , при всех  $\tau \in (t, T)$  справедливо соотношение

$$\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) = (\tau - t)\partial_t^\alpha \varphi + \left\langle \int_t^\tau ({}^C D_{0+}^\alpha x)(\xi) d\xi, \nabla^\alpha \varphi \right\rangle + o(\tau - t),$$

где  $x_\tau(\cdot)$  — сужение функции  $x(\cdot)$  на  $[0, \tau]$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ ,  ${}^C D_{0+}^\alpha$  — оператор дробного дифференцирования Капуто порядка  $\alpha$  (см. [1]),  $o(\tau - t)/(\tau - t) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow t + 0$ . При этом величины  $\partial_t^\alpha \varphi$  и  $\nabla^\alpha \varphi$  называются *ci*-производными порядка  $\alpha$  функционала  $\varphi$  в точке  $(t, w(\cdot))$ .

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с *ci*-производными порядка  $\alpha$ :

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H(t, w(t), \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha, \quad t < T, \quad (1)$$

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Искомым в задаче (1), (2) является функционал  $\varphi: G^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ . Предположим, что выполнены следующие условия:

- (а) гамильтониан  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (t, x, s) \mapsto H(t, x, s) \in \mathbb{R}$  непрерывен;
- (б) для любого ограниченного множества  $K \subset \mathbb{R}^n$  существует такое  $\lambda > 0$ , что для любых  $t \in [0, T]$ ,  $x, x' \in K$  и  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|s\| = 1$ , справедлива оценка

$$|H(t, x, s) - H(t, x', s)| \leq \lambda \|x - x'\|;$$

- (в) существует такое  $c > 0$ , что для любых  $t \in [0, T]$  и  $x, s, s' \in \mathbb{R}^n$  имеет место неравенство

$$|H(t, x, s) - H(t, x, s')| \leq c(1 + \|x\|)\|s - s'\|;$$

- (г) для любых  $t \in [0, T]$ ,  $x, s \in \mathbb{R}^n$  и  $\gamma \geq 0$  выполняется равенство

$$H(t, x, \gamma s) = \gamma H(t, x, s);$$

- (е) краевой функционал  $AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n) \ni w(\cdot) \mapsto \sigma(w(\cdot)) \in \mathbb{R}$  непрерывен в топологии равномерной сходимости.

Задачи вида (1), (2) возникают [2] при изучении свойств функционала цены в задачах оптимального управления и дифференциальных играх для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными Капуто порядка  $\alpha$ . При этом требования (a)–(e) выполняются для достаточно широкого круга таких задач. Как правило, функционал цены не является достаточно гладким чтобы трактоваться как решение задачи (1), (2) в классическом смысле, что приводит к необходимости рассмотрения обобщенных решений этой задачи.

Следуя [3, 4], в работе дается определение минимаксного решения задачи (1), (2). При этом используется пара нелокальных свойств стабильности этого решения относительно характеристических дифференциальных включений с дробными производными Капуто порядка  $\alpha$ . Доказано, что при условиях (a)–(e) минимаксное решение существует, единственно и непрерывно меняется с изменением порядка дифференцирования  $\alpha$ , гамильтониана  $H$  и краевого функционала  $\sigma$ . Установлена согласованность минимаксного и классического решений задачи (1), (2). Показано, что минимаксное решение удовлетворяет уравнению (1) в каждой точке  $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$ ,  $t < T$ , в которой оно  $ci$ -дифференцируемо порядка  $\alpha$ .

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 19–71–00073.

1. *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010.
2. *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // ArXiv:1908.01747.
3. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
4. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.

## Об особых управлениях принципа максимума в задачах оптимизации систем Гурса–Дарбу

**И. В. Горохова**

*Нижний Новгород, НГТУ и.м. Р. Е. Алексеева*

e-mail: i\_lisach@mail.ru

**В. И. Сумин**

*Нижний Новгород, ННГУ и.м. Н. И. Лобачевского;*

*Тамбов, ТГУ и.м. Г. Р. Державина*

e-mail: v\_sumin@mail.ru

Управляемая краевая задача Гурса–Дарбу

$$x''_{t^1 t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)), \quad t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi \equiv [0, 1]^2, \quad (1)$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1), \quad t^1 \in [0, 1]; \quad x(0, t^2) = \varphi_2(t^2), \quad t^2 \in [0, 1], \quad (2)$$

$(g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v): \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  и  $\varphi_i(t^i): [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  ( $i = 1, 2$ ) заданы,  $u(t): \Pi \rightarrow V \subset \mathbf{R}^m$  — управление) — своего рода «пробный камень» теории оптимизации распределенных систем. А так называемые *особые управления* (ОУ) *поточечного принципа максимума* (ППМ), на которых он вырождается, изучались в случае распределенных систем в основном для систем Гурса–Дарбу и близких к ним, при этом для систем (1)–(2) рассматривались, как правило, терминальные задачи оптимизации и обычно предполагалось, что функция  $g$  и ее производные по «фазовым» переменным  $l$  непрерывны по совокупности переменных  $t, l, v$  (см., например, краткие обзоры в [1, §1], [2–4]). Причем значительное внимание уделялось случаю, когда функция  $g$  аффинна по  $l_1, l_2$ , а  $l_1, l_2$  в ней аддитивно отделены от  $v$  (см., например, [1, §2], [3, 4]).

Достаточно общий способ изучения ОУ ППМ для распределенных задач оптимизации, опирающийся на представление управляемой системы в форме вольтеррова функционального уравнения в лебеговом пространстве, описан в [2]. Он, в частности, применялся в [3–5]. В докладе рассказывается о результатах применения способа [2] к задаче максимизации функционала общего вида  $\Phi[x(\cdot)]$ , определенного на решениях  $x(\cdot)$  нелинейной системы (1)–(2) с полной каратеодориевской правой частью (1). Рассматривается случай, когда необходимо искать решения системы в классе абсолютно непрерывных  $n$ -вектор-функций с ограниченными смешанной и первыми производными. Предполагаем:  $g$  дважды дифференцируема по  $l$  при каждом  $v$  для почти всех  $t$  и вместе с производными

$g_l', g_{ll}''$   $L$ -измерима по  $t$  при любых  $\{l, v\}$ , непрерывна по  $\{l, v\}$  для почти каждого  $t$  и ограничена на любом ограниченном множестве;  $\varphi_i$  абсолютно непрерывна,  $\varphi_i(0) = 0$  и  $\varphi_i' \in L_\infty^n([0, 1])$  ( $i = 1, 2$ ); допустимы измеримые управления,  $V$  ограничено;  $\Phi[\cdot]: C^n(\Pi) \rightarrow \mathbf{R}$  — дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше функционал на классе непрерывных на  $\Pi$   $n$ -вектор-функций. Изучается общая ситуация сильного вырождения ППМ (являющегося *необходимым условием оптимальности* (НУО) первого порядка при игольчатом варьировании управления), когда на ОУ ППМ одновременно с ППМ вырождаются и НУО второго порядка (ранее, в [5], случай сильного вырождения ППМ на ОУ в указанной задаче рассматривался в частной ситуации «полного вырождения» ППМ). Формулируются достаточные условия сильного вырождения ППМ на ОУ и НУО соответствующих ОУ, обобщающие известные сходные условия, относящиеся к случаям терминального функционала качества и более гладкой функции  $g$ . Рассказывается о способах получения указанных результатов. Приводятся конкретные примеры.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00199.

1. *Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. Новосибирск: Наука, 1990.
2. *Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Т. 20. № 3. С. 70–80.
3. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях принципа максимума в терминальной задаче оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 1264–1274.
4. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 4. С. 483–494.
5. *Горохова И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 122. С. 278–284.



# Асимптотика множеств достижимости нелинейных управляемых систем на малых интервалах времени и метод линеаризации

М. И. Гусев

*Екатеринбург, Институт математики и механики*

*им. Н. Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: gmi@imm.uran.ru

Множества достижимости (МД) нелинейных систем в общем случае, как правило, невыпуклы и могут иметь достаточно сложную структуру. В данном докладе изучается поведение множеств достижимости нелинейных систем на малых интервалах времени при ограничениях на управление в норме  $L_2$ . Исследуется применимость метода линеаризации: можно ли при достаточно малой продолжительности временного интервала приближенно заменить исходное МД множеством достижимости линеаризованной системы? В работе [1] были получены достаточные условия, при выполнении которых это возможно. Эти условия определяются поведением грамиана управляемости линеаризованной системы — минимальное собственное значение грамиана не должно стремиться к нулю слишком быстро, когда длина временного интервала стремится к нулю. Понятие асимптотической близости МД определялось через оценки хаусдорфова расстояния между ними. В [2] при изучении асимптотики МД линейных систем использовалось понятие асимптотической эквивалентности множеств, определяемое с помощью метрики Банаха–Мазура. В данном докладе приведены достаточные условия, при которых МД нелинейной и линеаризованной системы асимптотически эквивалентны. Условия выполняются для достаточно широкого класса нелинейных систем управления второго порядка, но может быть нарушены для систем более высокой размерности. Результаты численного моделирования иллюстрируют теоретические выводы работы.

1. *Гусев М.И., Осипов И.О.* Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 86–99.
2. *Goncharova E., Ouseevich A.* Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. Vol. 168 (2). Pp. 615–624.

# Об одной сингулярно возмущенной задаче с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого аддитивно зависит от медленных и быстрых переменных

**А. Р. Данилин**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: dar@imm.uran.ru

**А. А. Шабуров**

*Екатеринбург, УрФУ*

e-mail: alexandershaburov@mail.ru

В работе рассматриваются две задачи оптимального управления линейными стационарными управляемыми системами [1] с постоянными коэффициентами с быстрыми и медленными переменными [2–4] на конечном отрезке времени с критерием качества типа Больца и гладкими ограничениями на управление типа шара. Результаты А. Б. Васильевой [5] об асимптотике фундаментальной матрицы для такой системы неприменимы, т.к. нарушаются стандартные условия устойчивости присоединенной системы. Тем не менее, линейная система удовлетворяет условию вполне управляемости. Задачи оптимального быстродействия с таким условием рассматривались в [6, 7]. В работе показано, что задачи с интегральным выпуклым критерием качества более регулярны, чем задачи быстродействия [7]. Современные результаты по нахождению асимптотики решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления представлены в обзоре [8] и работах [9–12].

1. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
2. *Дончев А.* Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
3. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20. No. 1. Pp. 111–113.
4. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

6. Данилин А.Р., Коврижных О.О. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451. № 6. С. 612–614.
7. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотика оптимального времени в задаче о быстродействии с двумя малыми параметрами // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 20. № 1. С. 92–99.
8. Zhang Y., Naidu D.S., Chenxiao Cai, Yun Zou. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Inter. Journal of Information and Systems Sciences. 2014. Vol. 9. No. 1. Pp. 1–36.
9. Курина Г.А., Нгуен Т.Х. Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 4. С. 628–652.
10. Kurina G.A., Hoai N.T. Projector Approach for Constructing the Zero Order Asymptotic Solution for the Singularly Perturbed Linear–Quadratic Control Problem in a Critical Case // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1997. P. 020073.
11. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с интегральным выпуклым критерием качества // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 303–310.
12. Данилин А.Р., Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных // Уфимск. матем. журн. 2019. Т. 11. № 2. С. 83–98.

## Измеримые сечения многозначных отображений и динамические системы сдвигов

Л. И. Данилов

*Ижевск, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН*  
e-mail: danilov@udman.ru

Пусть  $(V, \rho)$  — полное метрическое пространство. На пространстве  $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}, V)$ ,  $p \geq 1$ , рассматривается метрика

$$d_p^{(\rho)}(f_1, f_2) = \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m} \min \left\{ 1, \left( \frac{1}{2m} \int_{-m}^m \rho^p(f_1(t), f_2(t)) dt \right)^{1/p} \right\}.$$

Полное метрическое пространство  $(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, V), d_p^{(\rho)})$  является фазовым пространством динамической системы сдвигов  $(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, V), d_p^{(\rho)}, \mathbb{G}^{(V)})$  с потоком  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{G}^{(V)}(t, f)(\cdot) = f(\cdot + t)$ ,  $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, V)$ . Через  $(\text{cl}_b V, \text{dist})$  обозначим метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных множеств пространства  $(V, \rho)$  с метрикой Хаусдорфа  $\text{dist}$ . При этом полное метрическое пространство  $(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V), d_p^{(\text{dist})})$  с метрикой

$$d_p^{(\text{dist})}(F_1, F_2) = \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m} \min \left\{ 1, \left( \frac{1}{2m} \int_{-m}^m \text{dist}^p(F_1(t), F_2(t)) dt \right)^{1/p} \right\}$$

является фазовым пространством динамической системы сдвигов

$$(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V), d_p^{(\text{dist})}, \mathbb{G}^{(\text{cl}_b V)})$$

с потоком  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{G}^{(\text{cl}_b V)}(t, F)(\cdot) = F(\cdot + t)$ ,  $F \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V)$ .

Пусть  $(\mathcal{L}_{\text{loc}}^p, D_p, \mathbb{G})$  — прямое произведение динамических систем  $(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V), d_p^{(\text{dist})}, \mathbb{G}^{(\text{cl}_b V)})$  и  $(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, V), d_p^{(\rho)}, \mathbb{G}^{(V)})$  с метрикой

$$D_p((F_1, f_1), (F_2, f_2)) = d_p^{(\text{dist})}(F_1, F_2) + d_p^{(\rho)}(f_1, f_2)$$

и потоком  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{G}(t, (F, f))(\cdot) = (F(\cdot + t), f(\cdot + t))$ ,  $(F, f) \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V) \times L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, V)$ . Для компактных инвариантных множеств  $\mathcal{K}$  динамической системы  $(\mathcal{L}_{\text{loc}}^p, D_p, \mathbb{G})$  обозначим через  $\text{St } \mathcal{K}$  множество упорядоченных пар  $(X, x) \in \text{cl}_b V \times V$ , для которых существуют почти всюду постоянные функции  $F \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V)$  и  $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, V)$  такие, что  $(F, f) \in \mathcal{K}$ ,  $X = F(t)$  п.в. и  $x = f(t)$  п.в. Компактные инвариантные множества  $\mathcal{K}$  рассматриваются далее как динамические системы сдвигов  $(\mathcal{K}, D_p, \mathbb{G})$ .

**Теорема.** Пусть  $\mathcal{K}$  — компактное инвариантное множество динамической системы сдвигов  $(\mathcal{L}_{\text{loc}}^p, D_p, \mathbb{G})$ . Предположим, что для некоторого  $\varepsilon > 0$  существует непрерывное отображение  $(\text{cl}_b V, \text{dist}) \times (V, \rho) \supseteq \text{St } (\mathcal{K}) \ni (X, x) \mapsto h(X, x) \in X \subseteq (V, \rho)$  такое, что для всех  $(X, x) \in \text{St } (\mathcal{K})$  выполняется неравенство

$$\rho(h(X, x), x) < \rho(x, X) + \varepsilon \doteq \inf_{y \in X} \rho(x, y) + \varepsilon.$$

Тогда существует гомоморфизм  $\Phi$  динамической системы сдвигов  $(\mathcal{K}, D_p, \mathbb{G})$  в динамическую систему сдвигов  $(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}, V), d_p^{(\rho)}, \mathbb{G}^{(V)})$  такой, что для всех  $(F, f) \in \mathcal{K}$

$$(1) \quad \Phi((F, f))(t) \in F(t) \text{ п.в.,}$$

(2)  $\rho(\Phi((F, f))(t), f(t)) < \rho(f(t), F(t)) + \varepsilon$  н.в.,

(3) если  $(X, x) \in \text{St}(K)$ ,  $F(t) = X$  н.в. и  $f(t) = x$  н.в., то  $\Phi((F, f))(t) = h(X, x)$  н.в.

Частный случай теоремы 1 рассматривался в [1].

Пусть  $K$  — компактное метрическое пространство. Через  $S^p(\mathbb{R}, V)$  и  $S^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V)$ ,  $p \geq 1$ , обозначим пространства почти периодических по Степанову функций степени  $p$  с метриками Степанова  $d_p^{S,(\rho)}$  и  $d_p^{S,(\text{dist})}$  соответственно. Для непрерывных функций  $K \ni \xi \mapsto F(\xi, \cdot) \in S^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V)$  и  $K \ni \xi \mapsto f(\xi, \cdot) \in S^p(\mathbb{R}, V)$  пусть  $\text{St}_{F,f}$  — множество упорядоченных пар  $(X, x) \in \text{cl}_b V \times V$ , для которых при некотором  $\xi \in K$  функции  $F(\xi, \cdot)$  и  $f(\xi, \cdot)$  являются почти всюду постоянными и принимают значения  $X$  и  $x$  соответственно;  $\text{Mod } F(\xi, \cdot)$  и  $\text{Mod } f(\xi, \cdot)$  — модули частот функций  $F(\xi, \cdot)$  и  $f(\xi, \cdot)$ . Приводимое ниже следствие усиливает результаты статьи [2].

**Следствие.** Пусть  $K$  — компактное метрическое пространство,  $K \ni \xi \mapsto F(\xi, \cdot) \in (S^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b V), d_p^{S,(\text{dist})})$  и  $K \ni \xi \mapsto f(\xi, \cdot) \in (S^p(\mathbb{R}, V), d_p^{S,(\rho)})$  — непрерывные функции. Предположим, что для некоторого  $\varepsilon > 0$  существует непрерывное отображение  $\text{cl}_b V \times V \supseteq \text{St}_{F,f} \ni (X, x) \mapsto h(X, x) \in X \subseteq V$ , для которого  $\rho(h(X, x), x) < \rho(x, X) + \varepsilon$  при всех  $(X, x) \in \text{St}_{F,f}$ .

Тогда существует такая непрерывная функция  $K \ni \xi \mapsto g(\xi, \cdot) \in (S^p(\mathbb{R}, V), d_p^{S,(\rho)})$ , что для всех  $\xi \in K$

(1)  $\text{Mod } g(\xi, \cdot) \subseteq \text{Mod } F(\xi, \cdot) + \text{Mod } f(\xi, \cdot)$ ,

(2)  $g(\xi, t) \in F(\xi, t)$  н.в.,

(3)  $\rho(g(\xi, t), f(\xi, t)) < \rho(f(\xi, t), F(\xi, t)) + \varepsilon$  н.в.,

(4)  $g(\xi, t) = h(X, x)$  н.в., если  $F(\xi, t) = X$  н.в. и  $f(\xi, t) = x$  н.в.

1. Данилов Л.И. Динамические системы сдвигов и измеримые сечения многозначных отображений // Математический сборник. 2018. Т. 209. № 11. С. 69–102.
2. Данилов Л.И. О многозначных почти периодических отображениях, зависящих от параметра // Вестник Удмуртского университета. 1994. Вып. 2. С. 29–44.

# Признак разрешимости задачи управления асинхронным спектром почти периодических линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов

А. К. Деменчук

Минск, Институт математики НАН Беларуси

e-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Известно, что суперпозиция  $g(t) = f(t, x(t))$  почти периодических функций  $f(t, \cdot)$  и  $h(t)$  также является почти периодической функцией [1]. Из работ Л. И. Данилова [2] и А. И. Перова [3] следует, что функция  $g$  не имеет частот, не лежащих в модулях функций  $h$  и  $f$ . На основании этого вполне естественно предполагать, что соотношение частотных модулей почти периодического решения разрешенной относительно производной почти периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений и ее правой части может быть достаточно разнообразным. В частности, опираясь на результат работы Я. Курцвейля и О. Вейвуды [4] дадим следующее

**Определение.** Если пересечение частотных модулей решения системы и ее правой части тривиально, то такое почти периодическое решение называется *сильно нерегулярным*, а его частотный спектр — *асинхронным*.

Отметим, что в периодическом случае свойство сильной нерегулярности означает несоизмеримость периодов решения и правой части системы.

Задача синтеза систем, допускающих наличие решений с асинхронным спектром, рассматривалась как задача управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) в периодическом и квазипериодическом случаях [5]. Сформулируем подобную задачу для линейных почти периодических систем. Для этого рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где  $A(t)$  — непрерывная почти периодическая  $n \times n$ -матрица с модулем частот  $\text{Mod}(A)$ ,  $B$  — постоянная  $n \times n$ -матрица. Будем предполагать, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x$$

с непрерывной почти периодической матрицей  $U(t)$  размерности  $n \times n$  такой, что  $\text{Mod}(U) \subseteq \text{Mod}(A)$ .

*Задача управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром)* с целевым множеством частот  $L$  для системы (1) состоит в следующем: выбрать такую матрицу  $U(t)$  (коэффициент обратной связи) из допустимого множества, чтобы замкнутая этим управлением система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x$$

имела почти периодическое решение  $x(t)$  с асинхронным спектром  $L$ .

В случае невырожденной матрицы  $B$  решение поставленной задачи не вызывает затруднений. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$\text{rank } B = r, \quad 1 < r < n.$$

В таком случае найдется постоянная неособенная  $n \times n$ -матрица  $Q_B$  такая, что у матрицы  $Q_B B$  первые  $n - r = d$  строк нулевые, а остальные  $r$  строк линейно независимы. Обозначим  $r \times n$ -матрицу, составленную из ненулевых строк матрицы  $Q_B B$ , через  $B_1$ . Пусть  $C_{12}(t)$  — правый верхний блок размерности  $d \times r$  матрицы  $Q_B^{-1} A(t) Q_B$  и  $r_1$  — его столбцовый ранг.

**Теорема.** *Если выполняются следующие условия:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt = 0; \quad r_1 < r; \quad |L| \leq [(n - r_1)/2],$$

*то задача управления спектром нерегулярных колебаний с целевым множеством частот  $L$  для системы (1) имеет решение.*

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, договор № Ф20Р-005.

1. Левитан Б.М. Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953.
2. Данилов Л.И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Известия вузов. Математика. 1998. № 5 (432). С. 10–18.
3. Перов А.И. О спектре почти периодического оператора суперпозиции // Тез. докл. Международной научной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения», 28–30 июня 2011 г. Душанбе, 2011. С. 102–104.
4. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.
5. Деменчук А. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012.

# К вопросу о лямбда-преобразовании линейных стационарных управляемых систем в гильбертовом пространстве

М. А. Журавлева, В. А. Зайцев

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: mrnzo@yandex.ru, verba@udm.ru

Пусть  $X, U$  — гильбертовы пространства. Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где  $x(t) \in X, u(t) \in U, t \in \mathbb{R}$ , и  $A: X \rightarrow X, B: U \rightarrow X$  — линейные ограниченные операторы.

Система (1) называется *в точности управляемой* на  $[0, \vartheta]$  [1, р. 51], если для любых  $x_0, x_1 \in X$  существует управление  $u(\cdot) \in L_2([0, \vartheta], U)$ , которое переводит решение системы (1) из состояния  $x(0) = x_0$  в состояние  $x(\vartheta) = x_1$ .

Пусть управление в системе (1) строится в виде линейной обратной связи

$$u(t) = Q(t)x(t),$$

где  $Q(t): X \rightarrow U$  — линейный оператор, функция  $Q(\cdot)$  кусочно непрерывна на  $\mathbb{R}$  и найдется такое  $M_2 > 0$ , что при всех  $t \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство  $\|Q(t)\| \leq M_2$  (будем называть такой оператор  $Q(\cdot)$  допустимым). Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A + BQ(t))x(t). \quad (2)$$

Обозначим через  $\Phi_Q(t, \tau)$  эволюционный оператор системы (2) [2, гл. III, § 1, п. 5]. Тогда  $\Phi_0(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$ .

**Определение.** Будем говорить, что к системе (1) применимо  $\lambda$ -преобразование, если существует такое  $\sigma > 0$ , что для всякого  $\lambda \in \mathbb{R}$  найдется допустимый оператор  $Q(\cdot)$ , обеспечивающий для эволюционного оператора  $\Phi_Q(t, \tau)$  системы (2) равенство

$$\Phi_Q((k+1)\sigma, k\sigma) = e^{\lambda\sigma} \Phi_0((k+1)\sigma, k\sigma)$$

при всех  $k \in \mathbb{Z}$ .



Для систем в конечномерном пространстве это определение было дано в работе [3].

**Теорема.** Пусть система (1) в точности управляема на некотором отрезке  $[0, \vartheta]$ . Тогда к ней применимо  $\lambda$ -преобразование.

Теорема используется для решения задач управления асимптотикой решений системы (2).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00293.

1. *Curtain R.F., Pritchard A.J.* Infinite dimensional linear systems theory. Springer, 1978.
2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
3. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 60–67.

## Достаточные условия глобальной асимптотической стабилизации стационарной билинейной однородной системы с комплексными коэффициентами

**В. А. Зайцев**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: verba@udm.ru

Рассмотрим автономную билинейную однородную управляемую систему в комплексном пространстве

$$\dot{z} = (A + u_1 B_1 + u_2 B_2 + \dots + u_r B_r)z. \quad (1)$$

Здесь  $z \in \mathbb{C}^n$  — фазовый вектор,  $\dot{z} = dz/dt$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;  $A, B_j \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $j = \overline{1, r}$ ;  $M_n(\mathbb{C})$  — пространство комплексных  $n \times n$ -матриц;  $u = (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{C}^r$  —

вектор управления. Исследуется задача глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения системы (1): требуется построить управление в виде обратной связи

$$u = \hat{u}(z) = (\hat{u}_1(z), \dots, \hat{u}_r(z)), \quad (2)$$

$\hat{u}(0) = 0$ , так, чтобы нулевое решение  $z = 0$  системы (1), замкнутой обратной связью (2), было глобально асимптотически устойчивым.

Для вещественных систем вида (1) достаточные условия глобальной асимптотической стабилизации были получены в [1]. Впоследствии эти результаты были обобщены. Здесь методика Джарджевича–Куинна распространяется на комплексные системы.

Для произвольных матриц  $F, G \in M_n(\mathbb{C})$  рассмотрим следующий оператор:

$$ad_F^0 G := G, \quad ad_F^{\ell+1} G := (ad_F^\ell G)F - F(ad_F^\ell G), \quad \ell = 0, 1, \dots$$

Для системы (1) обозначим  $\Psi_j^\ell = ad_A^\ell B_j$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots$

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:  
свободная система  $\dot{z} = Az$  устойчива по Ляпунову, и

$$\text{span}_{\mathbb{R}}\{A, \Psi_1^\ell, \dots, \Psi_r^\ell, \ell = 0, 1, \dots\} = M_n(\mathbb{C}).$$

Тогда система (1) глобально асимптотически стабилизируема (в нуле) обратной связью (2).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00293.

1. *Jurdjevic V., Quinn J.P.* Controllability and stability // Journal of Differential Equations. 1978. Vol. 28. Issue 3. Pp. 381–389.

# Об управлении спектром линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием посредством статической обратной связи по выходу

В. А. Зайцев, И. Г. Ким

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

Пусть  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ;  $M_{n,m}(\mathbb{K})$  — пространство  $n \times m$ -матриц с элементами из  $\mathbb{K}$ ;  $I \in M_{n,n}(\mathbb{K})$  — единичная матрица;  $\bar{a}$  означает комплексное сопряжение числа  $a$ ;  $*$  — эрмитово сопряжение матрицы. Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с распределенным запаздыванием в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из  $m$  сигналов и их производных до порядка  $(n - p)$  включительно ( $1 \leq p \leq n$ ), а измерению доступны  $k$  различных линейных комбинаций состояния  $x(t)$  и его производных до порядка  $(p - 1)$  включительно:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{r=1}^n \int_{-h}^0 a_r(\tau) x^{(n-r)}(t + \tau) d\tau = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{l=p}^n b_{l\alpha} v_{\alpha}^{(n-l)}(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y_i(t) = \sum_{\theta=1}^p \bar{c}_{\theta i} x^{(\theta-1)}(t), \quad i = \overline{1, k}. \quad (2)$$

Здесь  $x \in \mathbb{K}^n$  — состояние;  $v = \text{col}(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{K}^m$  — вектор управления;  $y = \text{col}(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{K}^k$  — выходной вектор;  $a_r: [-h, 0] \rightarrow \mathbb{K}$  — интегрируемые на  $[-h, 0]$  функции,  $r = \overline{1, n}$ ;  $b_{l\alpha}, c_{\theta i} \in \mathbb{K}$ ,  $l = \overline{p, n}$ ,  $\alpha = \overline{1, m}$ ,  $\theta = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;  $h > 0$  — постоянное запаздывание. Пусть управление в системе (1), (2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с распределенным запаздыванием

$$v(t) = \int_{-h}^0 R(\tau) y(t + \tau) d\tau. \quad (3)$$

где  $R: [-h, 0] \rightarrow M_{m,k}(\mathbb{K})$  — интегрируемая функция на  $[-h, 0]$ . Замкнутая система имеет вид

$$x^{(n)}(t) + \sum_{r=1}^n \int_{-h}^0 \delta_r(\tau) x^{(n-r)}(t + \tau) d\tau = 0, \quad (4)$$

где функции  $\delta_r(\tau)$  зависят от  $a_r(\tau)$ ,  $b_{l\alpha}$ ,  $c_{\theta i}$ ,  $R(\tau)$ .

Характеристическая функция замкнутой системы (4) имеет вид

$$f(\lambda) = \lambda^n + \sum_{r=1}^n \lambda^{n-r} \int_{-h}^0 \delta_r(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau. \quad (5)$$

Множество нулей функции (5) образует спектр системы (4).

**Определение.** Будем говорить, что спектр системы (1), (2) *глобально управляем посредством регулятора* (3), если для произвольных (интегрируемых) функций  $\delta_r: [-h, 0] \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , существует интегрируемая функция  $R: [-h, 0] \rightarrow M_{m,k}(\mathbb{K})$  такая, что характеристическая функция замкнутой системы совпадает с (5) с заданными  $\delta_r(\tau)$ .

Построим по системе (1), (2) матрицы  $B = \{b_{l\alpha}\}$ ,  $l = \overline{1, n}$ ,  $\alpha = \overline{1, m}$ , и  $C = \{c_{\theta i}\}$ ,  $\theta = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , где  $b_{l\alpha} = 0$  при  $l < p$  и  $c_{\theta i}$  при  $\theta > p$ . Пусть  $J := \{\vartheta_{ij}\} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , где  $\vartheta_{ij} = 1$  при  $j = i + 1$  и  $\vartheta_{ij} = 0$  при  $j \neq i + 1$ . Положим  $J^0 := I$ .

**Теорема.** *Спектр системы (1), (2) глобально управляем посредством регулятора (3) тогда и только тогда, когда матрицы  $C^* J^0 B$ ,  $C^* J B$ , ...,  $C^* J^{n-1} B$  линейно независимы.*

Теорема распространяет результаты работы [1] на системы с распределенным запаздыванием по состоянию. Из теоремы вытекают следствия о стабилизации системы (1), (2) обратной связью (3). Полученный результат дополняет результаты работ [1, 2].

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект 0827-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00293.

1. *Зайцев В.А.* Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 133–135.
2. *Zaitsev V.A., Kim I.G.* Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. Pp. 810–814.

# О способе приближенного построения множеств достижимости линейных управляемых систем с интегральными ограничениями

**И. В. Зыков**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: zykoviustu@mail.ru

Для систем с геометрическими ограничениями на управляющее воздействие известны методы приближенного построения множеств достижимости (см., например, [1, 2]), основанные на оценках решений дифференциальных неравенств Гамильтона–Якоби. Схема, предложенная в [2], была перенесена в работе [3] на случай нелинейных управляемых систем с ограничением на управление в пространстве  $\mathbb{L}_2$ , для множеств достижимостей которых были получены оценки в виде множеств уровня аналогов функций Ляпунова. Если применять эту схему к линейным управляемым системам и в качестве функций Ляпунова брать квадратичные функции, то полученные оценки, имеющие вид эллиптических, получаются довольно грубыми. Более того, требуются дополнительные предположения относительно коэффициентов системы — например, в стационарном случае матрица должна быть гурвицевой.

В данном докладе предлагается способ построения внешних оценок для линейных систем

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x^0, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^r$  — управление, а интегральное ограничение имеет вид  $u(\cdot) \in U$ , где

$$U = \left\{ u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : \int_0^{t_1} \|u(t)\|_r^2 dt \leq \mu^2 \right\}, \quad \mu > 0.$$

Предлагается возможность улучшения оценок по схеме работы [3], путем добавления времени в число аргументов квадратичной функции Ляпунова, где матрица коэффициентов этой функции, получаемая как решение некоторого матричного уравнения Бернулли, связанное с грамианом управляемости исходной системы, определяет динамику оценивающего эллипсоида. При надлежащем выборе начальных значений можно получить сколь угодно точную аппроксимацию (в метрике Хаусдорфа) множества достижимости.

**Теорема.** Для любого  $\varepsilon > 0$  и любой положительно определенной матрицы  $\bar{Q}$ , матрица  $Q_\varepsilon(t)$ , определяемая равенством

$$Q_\varepsilon(t) = [W(t) + \varepsilon \Phi(t) \bar{Q}^{-1} \Phi^\top(t)]^{-1}, \quad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = I, \quad t \geq t_0 :$$

1) удовлетворяет уравнению Бернулли

$$\dot{Q}_\varepsilon(t) + Q_\varepsilon(t)A(t) + A^\top(t)Q_\varepsilon(t) = -Q_\varepsilon(t)B(t)B^\top(t)Q_\varepsilon(t), \quad Q_\varepsilon(t_0) = \frac{1}{\varepsilon}\bar{Q};$$

2) выполняется включение

$$K(t) \subset K_\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - \hat{x}(t))^\top Q_\varepsilon(t)(x - \hat{x}(t)) \leq \mu^2\}, \quad \hat{x}(t) = \Phi(t)x^0;$$

3) существуют  $k_1, k_2 > 0$  такие, что

$$h(K_\varepsilon(t), K(t)) \leq \phi(\varepsilon) = \begin{cases} k_1\varepsilon, & \text{если система вполне управляема,} \\ k_2\sqrt{\varepsilon}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь  $W(t)$  и  $K(t)$ , соответственно, грамиан управляемости и множество достижимости системы (1) в момент  $t \leq t_1$ . В докладе также обсуждается способ получения внутренних оценок множеств достижимости.

1. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона-Якоби в теории управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 173–183.
2. Никольский М.С. Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов // Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина. С. 194–196.
3. Зыков И.В. О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 53. С. 61–72.

# Параллельная реализация одного алгоритма построения множества достижимости нелинейной управляемой системы

И. В. Измestьев, Е. Д. Анфалов

Челябинск, Челябинский государственный университет  
e-mail: j748e8@gmail.com, anfalovd10@yandex.ru

А. В. Ушаков

Екатеринбург, Институт математики и механики  
имени Н. Н. Красовского УрО РАН  
e-mail: aushakov.pk@gmail.com

На промежутке времени  $[t_0, \vartheta]$ ,  $t_0 < \vartheta < \infty$ , задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u). \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время,  $x \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор системы,  $u$  — вектор управления, удовлетворяющий включению  $u \in P$ , где  $P$  — компакт в  $\mathbb{R}^p$ .

Предполагаются выполненными следующие условия.

**Условие 1.** Вектор-функция  $f(t, x, u)$  ограничена и непрерывна на  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$ , и для любой ограниченной и замкнутой области  $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$  найдётся такая константа  $L = L(D) \in (0, \infty)$ , что

$$\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leq L \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $\|f\|$  — норма вектора  $f$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**Условие 2.** Существует такая константа  $\gamma \in (0, \infty)$ , что

$$\|f(t, x, u)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P.$$

**Условие 3.** Множество  $F(t, x) = f(t, x, P) = \{f(t, x, u) : u \in P\} \subset \mathbb{R}^n$  выпукло при любых  $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ .

Под допустимым управлением  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , понимаем измеримую по Лебегу на  $[t_0, \vartheta]$  вектор-функцию  $u(t) \in P$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ . Через  $X(t^*, t_*, x_*)$  ( $x_* \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$ ) обозначим множество достижимости в  $\mathbb{R}^n$  системы (1), отвечающее моменту  $t^*$  и начальному условию  $x(t_*) = x_*$ .  $X(t_*, x_*) = \cup_{t^* \in [t_*, \vartheta]} (t^*, X(t^*, t_*, x_*))$  ( $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ ) — интегральная воронка системы (1) с начальной позицией  $(t_*, x_*)$ . Рассматривается задача о построении множества достижимости  $X(\vartheta, t_0, X_0)$  и соответствующей интегральной воронки.

Воспользуемся модификацией алгоритма из [1]. Дискретизируем отрезок  $[t_0, \vartheta]$ , выбрав конечное разбиение  $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_n = \vartheta\}$ , при этом шаг разбиения выберем одинаковым и малым. Для каждого  $t_i$ ,  $i \in [0, n]$ , найдём множества достижимости по рекуррентной формуле  $X(t_i) = X(t_i, t_{i-1}, X_{i-1})$ . Так как это не представляется возможным сделать точно, будем вычислять их приближённо, подменяя множества  $X(t^*, t_*, x_*)$  множествами  $X^{(\delta)}(t^*, t_*, x_*) = x_* + \delta \cdot F^{(\delta)}(t_*, x_*)$ , где  $\delta = t^* - t_* > 0$ ,  $F^{(\delta)}(t_*, x_*) = f(t_*, x_*, P^{(\delta)})$ ,  $P^{(\delta)}$  — некоторое конечное подмножество  $P$ . Поскольку количество точек множества  $X^{(\delta)}(t_i)$  с увеличением  $i$  может стать слишком большим для проведения эффективных вычислений, введём процедуру прореживания данного множества. Строится оценочный параллелепипед, содержащий в себе  $X^{(\delta)}(t_i)$ . Затем с учетом геометрии этого оценочного параллелепипеда проводится его дробление на ячейки (пиксели) — параллелепипеды, подобные оценочному параллелепипеду. Для вершин каждого пикселя выбираются ближайшие к ним точки множества  $X^{(\delta)}(t_i)$ . Полученное множество обозначим  $\tilde{X}^{(\delta)}(t_i)$ . Если количество элементов множества  $X^{(\delta)}(t_i)$  превысило заданное значение, то проводится процедура прореживания и замена  $X^{(\delta)}(t_i)$  множеством  $\tilde{X}^{(\delta)}(t_i)$ .

На языке программирования C++ написана программа, реализующая предложенный алгоритм. В качестве входных данных программа принимает начальное множество  $X_0$  и множество управлений  $P^{(\delta)}$ . Правая часть системы (1) задаётся в коде программы в виде отдельной функции. После этого происходит пошаговое вычисление множеств  $X^{(\delta)}(t_i)$  для  $i = \overline{1, n}$ . В процедуре прореживания для нахождения ближайших точек к вершинам пикселей используется алгоритм приближённого поиска ближайших соседей, реализованный в библиотеке Annoy [2]. Процедура вычисления множеств  $X^{(\delta)}(t_i)$  и процедура поиска ближайших соседей к вершинам пикселей реализованы с использованием технологии параллельных вычислений OpenMP [3].

Проведены модельные расчеты областей достижимости конкретных нелинейных управляемых механических систем.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18–01–00264 а.

1. Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. К решению задач о сближении управляемых систем // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2015. Т. 291. № 1. С. 276–291.
2. [www.github.com/spotify/annoy](http://www.github.com/spotify/annoy)
3. [www.openmp.org](http://www.openmp.org)



## Об одной дифференциальной игре с невыпуклой терминальной платой

И. В. Изместьев, В. И. Ухоботов

*Екатеринбург, Институт математики и механики  
им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
Челябинск, Челябинский государственный университет  
e-mail: j748e8@gmail.com, ukh@csu.ru*

В докладе рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad \|u\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1, \quad t \leq p, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь функции  $a(t) \geq 0$  и  $b(t) \geq 0$  являются суммируемыми на каждом отрезке из полуоси  $(-\infty, p]$ .

Задано число  $\alpha > 0$ . Цель первого игрока, который выбирает управление  $u$ , заключается в минимизации платы

$$\| \|z(p)\| - \alpha \|.$$

Цель второго игрока, который выбирает управление  $v$ , противоположна. Отметим, что случай  $\alpha = 0$  рассмотрен в работе [2].

Зафиксируем начальное состояние  $t_0 < p$ ,  $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$ . Движение  $z(t)$ , порожденное допустимыми управлениями  $u$  и  $v$ , с заданным начальным условием  $z(t_0)$  определим с помощью ломаных Эйлера [1].

Используя результаты из [3], для рассматриваемой задачи была найдена цена игры  $G(t_0, z(t_0))$ , которая определяется следующим образом

$$G(t_0, z(t_0)) = \max\{G_1(t_0, z(t_0)); G_2(t_0, z(t_0)); G_3(t_0)\},$$

где

$$\begin{aligned} G_1(t_0, z(t_0)) &= \|z(t_0)\| - \alpha - f(t_0), \\ G_2(t_0, z(t_0)) &= \min\{\alpha - f_1(t_0); \alpha - \|z(t_0)\| - f(t_0)\}, \\ G_3(t_0) &= \max_{t_0 \leq t \leq p} \min\{\max\{-\alpha - f(t); \alpha - f_1(t)\}; -f(t)\}. \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$f(t) = \int_t^p (a(r) - b(r))dr, \quad f_1(t) = \max_{t \leq \tau \leq p} f(\tau).$$

Были построены соответствующие оптимальные управления игроков, а также рассмотрен модельный пример.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 19-11-00105.

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Ухоботов В.И.* Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным временем // Вестник Челябинского университета. Серия «Математика, механика». 1996. Вып. 1. С. 178–184.
3. *Ухоботов В.И., Изместьев И.В.* Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца // Сборник трудов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского, 15–20 сентября 2014 г. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2015. С. 325–332.

## Сингулярные возмущения в линейно-квадратичных задачах оптимального управления

**А. И. Калинин, Л. И. Лавринович**

*Минск, Белорусский государственный университет*

e-mail: kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. Задачи оптимизации таких систем в различных постановках исследовались многими авторами (см. обзор в [1]). Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные задачи оптимального управления распадаются на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими. Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений к решению сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с подвижным правым концом траекторий:

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, y(t_*) = y_*, \quad (1)$$

$$\mu \dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*, \quad (2)$$

$$H_1 y(t^*) = g_1, H_2 z(t^*) = g_2, \quad (3)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y' M(t)y + \mu z' L(t)z + u' P(t)u) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

где  $\mu$  — малый положительный параметр,  $t_*, t^*$  — заданные моменты времени ( $t_* < t^*$ ),  $y$  —  $n$ -вектор медленных переменных,  $z$  —  $m$ -вектор быстрых переменных,  $u$  —  $r$ -вектор управления,  $g_1, g_2$  — векторы размерностей  $n_1, m_1$  соответственно ( $n_1 \leq n, m_1 \leq m$ ),  $H_1$  и  $H_2$  — матрицы полного ранга,  $P(t)$  — положительно определенная симметрическая матрица, а  $M(t), L(t)$  — неотрицательно определенные симметрические матрицы для всех  $t \in [t_*, t^*]$ . Предполагается, что элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы, и действительные части всех собственных значений матрицы  $A_4(t), t \in [t_*, t^*]$  отрицательны.

**Определение 1.** Управление  $u^{(N)}(t, \mu), t \in [t_*, t^*]$ , с кусочно-непрерывными компонентами назовем (*программным*) *асимптотически субоптимальным управлением  $N$ -го порядка* ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ), если оно отклоняется по критерию качества (4) от оптимального управления на величину  $O(\mu^{N+1})$ , а порожденная им траектория  $y(t, \mu), z(t, \mu), t \in [t_*, t^*]$ , системы (1)–(2) удовлетворяет терминальным ограничениям (3) с точностью того же порядка малости.

**Определение 2.** Вектор-функцию  $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$  назовем *асимптотически субоптимальной обратной связью  $N$ -го порядка*, если для любого начального состояния  $(y_*, z_*, t_*)$ , ( $t_* < t^*$ ), имеет место  $u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$ , где  $u^{(N)}(t, \mu), t \in [t_*, t^*]$ , — асимптотически субоптимальное управление  $N$ -го порядка в задаче (1)–(4).

Цель исследования рассматриваемой задачи — построение асимптотически субоптимальных управлений и обратных связей. Суть применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра множителей Лагранжа, соответствующих в силу принципа максимума оптимальному управлению. Разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа  $N$  построить асимптотически субоптимальное управление  $N$ -го порядка в рассмотренной задаче. Вычислительная процедура алгоритма включает в себя решение двух невозмущенных задач оптимального управления с  $n$  и  $m$  фазовыми переменными соответственно, интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений и нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Наряду с асимптотическими приближениями к программному оптимальному управлению построена асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка, которая линейна по медленным переменным и не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных.

Заметим, что задача (1)–(4) является обобщением аналогичной задачи с фиксированным правым концом, которая рассмотрена в [2].

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
2. *Калинин А.И., Лавериневич Л.И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2015. Т. 55. № 2. С. 194–206.

## Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с соизмеримыми запаздываниями статической обратной связью по выходу

**И. Г. Ким, В. А. Зайцев**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: kimingeral@gmail.com, verba@udm.ru

Пусть  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ;  $M_{n,m}(\mathbb{K})$  — пространство  $n \times m$ -матриц с элементами из  $\mathbb{K}$ ;  $I \in M_{n,n}(\mathbb{K})$  — единичная матрица;  $\bar{a}$  означает комплексное сопряжение числа  $a$ ;  $*$  — эрмитово сопряжение матрицы. Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с  $s$  соизмеримыми запаздываниями в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из  $m$  сигналов и их производных до порядка  $(n - p)$  включительно ( $1 \leq p \leq n$ ), а измерению доступны  $k$  различных линейных комбинаций состояния  $x(t)$  и его производных до порядка  $(p - 1)$  включительно:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{r=1}^n \sum_{j=0}^s a_{rj} x^{(n-r)}(t - jh) = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{l=p}^n b_{l\alpha} v_{\alpha}^{(n-l)}(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y_i(t) = \sum_{\theta=1}^p \bar{c}_{\theta i} x^{(\theta-1)}(t), \quad i = \overline{1, k}; \quad (2)$$

здесь  $x \in \mathbb{K}$  — состояние;  $v = \text{col}(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{K}^m$  — вектор управления;  $y = \text{col}(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{K}^k$  — выходной вектор;  $a_{rj}, b_{l\alpha}, c_{\theta i} \in \mathbb{K}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{0, s}$ ,  $l = \overline{p, n}$ ,  $\alpha = \overline{1, m}$ ,  $\theta = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $h > 0$  — постоянное запаздывание. Пусть управление в системе (1), (2) строится в виде статической обратной связи по выходу с соизмеримыми запаздываниями

$$v(t) = \sum_{\nu=0}^p Q_{\nu} y(t - \nu h), \quad t > 0, \quad (3)$$

где  $y(\tau) = 0$ ,  $\tau < -\rho h$ ;  $Q_\nu \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ ,  $\nu = \overline{1, \rho}$ .

**Определение.** Система (1), (2) называется *модально управляемой посредством регулятора* (3), если для любого целого  $\ell \geq 0$  и для любых  $\delta_{i\xi} \in \mathbb{K}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\xi = \overline{0, \ell}$ , найдутся целое число  $\rho \geq 0$  и матрицы  $Q_0, \dots, Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$  такие, что характеристический квазиполином  $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$  замкнутой системы (1)–(3) имеет вид  $\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n \sum_{\xi=0}^{\ell} \delta_{i\xi} \lambda^{n-i} e^{-\lambda \xi h}$ .

Построим по системе (1), (2) матрицы  $B = \{b_{l\alpha}\}$ ,  $l = \overline{1, n}$ ,  $\alpha = \overline{1, m}$ , и  $C = \{c_{\theta i}\}$ ,  $\theta = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , где  $b_{l\alpha} = 0$  при  $l < p$  и  $c_{\theta i}$  при  $\theta > p$ . Пусть  $J := \{\vartheta_{ij}\} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , где  $\vartheta_{ij} = 1$  при  $j = i + 1$  и  $\vartheta_{ij} = 0$  при  $j \neq i + 1$ . Положим  $J^0 := I$ .

**Теорема.** Система (1), (2) модально управляема посредством регулятора (3) тогда и только тогда, когда матрицы  $C^* J^0 B$ ,  $C^* J B$ ,  $\dots$ ,  $C^* J^{n-1} B$  линейно независимы.

Теорема обобщает результаты работы [1] на системы с соизмеримыми запаздываниями по состоянию. Из теоремы вытекают следствия о стабилизации системы (1), (2) обратной связью (3). Результаты работы дополняют соответствующие результаты работ [1–5].

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00293.

1. Зайцев В.А. Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 133–135.
2. Зайцев В.А., Ким И.Г. Задача назначения конечного спектра в линейных системах с запаздыванием по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 463–473.
3. Зайцев В.А., Ким И.Г. О назначении произвольного спектра в линейных стационарных системах с соизмеримыми запаздываниями по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 315–325.
4. Kim I.G., Zaitsev V.A. Spectrum assignment by static output feedback for linear systems with time delays in states // Proceedings of 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference), STAB. IEEE, 2018. Pp. 1–4.

5. *Zaitsev V.A., Kim I.G.* Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. Pp. 810–814.

## Пример построения решений в одной гибридной двухшаговой динамической управляемой системе с тремя участниками и различными типами поведения

**А. Ф. Клейменов**

*Екатеринбург, Институт математики и механики*

*им. Н. Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

Динамика управляемого процесса на заданном промежутке  $[t_0, \vartheta]$  описывается уравнениями простых движений на плоскости при наличии фазовых ограничений. Максимальное число участников (игроков) управляемого процесса равно трем (P1, P2 и P3). Позиционные стратегии, используемые игроками в качестве действий, а также движения, порождаемые этими действиями, определяются как в [1, 2]. Доклад продолжает исследования, опубликованные в работах автора [3, 4].

На первом шаге (этапе) процесса  $[t_0, T]$ , где  $t_0 < T < \vartheta$ , правая часть уравнений движения содержит управляющее воздействие только игрока P1. И игрок P1 решает задачу оптимального управления с заданным терминальным функционалом выигрыша  $I_1 = \sigma_1(T)$ .

В начале второго шага (этапа), то есть в момент  $T$ , игрок P1 должен решить, будет ли игрок P2, либо игрок P3, либо вместе игроки P2 и P3 участвовать в управляемом процессе на оставшемся промежутке  $[T, \vartheta]$ , или нет. При этом игрок P2 (игрок P3) располагает своим управлением и имеет свой терминальный функционал выигрыша  $I_2 = \sigma_2(T)$  ( $I_3 = \sigma_3(T)$ ). Предполагается, что выигрыши игроков являются трансферабельными [5] и что за участие в управляемом процессе на отрезке  $[T, \vartheta]$  вновь вошедшие игроки выплачивают игроку P1 платеж в некотором фиксированном размере. Возможны следующие четыре случая:

1\*. Игрок P1 не разрешает ни одному из остальных игроков участвовать в процессе; тогда P1 продолжает решать задачу терминального управления с функционалом  $I_1 = \sigma_1(\vartheta)$ .

2\*(3\*). Игрок P1 разрешает игроку P2 (игроку P3) участвовать в управляемом процессе и разыгрывает вместе с ним неантагонистическую дифференциальную игру двух лиц.

4\*. Игрок P1 разрешает игрокам P2 и P3 вместе участвовать в управляемом процессе и разыгрывает вместе с ними неантагонистическую дифференциальную игру трех лиц.

В случаях 2\*–4\* дополнительно предполагаем, что в соответствующих играх каждый из двух (или трех) игроков, помимо обычного, нормального типа поведения, ориентированного на максимизацию своего собственного функционала выигрыша, может использовать другие типы поведения, в частности, альтруистический и агрессивный типы (см., например, [3]). Причем игроки по ходу игры могут переключать свое поведение с одного типа на другой. Вводится понятие VT-решения. На VT-решении каждый игрок, используя типы поведения, отличные от нормального, получает выигрыш, больший, чем при использовании только нормального типа.

Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.
3. *Клейменов А.Ф.* Принятие решений в одной гибридной двухшаговой задаче динамического управления // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 123. С. 415–423.
4. *Клейменов А.Ф.* Принятие решений в одной гибридной задаче динамического управления с тремя участниками // Труды ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 131–140.
5. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.

# О равномерной глобальной достижимости линейных управляемых периодических систем с дискретным временем

А. А. Козлов, К. Д. Калита

*Новополоцк, Полоцкий государственный университет*

e-mail: kozlova@tut.by, KalitaKD@yandex.ru

Пусть  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное евклидово векторное пространство с нормой  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$  (здесь символ  $T$  означает операцию транспонирования матрицы или вектора);  $M_{mn}$  — пространство вещественных матриц размерности  $m \times n$  со спектральной (операторной) нормой  $\|H\| = \max_{\|x\|=1} \|Hx\|$ , т.е. нормой, индуцируемой на  $M_{mn}$  евклидовой нормой в пространствах  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$ ;  $M_n = M_{nn}$ . Обозначим через  $E \in M_n$  единичную матрицу. Под отрезком  $[t_0, t_1]$ , где  $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}, t_0 < t_1$ , будем понимать множество целочисленных точек  $t_0, t_0 + 1, \dots, t_1$ .

Для линейной однородной дискретной системы

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

обозначим через  $X(t, \tau), t \geq \tau$ , ее матрицу Коши [1]:

$$X(t, \tau) = \begin{cases} A(t-1) \cdot \dots \cdot A(\tau), & t > \tau, \\ E, & t = \tau. \end{cases}$$

Если  $\det A(t) \neq 0$  для всех  $t \in \mathbb{Z}$ , то матрица Коши  $X(t, \tau)$  обратима при всех  $t \geq \tau$ . В таком случае, положим  $X(\tau, t) := X^{-1}(t, \tau), t > \tau$ .

Рассмотрим линейную управляемую дискретную систему с  $\omega$ -периодическими коэффициентами

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \omega \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Для  $t > \tau$  построим матрицу

$$W_1(t, \tau) = \sum_{s=\tau}^{t-1} X(t, s+1)B(s)B^T(s)X^T(t, s+1).$$

**Определение 1** [2]. Система (2) называется  $\vartheta$ -равномерно вполне управляемой ( $\vartheta \in \mathbb{N}$ ), если существуют такие числа  $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0, i = \overline{1, 4}$ , что



для каждого  $\tau \in \mathbb{Z}$  и для всех  $\xi \in \mathbb{R}^n$  справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \xi^T W_1(\tau + \vartheta, \tau) \xi &> 0, \\ \alpha_1 \|\xi\|^2 &\leq W_1^{-1}(\tau + \vartheta, \tau) \leq \alpha_2 \|\xi\|^2, \\ \alpha_3 \|\xi\|^2 &\leq X^T(\tau + \vartheta, \tau) W_1^{-1}(\tau + \vartheta, \tau) X(\tau + \vartheta, \tau) \leq \alpha_4 \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Система (2) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует такое  $\vartheta \in \mathbb{N}$ , что система (2)  $\vartheta$ -равномерно вполне управляема.

Замыкая систему (2) линейной обратной связью  $u = U(t)x$ , где  $U$  — ограниченная  $m \times n$ -матрица, получаем однородную систему

$$x(t+1) = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Пусть  $X_U(t, \tau)$  — матрица Коши системы (3) с управлением  $U(\cdot)$ .

**Определение 2.** Система (3) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости*, если найдется число  $T \in \mathbb{N}$ , для которого при любых  $r > 1$  и  $0 < \rho \leq 1$  существует такая величина  $\theta = \theta(r, \rho) > 0$ , что для произвольной матрицы  $H \in M_n$ ,  $\|H - E\| \leq r$ ,  $\det H \geq \rho$  и любого  $t_0 \in \mathbb{Z}$  существует ограниченное управление  $U: [t_0, t_0 + T] \rightarrow M_n$ , удовлетворяющее при каждом  $t \in [t_0, t_0 + T]$  условию  $\|U(t)\| \leq \theta(r, \rho)$ , при котором для матрицы Коши  $X_U(t, s)$  системы (3) выполняется равенство  $X_U(t_0 + T, t_0) = H$ .

**Теорема.** *Периодическая дискретная система (2) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда соответствующая ей замкнутая система (3) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Аналогичный результат для систем с непрерывным временем опубликован в [3].

1. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: Институт Математики НАН Беларуси, 2001.
2. *Зайцев В.А., Попова С.Н., Тонков Е.Л.* О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 53–63.
3. *Козлов А.А.* Критерий равномерной глобальной достижимости периодических систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. № 2 (в печати).

# О первой краевой задаче для управляемого полулинейного параболического уравнения

М. С. Коржавина

Нижний Новгород, ННГУ им. Н. И. Лобачевского

e-mail: maryasha\_f@mail.ru

В теории оптимизации распределенных систем важную роль играют условия *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) (см., например, краткий обзор и библиографию в [1]). Условия УСГР НКЗ для полулинейных параболических уравнений при различных требованиях к уравнениям и разном вхождении управлений в НКЗ см., например, в [2–4]. В докладе рассматривается случай дивергентных уравнений с управляемой правой частью, развиваются результаты [2, 3].

Пусть заданы  $T > 0$  и ограниченная односвязная область  $Q \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\partial Q \in C_2$ ;  $\Pi \equiv Q \times (0, T)$ . Рассмотрим, например, НКЗ

$$\mathbf{L}[y] \equiv y_t' - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x,t) y_{x_j}')_{x_i}' = g(\{x,t\}, y(x,t), u(x,t)), \{x,t\} \in \Pi; \quad (1)$$

$$y(x,0) = 0, \quad x \in Q; \quad y(x,t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

где  $x \equiv \{x^1, \dots, x^n\} \in Q$ , все  $c_{ij}$  и  $g(\{x,t\}, y, u) : \Pi \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  заданы,  $u(x,t)$  — управление. Предполагаем:  $c_{ij} \in L_\infty(\Pi)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , и выполняется условие равномерной параболичности [5, с. 20];  $g$  и  $g'_y$  непрерывны по  $y, u$ , измеримы по  $\{x,t\}$  и ограничены на любом ограниченном множестве; допустимы управления из некоторого  $D \subset L_\infty(\Pi)$ . Как вспомогательную используем НКЗ для уравнения  $\mathbf{L}[y] = z(x,t)$ ,  $\{x,t\} \in \Pi$ , с условиями (2). Для любых  $y \in V_2^{1,0}(\Pi)$ ,  $\eta \in W_2^{1,1}(\Pi)$  (мы применяем обозначения [5]),  $z \in L_\infty(\Pi)$ ,  $\xi \in [0, T]$  положим:  $J[y(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot), \xi] \equiv$

$$\equiv \int_0^\xi dt \int_Q \left\{ -y\eta_t' + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y_{x_j}' \eta_{x_i}' - \eta z \right\} dx + \int_Q y(x, \xi) \eta(x, \xi) dx.$$

Следуя [5, гл. 3], функцию  $y \in \overset{\circ}{V}_2^{1,0}(\Pi)$  назовем решением вспомогательной НКЗ, если  $y$  ограничена и при п.в.  $\xi \in [0, T]$  удовлетворяет тождеству:  $J[y(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot), \xi] = 0$ ,  $\eta \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}(\Pi)$ . Из [5, гл. 3] следует: для

любого  $z \in L_\infty(\Pi)$  эта НКЗ имеет единственное решение  $y = A[z]$ , где  $A[\cdot]$  — линейный ограниченный оператор в  $L_\infty(\Pi)$ . Функцию  $y(x, t)$ , являющуюся при  $z(x, t) \equiv g(\{x, t\}, y(x, t), u(x, t))$ ,  $\{x, t\} \in \Pi$ , решением вспомогательной НКЗ, назовем решением (1), (2), отвечающим управлению  $u \in D$ . Управлению  $u \in D$  не может отвечать более одного решения (1), (2). Пусть  $\Omega$  — та часть  $D$ , каждому элементу  $u$  которой отвечает единственное решение  $y_u$  задачи (1), (2). Для  $v \in D$ ,  $u \in \Omega$  положим  $r(v, u) \equiv \|A[g(\cdot, y_u(\cdot), v(\cdot)) - g(\cdot, y_u(\cdot), u(\cdot))]\|_{L_\infty(\Pi)}$ . Справедливо следующее достаточное условие УСГР НКЗ (1), (2).

**Теорема 1.** *Для любого  $u \in \Omega$  существуют  $\delta > 0, C > 0$  такие, что, если  $v \in D$ ,  $r(v, u) < \delta$ , то  $v \in \Omega$ ,  $\|y_v - y_u\|_{V_2^{1,0}(\Pi)} \leq Cr(v, u)$ .*

Теорема 1 обобщает признак УСГР НКЗ (1), (2), следующий из [2, теорема 2], где рассматривался случай гладких коэффициентов главной части (1), и дополняет признак УСГР НКЗ (1), (2), следующий из [3], где не предполагалась ограниченность правой части (1).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-01-00199.

1. *Сумин В.И.* Управляемые вольтеровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278.
2. *Сумин В.И.* Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1587–1595.
3. *Сумин В.И., Филошкина М.С.* Условия сохранения глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного управляемого параболического уравнения // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции. Воронежская зимняя математическая школа. 26.01.2017–1.02.2017. Воронеж. Издательский дом ВГУ, 2017. С. 187–189.
4. *Коржавина М.С., Сумин В.И.* О начально-краевой задаче для полулинейного параболического уравнения с управляемой главной частью // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 122. С. 317–324.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

# Управляемость каузальных 2D линейных дискретных систем

В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович

Минск, Белгосуниверситет

e-mail: Krakhotko@bsu.by, razmysl@bsu.by

Рассмотрим двухпараметрическое множество

$$D = \{t, s \mid t = 0, 1, \dots, t_1; s = 0, 1, \dots, s_1\},$$

являющееся подмножеством множества  $N_0 \times N_0$ , и линейное дискретное уравнение вида

$$A_0 x(t+1, s+1) = Ax(t, s) + A_1 x(t-1, s) + A_2 x(t, s-1) + Bu(t, s) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(t+1, 0) &= Ax(t, 0), \\ x(0, s+1) &= Ax(0, s), \\ x(0, 0) &= x_0, x(t, s) \equiv 0, \text{ если } t < 0 \text{ либо } s < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ;  $A_0, A, A_1 < A_2 < B$  — заданные постоянные матрицы соответствующих размеров,  $x_0$  — заданный  $n$ -вектор.

Систему (1), (2) назовём *нуль-управляемой*, если для любого вектора  $x_0$  найдется управление  $u(t)$ , определенное на множестве  $D$ , такое, что конечное состояние системы (1), (2) удовлетворяет условию  $x(t_1, s_1) = 0$ .

В случае, когда  $\det A_0 \neq 0$ , система (1), (2) исследовалась в работе [1]. Поэтому считаем, что  $\det A_0 = 0$ , и пусть  $\text{rank } A_0 = r < n$ . Без ограничения общности считаем, что матрица  $A_0$  имеет вид

$$A_0 = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ \hline A_{21}^{(0)} & A_{22}^{(0)} \end{array} \right],$$

где квадратная  $r \times r$ -матрица  $A_{11}^{(0)}$  имеет полный ранг, т.е.  $\text{rank } A_{11}^{(0)} = r$ , а  $A_{12}^{(0)}, A_{21}^{(0)}, A_{22}^{(0)}$  — матрицы размерностей  $r \times (n-r) \times r$ ,  $(n-r) \times (n-r)$  соответственно. Так как  $\text{rank } A_{11}^{(0)} = r$ , то, согласно [2], это влечет условие

$$A_{12}^{(0)} - A_{21}^{(0)} A_{11}^{(0)-1} A_{12}^{(0)} = 0.$$

В соответствии с блочным разбиением матрицы  $A_0$  представим матрицу  $A$  в виде

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right],$$

и введем в рассмотрение матрицы  $F_{i,j}$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$  вида

$$\begin{aligned} F_{11} &= A_{11}, F_{12} = -A_{11}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} + A_{12}, F_{21} = -A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{11} + A_{21}, \\ F_{22} &= A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{11}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} - (A_{21}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} + A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}) + A_{22}. \end{aligned}$$

Двухпараметрическую систему (1), (2) назовем *казуальной (causal)*, если матрица  $F_{22}$  имеет полный ранг.

Итак, пусть система (1) является казуальной. Тогда, умножив систему (1) слева на невырожденную матрицу  $D_1$  и применив невырожденное линейное преобразование  $x = D_2 \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ , где  $D_1$  и  $D_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} D_1 &= \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)^{-1}} & 0 \\ \hline 0 & F_{22}^{-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_r & -F_{12}F_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}} & I_{n-r} \end{array} \right], \\ D_2 &= \left[ \begin{array}{c|c} I_r & -A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -F_{22}^{-1}F_{21} & I_{n-r} \end{array} \right] \end{aligned}$$

а  $y \in R^r$ ,  $z \in R^{n-r}$ , от системы (1) перейдем к эквивалентной системе вида

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(t+1, s+1) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t, s) \\ z(t, s) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-1, s) \\ z(t-1, s) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \Omega'_{11} & \Omega'_{12} \\ \Omega'_{21} & \Omega'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t, s-1) \\ z(t, s-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u(t), \end{aligned} \quad (3)$$

определенной на множестве  $D$ .

По системе (3) строится система определяющих уравнений, на основе которых формулируется критерий управляемости рассматриваемой казуальной системы (1), (2).

1. Габасов Р.Ф., Кирилова Ф.М., Минюк С.А. Управляемость линейных двухпараметрических дискретных систем // Доклады АН СССР. 1971. Т. 199. № 6.

2. *Размыслович Г.П.* Управляемость каузальных линейных дискретных descriptorных систем с запаздыванием // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика, матем., информ. 1996. № 3. С. 72–74.

## Об одной задаче управления в условиях помех с оптимальной гарантией результата

**Н. Ю. Лукоянов**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: nyul@imm.uran.ru

Доклад посвящен приложению теоретико-игрового подхода [1–3] и разработанных в рамках этого подхода методов [3–5] к решению следующей задачи управления. Рассматривается динамический объект, управляемый в условиях неконтролируемых помех (противодействия). Цель управления состоит в том, чтобы обеспечить приведение объекта в заданные моменты времени в требуемые (целевые) положения вне зависимости от действия помех. Для решения задачи вводится показатель качества процесса управления, оценивающий расстояние между реализующимися и требуемыми положениями объекта, и рассматривается позиционная дифференциальная игра двух лиц, в которой первый игрок, распоряжаясь выбором воздействия управления, минимизирует, а второй игрок, распоряжаясь воздействиями помех, максимизирует этот показатель. В итоге исходная задача сводится к нахождению цены и седловой точки данной игры. В случае линейной динамики объекта это можно сделать при помощи метода выпуклых сверху оболочек. Получаемая таким образом разрешающая задачу процедура управления по принципу обратной связи была протестирована на модельных примерах. Приводятся результаты численного моделирования.

1. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
2. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.
3. *Lukoyanov N.Yu., Gomoynov M.I.* Differential games on minmax of the positional quality index // Dynam. Games Appl. 2019. Vol. 9. Issue 3. Pp. 780–799.
4. *Лукоянов Н.Ю.* К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 188–198.

5. Гомоюнов М.И., Корнев Д.В., Лукьянов Н.Ю. О численном решении задачи управления на минимакс позиционного функционала // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 58–75.

## Дифференцируемость функции быстродействия линейной управляемой докритической системы

**В. В. Лукьянов**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: lkv-2010@mail.ru

Рассмотрим линейную нестационарную задачу быстродействия в нуль с закрепленным левым концом

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + T) = 0, \quad T \rightarrow \min, \tag{2}$$

где функции  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$  и  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(n, r)$  непрерывны. Множеством допустимых управлений  $\mathcal{U}$  будем считать совокупность всевозможных измеримых функций  $u: \mathbb{R} \rightarrow U = [-1, 1]^r$ . Для заданной точки  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$  обозначим через  $\Theta(t_0, x_0)$  функцию быстродействия в задаче (1)–(2).

Зафиксируем произвольную фундаментальную систему решений  $\psi_i(\cdot)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) сопряжённой системы  $\dot{\psi} = -\psi A(t)$  и определим семейство непрерывных функций

$$\xi_i^j(t) = \psi_i(t)b^j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

где  $b^j(t)$  — столбец матрицы  $B(t)$  с номером  $j$ . Для фиксированных чисел  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  и ненулевого вектора  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  обозначим через  $n_j(c)$  ( $j = 1, \dots, r$ ) количество геометрически различных нулей функции  $\xi^j(t; c) = c_1 \xi_1^j(t) + \dots + c_n \xi_n^j(t)$  на интервале  $I_{t_0} = (t_0, t_0 + \sigma)$ . Обозначим через  $\sigma(t_0)$  точную верхнюю грань таких  $\sigma > 0$ , что на интервале  $I_{t_0}$  при любом ненулевом  $c \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство  $n_1(c) + \dots + n_r(c) \leq n - 1$ . Если для любого  $\sigma > 0$  существует ненулевой вектор  $c \in \mathbb{R}^n$ , для которого на интервале  $I_{t_0}$  выполнено неравенство  $n_1(c) + \dots + n_r(c) \geq n$ , то положим  $\sigma(t_0) = 0$ . Функция  $\sigma(\cdot)$  не зависит от выбора фундаментальной системы решений  $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_n(\cdot)$  сопряжённой системы.

**Определение.** Система (1) называется *докритической* в точке  $t_0 \in \mathbb{R}$ , если выполнено неравенство  $\sigma(t_0) > 0$ .

Задача (1)–(2) для докритической системы изучена в работе [1].

Далее будем предполагать, что система (1) докритическая в точке  $t_0$ .

Положим  $\mathfrak{N} = \{(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r) \in \mathbb{Z}_+^r : \mathbf{n}_1 + \dots + \mathbf{n}_r = n - 1\}$ . Для каждого вектора  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r) \in \mathfrak{N}$  обозначим  $c(\mathbf{n}) = \{c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \mathbf{n}_1 = n_1(c), \dots, \mathbf{n}_r = n_r(c)\}$ , где  $n_j(c)$  — количество нулей функции  $\xi^j(t; c)$  на интервале  $(t_0, t_0 + \sigma(t_0))$ , и определим множество

$$\Lambda_{t_0}^{\mathbf{n}} = \bigcup_{c \in c(\mathbf{n})} \{(\delta_1(c), \dots, \delta_r(c))\}, \quad \text{где } \delta_j(c) = \lim_{t \rightarrow t_0+0} \text{sign } \xi^j(t; c).$$

Для каждого вектора  $\mathbf{n} \in \mathfrak{N}$ , каждого вектора  $\delta \in \Lambda_{t_0}^{\mathbf{n}}$  и любого  $\theta \in (0, \sigma(t_0))$  обозначим через  $\mathfrak{U}_{\delta}^{\mathbf{n}}(t_0, \theta)$  совокупность всевозможных кусочно-постоянных непрерывных справа функций  $u: \mathbb{R} \rightarrow U$ , тождественно равных нулю вне интервала  $(t_0, t_0 + \theta)$ ; каждая координатная функция  $u_j(\cdot)$  на интервале  $(t_0, t_0 + \theta)$  принимает значения  $\pm 1$  и имеет ровно  $\mathbf{n}_j$  переключений, а  $\delta_j$  — значение функции  $u_j(\cdot)$  в правой окрестности точки  $t_0$ . Множество  $\mathfrak{U}_{\delta}^{\mathbf{n}}(t_0, \theta)$  является многообразием без края размерности  $n - 1$ . На множестве допустимых финитных управлений  $\mathcal{U}$  определим отображение  $F_{t_0}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  с помощью равенства

$$F_{t_0}(u) = - \int_{t_0}^{+\infty} X(t_0, s)B(s)u(s) ds.$$

Положим  $N_{\delta}^{\mathbf{n}}(t_0, \theta) = F_{t_0}(\mathfrak{U}_{\delta}^{\mathbf{n}}(t_0, \theta))$ ,  $N(t_0, \vartheta) = \bigcup_{0 < \theta < \vartheta} \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathfrak{N}} \bigcup_{\delta \in \Lambda_{t_0}^{\mathbf{n}}} N_{\delta}^{\mathbf{n}}(t_0, \theta)$ .

**Теорема.** Если линейная управляемая система (1) докритическая в точке  $t_0 \in \mathbb{R}$ , то функция быстрогодействия  $x \mapsto \Theta(t_0, x)$  непрерывно дифференцируема по  $x$  в области  $N(t_0, \sigma(t_0))$ .

1. Лукьянов В.В. Двухпараметрические Т-системы функций и их применение для исследования оптимальных по быстродействию линейных нестационарных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 101–130.



## К задаче оптимизации дорожного движения

Ю. В. Мастерков

*г. Владимир, Владимирский государственный университет*

*им. А. Г. и Н. Г. Столетовых*

e-mail: Jura.masterkov@yandex.ru

Рассматривается задача оптимизации работы светофоров при организации дорожного движения, с целью обеспечения максимальной пропускной способности данного участка дороги по «зеленой волне».

Пусть на заданном участке дороги с двусторонним движением (на прямой  $(Ox)$ ), в точках  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$  (на перекрестках) стоят светофоры, работающие в режиме «красный–зеленый» с периодичностью  $2\tau$ . Обозначим через  $\theta_i \in [0, 2\tau)$ ,  $i \in 0, 1, 2, \dots, n$ , начало работы зеленого сигнала  $i$ -го светофора. Предполагается, что:

- а) все светофоры работают в режиме «красный–зеленый» с одинаковым периодом  $2\tau$  и временем работы  $\tau$  в каждом из режимов;
- б) все автомобили двигаются с одинаковой скоростью  $v$  (стартуют и тормозят мгновенно).

*Можно ли выбрать моменты  $\bar{\theta}(v, \tau) = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$  так, чтобы в обоих направлениях существовала «зеленая волна»?*

*Как выбрать скорость  $v$  и период  $2\tau$  так, чтобы увеличить пропускную способность дороги по этому «зеленому коридору»?*

Пропускная способность — это количество машин, проходящих через заданное сечение дороги в единицу времени. В движении без светофоров эта величина эквивалентна понятию интенсивности потока  $\rho(v)v$ , где  $\rho(v)$  — плотность потока.

**Лемма [1].** *Для любых  $\tau > 0$ ,  $v > 0$  существует такой вектор  $\bar{\theta}(\tau, v) = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ , который обеспечивает «зеленую волну» продолжительностью  $T \geq \frac{\tau}{n+1}$  в каждом направлении.*

**Теорема.** *Пусть  $k_0, k_1, k_2 \dots k_n$  — такие натуральные числа, что для каждого  $i \in \overline{0, n}$  выполнено неравенство  $|x_i - 2v\tau k_i| \leq \varepsilon < \tau$ . Тогда существует вектор  $\bar{\theta}(\tau, v) = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ , обеспечивающий «зеленую волну» продолжительностью  $T \doteq T(\tau, v) \geq \tau - \frac{\varepsilon}{v}$  в каждом направлении.*

Заметим, что пропускная способность «зеленой волны» данного участка дороги равна  $\frac{\rho(v)vT}{\tau}$ . Кроме того, известно, что существует скорость  $v^*$ , обеспечивающая максимум интенсивности потока, причем на промежутке  $[0, v^*)$  интенсивность растет, а на промежутке  $[v^*, \infty)$  — убывает. И

поскольку в населенных пунктах разрешенная скорость  $v < v^*$ , то разумно ограничиться рассмотрением задачи на отрезке  $v \in [v_0, v^*]$ . Естественно также ограничить величину  $\tau$  (хотя бы для того, чтобы машины успели проехать перекресток), т.е. полагаем, что  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ .

Разработан алгоритм, позволяющий по данным  $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$  на прямоугольнике  $[\tau_1, \tau_2] \times [v_0, v^*]$  получить численное решение задачи нахождения  $\bar{\tau}, \bar{v}$ , а также моментов  $(\theta_0(\bar{\tau}, \bar{v}), \theta_1(\bar{\tau}, \bar{v}), \dots, \theta_n(\bar{\tau}, \bar{v}))$ , обеспечивающих пропускную способность «зеленой волны», близкую к оптимальной.

1. *Мастерков Ю.В.* Об одной задаче дорожного движения // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 2018. С. 140.

## Об одной задаче оценивания множества достижимости динамической системы в условиях неопределенности

О. Г. Матвийчук, А. Р. Матвийчук

Екатеринбург, ИММ УрО РАН, УрФУ

e-mail: vog@imm.uran.ru, matv@uran.ru

В докладе представлены результаты исследования, основанного на математической теории управления и оценивания состояний и теории эволюционных уравнений для многозначных состояний динамических систем в условиях неопределенности [1, 2, 4].

В исследовании рассматривается особый вид нелинейных систем (билинейные системы) [3, 5, 6], в которых матрица, включенная в дифференциальные уравнения системы, является неопределенной, известны только границы допустимых возмущений параметров матрицы. Такие системы могут моделировать различные механические, электрические и другие типы систем, параметры которых неизвестны, но варьируются в определенных пределах. В качестве примера можно указать механические системы, в которых коэффициенты жесткости или трения заданы неточно.

Здесь исследуется задача оценивания множества достижимости импульсной управляемой системы с неопределенностью в динамике системы, описываемой следующим дифференциальным уравнением:

$$dx = (A(t)x + u(t))dt + B(t)dv, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \mathcal{X}_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

где  $A(t) = A^0(t) + A^1(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ . Здесь матрица  $A^0(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  задана; матрица  $A^1(t)$  неизвестна, но ограничена ( $t \in [t_0, T]$ ):

$$A^1(t) \in \mathcal{A}^1 = \{A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n} : |a_{ij}| \leq c_{ij}, i, j = 1, \dots, n\},$$

числа  $c_{ij} \geq 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) заданы. Начальные состояния точно неизвестны, но принадлежат данному звездному симметричному невырожденному многограннику  $\mathcal{M}(p)$  с  $2m$  вершинами ( $m \geq n$ ) и центром  $p \in \mathbb{R}^n$ :  $x_0 \in \mathcal{X}_0 = \mathcal{M}(p)$ . На измеримое управление наложено ограничение:  $u(t) \in \mathcal{U} = E(\hat{a}, \hat{Q})$ , где  $E(\hat{a}, \hat{Q})$  — эллипсоид с центром  $\hat{a} \in \mathbb{R}^n$  и симметрической положительно определенной матрицей  $\hat{Q}$ ; импульсным управлением  $v(t)$  — скалярная функция ограниченной вариации, непрерывная справа на отрезке  $[t_0, T]$  и удовлетворяющая ограничению (параметр  $\mu > 0$  задан):  $\text{Var}_{t \in [t_0, T]} v(t) \leq \mu$ . Класс таких функций обозначим  $\mathcal{V}$ .

Обозначим  $x(t) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot), A(\cdot))$  решение системы (1) на промежутке  $[t_0, T]$  при ограничениях  $x_0 \in \mathcal{X}_0$ ,  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ,  $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ ,  $A(\cdot) \in \mathcal{A}$ , а трубку траекторий системы (1) на  $t \in [t_0, T]$  обозначим

$$\mathcal{X}(\cdot; t_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{V}) = \bigcup \{x(\cdot) : x_0 \in \mathcal{X}_0, A(\cdot) \in \mathcal{A}, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V}\}.$$

Тогда сечение трубки траекторий  $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(\cdot; t_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$  в момент времени  $t \in [t_0, T]$  есть множество достижимости системы (1) в момент времени  $t$ , построенное из начального состояния  $\{t_0, \mathcal{X}_0\}$ .

Целью данной работы является исследование свойств множеств достижимости  $\mathcal{X}(t)$  динамической системы (1) при заданных ограничениях  $x_0 \in \mathcal{X}_0$ ,  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ,  $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ ,  $A(\cdot) \in \mathcal{A}$  и построение итерационных алгоритмов эллипсоидального оценивания трубки траекторий  $\mathcal{X}(\cdot)$  и множеств достижимости  $\mathcal{X}(t)$ . В рамках данного исследования были разработаны алгоритмы оценивания множеств достижимости рассмотренного класса билинейных управляемых систем. Работа алгоритмов проиллюстрирована на ряде модельных примеров.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00544а).

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
3. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Vol. 15: Studies in Applied Mathematics. SIAM, 1994.

4. *Kurzhan'ski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
5. *Filippova T.F., Matviychuk O.G.* Estimates of reachable sets of control systems with bilinear–quadratic nonlinearities // Ural Mathematical Journal. 2015. Vol. 1. No. 1. Pp. 45–54.
6. *Matviychuk O.G.* Estimation techniques for bilinear control systems // IFAC-PapersOnLine. Elsevier, 2018. Vol. 51. Iss. 32. Pp. 877–882.

## Групповое преследование жестко скоординированных убегающих в некоторых задачах с дробными производными

**А. И. Мачтакова**

*Инжевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $G(n, m)$   $n + m$  лиц [1]:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и  $m$  убегающих  $E_1, \dots, E_m$ . Закон движения каждого из преследователей  $P_1, \dots, P_n$  имеет вид

$$D^{(\alpha)} x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_{i,0}^0, \quad \dots, \quad x_i^{(r-1)}(0) = x_{i,0}^{r-1}, \quad \|u_i\| \leq 1.$$

Закон движения каждого из убегающих  $E_1, \dots, E_m$  имеет вид

$$D^{(\alpha)} y_j = ay_j + v, \quad y_j(0) = y_{j,0}^0, \quad \dots, \quad y_j^{(r-1)}(0) = y_{j,0}^{r-1}, \quad \|v\| \leq 1.$$

Здесь  $x_i, y_j \in \mathbb{R}^k, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, a \in \mathbb{R}, \alpha \in (r - 1, r), r \in \mathbb{N}, D^{(\alpha)} f$  — производная по Капуто функции  $f$  порядка  $\alpha$  [2]. Считаем, что  $x_{i,0}^{r-1} \neq y_{j,0}^{r-1}$  для всех  $i, j$ . Цель группы преследователей — поимка хотя бы одного убегающего. Цель группы убегающих — всем уклониться от встречи.

**Теорема 1.** Пусть  $r = 1, a \leq 0, \text{Int co}\{x_{i,0}^0\} \cap \text{co}\{y_{j,0}^0\} \neq \emptyset$ . Тогда в игре  $G(n, m)$  происходит поимка хотя бы одного убегающего.

**Теорема 2.** Пусть  $a = 0, \text{Int co}\{x_{i,0}^{(r-1)}\} \cap \text{co}\{y_{j,0}^{(r-1)}\} \neq \emptyset$ . Тогда в игре  $G(n, m)$  происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00293.

1. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Издательство Удмуртского университета. 2009.
2. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent – II // *Geophys R. Astr. Soc.* 1967. No. 13. Pp. 529–539.

## О проблеме управления спектром линейных систем нейтрального типа

**А. В. Метельский**

*Минск, Белорусский национальный технический университет*

e-mail: ametelski@bntu.by

**В. Е. Хартовский**

*Гродно, Гродненский государственный университет*

e-mail: hartovskij@grsu.by

Пусть задана линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор решения уравнения (1),  $u \in \mathbb{R}^r$  — вектор управления,  $D(\lambda)$  ( $D(0) = 0$ ),  $A(\lambda)$   $B(\lambda)$  — полиномиальные матрицы подходящих размеров,  $\lambda_h$  ( $h \equiv \text{const} > 0$ ) — оператор сдвига ( $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$ ).

Рассмотрим два класса регуляторов:

$$1) u(t) = U_1(X, \dot{X}), \quad \dot{x}_1(t) = U_2(X, \dot{X}); \quad (2)$$

$$2) u(t) = U_3(X, \dot{X}) + T(\lambda_h)\psi(t), \quad \dot{x}_1(t) = U_4(X, \dot{X}), \\ \psi(t) = S(\lambda_h)\psi(t - h) + U_5(X, \dot{X}), \quad (3)$$

где  $x_1, \psi$  — вспомогательные переменные,  $X = \text{col}[x, x_1]$ ;

$$U_i(X, \dot{X}) = C_{i1}(\lambda_h)X(t) + C_{i2}(\lambda_h)\dot{X}(t - h) + \sum_{j=0}^{m_2} \int_0^h F_{ij}(s)(\lambda_h)^j X(t - s)ds,$$

$C_{ij}(\lambda_h), T(\lambda), S(\lambda)$  — полиномиальные матрицы подходящего размера, матрицы  $F_{ij}(s)$  имеют вид

$$F_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{m_3} e^{\alpha_{ijk}s} (\cos(\beta_{ijk}s) F_{ijk1}(s) + \sin(\beta_{ijk}s) F_{ijk2}(s)),$$

$\alpha_{ijk}, \beta_{ijk} \in \mathbb{R}, F_{ijk e}(s), e = 1, 2$ , — полиномиальные матрицы.

Обозначим  $W(p, e^{-ph}), \bar{W}_1(p, e^{-ph})$  и  $\bar{W}_2(p, e^{-ph})$  характеристические матрицы системы (1) и замкнутых систем (1), (2) и (1), (3) соответственно. Введем полином  $d(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} p^i d_i(\lambda)$ , где  $d_i(\cdot)$  — полиномы, причем  $d_{\bar{n}}(0) = 1$ .

**Определение 1.** Систему (1) назовем *модально управляемой в классе регуляторов* (2), если существует число  $n_0 \in \mathbb{N}$  такое, что для любого полинома  $d(p, \lambda)$  степени  $\deg_p d(p, \lambda) = \bar{n} \geq n_0$  найдется регулятор вида (2) такой, что:

- 1) система (1), (2) имеет нейтральный тип;
- 2) выполняется равенство  $|\bar{W}_1(p, e^{-ph})| = d(p, e^{-ph})$ .

**Определение 2.** Систему (1) назовем *слабо модально управляемой в классе регуляторов* (3), если существует число  $n_0 \in \mathbb{N}$  такое, что для любого полинома  $d(p, \lambda)$  степени  $\deg_p d(p, \lambda) = \bar{n} \geq n_0$  найдется регулятор вида (3) такой, что:

- 1) найдется полиномиальная унимодулярная матрица  $\bar{P}(\lambda)$  такая, что

$$\bar{P}(\lambda) \bar{W}_2(p, \lambda) = \begin{bmatrix} \bar{W}_{211}(p, \lambda) & \bar{W}_{212}(p, \lambda) & 0 \\ \bar{W}_{221}(p, \lambda) & \bar{W}_{222}(p, \lambda) & 0 \\ \bar{W}_{231}(p, \lambda) & \bar{W}_{232}(p, \lambda) & \bar{W}_{233}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где  $\bar{W}_{2ij}(p, \lambda), j = 1, 2, i = \bar{1}, \bar{3}, \bar{W}_{233}(\lambda)$  — некоторые полиномиальные матрицы подходящих размеров, причем  $|\bar{W}_{233}(0)| \neq 0$ ;

- 2) при  $\lambda = e^{-ph}$

$$\bar{W}_{22}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} \bar{W}_{211}(p, \lambda) & \bar{W}_{212}(p, \lambda) \\ \bar{W}_{221}(p, \lambda) & \bar{W}_{222}(p, \lambda) \end{bmatrix}$$

— характеристическая матрица некоторой системы нейтрального типа;

- 3) выполняется равенство  $|\bar{W}_{22}(p, e^{-ph})| = d(p, e^{-ph})$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы система (1) была модально управляемой в классе регуляторов (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \text{rank}[W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2) \text{rank}[I_n - D(\lambda), B(\lambda)] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Теорема 2.** Для того чтобы система (1) была слабо модально управляемой в классе регуляторов (3), необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \operatorname{rank}[W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph}), G(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2) \operatorname{rank}[I_n - D(\lambda), B(\lambda), G(\lambda)] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

где  $G(\lambda)$  — некоторая полиномиальная матрица.

## Принцип максимума Понтрягина и математическая машина Дубинса

**В. С. Пацко, А. А. Федотов**

*Екатеринбург, Институт математики и механики  
им. Н. Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: patsko@imm.uran.ru, andreyfedotov@mail.ru

Пусть динамика управляемого объекта (машина Дубинса) на плоскости  $x, y$  описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad u_2 = 1, \quad u_1 \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, y$  — координаты геометрического положения объекта;  $\varphi$  — угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от оси  $x$ ;  $u$  — скалярное управление;  $u_1$  — параметр задачи. Величина линейной скорости равна единице. Предполагаем, что  $\varphi \in (-\infty, \infty)$ .

Будем называть *множеством достижимости*  $G(t_f)$  в момент  $t_f$  совокупность всех точек трёхмерного фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в силу системы (1) в момент  $t_f$  из заданного начального состояния при помощи некоторого допустимого управления. Не теряя общности, считаем начальный момент и начальное трёхмерное фазовое состояние равными нулю. В качестве допустимых управлений принимаем кусочно-постоянные функции времени со значениями из отрезка  $[u_1, u_2]$ .

Известно [1], что управления, ведущие на границу множества достижимости  $G(t_f)$ , удовлетворяют Принципу максимума Понтрягина (ПМП).

В зависимости от параметра  $u_1$  различаем четыре случая:

- $u_1 = -1$  (симметричный случай),
- $u_1 \in (-1, 0)$  (несимметричный случай),
- $u_1 = 0$  (случай одностороннего поворота),
- $u_1 \in (0, 1)$  (случай строго одностороннего поворота).

Цель исследования – анализ свойств экстремальных управлений, ведущих на границу множества достижимости  $G(t_f)$ , а также геометрических свойств  $\varphi$ -сечений множества достижимости по угловой координате  $\varphi$ . Для каждого из четырёх случаев даны [2–4] ответы на вопросы: о достаточности ПМП для управлений, ведущих на границу: об единствен-

	Принцип максимума Понтрягина	$\varphi$ -сечения множества достижимости	Кусочно-постоянные управления, ведущие на границу
$u_1 = -1$ симметричный случай	Только необходимое условие	Нет выпуклости для $ \varphi  < 2\pi$ , круг для $ \varphi  \geq 2\pi$	Нет единственности
$u_1 \in (-1, 0)$ несимметричный случай			
$u_1 = 0$ случай одностороннего поворота	Необходимое и достаточное условие	Выпуклость : круговой сегмент для $\varphi < 2\pi$ и круг для $\varphi \geq 2\pi$	Единственность для $\varphi < 2\pi$
$u_1 \in (0, 1)$ случай строго одностороннего поворота			Нет единственности для $\varphi \geq 2\pi$
		Строгая выпуклость	Единственность

Рис. 1: Свойства множеств достижимости и экстремальных управлений

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18–01–00410.

1. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.



2. Пацко В.С., Федотов А.А. Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 143–155.
3. Пацко В.С., Федотов А.А. Структура множества достижимости для машины Дубинса со строго односторонним поворотом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 171–187.
4. Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1.

## Поимка заданного числа убегающих в нестационарном примере Л. С. Понтрягина

Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: kma3@list.ru, solov\_na@mail.ru

В пространстве  $R^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma(n, m)$   $n + m$  лиц [1–4]:  $n$  преследователей  $P_1, P_2, \dots, P_n$  и  $m$  убегающих  $E_1, \dots, E_m$ .

Движение каждого преследователя  $P_i$  описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \dots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V,$$

закон движения каждого убегающего  $E_j$  имеет вид

$$y_j^{(l)} + a_1(t)y_j^{(l-1)} + a_2(t)y_j^{(l-2)} + \dots + a_l(t)y_j = v_j, \quad v_j \in V.$$

Здесь и далее  $x_i, y_j, u_i, v_j \in R^k$ ,  $i \in I = \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in J = \{1, \dots, m\}$ , функции  $a_1(t), a_2(t), \dots, a_l(t)$  непрерывны на промежутке  $[t_0, \infty)$ ,  $V$  — строго выпуклый компакт  $R^k$ ,  $l$  — натуральное число  $l \geq 1$ . В момент  $t = t_0$  заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y_j^{(q)}(t_0) = y_j^q, \quad q = 0, \dots, l-1,$$

причем  $x_i^0 \neq y_j^0$  для всех  $i \in I, j \in J$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что задана квазистратегия  $U_i$  преследователя  $P_i$ , если определено отображение  $U_i(t, z^0, v_{jt}(\cdot))$ , ставящее в соответствие начальному состоянию  $z^0$ , моменту  $t$  и произвольным предысториям управлений  $v_{jt}(\cdot)$  убегающих  $E_j$  измеримую функцию  $u_i(t)$  со значениями в  $V$ .

**Определение 2.** В игре  $\Gamma(n, 1)$  происходит поимка, если существуют момент  $T > t_0$ , квазистратегии  $U_1, \dots, U_n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  такие, что для любой измеримой функции  $v, v(t) \in V$  для всех  $t \in [t_0, T]$  существует момент  $\tau \in [t_0, T]$  и номер  $p \in I$ , что  $z_p(\tau) = 0$ .

**Определение 3.** В игре  $\Gamma(n, m)$  происходит поимка, если существует  $T > t_0$  такой, что для любой совокупности траекторий убегающих  $\{y_j(t): y_j^{(q)}(t_0) = y_j^q, t \in [t_0, \infty)\}$  найдутся траектории преследователей  $\{x_i(t), x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q\}$  обладающие следующим свойством: существуют множества индексов  $N \subset I, M \subset J, |N| = |M| = m_0$  такие, что каждый убегающий  $E_s, s \in M$  «ловится» не позднее момента  $T$  некоторым преследователем  $P_c, c \in N$ , причем если преследователь  $P_c$  «ловит» убегающего  $E_s$ , то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Получены достаточные условия поимки заданного числа убегающих в игре  $\Gamma(n, m)$ .

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00293.

1. *Bannikov A.S., Petrov N.N.* On a nonstationary problem of group pursuits // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. Vol. 271. No. 1 (Suppl.). Pp. 41–52.
2. *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
3. *Благодатских А.И.* О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2000. № 1. С. 17–24.
4. *Petrov N.N., Solov'eva N.A.* Capture of given number of evaders in Pontryagin's nonstationary example // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. No. 3. Pp. 614–627.

## О вязкостных решениях уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана для систем с запаздыванием

А. Р. Плаксин

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

Пусть  $t_0 < \vartheta$ ,  $h > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Функцию  $w(\cdot): [-h, 0) \mapsto \mathbb{R}^n$  называем кусочно-непрерывной, если она непрерывна справа во всех точка на  $[-h, 0)$ , имеет конечное число точек разрыва и все разрывы первого рода. Множество кусочно-непрерывных функций обозначим через РС. Также введем обозначения  $\mathbb{G} = [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \text{РС}$  и  $\mathbb{G}_0 = [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \text{РС}$ .

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: при каждой  $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$  необходимо минимизировать по  $u(\cdot)$  функционал

$$J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)),$$

где  $x(\cdot)$  — движение системы, описываемой уравнением с запаздыванием

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [\tau, \vartheta], \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{U}, \quad (1)$$

при начальном условии  $x(\tau) = z$ ,  $x(t) = w(t - \tau)$ ,  $t \in [\tau - h, \tau)$ . Здесь  $t$  — время;  $x(t)$  — фазовый вектор;  $u(t)$  — управляющее воздействие;  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$  — компакт. Функция  $f(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{U}$  непрерывна, локально липшицева по второму и третьему аргументу и удовлетворяет условию подлинейного роста (см. подробнее в [2]). Функция  $\sigma(x) \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  локально липшицева. При указанных условиях каждая допустимая (измеримая) реализация управления  $u(\cdot): [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$  единственным образом определяет движение  $x(\cdot)$  — функцию, определенную на  $[\tau - h, \vartheta]$ , липшицеву на  $[\tau, \vartheta]$  и удовлетворяющую (1) почти всюду. Множество допустимую реализация управления обозначаем через  $\mathcal{U}_\tau$ . Функционал оптимального результата для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\rho(\tau, z, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau} J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)).$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнение Гамильтона-Якоби с коинвариантными (си-) производными (см. определение в [2])

$$\partial_\tau^c \varphi(\tau, z, w(\cdot)) + H(\tau, z, w(-h), \nabla \varphi(\tau, z, w(\cdot))) = 0, \quad (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_0, \quad (2)$$

$$\varphi(\vartheta, z, w(\cdot)) = \sigma(z), \quad (z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \text{PC}, \quad (3)$$

где  $H(t, x, y, s) = \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, x, y, u), s \rangle$ .

Решение (в вязкостном смысле) этой задачи будем искать в классе  $\Phi$  функционалов  $\varphi(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ ,  $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$  непрерывных по первому аргументу и локально липшицевых по второму и третьему аргументам (см. подробнее в [2]).

**Определение.** Функционал  $\varphi \in \Phi$  называется вязкостным решением задачи (2), (3), если он удовлетворяет условию (3) и следующим свойствам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для любых } (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_0, \psi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ и } \delta > 0 \\ \text{если } \varphi(\tau, z, w(\cdot)) - \psi(\tau, z) \leq \varphi(t, x, \kappa_t(\cdot)) - \psi(t, x), (t, x) \in O_\delta^+(\tau, z), \\ \text{то } \partial\psi(\tau, z)/\partial\tau + H(\tau, z, w(-h), \nabla_z\psi(\tau, z)) \leq 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для любых } (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_0, \psi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ и } \delta > 0 \\ \text{если } \varphi(\tau, z, w(\cdot)) - \psi(\tau, z) \geq \varphi(t, x, \kappa_t(\cdot)) - \psi(t, x), (t, x) \in O_\delta^+(\tau, z), \\ \text{то } \partial\psi(\tau, z)/\partial\tau + H(\tau, z, w(-h), \nabla_z\psi(\tau, z)) \geq 0. \end{array} \right.$$

Здесь  $\kappa(t) = w(t - \tau)$ ,  $t \in [\tau - h, \tau]$ ,  $\kappa(t) = z$ ,  $t \in [\tau, \vartheta]$ ;  $O_\delta^+(\tau, z) = \{(t, x) \in [\tau, \tau + \delta] \times \mathbb{R}^n : \|x - z\| \leq \delta\}$ ;  $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  — пространство непрерывно дифференцируемых функций из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$ .

**Теорема.** а) Функционал оптимального результата  $\rho$  является единственным вязкостным решением задачи (2), (3). б) Функционал оптимального результата  $\rho$  (вязкостное решение задачи (2), (3)) в точках *сi*-дифференцируемости удовлетворяет уравнению (2). в) Если функционал  $\varphi \in \Phi$  *сi*-дифференцируем всюду на  $\mathbb{G}_0$ , удовлетворяет уравнению (2) и условию (3), то он совпадает с функционалом оптимального результата  $\rho$  (вязкостным решением задачи (2), (3)).

Отметим, что подобные результаты для, в частности, систем вида (1) и задач вида (2), (3) были доказаны ранее в работе [1]. Однако, в ней рассматривалось несколько модифицированное определение вязкостного решения, использующее последовательности компактных множеств в  $\mathbb{C}$ . В данной работе рассмотрено другое более естественное определение вязкостного решения, не использующее подобных модификаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3566.2019.1.

1. *Лукоянов Н.Ю.* Минимаксные и вязкостные решения в задачах оптимизации наследственных систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 183–194.
2. *Plaksin A.* On Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation for time-delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52. No. 18. Pp. 138–143.

## Точки бифуркации решения уравнения Гамильтона–Якоби в модели молекулярной генетики

А. С. Родин

Екатеринбург, ИММ УрО РАН, УрФУ

e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями

$$D_t\varphi(t, x) + H(x, D_x\varphi(t, x)) = 0, \quad \varphi(0, x) = \sigma(x), \quad x \in [-1, 1], \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\text{где } H(x, s) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2s} - \frac{1-x}{2}e^{-2s}. \quad (2)$$

Функция  $f(\cdot)$  называется фитнесом. Предположим, что  $f(x)$  и краевая функция  $\sigma(x)$  дважды непрерывно дифференцируемы.

В задаче (1) существует и единственно глобальное обобщенное решение  $\varphi(t, x)$  [1], которое зачастую является недифференцируемым.

**Определение 1.** Множеством сингулярности  $Q$  для обобщенного решения  $\varphi$  задачи (1) называется множество точек  $(t, x) \in \Pi_T$ , в которых функция  $\varphi$  недифференцируема.

**Определение 2.** Точкой бифуркации  $(t^*, x^*)$  для обобщенного решения  $\varphi$  называется точка, для которой выполнено условие  $(t^*, x^*) \in \overline{Q} \setminus Q$ , где  $\overline{Q}$  есть замыкание множества  $Q$ .

Целью данной работы является выявление условий для нахождения точек бифуркации.

Гамильтонова система для задачи (1), (2) имеет вид

$$\dot{x} = -(1+x)e^{2s} + (1-x)e^{-2s}, \quad (3)$$

$$\dot{s} = f'(x) + \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2}, \quad (4)$$

с начальными условиями:  $x(0, \xi) = \xi$ ,  $s(0, \xi) = D\sigma(\xi)$ ,  $\xi \in [-1, 1]$ .

Так как гамильтониан  $H = H(x, s)$ , то  $H(x(t, \xi), s(t, \xi)) \equiv H(\xi, D\sigma(\xi))$  при  $t \geq 0$ , где  $x(t, \xi)$ ,  $s(t, \xi)$  является решением системы (3), (4) с начальными условиями  $\xi$ ,  $D\sigma(\xi)$  соответственно.

В статье [1] было показано, что уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$\dot{x} = \pm 2\sqrt{x^2 - 1 + (1 - H(\xi, D\sigma(\xi)) - f(x))^2}, \quad x \in (-1, 1). \quad (5)$$

При этом выполнено условие  $1 - H(\xi, D\sigma(\xi)) - f(x) \geq \sqrt{1 - x^2}$ .

В работе [1] также получены следующие необходимые условия для точки бифуркации  $(t^*, x^*)$ , где  $x^* = x(t^*, \xi^*)$ :

$$\int_{\xi^*}^{x^*} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1 + (1 - H(\xi^*, D\sigma(\xi^*)) - f(y))^2}} = 2t^*, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\xi^*}^{x^*} \frac{H(\xi^*, D\sigma(\xi^*))' (1 - H(\xi^*, D\sigma(\xi^*)) - f(y))^2 dy}{\sqrt{y^2 - 1 + (1 - H(\xi^*, D\sigma(\xi^*)) - f(y))^2}} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\xi^{*2} - 1 + (1 - H(\xi^*, D\sigma(\xi^*)) - f(\xi^*))^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

В работе [2] было получено следующее достаточное условие для точки бифуркации:

$$\frac{\partial x(t^*, \xi^*)}{\partial \xi} = 0. \quad (8)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение.** Условие (8) эквивалентно условию  $\dot{x}(t^*, \xi^*) = 0$ .

Условия (6), (7), (8) полезны для построения сингулярного множества решения в задаче (1), (2).

Работа поддержана РФФИ, проект № 20-01-00362.

1. Rodin A.S., Shagalova L.G. Bifurcation points of the generalized solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. Pp. 866–870.
2. Родин А.С. Анализ структуры субдифференциала минимаксного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Междунар. конф., посвящ. 95-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. С. 275–279.

## Ковариационные приближения к рекуррентному логико-динамическому фильтру оптимальной структуры большого порядка

Е. А. Руденко

*Москва, Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе*  
e-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Рассматривается задача оперативного, в реальном времени, распознавания режима работы и оценивания внутривремени вектора состояния дискретной стохастической динамической системы со случайной структурой. Однако абсолютно-оптимальный фильтр Стратоновича–Бухалёва для этого слишком сложен из-за своей бесконечной размерности, а конечнономерный условно-оптимальный фильтр Пугачёва–Панкова–Босова имеет эвристически задаваемую структуру и малую размерность вектора состояния, что препятствует получению им значительной точности.

Проблема решается применением конечнономерных фильтров оптимальной структуры (ФОС) различных типов и порядков [1–4]. Но их выполнимый заранее синтез всё же затруднен нахождением методом Монте-Карло гистограмм искомым структурных функций фильтра. Поэтому и здесь целесообразно построение численно-аналитических приближений, позволяющих находить вид субоптимальных функций оценивания аналитически, а их параметры — тоже методом Монте-Карло, но уже с простым вычислением только вероятностей целочисленных случайных величин и соответствующих им условных моментов непрерывных случайных величин.

В настоящей работе для наиболее перспективного из ФОС фильтра большого порядка (ФБП) [4] предлагается способ построения гауссовского приближения и его линеаризованного упрощения, которые учитывают лишь средние и ковариации некоторых случайных величин. Они выполняются аналогично [1–3].

В результате получение структурных функций гауссовского ФБП сводится к двум операциям. Сначала по уравнениям исходной логико-динамической системы наблюдения и законам распределения её белых шумов следует определить усредняемые далее нелинейности. Это условные вероятности как косвенной индикации структуры её логической части, так и уточнённого непрерывным измерением переключения этой структуры, а также первые и вторые условные средние динамической части систе-

мы. Затем нужно получить выражения для параметрических интегралов от произведений гауссовской плотности вероятности на эти нелинейности. Последнее эквивалентно операции статистической линеаризации нелинейностей по Казакову и здесь могут быть использованы известные таблицы.

Отметим, что последние аналитические вычисления можно упростить, используя с некоторой потерей точности численные формулы интегрирования Гаусса. Для этого можно применить известные квадратурные или кубатурные приближения, а также их параметрически настраиваемую на обычную негауссовость версию, известную как нечувствительное (unscented) или сигма-точечное преобразование.

Наконец, выполнения этих двух непростых аналитических операций можно избежать с помощью обычной линеаризации по Тейлору функций динамической части исходной системы наблюдения в окрестностях модифицированных значений текущих оценки и одношагового прогноза, а также средних значений белых шумов. Тогда все структурные функции линеаризованного ФБП получают подобные [1] явные представления через условные вероятности и функции динамических блоков исходной системы, а также через матрицы их первых частных производных.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-08-00128-а.

1. Руденко Е.А. Численно-аналитические приближения к оптимальному рекуррентному логико-динамическому фильтру-предиктору малого порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 24–47.
2. Руденко Е.А. Конечномерные рекуррентные алгоритмы оптимальной нелинейной логико-динамической фильтрации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С. 43–65.
3. Руденко Е.А. Оптимальный дискретный логико-динамический фильтр-предиктор с конечной памятью // Тр. XI Межд. Четаевской конф. «Аналит. механика, устойчивость и управление». 13–17 июня 2017 г. Казань. КНИТУ–КАИ, 2017. Т. 3. Ч. III. С. 221–231.
4. Руденко Е.А. Оптимальный рекуррентный логико-динамический фильтр большого порядка, кратного размерности вектора оценки // Тр. XIII Всеросс. совещ. по пробл. управления. 17–20 июня 2019 г. Москва. ИПУ РАН, 2019. С. 880–885.



## О регуляризованном решении задачи динамической идентификации параметров управляемых систем

Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН, УрФУ*

e-mail: subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

В докладе рассматривается задача динамической идентификации неизвестных параметров управляемых систем по известным неточным замерам траектории. Актуальность задачи обусловлена тем, что для построения эффективных алгоритмов синтеза управлений динамических систем необходимо иметь информацию о всех параметрах системы.

В докладе обсуждается новый подход к решению задачи идентификации, развивающий идеи, предложенные авторами в работах [1, 2].

Предлагаемый метод близок к известному методу динамической реконструкции, предложенному А. В. Кряжимским и Ю. С. Осиповым [3], который опирается на регуляризованную по Тихонову [4] процедуру экстремального прицеливания и имеет истоки в работах школы Н. Н. Красовского [5]. Новый подход к решению задач идентификации параметров также использует регуляризацию по Тихонову и опирается на вспомогательные экстремальные задачи. Однако, вместо прицеливания на вспомогательную стабильную систему, он использует стационарные точки интегрального регуляризованного функционала невязки, которые находятся как решения гамильтоновой системы, динамика которой складывается из динамики управляемой системы и динамики сопряженной системы.

Рассматриваются динамические системы вида

$$\dot{x}(t) = G(x(t), u(t), t)p, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad p \in \mathbb{R}^k, \quad t \in [0, T], \quad k \leq n.$$

Здесь  $x(\cdot)$  — фазовые переменные,  $u(\cdot)$  — известные управления,  $p$  — вектор неизвестных параметров.

В реальном времени с шагом  $h_\delta$  поступают дискретные замеры  $y_j^\delta$  реализуемой траектории, имеющие точность  $\delta$ .

$$\{y_j^\delta : \|y_j^\delta - x^*(t_j)\| \leq \delta, \quad t_j = jh_\delta, \quad j = 0, \dots, J, \quad J = \lceil T/h_\delta \rceil \in \mathbb{N}\},$$

где  $x^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — измеряемая траектория.

**Задача идентификации:** найти вектор  $p^\delta \in \mathbb{R}^k : \lim_{\delta \rightarrow 0} \|p^\delta - p\| = 0$ .

Решение строится пошагово с шагом  $h_\delta$ . На каждом  $i$ -м шаге вводится вспомогательная вариационная задача на минимум функционала невязки

$$I(x(\cdot), p) = \int_{(i-1)h_\delta}^{ih_\delta} \left[ -\frac{\|x(t) - y_i^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 p^2}{2} \right] dt,$$

где  $\alpha > 0$  — малый регуляризирующий параметр, а  $y_i^\delta(t)$  — интерполяция замеров.

Необходимые условия экстремума функционала невязки доставляют вектор  $p_i^\delta \in \mathbb{R}^k$ , аппроксимирующий  $p$ . На каждом шаге производится усреднение

$$p^\delta = \sum_1^i p_i^\delta / i. \quad (1)$$

Получены условия согласованного стремления к нулю параметров  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $h_\delta$  и числа проделанных шагов  $i$ , при котором (1) является решением задачи идентификации.

Работа метода проиллюстрирована на примере решения задачи идентификации неизвестных параметров для модели простейшего робота.

Работа поддержана РФФИ, проект № 20-01-00362.

1. *Subbotina N.N., Krupennikov E.A.* Dynamic Programming to Identification Problems // World Journal of Engineering and Technology. 2016. Vol. 4. Pp. 228–234. <http://dx.doi.org/10.4236/wjet.2016.43D028>
2. *Subbotina N.N., Krupennikov E.A.* On the solution of inverse problems for dynamic control systems // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1997. Iss. 1. No. 020006.
3. *Кряжмский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
4. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49–52.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974.

## О регуляризации принципа Лагранжа в задачах условной оптимизации

М. И. Сумин

Тамбов, ТГУ им. Г. Р. Державина;

Нижний Новгород, ННГУ им. Н. И. Лобачевского

e-mail: m.sumin@mail.ru

Рассматривается каноническая задача выпуклого программирования (см., например, [1, п. 3.3.1]) для пары гильбертовых пространств  $Z, H$

$$(P) \quad f(z) \rightarrow \min, \quad Az = h, \quad g_1(z) \leq 0, \dots, g_m(z) \leq 0, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где  $f, g_i : \mathcal{D} \rightarrow R^1, i = 1, \dots, m$ , — выпуклые непрерывные функционалы,  $A : Z \rightarrow H$  — линейный ограниченный оператор,  $h \in H$  — заданный элемент,  $\mathcal{D}$  — выпуклое замкнутое множество.

Главным теоретическим результатом для задач класса  $(P)$  и для всей теории условной оптимизации, является, как известно, принцип Лагранжа (ПЛ), см., например, [1, 2]. Вместе с тем, следует признать, что возможности непосредственного практического применения ПЛ сильно ограничивают неразрывно с ним связанные свойства некорректности. Здесь имеются в виду такие её проявления как неустойчивость и невыполнимость ПЛ [1, 3–6]. Мы говорим о неустойчивости ПЛ в задаче класса  $(P)$ , если выделяемые им в задачах, «сколь угодно близких» к исходной (невозмущённой) задаче, «приближённые» оптимальные элементы могут сколь угодно сильно отличаться от своего невозмущённого аналога как по аргументу, так и по функции [3–6]. В свою очередь, невыполнимость ПЛ, в той или иной конкретной задаче класса  $(P)$ , понимается как принципиальная невозможность записать его для этой конкретной задачи в той «привычной» форме, в которой он записывается в «большинстве» других аналогичных задач этого класса [1, с. 260], [3, 4, 6].

В докладе обсуждается как основанный на двойственности подход к регуляризации в задачах класса  $(P)$  (см., например, [3, 4]) порождает при общих условиях на их исходные данные и соответствующую регуляризацию ПЛ в этих задачах, которая, вообще говоря, отличается от «привычной» регуляризации «непосредственно самих» задач этого класса, см., например, [2, гл. 9]. Регуляризация ПЛ естественным образом трансформирует его в различного вида теоремы существования минимизирующих приближённых решений (МПР) [7, гл. III] в задачах класса  $(P)$ , являющиеся одновременно новыми регуляризирующими алгоритмами для их

решения и преодоления тем самым свойств некорректности ПЛ [3–6]. В основе применяемого при регуляризации ПЛ определения регуляризирующего алгоритма, отличающегося от аналогичных определений в [2, гл. 9], лежит понятие МПР, адекватно учитывающее как запросы математической оптимизационной теории [7, гл. IV–VIII], так и инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближённых решений ненулевых зазоров и по выполнимости ограничений задачи и по близости значений функционала качества к нижней грани [7, гл. III].

Обсуждаемые результаты иллюстрируются посредством рассмотрения ряда конкретных примеров задач класса ( $P$ ). К ним относятся классическая некорректная задача поиска нормального решения операторного уравнения первого рода, задача оптимального управления с операторным ограничением–равенством для линейного параболического уравнения, обратная задача финального наблюдения для того же уравнения.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты № 19–07–00782, № 20–01–00199.

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011.
3. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
4. *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 25–49.
5. *Сумин М.И.* Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она даёт // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. Вып. 124. С. 757–772.
6. *Сумин М.И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 279–296.
7. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

# Об одном методе приближенного вычисления дробной производной Капуто

П. Г. Сурков

*Екатеринбург, Институт математики и механики*

*и.м. Н. Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: spg@imm.uran.ru

Рассматривается задача вычисления производной функции, заданной неточно. Данная задача является одной из классических задач математического анализа, и в различных вариациях ее рассматривали многие авторы, см., например, [1, 2]. В настоящей работе предлагается алгоритм приближенного вычисления дробной производной Капуто в реальном времени и с привлечением теории позиционного управления. Пусть функция  $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  задана на конечном отрезке  $T = [\sigma, \theta]$ , и имеется его разбиение  $\Delta = \{\tau_i\}_{i=1}^{\kappa}$  на конечное число интервалов

$$[\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, \dots, \kappa - 1, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = \sigma, \quad \tau_{\kappa} = \theta.$$

На вход алгоритма в дискретные достаточно частые моменты времени  $\tau_i$  подаются измерения значений функции  $x(\cdot)$ , проведенные с некоторой погрешностью  $h \in (0, 1)$ , т.е. имеются вектора  $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющие неравенству

$$\|x(\tau_i) - \xi_i^h\|_{\mathbb{R}^n} \leq h.$$

На выходе — значения некоторой функции  $u(\cdot)$ , являющейся приближением  $[D_*^\gamma x](\cdot)$ . Здесь для функции  $x: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  и произвольного действительного  $\gamma \in (0, 1)$  выражение

$$[D_*^\gamma x](t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{d}{dt} \int_{\sigma}^t \frac{x(s) - x(\sigma)}{(t-s)^\gamma} ds,$$

задает дробную производную Капуто [3], где  $\Gamma(\cdot)$  обозначает Гамма-функцию Эйлера.

Ввиду наличия погрешности, нахождение точного значения производной невозможно, поэтому обсуждаемую задачу можно отнести к классу некорректных. Будем придерживаться методики исследования подобных задач, предложенной в [4], и успешно примененной для приближенного вычисления производной с априорным ограничением на нее в [5], и в [6] — без априорного ограничения.

Применяя метод позиционного управления с моделью, введем вспомогательную систему (модель)

$$[D_*^\gamma y](t) = v^h(t), \quad y(\sigma) = \xi_0^h.$$

Зафиксируем некоторую функцию  $\alpha = \alpha(h): (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  и будем строить управление  $v^h$  в модели по правилу

$$v^h(t) = -\alpha^{-1}(y(\tau_i) - \xi_i^h), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, \dots, \kappa - 1.$$

**Теорема.** Пусть  $\gamma \in (1/2, 1)$ ,  $u(\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}^n)$ ,  $\|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq p$ , и параметры  $\alpha, \delta$  удовлетворяют соотношениям

$$\alpha \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \frac{h\delta^\gamma}{\alpha^2\delta} \rightarrow 0, \quad \frac{h + \delta^{\gamma-1/2}}{\alpha} \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Тогда можно указать в явном виде постоянные  $d_i > 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), не зависящие от  $h, \alpha$  и  $\delta$ , такие, что справедливы неравенства

$$\|y(t) - x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq d_1\alpha + \rho(h),$$

$$\int_\sigma^t \|v^h(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \leq \int_\sigma^t \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + \frac{\rho(h)}{\alpha}, \quad t \in T,$$

где  $\rho(h) = d_2h + d_3\delta^{\gamma-1/2} + d_4h\delta^{\gamma-1}/\alpha$ .

1. *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 137–148.
2. *Васин В.В.* Об устойчивом вычислении производной в пространстве  $C(-\infty, \infty)$  // Ж. выч. мат. и мат. физ. 1973. Т. 13. № 6. С. 1383–1389.
3. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. New York: Elsevier Science, 2006.
4. *Осипов Ю.С., Кряжмский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.
5. *Кряжмский А.В., Осипов Ю.С.* О наилучшем приближении оператора дифференцирования в классе неупреждающих операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37. № 2. С. 192–199.
6. *Максимов В.И.* О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 231–243.

## Процедуры построения сингулярного множества в плоской задаче управления по быстродействию для случая невыпуклого целевого множества с границей переменной гладкости

А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

*Екатеринбург, Институт математики и механики*

*им. Н. Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: uspen@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru

Изучается задача оптимального управления по быстродействию, рассматриваемая в контексте краевой задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left( \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (1)$$

$$u_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  — норма вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$ . Краевое условие (2) определено на границе  $\Gamma = \partial M$  замкнутого невыпуклого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ . При этом  $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2: t \in T\}$ , где  $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$  — непрерывное отображение числового отрезка  $T = [\hat{t}, \check{t}]$ ,  $-\infty < \hat{t} < \check{t} < \infty$ ,  $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$ , на плоскость. Кривая  $\Gamma$  без точек самопересечения, она регулярна в точках дифференцируемости и имеет переменную гладкость, т.е. может содержать конечное число точек негладкой склейки, а также конечное число точек гладкой склейки с конечными разрывами производных второго либо более высокого порядка координатных функций. Минимаксное (обобщенное) решение [1]  $u = u(x, y)$  задачи (1), (2) совпадает с функцией оптимального результата для соответствующей задачи управления по быстродействию [2] с целевым множеством  $M$ .

Предложены процедуры построения сингулярного множества решения задачи (1), (2), основанные на множествах симметрии [3] в пространстве фазовых состояний задачи управления. Построение множества симметрии имеет много общего с процедурой «скелетирования» [4] плоского множества и заключается в конструировании объединения характеристических нуль- и одномерных многообразий, на которых мера невыпуклости [5] целевого множества отлична от нуля.

Теоретические результаты исследования раскрывают структуру ветвей сингулярного множества, которые строятся в виде интегральных кривых, для которых начальные условия определяются псевдовершинами — особыми точками границы целевого множества, отвечающими за зарождение сингулярности решения (см., например, [6]).

Развиваемые методы доведены до вычислительных алгоритмов, и с их помощью осуществлено численное моделирование решений для конкретных примеров задач управления по быстродействию.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты № 18-01-00264\_а и № 18-011-00221\_а.

1. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики. 2008. Т. 14. № 2. С. 182–191.
3. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 431–440.
4. *Местецкий Л.М.* Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009.
5. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 1. С. 95–120.
6. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Построение решения задачи управления по быстродействию при нарушении гладкости кривизны границы целевого множества // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 53. С. 98–114.



## Об одной игре с выпуклой целью и вектограммами, линейно зависящими от заданных множеств

В. И. Ухоботов, С. А. Никитина

*Челябинск, Челябинский государственный университет*

e-mail: ukh@csu.ru, nikitina@csu.ru

Рассмотрим игру

$$x(k+1) = x(k) - a_k u_k + b_k v_k, \quad x(k) \in R^n, \quad a_k \geq 0, \quad b_k \geq 0, \quad k = 0, \dots, p. \quad (1)$$

Первый игрок выбирает управление  $u_k$  из выпуклого множества  $U \subset R^n$ , не используя информацию об управлении второго игрока  $v_k$ , принадлежащего выпуклому множеству  $V \subset R^n$ . Его цель заключается в выводе точки  $x(p)$  на заданное выпуклое множество  $X \subset R^n$ .

Множество  $X_p \subset R^n$  тех начальных состояний  $x(0) \in R^n$ , откуда первый игрок сможет осуществить включение  $x(p) \in X$  при любом поведении второго игрока равно

$$X_p = \left( \dots \left( \left( \left( \left( X \overset{*}{-} b_0 V \right) + a_0 U \right) \overset{*}{-} b_1 V \right) + a_1 U \right) \dots \right) \overset{*}{-} b_p V \right) + a_p U. \quad (2)$$

Здесь посредством  $A \overset{*}{-} B$  обозначена геометрическая разность множеств  $A$  и  $B$  из пространства  $R^n$  [1].

Для любых выпуклых множеств  $Y, U$  и  $V$  из  $R^n$  и для любых неотрицательных чисел  $\sigma_i$  и  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяющих неравенству

$$\sigma_1 \delta_2 \geq \sigma_2 \delta_1,$$

выполнено равенство [2]

$$\left( \left( (Y + \sigma_1 U) \overset{*}{-} \delta_1 V \right) + \sigma_2 U \right) \overset{*}{-} \delta_2 V = (Y + (\sigma_1 + \sigma_2) U) \overset{*}{-} (\delta_1 + \delta_2) V.$$

Отсюда следует, что если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} a_0 b_2 &\geq b_1 a_1, \\ (a_0 + a_1 + \dots + a_i) b_{i+2} &\geq (b_1 + b_2 + \dots + b_{i+1}) a_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p-2, \end{aligned} \quad (3)$$

то множество (2) имеет вид

$$X_p = \left( \left( \left( \left( X \overset{*}{-} b_0 V \right) + \left( \sum_{i=0}^{p-1} a_i \right) U \right) \overset{*}{-} \left( \sum_{j=1}^p b_j \right) V \right) + a_p U \right).$$

Например, если  $b_j = b$  при всех  $j = 1, \dots, p$ , то неравенства (3) примут вид

$$a_0 \geq a_1 \quad \text{и} \quad a_{i+1} \leq \frac{1}{i+1} \sum_{s=0}^i a_s \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, p-2.$$

Полученные неравенства (3) используются при рассмотрении игры (1), в которой вектограммы игроков линейно зависят от заданных выпуклых множеств  $U_i \subset R^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  и  $V_j \subset R^n$ ,  $j = 1, \dots, q$ . На выбор управлений накладываются ограничения

$$u_k \in \sum_{s=1}^m \lambda_s^{(k)} U_s, \quad v_k \in \sum_{j=1}^q \mu_j^{(k)} V_j.$$

Здесь фиксированные числа  $\lambda_s^{(k)} \geq 0$  и  $\mu_j^{(k)} \geq 0$  удовлетворяют равенствам

$$\sum_{s=1}^m \lambda_s^{(k)} = 1, \quad \sum_{j=1}^q \mu_j^{(k)} = 1, \quad k = 0, \dots, p.$$

Рассматриваются игры такого типа. Они возникают, например, в задачах группового преследования [3], когда цель каждого преследователя заключается в том, чтобы в заданный момент времени оказаться в фиксированной окрестности убегающего. Приведены примеры.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-01-00264а.

1. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. 1 // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
2. *Ухоботов В.И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–361.
3. *Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Изв. вузов. Математика. 1994. № 4 (383). С. 24–29.

# Синтез робастного управления для динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные

**А. А. Федюков**

*Н. Новгород, ННГУ им. Н. И. Лобачевского*

e-mail: TeleginSasha@yandex.ru

О параметрах реальных механических систем, как правило, известно лишь то, что они принадлежат некоторому диапазону. Поэтому значительный интерес представляет изучение динамических систем, которые обладают некоторой неопределенностью, т.е. для которых один или несколько параметров точно не известны. Закон управления, который обеспечивает выполнение заданных целей для таких объектов, называют робастным управлением.

Существуют разные способы построения регуляторов, в том числе способ, основанный на применении аппарата линейных матричных неравенств [1]. В задаче стабилизации по выходу систему управления строят в виде обратной связи по измеряемому выходу. С помощью современных программ (например, программ для инженерных расчетов MATLAB) можно получить параметры такого регулятора. Вместе с тем возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что синтез линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т.е. в ограниченной области фазового пространства. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничение на фазовые переменные объекта и управление. Проблема синтеза управления при заданных ограничениях является сложной и актуальной в настоящее время [2, 3]. При этом, так как выход у реальных систем может измеряться с ошибкой, остается актуальным вопрос об эффективности полученного регулятора.

В работе рассматривается задача оценки области допустимых начальных состояний системы, при которых регулятор, полученный для задачи синтеза управления при ограничениях на фазовые и управляющие переменные без учета ошибки в измеряемом выходе, будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Подход к решению основан на применении функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для

нахождения границ этой области.

Численное решение проведено в пакете MATLAB. В качестве примера рассмотрен неустойчивый объект. Для перевернутого маятника решен ряд задач. Построен регулятор, который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы и выполнение заданных ограничений на фазовые и управляющие переменные. В фазовом пространстве указано множество начальных состояний для которых регулятор стабилизирует систему. Изучено влияние величины ошибки в измеряемом выходе на размеры этой области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90086.

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
2. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. № 6. С. 48–57.
3. *Федюков А.А.* Синтез динамических регуляторов, обеспечивающих стабилизацию систем с ограничениями на фазовые переменные // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. № 2 (1). С. 152–159.

## Стабилизация по выходу тела в электромагнитном подвесе при ограничениях на фазовые переменные

**А. А. Федюков**

*Н. Новгород, ННГУ им. Н. И. Лобачевского*

e-mail: TeleginSasha@yandex.ru

У реальных физических объектов и в реальных ситуациях полная информация о состоянии системы недоступна измерению, а известна лишь часть фазовых переменных или их линейная комбинация. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации динамических объектов по измеряемому выходу. Для ее решения применяют динамические регуляторы. Динамический регулятор — это объект, который описывается системой дифференциальных уравнений заданного порядка. Существуют разные способы построения динамических регуляторов, в том числе

способ, основанный на применении аппарата линейных матричных неравенств [1]. В задаче стабилизации по выходу систему управления строят в виде обратной связи по измеряемому выходу. С помощью современных программ (например, программ для инженерных расчетов MATLAB) можно получить параметры такого регулятора. Вместе с тем возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что синтез линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т.е. в ограниченной области фазового пространства. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничение на фазовые переменные объекта. Проблема синтеза управления при заданных ограничениях является сложной и актуальной в настоящее время [2, 3].

В работе рассматривается задача стабилизации по выходу динамического объекта с ограничениями на фазовые переменные. Подход к решению основан на применении функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для существования регуляторов.

Численное решение проведено в пакете MATLAB. В качестве примера рассмотрена задача стабилизация по выходу тела в электромагнитном подвесе при ограничениях на фазовые переменные. Предполагаем, что для измерения доступна величина пропорциональная силе тока в цепи электромагнита. Для объекта решен ряд задач. Построены регуляторы полного и пониженного порядков, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой системы с заданной степенью устойчивости и при которых выполнены заданные ограничения. В фазовом пространстве указано множество начальных состояний, для которых регуляторы стабилизируют систему. Проведено сравнение полученных законов управления с законами управления по выходу, обеспечивающих стабилизацию объекта без учета ограничений на фазовые переменные. Показано, что такие регуляторы не применимы к решению данной задачи. Проведено сравнение поведения линеаризованной и нелинейной моделей объекта при найденных управлениях. Расчеты показали, что регуляторы стабилизируют нелинейную модель электромагнитного подвеса при заданных ограничениях на фазовые переменные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90086.

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линей-

ных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

2. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. № 6. С. 48–57.
3. *Федюков А.А.* Синтез динамических регуляторов, обеспечивающих стабилизацию систем с ограничениями на фазовые переменные // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. № 2 (1). С. 152–159.

## О проблеме асимптотической оценки решения линейных систем нейтрального типа

**В. Е. Хартовский**

*Гродно, Гродненский государственный университет*

e-mail: hartovskij@grsu.by

Пусть задана линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор решения уравнения (1),  $y \in \mathbb{R}^l$  — вектор наблюдаемого сигнала (выход),  $D(\lambda)$  ( $D(0) = 0$ ),  $A(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  — полиномиальные матрицы подходящих размеров,  $\lambda_h$  ( $h \equiv \text{const} > 0$ ) — оператор сдвига ( $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$ ). Начальное состояние системы (1), (2) предполагается неизвестным.

**Задача 1.** Требуется на основании данных о наблюдаемом выходе (2) построить оценку  $z$  неизвестного вектора решения  $x$  уравнения (1) так, чтобы

$$\|x(t) - z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

и, кроме того, оценка  $z$  не должна зависеть от производных выхода  $y^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

**Определение [1].** Систему (1), (2) будем называть *асимптотически наблюдаемой*, если для любых двух решений  $\hat{x}$  и  $\check{x}$  уравнения (1), совместимых с выходами  $\hat{y}$  и  $\check{y}$  соответственно, выполняется условие: если  $\hat{y}(t) \equiv \check{y}(t)$ ,  $t > 0$ , то  $\|\hat{x}(t) - \check{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Заметим, что свойство асимптотической наблюдаемости можно сформулировать так:  $\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  для всех решений системы, совместимых с нулевым выходом  $y(t) \equiv 0$ ,  $t > 0$ .

Обозначим  $W(p, \lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$  — характеристическая матрица системы (1) (при  $\lambda = e^{-ph}$ ) и рассмотрим множество

$$P_C = \left\{ p \in \mathbb{C} : \text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} < n \right\}.$$

Считаем, что выполняется следующее условие

$$\text{множество } P_C \text{ состоит из конечного числа чисел.} \quad (3)$$

**Теорема [1].** Пусть выполняется условие (3). Для того чтобы система (1), (2) была асимптотически наблюдаема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Re } p < 0 \quad \forall p \in P_C. \quad (4)$$

Исследование задачи 1 проведено для асимптотически наблюдаемых систем, удовлетворяющих условию

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

которое является необходимым для существования непрерывной операции восстановления решения системы (1) по выходу (2) (т.е. возможности восстановления текущего состояния системы (1) без использования производных выходов). Получены достаточные условия разрешимости задачи 1 и конструктивные методы построения соответствующей оценки.

Решение задачи 1 основано на преобразовании, приводящем исходную систему к некоторой асимптотически наблюдаемой неоднородной системе запаздывающего типа с неоднородной частью, зависящей от выхода (2) (размер матриц новой системы превосходит размер матриц исходной системы). Далее строится невырожденное преобразование, разбивающее полученную систему запаздывающего типа на конечное число подсистем со скалярным выходом. После этого к каждой такой подсистеме применяются методы проектирования наблюдателей из статей [1–3].

1. Хартовский В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716.

2. Метельский А.В., Хартовский В.Е. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.
3. Хартовский В.Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 409–422.

## Одна аппроксимация в задаче аналитического конструирования регулятора для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

**Р. И. Шевченко**

*Екатеринбург, УрФУ*

e-mail: oma170@hotmail.com

Аппроксимационные процедуры решения задач аналитического конструирования регуляторов для систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием рассматривались, например, в работах [1, 2]. В настоящей работе для решения этой задачи предлагается использовать специальные аппроксимационные системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. Их можно рассматривать как модификацию аппроксимационных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенных Н. Н. Красовским в [1]. Исследованы вопросы сходимости решений аппроксимационных задач оптимального управления к решению исходной задачи.

Рассматривается линейная управляемая система

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1(t)x(t) + A_2(t)x(t - \tau) + B(t)u, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ;  $A_1(\cdot), A_2(\cdot)$  — ограниченные измеримые матричнозначные функции,  $\tau$  — постоянное запаздывание,  $T > 0$ . Начальные функции  $\varphi(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in [-\tau, 0]$ , для решений системы (1) принадлежат пространству непрерывных функций  $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ .

Класс допустимых управлений  $u = \eta(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in C$ ,  $t \in [0, T]$ , системы (1), формируемых по принципу обратной связи, описан в работе [1]. Требуется найти допустимое управление, которое минимизирует показа-



тель качества переходных процессов

$$J(\varphi, u) = \int_0^T [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt + x^T(T)Fx(T), \quad (2)$$

где  $R(\cdot)$ ,  $Q(\cdot)$  — матричнозначные функции, значения которых являются симметричными положительно определенными матрицами,  $F$  — симметричная положительно определенная матрица.

В настоящей работе предлагается использовать для решения задачи (1), (2) специальные аппроксимационные системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = A_1(t)y_0(t) + A_2(t)y_N(t) + B(t)u, \quad (3)$$

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \frac{N}{\tau} \left( y_{i-1} \left( \left[ \frac{tN}{\tau} \right] \frac{\tau}{N} \right) - y_i \left( \left[ \frac{tN}{\tau} \right] \frac{\tau}{N} \right) \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где  $[a]$  — целая часть числа  $a$ ;  $y_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N \geq 1$ .

Для аппроксимационных систем используются допустимые управления  $u_N = \xi_N(t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y} \in C\left(\left[-\frac{\tau}{N}, 0\right], \mathbb{R}^{n \times (N+1)}\right)$ ,  $t \in [0, T]$ , и следующие критерии качества переходных процессов

$$J_N(y_N^0, u) = \int_0^T [y_0^T(t)Q(t)y_0(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt + y_0^T(T)Fy_0(T), \quad (5)$$

где  $y_N^0 = \{y_i(0)\}_0^N$ ,  $N \geq 1$ .

Зададим произвольную начальную функцию  $\varphi \in C$ . Пусть  $x(t, \varphi, \eta)$ ,  $t \in [0, T]$ , — решение системы (1) с начальными условиями  $x(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in [-\tau, 0]$ , а  $y_N(t, \varphi, \xi_N)$ ,  $t \in [0, T]$ , — решение системы (3), (4) с начальными условиями  $y_i(0) = \varphi\left(-\frac{i\tau}{N}\right)$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Здесь  $\eta(t, \mathbf{x})$ ,  $\xi_N(t, \mathbf{y})$  — произвольные заданные допустимые управления для системы (1) и систем (3), (4) соответственно. Для оптимальных управлений задач (1), (2) и (3), (4), (5) введем соответственно обозначения  $\eta^0(t, \mathbf{x})$ ,  $\xi_N^0(t, \mathbf{y})$ . Эти же управления при начальной функции  $\varphi \in C$ , но рассматриваемые как функции времени  $t \in [0, T]$  на движениях  $x(t, \varphi, \eta^0)$  и  $y_N(t, \varphi, \xi_N^0)$ , обозначим через  $u^0(t, \varphi)$  и  $u_N^0(t, \varphi)$ . В работе получен следующий основной результат.

**Теорема.** *Равномерно по  $t \in [0, T]$  и  $\varphi \in C$  выполняется равенство*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |u_N^0(t, \varphi) - u^0(t, \varphi)| = 0.$$

1. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. № 4. С. 716–724.
2. *Delfour M.C.* The linear quadratic optimal control problem for hereditary differential systems: theory and numerical solution // Applied Mathematics and Optimization. 1976. Vol. 3. No. 2–3. Pp. 101–162.

## Построение разрешающих управлений в одной нелинейной дифференциальной игре

К. А. Щелчков

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*  
e-mail: incognitobox@mail.ru

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma(x_0)$  двух лиц, описываемая системой вида

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где  $U = \{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^l$  — множество значений управления преследователя,  $V \subset \mathbb{R}^s$  — компакт — множество значений управления убегающего. Целью преследователя является приведение траектории системы в любую наперед заданную окрестность нуля за конечное время. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию, для построения которой разрешается использовать только информацию о значении фазовых координат в точках разбиения временного интервала. В работе [1] получены достаточные условия на параметры игры для существования окрестности нуля, из которой происходит поимка.

В данной работе рассматривается вопрос о построении выигрышного управления. Найдены условия задачи, ослабление которых не влияет на ее разрешимость. Рассматривается задача о нахождении параметров для построения разрешающего управления в зависимости от известных начальных данных. Производится компьютерное моделирование в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  ряда примеров, динамика в которых задается нелинейными системами.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем», и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00293.

1. *Щелчков К.А.* Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 111–118.

## Оптимизационная задача колеблющейся струны с фазовым ограничением

**А. И. Эгамов**

*Нижний Новгород, ННГУ им. Н. И. Лобачевского*

e-mail: albert810@yandex.ru

Ставится начально-краевая задача: на множестве  $Q = [0, l] \times [0, T]$ , где  $l > 0$ ,  $T > 0$ , с границей  $\Sigma$ , состоящей из точек  $\{(x, t) : t = 0 \text{ или } (l - x)x = 0\}$ , найти функцию  $y(x, t)$ , определяющую координаты поперечных колебаний струны — дважды непрерывно дифференцируемую по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемую по  $x$  в области  $Q \setminus \Sigma$ , которая является решением уравнения

$$y''_{tt}(x, t) = y''_{xx}(x, t) + u(x, t),$$

и удовлетворяет краевым и начальным условиям

$$y'_x(0, t) = y'_x(l, t) = 0,$$

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad y'_t(x, 0) = \psi(x),$$

где  $u(x, t)$  — некоторая непрерывная управляющая функция, функции  $\varphi(x) \in C^3[0, l]$ ,  $\psi(x) \in C^2[0, l]$  удовлетворяют граничным условиям связи при  $t = 0$ .

Пусть управление  $u(x, t)$  является управлением с обратной связью и имеет вид

$$u(x, t) = b(x)y(x, t) - 2q(t)y'_t(x, t) - R[y]y(x, t),$$

где  $b(x)$  — непрерывно дифференцируемая управляющая функция;  $R[y]$  — интегральный оператор вида

$$R[y] \equiv R_y(t) = \int_0^l (b(x)y^2(x, t) - y_x'^2(x, t) + y_t'^2(x, t)) dx;$$

непрерывно дифференцируемая функция  $q(t)$  является решением задачи Коши для уравнения Риккати

$$q_t'(t) + q^2(t) = R_y(t), \quad q(0) = 0.$$

Применение такого управления с обратной связью гарантирует, что для на множестве  $t \in [0, T]$  выполняется тождество

$$\int_0^l y^2(x, t) dx = 1.$$

В [1] оговаривается условие, при котором решение исходной задачи существует, и доказывается теорема о связи решений поставленной задачи и линейной второй начально-краевой задачи гиперболического типа. Это позволяет решить исходную задачу методом Фурье.

Постановка оптимизационной задачи:

*Требуется за фиксированное время  $T > 0$  оптимально выделить  $m$ -тую функцию из системы косинусов, то есть приблизить функцию, описывающую колебания струны, к  $\cos(\pi t x/l)$ ,  $m > 0$ , при ограничении на управляющую функцию*

$$\int_0^l b^2(x) dx \leq K^2,$$

где  $K$  — некоторая заданная положительная константа.

Осуществляется переход к управлению коэффициентами Фурье ее решения, то есть к сосредоточенной задаче оптимального управления, которая решается численно. Доказывается, что минимизирующая последовательность критериев качества вспомогательных задач сходится к оптимальному значению критерия качества поставленной задачи.

1. *Бураго П.Н., Эгамов А.И.* О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // Журнал Средне-волжского математического общества. 2019. Т. 21. № 4. С. 413–429.  
DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.413-429

---

---

# Математическое моделирование

## Experimental investigation of the fall of toroidal bodies in a fluid

S. S. Alalykin, E. V. Vetchanin,

*Izhevsk, Udmurt State University*

e-mail: ftt@udsu.ru, eugene@mail.ru

In this paper we consider the fall of toroidal bodies in a fluid. For the first time, equations of motion of the multiply-connected bodies in a fluid were derived by Lamb [1] within the framework of an ideal fluid. In [2] the motion of toroidal bodies was studied experimentally in the case of the fall of a thin disk with central hole. It is shown that the motion of the disk with hole is more stable compared to the motion of a disk without hole. In [2], this effect is explained by the formation of an additional vortex ring, which decrease the total circulation of the velocity of the fluid along a contour encircling the directrix of the body.

The theoretical analysis of the motion of toroidal bodies requires a mathematical model which accurately describes the dynamics observed in experiments. We introduce two coordinate systems for describing the motion of the body: a fixed frame  $Oxyz$  and a moving frame  $Cx_1x_2x_3$  attached to the body. Let  $\mathbf{r}$  be the radius vector of the origin of the moving coordinate system. We denote the unit vectors directed along the axes of the fixed coordinate system by  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Their projections on the axes of the moving coordinate system form an orthogonal transformation matrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Equations of motion of multiply connected bodies can be based on the equations proposed by Lamb [1] and take the form

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{a}) \times \boldsymbol{\omega} - \mu\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{F}, \quad F_i = f_i v_i |v_i|,$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}) \times \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{a}) \times \mathbf{v} - \mathbf{G}, \quad G_i = g_i\omega_i|\omega_i|,$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v},$$

where  $\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \boldsymbol{\Lambda}_1$ ,  $\mathbf{I} = \mathbf{J} + \boldsymbol{\Lambda}_2$ ,  $m$  and  $\mathbf{J}$  are the mass and the central tensor of inertia of the body,  $\boldsymbol{\Lambda}_1$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_2$  are the tensors of added masses and added moments of inertia, respectively,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  are the linear and angular velocity of the body,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  are the vectors describing the influence of circulatory motion of a fluid through holes in the body, and  $f_i$ ,  $g_i$  are the drag coefficients.

Parameters  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $f_i$ ,  $g_i$  in the equations obtained must be determined. Series of experiments were carried out for evaluation of the parameter values. The toroidal bodies with LED markers (see Fig. 1) were fabricated for these experiments.



Figure 1: Samples of toroidal bodies

Trajectories of LED markers tracked during the experiment. The coefficients of the model were evaluated from experimental data using genetic algorithms [3].

The work of E.V. Vetchanin was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia (FEWS-2020-0009). The experimental investigations were carried out using the equipment of the Common Use Center of the Udmurt State University.

1. *Lamb H.* Hydrodynamics, New York: Dover, 1945.

2. *Vincent L., Shambaugh W. S., Kanso E.* Holes stabilize freely falling coins // *J. Fluid Mech.* 2016. Vol. 801. Pp. 250–259.
3. *Yakimovich B. A., Tenenyov V. A.* Genetic algorithms in system simulation, Izhevsk: IzhGTU, 2010.

## The problem of the sum of integer vectors

**R. T. Khaziyakhmetov**  
*Izhevsk, Kalashnikov ISTU*  
e-mail: rysel777@inbox.ru

The purpose of this study is to recover the total sum from the final set of the values of indices. Such a problem arises also in the field of budget planning. The brute-force search method for finding the vector of the total sum is demonstrated. Computational experiments are carried out by parameters, depending on the time expenditure: the number of rows, the values of the matrix elements, the number of rows required for the formation of the vector of the total sum. A method for reducing almost by half the time for execution of the brute-force search algorithm is proposed.

The method of measuring the complexity of the algorithm relative to time has proved to be an excellent guide for making practical decisions on the use of a specific algorithm, and, most importantly, it has turned out to be acceptable for evaluating the effectiveness of the algorithm. In testing the brute-force search algorithm for input parameters, it becomes clear that the exponential relationship depends on the processing of the total number of rows. Therefore, the priority task is to develop criteria to achieve a decrease in the amount of input data.

The speed of the algorithm depends exponentially on the volume of input parameters. The speed of the algorithm does not depend on the number of chosen rows from the total amount of data for forming the total sum vector. Also, the speed of the algorithm does not depend on the value of the matrix element. It has turned out to be impossible to construct a polynomial algorithm, but it has been possible to reduce the time for execution of the brute-force search algorithm almost by half. The test results suggest that the brute-force search algorithm belongs to NP-complete algorithms that cannot be solved in polynomial time.

# Описание динамики денежных накоплений одной семьи с помощью линейных стохастических распределенных моделей в форме пространства состояний

Г. А. Абденова, К. М. Аканова, К. М. Базикова

*Нур-Султан, Евразийский национальный университет  
им. Л. Н. Гумилева*

e-mail: gauhar.phd@gmail.com, akanova\_km@mail.ru, kmbazikova@mail.ru

Для моделирования динамики денежных накоплений семьи используется линейное дифференциальное уравнение с частными производными распределенного типа, а модель измерительной системы в виде линейных распределенных алгебраических уравнений с аддитивными белыми шумами и в модели динамики, и в модели измерительной системы. Стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение (1) описывает динамику накоплений семьи; подробнее это рассмотрено в [1, 2].

$$dx(t) = F(x(t), t) dt + w(x(t), t) dt \quad (1)$$

Для математического описания случайных доходов и расходов введем случайную величину  $X(t)$ .

С учетом аддитивных шумов денежных накоплений семьи уравнение (1) запишется в виде

$$dx = F(x, t) dt + G(x, t) dX + w dt, \quad G \geq 0. \quad (2)$$

Разобьем временной интервал и обозначим  $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ ,  $t_0 = 0$ ,  $x_i = x(t_i)$ ,  $X(t_i) = z_i$ , тогда

$$x_{i+1} = F(x_i, t_i) \Delta t_i + G(x_i, t_i) z_{i+1} + w(x_i, t_i) \quad (3)$$

Для вычислений ставится задача оценивания коэффициентов уравнения (3) по наблюдениям дискретного входа  $z(x_k, t_s)$  и дискретного выхода  $y(x_k, t_s)$  измерительной системы

$$y(x_k, t_s) = h \cdot x(x_k, t_s) + p_2 \cdot \varepsilon(x_k, t_s), \quad k = \overline{1, n}; \quad s = \overline{0, m}, \quad (4)$$

Рассмотрим данные наблюдений за пять лет с 2014 по 2018 годы, взятые с сайта <https://stat.gov.kz/>. Расчеты приведены с использованием соотношений фильтра Калмана в системе Matlab. Общее количество данных наблюдений в месяцах составит  $n = 60$ , строим линейную регрессию



для расчета разброса на основе данных наблюдений [3]. Для  $n = 60$  коэффициенты регрессионной модели:  $a = -0.0089$ ;  $b = 2474000$ . Максимальное отклонение линии уравнения регрессии от данных наблюдений составляет  $x(12)$ ;  $max = 9142.3$ . 54 наблюдений были использованы для расчета коэффициентов дифференциального уравнения:  $a = 13037$ ;  $b = 0.8136$ ; а также для расчета дисперсий модели в форме ПС:  $Q = 13142$  - дисперсия для модели динамики; дисперсия для модели измерительной системы  $R = 57262$ ; дисперсия для начального момента времени  $P_0 = Q$  в алгоритме фильтра Калмана [4, 5]. Оставшиеся 6 наблюдений используются для расчета оценок предсказания и корректирующей оценки фильтрации по схеме Калмана при начальных условиях относительно состояния  $x_0 = \bar{x}_0$  и дисперсии в начальный момент времени  $P_0 = Q$ . Получены расчетные данные оценок предсказания и фильтрации по схеме Калмана. К повышающим точность оценок коэффициентов по схеме Калмана отнесем: увеличение объема выборки относительно данных наблюдений; для внутренних точек можно использовать более точные формулы аппроксимации; накопленную информацию об оценках искомых параметров, что в конечном счете позволило бы использовать идеи байесовского оценивания параметров [6].

1. *Ерофеев В.Т., Козловская И.С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. Минск: Изд-во Бел. гос. ун-та, 2004.
2. *Чернавский Д.С., Попков Ю.С., Рахимов А.Х.* Математические модели типологии семейных накоплений // Экономика и математические методы. 1994. Т. 30. Вып. 2. С. 98–106.
3. *Копченова Н.В., Марон И.А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 2009.
4. *Абденова Г.А., Воевода А.А.* Оценивание параметров и характеристик шумов нестационарных процессов в стохастических системах, описываемых в пространстве состояний // Сб. науч. трудов НГТУ. 2010. Т. 61. № 3. С. 11–18.
5. *Абденова Г.А.* Прогнозирование значений уровня временного ряда на основе уравнений фильтра Калмана // Ползуновский вестник. Барнаул. 2010. № 2. С. 4–6.
6. *Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М.* Планирование промышленных экспериментов. Модели динамики. М.: Металлургия, 1978.

# Исследование сходимости метода СН-ЭВМ для траекторий в виде трехзвенных ломанных

Ф. Ф. Адилов, Р. А. Абилов

Ташкент, Институт механики и сейсмостойкости сооружений  
Академии Наук Республики Узбекистан  
e-mail: mahzun86@mail.ru, rustam\_abirov@mail.ru

Большое значение при решении задач пластичности методом СН-ЭВМ [1] имеет скорость сходимости метода в зависимости от параметров траектории нагружения. Для анализа сходимости в задачах однородного напряженного состояния можно использовать идею теоретического эксперимента. Она заключается в том, что вместо опытов на экспериментальной установке используются расчеты по какой-либо теории пластичности. Таким образом, не проводя экспериментов можно оценить влияния параметров траектории на сходимость метода.

В настоящей работе приведены результаты исследования сходимости метода СН-ЭВМ в теоретическом эксперименте для траекторий в виде трехзвенных ломанных.

Пусть тонкостенный трубчатый образец нагружается растягивающей силой  $P$  и крутящим моментом  $M$  так, что траектория нагружения в векторном пространстве Ильюшина имеет вид трехзвенной ломанной (рис. 1)

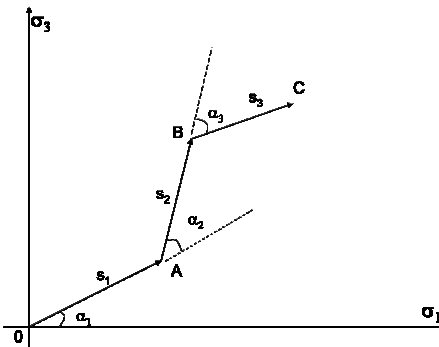


Рис. 1: Траектория нагружения

$$d\bar{\sigma} = N d\bar{\varepsilon} - (N - P) \frac{\bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}}{\sigma^2} \bar{\sigma} \quad (1)$$

Коэффициенты  $N$  и  $P$   $(n+1)$ -го приближения вычисляются на основе следующих соотношений:

$$N^{(n+1)}(x_k, \lambda) = \frac{\sigma_3^{(n)} d\sigma_1^{(n)} - \sigma_1^{(n)} d\sigma_3^{(n)}}{\sigma_3^{(n)} d\varepsilon_1^{(n)} - \sigma_1^{(n)} d\varepsilon_3^{(n)}},$$

$$P^{(n+1)}(x_k, \lambda) = \frac{\sigma_3^{(n)} d\sigma_3^{(n)} + \sigma_1^{(n)} d\sigma_1^{(n)}}{\sigma_1^{(n)} d\varepsilon_1^{(n)} + \sigma_3^{(n)} d\varepsilon_3^{(n)}},$$

где  $\sigma_i^{(n)}$  и  $\varepsilon_i^{(n)}$  — напряжения и деформации, вычисленные в  $n$ -ом приближении в соотношении (1). Процесс последовательных приближений продолжается до выполнения условия близости по критерию [2]:

$$\delta_i = 2 \frac{\|\sigma_i^{(n)} - \sigma_i\|}{\|\sigma_i^{(n)} + \sigma_i\|} \cdot 100\% \leq \epsilon.$$

По вышеприведенному алгоритму проведены многочисленные расчеты, где варьировались величины  $s_i$ ,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Расчеты показали, что изменение величин  $s_3$  и  $\alpha_3$  несущественно влияют на сходимость метода СН-ЭВМ, так, например, при  $s_1 = 120$  МПа,  $s_2 = 40$  МПа,  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = 5\pi/6$  проводились расчеты при различных значениях  $s_3$  и  $\alpha_3$ :  $s_3 = 40$  МПа, 60 МПа, 100 МПа;  $\alpha_3 = \pi/2$ ,  $5\pi/6$ ,  $-\pi/2$ ,  $-5\pi/6$  и т. д., и получено, что достаточно трех приближений по методу СН-ЭВМ для достижения необходимой точности ( $\delta = 6\%$ ).

Увеличение длины второго участка траектории нагружения влечет за собой рост количества приближений по методу СН-ЭВМ. Например, выше было сказано, что при  $s_1 = 120$  МПа,  $s_2 = 40$  МПа,  $s_3 = 40$  МПа,  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = 5\pi/6$ ,  $\alpha_3 = 5\pi/6$  достаточно трех приближений, а при значении  $s_2 = 100$  МПа необходимо сделать минимум пять приближений, а при  $s_2 = 120$  МПа — минимум шесть приближений.

Уменьшение параметра  $s_1$  также влечет рост количества приближений по методу СН-ЭВМ.

На основе проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

- 1) величины  $s_3$  и  $\alpha_3$  несущественно влияют на сходимость метода СН-ЭВМ, т. е. при любых  $s_3$  и  $\alpha_3$  метод быстро сходится (достаточно двух-трех приближений);
- 2) существенное влияние на сходимость метода оказывает  $s_2$  и угол излома  $\alpha_2$  (с ростом этих величин уменьшается скорость сходимости);
- 3) с ростом  $s_1$  увеличивается скорость сходимости.

В работе в численном эксперименте в качестве первого приближения использовался нелинейный закон Гука, а в качестве точного решения теории Прандтля–Рейса.

1. *Ильюшин А. А.* Метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 166–178.
2. *Бабамуратов К. Ш., Ильюшин А. А., Кабулов В. К.* Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. Ташкент: Фан, 1987. 288 с.

## Математическое моделирование динамики упругих элементов вибрационного устройства

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов

Ульяновск, Ульяновский государственный технический университет  
e-mail: ankil@ulstu.ru, velmisov@ulstu.ru

Рассматривается плоское течение жидкости в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом  $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$  с горизонтальными недеформируемыми стенками. Внутри канала расположены деформируемые упругие элементы (пластины), занимающие положения  $y = y_i, i = \overline{1, n}, x \in [b, c]$ . Скорость невозмущенного однородного потока равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ . Рассматривается дозвуковой режим протекания  $V < a$ , где  $a$  – скорость звука в невозмущенном потоке. Введем обозначения:  $u_i(x, t), w_i(x, t), i = \overline{1, n}$  – функции, определяющие продольные и поперечные составляющие деформации элементов в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $\varphi(x, y, t)$  – функция, определяющая потенциал скорости возмущенного потока жидкости;  $J_i = \{(x, y) \in R^2 : y = y_i \in (0, y_0), x \in [b, c] \subset (0, x_0)\}, i = \overline{1, n}, J = \bigcup_{i=1}^n J_i$ . Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in G \setminus J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_i, t) = \dot{w}_i(x, t) + Vw'_i(x, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad \varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$w_i(b, t) = w'_i(b, t) = u_i(b, t) = w_i(c, t) = w'_i(c, t) = u_i(c, t) = 0, \quad (5)$$

$$-E_i F_i \left( u'_i(x, t) + 0, 5w_i'^2(x, t) \right)' + M_i \ddot{u}_i(x, t) - \beta_{2i} F_i u_i''(x, t) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & -E_i F_i \left[ w'_i(x, t) \left( u'_i(x, t) + 0, 5w_i'^2(x, t) \right) \right]' + D_i w_i''''(x, t) + M_i \ddot{w}_i(x, t) + \\ & + N_i(t) w_i''(x, t) + \beta_{2i} I_i w_i''''(x, t) + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) = \quad (7) \\ & = \rho(\varphi_i^+(x, y_i, t) - \varphi_i^-(x, y_i, t)) + \rho V(\varphi_x^+(x, y_i, t) - \varphi_x^-(x, y_i, t)), \\ & x \in (b, c), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь индексы  $x, y, t$  снизу обозначают производные по  $x, y, t$ ; штрих обозначает производную по  $x$ , а точка – производную по  $t$ ;  $\rho, I_i, D_i, M_i, E_i, F_i, N_i(t), \beta_{2i}, \beta_{1i}, \beta_{0i}$  – параметры механической системы;

$$\varphi_t^\pm(x, y_i, t) = \lim_{y \rightarrow y_i \pm 0} \varphi_t(x, y, t), \quad \varphi_x^\pm(x, y_i, t) = \lim_{y \rightarrow y_i \pm 0} \varphi_x(x, y, t).$$

Устойчивость нулевого решения  $\varphi(x, y, t) \equiv 0, u_i(x, t) \equiv 0, w_i(x, t) \equiv 0, i = \overline{1, n}$  задачи (1)–(7) по отношению к возмущениям начальных данных исследована с помощью функционала

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_{G \setminus J} (\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \varphi_x^2 + a^2 \varphi_y^2) dx dy + 2a^2 V \sum_{i=1}^n \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, t) - \\ & - \varphi^-(x, y_i, t)) w'_i(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c \left( E_i F_i \left( u'_i(x, t) + 0, 5w_i'^2(x, t) \right)^2 + \right. \\ & \left. + M_i (u_i^2(x, t) + w_i^2(x, t)) + D_i w_i''^2(x, t) + \beta_{0i} w_i^2(x, t) - N_i(t) w_i'^2(x, t) \right) dx. \end{aligned}$$

Введем обозначения  $K_i(t) = \lambda_{1i} D_i - N_i(t), i = \overline{1, n}$ , где  $\lambda_{1i}$  – наименьшие собственные значения краевых задач для уравнения  $\psi'''' = -\lambda \psi'', x \in (b, c)$  с краевыми условиями (5) для функций  $w_i(x, t)$ .

**Теорема.** Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} & \dot{N}_i(t) \geq 0, \quad \beta_{2i} \geq 0, \quad \beta_{1i} \geq 0, \quad \beta_{0i} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ & \frac{K_1(t)}{V^2 \rho} > \frac{(a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2}{(a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)} + \frac{(a^2 - V^2) \pi^2 y_1^2 + 2a^2 x_0^2}{2(a^2 - V^2) \pi^2 y_1}, \\ & \frac{K_i(t)}{V^2 \rho} > \frac{(a^2 - V^2) \pi^2 (y_{i+1} - y_i)^2 + 2a^2 x_0^2}{(a^2 - V^2) \pi^2 (y_{i+1} - y_i)} + \frac{(a^2 - V^2) \pi^2 (y_i - y_{i-1})^2 + 2a^2 x_0^2}{(a^2 - V^2) \pi^2 (y_i - y_{i-1})}, \\ & i = \overline{2, n-1}, \end{aligned}$$

$$\frac{K_n(t)}{V^2 \rho} > \frac{(a^2 - V^2)\pi^2(y_0 - y_n)^2 + 2a^2x_0^2}{2(a^2 - V^2)\pi^2(y_0 - y_n)} + \frac{(a^2 - V^2)\pi^2(y_n - y_{n-1})^2 + 2a^2x_0^2}{(a^2 - V^2)\pi^2(y_n - y_{n-1})}.$$

Тогда решение  $w_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\varphi(x, y, t)$  задачи (1)–(7) и производные  $\varphi_t(x, y, t)$ ,  $\varphi_x(x, y, t)$ ,  $\varphi_y(x, y, t)$ ,  $\dot{w}_i(x, t)$ ,  $w'_i(x, t)$ ,  $\dot{w}_i(x, t)$ ,  $w''_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных  $\varphi_t(x, y_i, 0)$ ,  $\varphi_x(x, y_i, 0)$ ,  $\varphi_y(x, y_i, 0)$ ,  $\varphi^+(x, y_i, 0)$ ,  $\varphi^-(x, y_i, 0)$ ,  $\dot{w}_i(x, 0)$ ,  $w'_i(x, 0)$ ,  $\dot{w}_i(x, 0)$ ,  $w''_i(x, 0)$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Ульяновской области, проект № 18–41–730015.

## Метод точечных отображений и задача синхронизации квазигармонического осциллятора

**О. Г. Антоновская**

*Нижегородский государственный  
архитектурно-строительный университет*  
e-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

До сих пор интерес представляет изучение систем, близких к гармоническому осциллятору (квазигармонический осциллятор) [1]. Одним из важных достоинств такой системы является возможность использовать хорошо известные математические свойства процессов колебаний гармонического осциллятора с медленно меняющейся частотой в задачах различной физической природы [2]. При этом особую роль играет изучение движений квазигармонического осциллятора вблизи главного резонанса, т. е. рассматриваются уравнения вида [2]

$$\ddot{x} + x = \mu[-\xi x + g(x, \dot{x}) + A \cos t]$$

при различных нелинейных функциях  $g(x, \dot{x})$  и  $0 < \mu \ll 1$ , или, если ввести  $y = \dot{x}$ , систему двух уравнений первого порядка

$$y = \dot{x}, \dot{y} = -x + \mu[-\xi x + g(x, y) + A \cos t].$$

Здесь величина параметра  $\mu$  определяет степень близости рассматриваемой системы к линейной консервативной системе (гармоническому осциллятору) [2].

Достаточно эффективный математический аппарат исследования нелинейных колебательных систем дает метод точечных отображений [3]. Возможность использования теории точечных отображений для изучения решений дифференциальных уравнений основана на сводимости изучения фазовых траекторий динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями, к рассмотрению точечных отображений, порождаемых этими фазовыми траекториями на секущих поверхностях [3]. При этом практическое применение этого метода оказалось связанным с рядом трудностей, главная из которых - отыскание функций последования. Естественно, что построение точечных отображений не представляет затруднений, если известно общее решение рассматриваемых дифференциальных уравнений. В случае, когда получение такого общего решения невозможно, можно прибегнуть к тем или иным приближенным (в том числе и асимптотическим) методам [3].

В работах [4, 5] показано, точечное отображение, порождаемое траекториями синхронизируемого осциллятора на секущей поверхности  $t = [t/(2\pi)]2\pi$  с точностью до величин порядка  $\mu^2$  может быть сведено к изучению точечного отображения с явно заданными функциями последования, при получении которых используется метод последовательных приближений. Таким образом, изучение условий существования синхронного режима с периодом внешней силы может быть проведено с помощью изучения условий существования и устойчивости простой неподвижной точки приближенного точечного отображения.

В настоящем докладе приводятся результаты исследования квазигармонического осциллятора для различных функций  $g(x, y)$ , полученные с помощью метода приближенных точечных отображений. Делаются выводы о влиянии характера нелинейности на результаты приближенного исследования поведения траекторий системы в целом. Обсуждается вопрос о локальной применимости полученных результатов.

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: Наука, 1974.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М: Физматгиз, 1959.
3. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
4. *Антоновская О.Г.* О влиянии насыщения нелинейности на результаты исследования принудительной синхронизации методом приближенных точечных отображений // Математическое моделирование и оптимальное управление: Вестник ННГУ, Нижний Новгород. 1999. № 2(21). С. 198-208.

5. Антоновская О.Г., Зайцева М.Н. Об одном случае исследования принудительной синхронизации методом приближенных точечных отображений // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. № 8(74). С. 7-14.

## Математическое моделирование контактного взаимодействия нескольких упругих тел на несогласованных сетках

П. С. Аронов, М. П. Галанин, А. С. Родин

Москва, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН  
e-mail: aronovps@mail.ru, galan@keldysh.ru, rals@bk.ru

Расчет прочности и надежности различных элементов конструкций и функциональных узлов оборудования является обязательным этапом проектирования. Многие из этих элементов контактируют между собой в пределах некоторой поверхности. Учет контактного взаимодействия позволяет получить более точную оценку напряженно-деформированного состояния рассматриваемой конструкции. Лишь для сравнительно малого количества контактных задач теории упругости существуют аналитические решения, поэтому наиболее перспективным способом исследования контактного взаимодействия тел являются численные методы, среди которых ведущее место занимает метод конечных элементов. При моделировании контакта нескольких тел зачастую отсутствует возможность использовать согласованные сетки. Численное решение подобных задач можно осуществлять с помощью метода Шварца [1], обеспечивающего очередное выполнение на контактной границе кинематических и силовых условий, а также различных вариантов метода множителей Лагранжа [2], например, mortar-метода [3].

В работе рассмотрено численное моделирование контактного взаимодействия нескольких тел в условиях термомеханического нагружения с помощью mortar-метода. Дискретизация задачи приводит к формированию плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений с седловой точкой, которая численно решается с помощью модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации [4], обобщенного на случай контакта нескольких тел. Использование данной схемы позволяет свести решение системы уравнений для всех контактирующих тел к последовательному решению систем уравнений отдельно



для каждого тела.

В качестве тестовой задачи проведен численный анализ напряженно-деформированного состояния тепловыделяющего элемента в осесимметричной постановке на несогласованных сетках. Выполнено сравнение результатов, полученных при различных граничных условиях и температурных полях.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты № 18–01–00252 и № 18–31–20020).

1. *Галанин М. П., Крупкин А. В., Кузнецов В. И., Лукин В. В., Новиков В. В., Родин А. С., Станкевич И. В.* Моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. № 12. С. 9–20.
2. *Le Tallec P., Sassi T.* Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach // Mathematics of Computation. 1995. Vol. 64. P. 1367–1396.
3. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2006.
4. *Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С., Станкевич И. В.* Решение задачи контакта двух упругих тел mortar-методом и методом Шварца на несогласованных сетках // Таврический вестник информатики и математики. 2019. № 1 (42). С. 24–42.

## Математическая модель процессов электролиза раствора гидроксида натрия с инертными электродами

**Р. М. Асхатов, Н. Ф. Кашапов, Р. Н. Кашапов, В. Ю. Чебакова**

*Казань, Казанский федеральный университет*

e-mail: Radik.Ashatov@kpfu.ru, kashnail@gmail.com, vchebakova@email.ru

Плазменные технологии находят широкое применение в экологии и охране окружающей среды, в машиностроении, добывающей промышленности и т.д. [1–5]. Разряды с жидкими электродами используются для очистки сточных вод как от органических примесей, так и от примесей в виде тяжелых металлов, синтеза наночастиц, травления металла. При моделировании разрядов с жидкими электродами большую роль играет

кинетика плазмохимических процессов у поверхности воды, так как даже небольшой процент радикалов, поступающих из используемых в качестве электрода растворов электролита или воды, оказывает существенное влияние на функции распределения заряженных частиц и, следовательно, влияет на характеристики и формирование разряда. В работе [6] построена математическая модель разряда между жидким и твердым электродом. Важным фактором, влияющим на характеристики разряда, является выход в зону разряда радикалов водорода, кислорода и гидроксила под действием ионной бомбардировки и электролиза [7]. В данной работе построена математическая модель процессов электролиза раствора гидроксида натрия с инертными электродами, которая позволяет получить количество выделившегося газа, а также пространственное распределение электрического поля и водородного показателя. Математическая модель включает в себя уравнения Нернста–Планка для заряженных частиц  $\text{Na}^+$  и  $\text{OH}^-$ , для расчета концентрации ионов водорода используется постоянство ионного произведения воды, уравнение Пуассона для расчета потенциала электрического поля. Граничные условия для уравнений переноса заряженных частиц ставятся на потоки, а константы скоростей анодного и катодного процессов выводятся из уравнения Батлера–Фольмера [8]. Плотность подаваемого тока связана с потенциалом электродов уравнением анодно-катодной волны. В работе представлено численное решение модельной задачи на основе метода, предложенного в [9], и проведено сравнение полученных нами результатов с результатами работы [10].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты №№ 20–08–01005, 19–08–01184, 18–41–160041.

1. *Кашанов Р.Н., Кашанов Н.Ф., Кашанов Л.Н., Денисов Д.Г.* Исследование плазменно-электролитного разряда в процессах получения металлических порошков // Вестник Технологического университета. 2017. Т. 20. № 24. С. 50–53.
2. *Chebakova V.J., Badriev I.B.* Mathematical simulation of the low-temperature plasma at the interaction with oil products // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2018. Vol. 107. No. 1. 012097.
3. *Badriev I.B., Paimuhin V.N.* Mathematical simulation of the low-temperature plasma at the interaction with oil products // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2018. Vol. 107. No. 1. 012095.
4. *Чебакова В.Ю.* Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2016. Т. 158. № 3. С. 404–423.
5. *Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю.* О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // Материалы XXII Междуна-

- родного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва: ООО «ТРИП», 2016. С. 31–33.
6. *Chebackova V.Yu, Gaisin A.F, Zheltukhin V.S.* 2D model of CCRF discharge with liquid electrode // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1158. No. 2. 022031.
  7. *Bruggeman P.J. et al.* Plasma-liquid interactions: a review and roadmap // *Plasma Sources Science and Technology*. 2016. Vol. 25. 053002.
  8. *Якименко Л.М., Модылевская И.Д., Ткачек З.А.* Электролиз воды. Москва: Химия, 1970.
  9. *Желтухин В.С., Фадеева М.С., Чебакова В.Ю.* Модификация метода Шарфеттера-Гуммеля для нахождения потока заряженных частиц при моделировании высокочастотного емкостного разряда // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. 2017. Т. 159. № 4. С. 444–457.
  10. *Haran B.S., Popov B.N., Zheng G., White R.E.* Mathematical Modelling of Hexavalent Chromium Decontamination from Low Surface Charged Soils // *Journal of Hazardous Materials*. 1993. Vol. 56. Nos. 1–3. Pp. 107.

## Численное моделирование потери устойчивости трехслойных пластин

**И. Б. Бадриев, В. В. Бандеров, М. В. Макаров**

*Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет*  
e-mail: ildar.badriev1@mail.ru, Victor.Banderov@kpfu.ru,  
makarovmaksim@mail.ru

Многослойные конструкции, в частности пластины, находят широкое применение в различных областях современной техники: космической, авиационной, кораблестроительной; промышленном, гражданском и транспортном строительстве, химическом и энергетическом машиностроении. Многослойные конструкции обычно состоят из разных материалов с существенно отличающимися физико-механическими свойствами. Для несущих слоев, как правило, используются материалы с повышенными модулями упругости, которые воспринимают основную часть внешних силовых воздействий. Заполнитель служит для монолитности

конструкции и обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями [1–4]. В настоящей работе проведено исследование задачи о потере устойчивости трехслойной пластины, состоящей из двух внешних несущих слоев и расположенного между ними трансверсально-мягкого заполнителя, связанного с несущими слоями при помощи клеевого соединения при поперечной нагрузке, приложенной к внешнему слою пластины в случае ее торцевого изгиба. При таком нагружении пластина оказывается в условиях продольно-поперечного изгиба, одной из возможных причин её разрушения является реализация исследуемых форм потери устойчивости [5]. Поиск критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости, осуществляется с помощью метода, основанного на продолжении по параметру, который предусматривает реализацию трех этапов. Во-первых, проводится решение системы нелинейных дифференциальных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины в устойчивых положениях равновесия с помощью метода, предложенного в [6–9]. Во-вторых, проводится постановка и решение квадратичной спектральной задачи для поиска точки ветвления решений (точки бифуркации) путем линеаризации дифференциальных уравнений в некоторой окрестности решения нелинейной задачи. В-третьих, проводится смена параметра нагружения и последующее решение задачи путем табулирования по новому параметру, начиная с точки бифуркации, которую можно найти, линеаризуя нелинейное уравнение в некоторой окрестности решения. Предложенные методы решения задачи были реализованы численно. Был разработан комплекс программ в среде Matlab, проведены расчеты для модельных задач. Проведен анализ полученных результатов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты №№ 20–08–01005, 19–08–01184, 18–41–160014.

1. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980.
2. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158. № 4. С. 453–468.
3. *Badriev I.B., Paimushin V.N.* Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. No. 5. Pp. 779–793.
4. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V.* Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear

- one dimensional formulation // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 208. No. 1. 012002.
5. *Paimushin V.N.* Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure // Soviet Applied Mechanics. 1987. Vol. 23. No. 11.
  6. *Badriev I.B., Zadvornov O.A.* On the convergence of the dual-type iterative method for mixed variational inequalities // Differential Equations. 2006. Vol. 42. No. 8. Pp. 1180–1188.
  7. *Badriev I.B., Fanyuk B.Y.* Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2012. Vol. 33. No. 4. Pp. 386–399.
  8. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39. No. 3. Pp. 448–457.
  9. *Badriev I.B., Zadvornov O.A.* Analysis of the stationary filtration problem with a multivalued law in the presence of a point source // Differential Equations. 2005. Vol. 41. No. 7. Pp. 915–922.

## Численное моделирование процессов изгиба трехслойных пластин

**И. Б. Бадриев, М. В. Макаров, Е. В. Смирнова**

*Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет*  
e-mail: ildar.badriev1@mail.ru, makarovmaksim@mail.ru, ovsanka@ro.ru

К конструктивным элементам современной авиационной и космической техники предъявляются два противоречивых требования, которые заключаются в обеспечении высокой прочности и жесткости при минимальном весе конструкций. Наиболее эффективными видами таких элементов конструкций, обеспечивающих выполнение обоих требований, являются трехслойные стержни, пластины и оболочки [1–3]. Конструктивно они состоят из двух несущих слоев, изготавливаемых из материалов с высокими механическими характеристиками (предназначенных для восприятия основной части внешней нагрузки) и маложесткого легкого заполнителя, служащего для образования монолитной конструкции и обеспечивающего совместную работу несущих слоев. Применение в качестве

заполнителей материалов с малым удельным весом позволяет при сравнительно небольшом весе существенно повысить изгибную жесткость пакета слоев в целом.

В данной работе рассматривается задача о продольном изгибе шарнирно закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Задача рассматривается в геометрически нелинейной одномерной постановке. Кинематические соотношения для заполнителя выводятся путем последовательного интегрирования по поперечной координате исходных трехмерных уравнений теории упругости [4].

Предполагаем, что в правом торцевом сечении края несущих слоев жестко защемлены и отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом, на левом торцевом сечении края несущих слоев пластины шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы, склеенной с торцевым сечением заполнителя.

Сформулирована обобщенная постановка задачи в виде интегральных тождеств относительно функций из пространств Соболева. Для приближенного решения задачи построена ее конечномерная аппроксимация [5].

Численное решение осуществляется с помощью двухслойного итерационного метода с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора построенной разностной схемы [6–9]. На основе разработанного комплекса программ в среде Matlab проведены численные эксперименты для модельной задачи. Приведены результаты численных экспериментов. Проведен анализ полученных результатов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты №№ 20–08–01005, 19–08–01184, 18–41–160029.

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Composite structures. 2001. Vol. 53. No. 1. P. 21–42.
2. Бадриев И. Б., Макаров М. В., Паймушин В. Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158. № 4. С. 453–468.
3. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. No. 5. P. 779–793.
4. Paimushin V.N. Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure // Soviet Applied Mechanics. 1987. Vol. 23. No. 11.
5. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V. Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear

- one dimensional formulation // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 208. No. 1. 012002.
6. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1115–1122.
  7. *Badriev I.B., Fanyuk B.Y.* Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2012. Vol. 33. № 4. P. 386–399.
  8. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39. № 3. P. 448–457.
  9. *Badriev I.B., Zadornov O.A.* Analysis of the stationary filtration problem with a multivalued law in the presence of a point source // Differential Equations. 2005. Vol. 41. № 7. P. 915–922.

## Доказательства корректности распределённых алгоритмов

**Е. С. Бастрьков**

*Ижевск, УдГУ*

e-mail: vporoshok@gmail.com

Доказательство корректности алгоритмов является развивающимся направлением в моделировании информационных систем. Корректность изолированных однопоточных алгоритмов проверяется аналитическим, фактически теоретическим путём. Однако, переходя к многопоточным или распределённым системам, теоретическое обоснование алгоритмов может оказаться трудной задачей. Особую сложность представляют алгоритмы, рассматриваемые как вспомогательные, утилитарные, действующие параллельно с другими вычислениями. Такие алгоритмы называются *управляющими*, а параллельно выполняющийся алгоритм — *базовым*. Примерами таких алгоритмов являются: определение завершения базового алгоритма, консистентный снимок состояния системы, обнаружение блокировок.

Сложность проверки корректности распределённых алгоритмов заключается в том, что события в распределённой системе могут происходить *параллельно* (независимо, несравнимо по времени), и *сериялиза-*

ция (монотонное отображение частично упорядоченного множества событий на линейно упорядоченную прямую времени) может быть выполнена множеством различных способов. Таким образом корректность алгоритма необходимо проверять для всех допустимых сериализаций. При наличии же базового алгоритма количество допустимых состояний возрастает геометрически.

Одним из способов проверки корректности простых (изолированных и однопоточных) алгоритмов является проверка свойств [1]. Для этого описываются свойства или инварианты, которые должны выполняться для любого входа (входных данных). После чего компьютер моделирует различные входы и проверяет для них корректность свойств. Не смотря на то, что проверяются не все возможные входы, подобный метод тестирования имплементаций алгоритмов широко применяется для сложных частей программ, потому что позволяет находить трудновывяемые ошибки.

Формализацию такого подхода для распределённых систем представляет система TLA+, представленная Л.Лампортом в 2002 [2]. Система представляет язык для записи алгоритма в терминах темпоральной логики, так называемой, спецификации. А также программный комплекс для проверки корректности полученной модели. В качестве примера рассмотрим спецификацию алгоритма Transaction Commit:

```

----- MODULE TCommit -----
CONSTANT RM      \* The set of participating resource managers
VARIABLE rmState \* rmState[rm] is the state of resource manager rm.
TCTypeOK ==
  rmState \in [RM -> {"working", "prepared", "committed", "aborted"}]
TCInit ==  rmState = [r \in RM |-> "working"]
canCommit == \A r \in RM : rmState[r] \in {"prepared", "committed"}
notCommitted == \A r \in RM : rmState[r] # "committed"
Prepare(r) == /\ rmState[r] = "working"
              /\ rmState' = [rmState EXCEPT ![r] = "prepared"]
Decide(r)  == \/ /\ rmState[r] = "prepared"
              /\ canCommit
              /\ rmState' = [rmState EXCEPT ![r] = "committed"]
              \/ /\ rmState[r] \in {"working", "prepared"}
              /\ notCommitted
              /\ rmState' = [rmState EXCEPT ![r] = "aborted"]
TCNext == \E r \in RM : Prepare(r) \/ Decide(r)
TCConsistent ==
  \A r1, r2 \in RM : ~ /\ rmState[r1] = "aborted"
                    /\ rmState[r2] = "committed"
TCSpec == TCInit /\ [] [TCNext]_rmState
THEOREM TCSpec => [] (TCTypeOK /\ TCConsistent)
=====

```



1. *Claessen K., Hughes J.* QuickCheck: A Lightweight Tool for Random Testing of Haskell Programs // ICFP. 2000. Montreal, Canada.
2. *Lamport L.* Specifying systems. The TLA+ Language and Tools for Hardware and Software Engineers. Addison-Wesley, 2000.

## Линейные эквивариантные оценки в задаче траекторного слежения

Д. А. Бедин

*Екатеринбург, УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина*  
e-mail: bedin@imm.uran.ru

Задача траекторного слежения состоит в следующем. Траектория  $x(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$ , вид которой зависит от параметров  $\theta \in \Theta$ , развивается во времени. В дискретные моменты  $t_i$  производятся измерения положения на траектории

$$z_i = x(t_i, \theta) + w_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

содержащие случайную ошибку  $w_i \sim \mathcal{N}(0, W_i)$ . Требуется выработать *оценку* (см. [1])  $\hat{x}_n = \hat{x}_n(\{z_i\}_{i=1}^n)$  положения на последний доступный момент измерения  $t_n$ , по возможности близкую к истинному положению  $x(t_n, \theta)$  в смысле среднеквадратичного отклонения

$$\mathbb{E} \{ \|\hat{x}_n - x(t_n, \theta)\|^2 \}. \tag{1}$$

В литературе и на практике особой популярностью пользуются *несмещённые* (в небайесовском смысле) [1] оценки, обладающие свойством

$$\mathbb{E} \{ \hat{x}_n \} = x(t_n, \theta). \tag{2}$$

Однако их применение может быть не всегда эффективно. Так, автором ранее в работе [2] было показано, что если множество параметров «богатое», среднеквадратическая точность оценок не может быть лучше, чем точность последнего измерения. Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\Theta$  такое, что  $\forall r > 0 \exists \theta'$  для которого выполняется:

$$x(t_i, \theta') = x(t_i, \theta) \quad (i < n), \quad x(t_n, \theta') \neq x(t_n, \theta), \quad \|x(t_n, \theta') - x(t_n, \theta)\| < r.$$

Тогда для несмещённых оценок (2) справедливо неравенство

$$\mathbb{E} \{ \|\hat{x}_n - x(t_n, \theta)\|^2 \} \geq \text{tr } W_n.$$

Такое «богатое», как в теореме 1, множество  $\Theta$  не является теоретическим «артефактом» и характерно для практических задач, где возможны резкие переключения режимов движения [3]. Для таких задач требуется применение смещённых оценок. Но, с другой стороны, отказ от несмещённости (2) без каких-либо дополнительных условий приводит к известному парадоксу [1]: возможна оценка, доставляющая значение ноль критерию (1), поскольку среди всех констант (которые также являются измеримыми функциями  $\{z_i\}$ ), есть одна, точно совпадающая с  $x(t_n, \theta)$ .

Для разрешения ситуации автор рассмотрел линейные, то есть вида

$$\hat{x}_n(\{z_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n L_i z_i,$$

эквивариантные оценки (см. [1]).

**Определение 1.** Эквивариантная относительно аффинного преобразования  $\mathcal{A}$  оценка  $\hat{x}_n$  удовлетворяет свойству:

$$\hat{x}_n(\{A_p z_i + a_p\}_{i=1}^n) = A_p \hat{x}_n(\{z_i\}_{i=1}^n) + a_p,$$

где  $A_p \in \mathbb{R}_{2 \times 2}$  и  $a_p \in \mathbb{R}^2$  — заданные матрица и вектор, определяющие преобразование  $\mathcal{A}$  и зависящие от его параметра  $p$ .

Изучались оценки, эквивариантные относительно преобразований параллельного переноса, поворота относительно начала координат и однородного изменения масштаба. Для важного класса движений  $x(\cdot, \theta)$ , состоящих из отрезков прямых и поворотов, было продемонстрировано, что для таких оценок выполняется

$$\text{tr } W_n > \mathbb{E} \{ \|\hat{x}_n - x(t_n, \theta)\|^2 \} > 0,$$

что позволяет рассчитывать на применение эквивариантных оценок на практике.

1. *Lehmann, E.L., Casella, G.* Theory of Point Estimation, Second Edition. Springer Texts in Statistics. New York: Springer, 1998.
2. *Бедин Д.А.* Нижняя граница точности несмещённых оценок конца траектории для движения с переключениями // «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019) материалы конференции, 16 – 19 сентября 2019. Екатеринбург. 2019. С. 56–59.
3. *La Rosa, P.S., Renaux, A., Muravchik, C.H., Nehorai, A.* Barankin-type lower bound on multiple change-point estimation // IEEE Transactions on Signal Processing. 2010. Vol. 58. No. 11. P. 5534–5549.

## Задача оценки траектории самолета, улучшение точности при помощи генетического алгоритма

**Д. А. Бедин, А. Г. Иванов**

*Екатеринбург, ИММ УрО РАН*

e-mail: bedin@imm.uran.ru, iagsoft@imm.uran.ru

**С. А. Ганебный**

*Санкт-Петербург, Фирма «НИТА»*

e-mail: gsa@nita.ru

В системах управления воздушным движением информация о положении воздушного судна (ВС) может поступать от одного или нескольких радиолокаторов (РЛС). В замерах, поступающих от РЛС, содержатся как ошибки, распределённые по нормальному закону, так и отдельные «выбросы». Возникает задача восстановления траектории самолёта с целью улучшить точность по сравнению с замерами РЛС и устранить влияние выбросов. При этом могут использоваться общие представления о динамике и особенностях маневрирования гражданских ВС.

Существуют разные варианты решения такой задачи: в частности в ИММ УрО РАН разработан многогипотезный алгоритм восстановления, ориентирующийся на замеры с выбросами [1]. При этом стандартным алгоритмом для решения таких задач является фильтр Interacting multiple model (IMM) [2], построенный на взаимодействии нескольких фильтров Калмана.

Работа алгоритмов восстановления зависит от большого числа параметров. Поэтому возникает задача подбора их оптимальных значений. Некоторые параметры многогипотезного алгоритма — целые числа, например, ограничения на количество траекторий (гипотез) в поддерживаемом пучке на разных этапах работы алгоритма. Аналитически описать влияние этих параметров на точность работы алгоритма (не говоря уже о вычислении производных) достаточно сложно. Поэтому возникла необходимость в подходящем алгоритме прямой оптимизации, не использующем производные. В такой ситуации возможно использование алгоритма, базирующегося на генетическом подходе.

Авторами сконструирован генетический алгоритм, содержащий элементы многокритериальности. Кроме традиционных кроссинговера и мутаций, алгоритм включает процедуру «направленного размножения», для

которой формирование генотипа потомка по генотипам родителей происходит в предположении о близости функции фитнеса к линейной в окрестности родителей. Многокритериальность реализована при помощи механизма «бессмертных особей»: особи, имеющие наилучшее значение по частному критерию, исключаются из механизма естественного отбора.

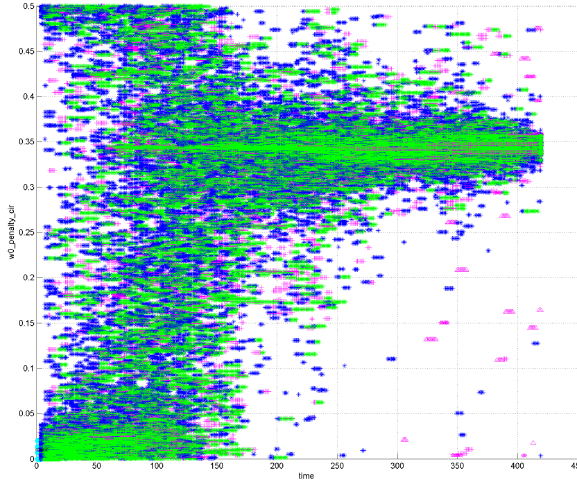


Рис. 1: Концентрация параметра  $w0\_penalty\_cir$  вблизи локального минимума с течением поколений генетического алгоритма

Генетическая процедура позволила подобрать параметры, улучшающие работу алгоритмов восстановления: было уменьшено среднее квадратическое отклонение восстановленной траектории от истинной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00410).

1. *Иванов А.Г., Федотов А.А.* Алгоритм многогипотезного восстановления траектории воздушного судна // Материалы XXX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. СПб. АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. С. 247–253.
2. *Bar-Shalom Y., Li X.R., Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software. New York: John Wiley & Sons, 2004.

# Формирование плоского изделия в условиях связанной теории термовязкоупругости

Н. А. Беляева

Сыктывкар, Сыктывкарский государственный университет

e-mail: belyayevana@mail.ru

В работе рассматривается математическая модель формирования плоского изделия в процессе отверждения (полимеризации) материала при наличии неоднородного температурного поля. Проводимые исследования развивают результаты работы [1], являются продолжением исследований по рассматриваемой тематике, выполненных ранее в условиях несвязанной теории термовязкоупругости [2–4].

Уравнение баланса тепла запишем в виде:

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } T\right) = \text{div}\left(\chi \cdot \text{grad } T\right) + \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + Q_n \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (1)$$

$c$  — теплоемкость среды,  $\chi$  — теплопроводность,  $Q_n$  — тепловой эффект полимеризации — будем считать эти параметры постоянными;  $\rho$  — переменная плотность материала (Лемма 1).

**Теорема 1.** *Предположим, что в уравнении (1) выполняются условия: а) целевые функции — температура  $T$ , скорость  $\vec{V}$ , глубина полимеризации  $\alpha$  — зависят от одной пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ , то есть*

$$T = T(x, t), \quad \vec{V} = (V(x, t), 0, 0), \quad \alpha = \alpha(x, t), \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad t \geq 0;$$

б) тензор напряжений  $\sigma'_{ik}$  определяется на основе стандартной линейной модели вязкоупругого тела — последовательное соединение среды Гюка и Кельвина. Тогда процесс отверждения описывается системой уравнений:

$$\frac{c\rho_0}{1 + \epsilon(x, t)} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{\eta} + Q_n \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = k_0 \exp[-U/RT] (1 - \alpha) (\epsilon_0 + \alpha), \quad (3)$$

$$\sigma(x, t) = E \left[ \epsilon(x, t) - \int_0^t (\lambda - \mu) \epsilon(x, \tau) \exp(-\lambda(t - \tau)) d\tau \right], \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\eta} \sigma \quad (5)$$

с начальными и граничными условиями:

$$t = 0 : T(x, 0) = T^0, \alpha(x, 0) = 0, \sigma(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq x_0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} - h_0 (T - T^s) |_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} + h_1 (T - T^s) |_{x=x_0} = 0. \quad (7)$$

В теореме 1 уравнение (3) есть кинетическое уравнение относительно глубины превращения  $\alpha$ ;  $k_0, U, R, \epsilon_0$  – константы [2, 3]. Вследствие предположений теоремы тензор напряжений имеет одну ненулевую компоненту  $\sigma_{xx} \equiv \sigma$  – выполняется уравнение (5); уравнение (4) устанавливает зависимость между вязкоупругим напряжением  $\sigma(x, t)$  и деформацией  $\epsilon(x, t)$  в соответствии с принятой моделью вязкоупругого тела. Ниже следующая лемма 1 объясняет множитель левой части уравнения (2).

**Лемма 1.** Пусть  $\rho_0$  – начальная плотность материала, тогда в условиях теоремы 1 плотность в точке  $x$  в момент времени  $t$  определяется формулой:

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{1 + \epsilon(x, t)}. \quad (8)$$

Система (1)–(7) обезразмеривается, строится алгоритм и программа численного анализа задачи. Проводится широкий численный эксперимент при варьировании параметров задачи.

1. *Беляева Н.А.* Неизотермическая модель деформирования вязкоупругого материала // Тезисы международной конференции Математика в приложениях, 04 августа 2019 – 10 августа 2019. Новосибирск. Издательско-полиграфический центр НГУ, 2019. С. 96.
2. *Беляева Н.А.* Деформирование вязкоупругих структурированных систем: монография. Lap Lambert Academic Publishing GmbH Co. KG, Germany. 2011. 200 с.
3. *Беляева Н.А., Довжно Е.С.* Напряженное состояние фронтально формируемого сферического изделия // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 123–134.
4. Отчет о научно-исследовательской работе в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы по теме: «Нелинейные модели и методы механики», шифр «2010–1.1–112–024–024», № 02.740.11.0618 (итоговый, этап № 6). Наименование этапа: «Отчетный». М.: ВНИИЦ, 2012. Инв. № 02301297038. 46 с.

# Моделирование автоматической многоканальной системы кодирования цифровой информации

М. С. Беспалов, М. К. Малкова

*Владимир. ВлГУ*

e-mail: bespalov@vlsu.ru, malkova-xeni@yandexlr.ru

В [1] предложен следующий метод кодирования числовой информации с помощью линейных перестановок дискретных преобразований Уолша. Для фиксированного  $n$  формируется булева матрица  $C$  размера  $n \times 2^n$ , в столбцах которой в обратном лексикографическом порядке расположены все неотрицательные  $n$ -разрядные числа в двоичной системе счисления. В качестве закрытого ключа выбирается произвольная невырожденная булева матрица  $K$  порядка  $n$ , которую назовем кодовой матрицей. По формуле  $A = C^T K C$  вычисляется булева матрица порядка  $N = 2^n$ , в которой производим перекодировку элементов:  $1 \mapsto -1$ ,  $0 \mapsto 1$ . Получим матрицу  $V$  некоторой линейной перестановки дискретного преобразования Уолша. Кодирование цифрового сигнала  $x \in \mathbb{R}^N$  проводится стандартным методом  $y = V \cdot x$ , а декодирование —  $x = V^{-1} \cdot y$ .

Данная конструкция позволяет организовать систему перенастраиваемых передающих и принимающих устройств для передачи шифрованной информации по открытым каналам связи. Кодовое слово, определяющее кодовую матрицу, выбирает любая из сторон и передает по закрытому каналу связи. Есть возможность заранее установить правила перехода к новой кодовой матрице, что затруднит криптоанализ.

Авторами создана автоматическая система быстрого алгоритма кодирования цифровых сигналов. Так как квадрат любой симметричной матрицы  $V$  равен единичной матрице, умноженной на  $N$ , то применение этой процедуры для произвольных сигналов увеличивает объем информации. Выделен класс сигналов допускающих сжатие информации. Имеется еще несколько ноу-хау повышающих криптостойкость и способствующие сжатию информации.

1. *Беспалов М.С.* Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша // Проблемы передачи информации. 2010. Т. 46. № 3. С. 60–79.

# Приближенные методы определения динамических характеристик информационно-измерительных систем

И. В. Бойков, Н. П. Кривулин

Пенза, Пензенский государственный университет

e-mail: i.v.boykov@gmail.com, krivulin@bk.ru

Рассматриваются методы приближенного восстановления импульсных характеристик нестационарных динамических систем, описываемых уравнениями вида

$$\int_0^t g(t, \tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad (1)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  – входной и выходной сигналы системы.  $g(t, \tau)$  – импульсная характеристика системы, требующая определения.

Пусть интегральное преобразование по первой переменной ядра  $g(t, \tau)$  уравнения (1) удовлетворяет условиям:

1. В случае преобразования Лапласа:

$$G(p, \tau) = \sum_{k=1}^N \hat{G}_k(p)e^{-\tau q_k(p)}. \quad (2)$$

2. В случае преобразования Меллина:

$$G(p, \tau) = \sum_{k=1}^N \hat{G}_k(p)\tau^{q_k(p)-1}. \quad (3)$$

3. В случае преобразования Хартли:

$$G(p, \tau) = \sum_{k=1}^N \hat{G}_k(s)cas(2\pi q_k(p)\tau), \quad cas(t) = \cos(t) + \sin(t). \quad (4)$$

В монографии [1] показано, что при выполнении условий (2)–(4), соответствующее интегральное преобразование уравнения (1), имеет вид:

$$\sum_{k=1}^N \hat{G}_k(p)X(q_k(p)) = Y(p),$$



где  $\hat{G}_k(p), q_k(p), k = 1, 2, \dots, N$ , – аналитические в соответствующих областях плоскости комплексной переменной неизвестные функции.

Искомые функции  $\hat{G}_k(p), q_k(p), k = 1, 2, \dots, N$ , определяются по серии из  $2N$  линейно независимых входных  $x_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ , и соответствующих выходных  $y_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ , сигналов динамической системы (1). Обработка интегральных преобразований этих сигналов приводит к системе, состоящей из  $2N$  нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^N \hat{G}_k(p) X_i(q_k(p)) = Y_i(p), \quad i = 1, 2, \dots, 2N, \quad (5)$$

где  $X_i(p), i = 1, 2, \dots, N$ , и  $Y_i(p), i = 1, 2, \dots, N$ , соответствующие интегральные преобразования (Лапласа, Меллина, Хартли) входных  $x_i(t)$  и выходных  $y_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ , сигналов.

Из полученной системы (5) определяются искомые функции  $\hat{G}_k(p), q_k(p), k = 1, 2, \dots, N$ .

Функция  $g(t, \tau)$  – импульсная характеристика нестационарной динамической системы (1) восстанавливается соответствующим обратным интегральным преобразованием (Лапласа, Меллина, Хартли).

В работе [1] приведены примеры иллюстрирующие изложенный метод (используется преобразование Лапласа).

Данный метод применим для коррекции информационно-измерительных систем при решении задачи восстановления входных сигналов вихретоковых преобразователей перемещения при термоударных воздействиях [2], при исследовании пьезодатчиков динамического давления [3] и при решении ряда других технических проблем.

1. *Бойков И. В., Кривулин Н. П.* Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза: Изд-во ПГУ, 2016.
2. *Бойков И. В., Кривулин Н. П., Абрамов С. В., Маланин В. П., Кикот В. В.* Восстановление входных сигналов вихретоковых преобразователей перемещения при термоударных воздействиях // Измерительная техника. 2018. № 11. С. 61–67.
3. *Бойков И. В., Щербачков М. А., Кривулин Н. П., Кикот В. В., Маланин В. П.* К вопросу о синтезе математических моделей пьезоэлектрических датчиков акустического давления // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2017. № 1. С. 106–108.

# Компьютерная схема анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений

С. Г. Буланов

Таганрог, Ростовский государственный экономический университет

e-mail: bulanovtgp@mail.ru

Представлены способы анализа устойчивости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, ориентированные на компьютерную реализацию.

Рассматривается задача Коши для линейной однородной системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (1)$$

Предполагается, что для (1) выполнены все условия существования и единственности решения в области  $R : \{ t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta, \delta > 0 \}$ , функции  $a_{ij}(t)$   $i, j = \overline{1, n}$  определены и непрерывно дифференцируемы в  $R$ .

**Теорема 1.** *Для того чтобы решение задачи (1) было устойчиво, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \leq \tilde{c} = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty). \quad (2)$$

*Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (2) и, кроме того, выполняется соотношение*

$$\left\| \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \rightarrow 0.$$

В случае нелинейной добавки  $F(t, Y)$  в правую часть (1) для устойчивости решения необходимо и достаточно чтобы было устойчиво решение задачи (1) и выполнялось неравенство

$$\left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0) \right\| \leq \tilde{\varepsilon} \quad \forall t \in [t_0, \infty). \quad (3)$$

Для асимптотической устойчивости решения линейной системы с нелинейной добавкой необходимо и достаточно, чтобы было асимптотически устойчиво решение задачи (1), выполнялось неравенство (3) и следующее соотношение

$$\left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0) \right\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Компьютерное моделирование критериев устойчивости (2), (3) корректно обосновано и влечет достоверные практические оценки устойчивости исследуемой системы [1, 2].

При некоторых условиях ограниченность  $Y(t)$  может определяться знаком компонентов  $Y'_t = A(t)Y$ , а  $Y'_t$  — знаком компонентов  $Y''_t = (A'(t) + A^2(t))Y$ . Покомпонентное сопоставление знаков решения, первой и второй производных решения приводит к достаточным условиям устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости задачи (1).

**Теорема 2.** Если  $\exists \Delta > 0$ , такое, что  $\forall Y(0) : 0 < \|Y(0)\| \leq \Delta, \forall k \in \overline{1, n}$  верны неравенства  $y_k(t) \geq 0, y'_k(t) \leq 0, y''_k(t) \geq 0$  или  $y_k(t) \leq 0, y'_k(t) \geq 0, y''_k(t) \leq 0 \forall t \in [0, \infty)$ , то решение задачи (1) устойчиво.

**Теорема 3.** Если  $\exists \Delta_1 > 0, \Delta_1 \leq \Delta$ , такое, что  $\forall Y(0) : 0 < \|Y(0)\| \leq \Delta_1, \forall k \in \overline{1, n}$  верны неравенства  $y_k(t) \geq 0, y'_k(t) < 0, y''_k(t) \geq 0$  или  $y_k(t) \leq 0, y'_k(t) > 0, y''_k(t) \leq 0 \forall t \in [0, \infty)$ , то решение задачи (1) асимптотически устойчиво.

**Теорема 4.** Если для задачи (1)  $\forall \Delta_1 > 0 \exists Y(t) : 0 < \|Y(0)\| \leq \Delta_1, \exists k \in \overline{1, n}, \exists t_0 > 0$ , такие, что неравенства  $y_k(t) \geq 0, y'_k(t) > 0$  или  $y_k(t) \leq 0, y'_k(t) < 0$  верны  $\forall t \in [t_0, \infty)$ , то решение задачи (1) неустойчиво.

1. Буланов С.Г. Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 9. С. 542–549.
2. Ромм Я.Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. 2015. Т. 51. № 3. С. 107–124.

# Визуализация трехмерного множества достижимости для машины Дубинса

П. А. Васёв, А. А. Федотов

Екатеринбург, Институт математики и механики  
им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: pavel.vasev@gmail.com, andreyfedotov@mail.ru

Разработан графический инструмент для исследования множеств достижимости модели движения, известной как машина Дубинса.

Динамика машины Дубинса на плоскости  $x, y$  описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad u_2 = 1, \quad u_1 \in [-1, 1).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $x, y$  – координаты геометрического положения объекта;  $\varphi$  – угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от оси  $x$ ;  $u$  – скалярное управление;  $u_1$  – параметр задачи. Величина линейной скорости равна единице. Предполагается, что  $\varphi \in (-\infty, \infty)$ .

Множеством достижимости  $G(t_f)$  в момент  $t_f$  называем совокупность всех точек трёхмерного фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в силу системы (1) в момент  $t_f$  из заданного начального состояния при помощи некоторого допустимого управления. В качестве допустимых управлений принимаем кусочно-постоянные функции времени со значениями из отрезка  $[u_1, u_2]$ .

В зависимости от параметра  $u_1$  различают четыре случая [1–3]:  $u_1 = -1$  (симметричный случай);  $u_1 \in (-1, 0)$  (несимметричный случай);  $u_1 = 0$  (случай одностороннего поворота);  $u_1 \in (0, 1)$  (случай строго одностороннего поворота).

Получаемые для данных случаев трёхмерные множества достижимости имеют весьма нетривиальную структуру. Множество в целом не является выпуклым и может быть неодносвязным. Его граница составляется из кусков гладких поверхностей, не всегда гладко стыкуемых друг с другом. В работах [1–3] получено описание таких гладких кусков.

Для исследования множеств достижимости разработан специальный инструмент визуализации (рис. 1). Это программа для веб-браузера, отображающая трехмерную графику с помощью технологии WebGL. Входом для программы служит набор файлов заданного формата с предвари-

тельно рассчитанными координатами элементов множества достижимости. Файлы загружаются и обрабатываются в браузере. Пользователь задаёт интересующий его момент времени, программа выбирает подходящий файл множества достижимости и отображает его на экране.

Разработан и запрограммирован набор преобразований визуального представления для повышения качества восприятия: масштабирование по осям, отсечения, серия слоёв, подкраска сечений. Пользователь с помощью интерфейса программы может интерактивно добавлять и комбинировать эти преобразования, формируя таким образом итоговый алгоритм визуального представления.

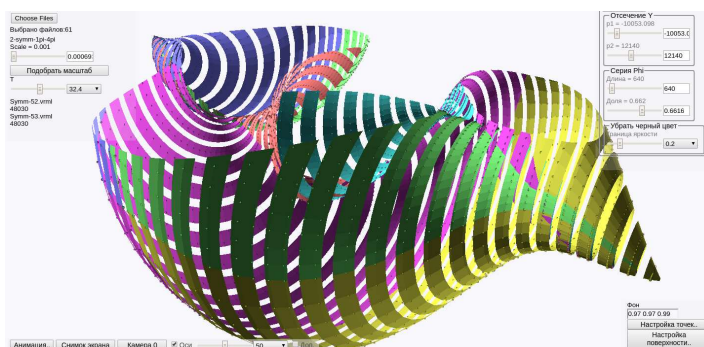


Рис. 1: Визуальный образ множества достижимости с добавленными преобразованиями – отсечение по оси  $y$  и серия слоёв по оси  $\varphi$

Реализована возможность сохранения анимации развития множества достижимости во времени, а также по другим параметрам его визуального представления. Программа визуализации множеств достижимости доступна в среде Интернет по адресу <http://viewlang.ru/dubins/>.

1. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
2. Patsko V. S., Fedotov A. A. Investigation of reachable set at instant for the Dubins' car // Proceedings of the 58th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. Tel-Aviv & Haifa, 2018. Pp. 1655–1669.
3. Patsko V. S., Fedotov A. A. Reachable set for Dubins car and its application to observation problem with incomplete information // Proceedings of 27th Mediterranean Conference on Control and Automation. Akko, Israel, 2019. Pp. 483–488.

# Обобщенная математическая модель Буссинеска. Вырожденная нелинейная полугруппа

К. В. Васючкова, Н. А. Манакова, Г. А. Свиридюк

Челябинск, Южно-Уральский государственный университет  
e-mail: vasiuchkovakv@susu.ru, manakovana@susu.ru, sviridiukga@susu.ru

Целью работы является исследование задачи стартового регулирования для математической модели фильтрации, которая базируется на обобщенном уравнении Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)u_t = \Delta(|u|^{p-2}u), \quad p \geq 2, \quad (1)$$

с условием Дирихле

$$u(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2)$$

и условием Шоултера–Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(u(s, 0) - u_0) = 0. \quad (3)$$

В рассматриваемом уравнении искомая функция  $u = u(s, t)$  отвечает потенциалу скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости; параметры  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  характеризуют среду, причем параметр  $\lambda$  может принимать отрицательные значения. Уравнение (1) является частным случаем уравнения, полученного в работе [1] Е.С. Дзекпером и относится к классу уравнений соболевского типа.

Положим  $\mathcal{H} = W_2^{-1}(\Omega)$ ,  $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$ ,  $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$  (все функциональные пространства определены на области  $\Omega$ ), причем  $\mathfrak{B}^* = (L_p(\Omega))^*$  и  $\mathfrak{H}^* = (L_2(\Omega))^*$ . Определим в  $\mathcal{H}$  скалярное произведение формулой

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x\tilde{y}ds \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

где  $\tilde{y}$  – обобщенное решение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа  $(-\Delta)$  в области  $\Omega$ . Операторы  $L$  и  $M$  определим следующим образом:

$$\langle Lu, v \rangle = \int_{\Omega} (\lambda u\tilde{v} + uv)ds, \quad u, v \in \mathfrak{H}; \quad \langle M(u), v \rangle = - \int_{\Omega} |u|^{p-2}uvds, \quad u, v \in \mathfrak{B}.$$

Построим множества

$$\text{coim } L = \begin{cases} \mathfrak{H}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{u \in \mathfrak{H} : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{u \in \mathfrak{B} : \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi_1 ds = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Обозначим через  $\{\varphi_k\}$  последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа  $(-\Delta)$  в области  $\Omega$ , а через  $\{\lambda_k\}$  – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

**Определение 1.** Вектор-функцию  $u \in C^k((0, T); \mathfrak{B})$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , назовем *решением уравнения (1)*, если она при некотором  $T \in \mathbb{R}_+$  удовлетворяет ему.

**Теорема 1.** Пусть  $p \geq \frac{2n}{n+2}$ ,  $\lambda \geq -\lambda_1$ . Тогда  $\forall u_0 \in \mathfrak{M}$  существует единственное решение  $u \in C^k((0, +\infty); \mathfrak{M})$  задачи (1) – (3).

**Определение 2.** Отображение  $U^\bullet \in C^k((0, +\infty); C(\mathcal{H}))$  называется полугруппой операторов, если

$$U^{t+s}(u) = U^t(U^s(u)) \quad \forall s, t > 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Определим оператор сдвига  $U^t(u_0) \equiv u(t)$ , где  $u(t)$  – решение задачи (1) – (3). Тогда  $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  образует нелинейную полугруппу операторов с областью определения  $D(U) = \mathfrak{M}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $p \geq \frac{2n}{n+2}$ ,  $\lambda \geq -\lambda_1$ . Тогда существует вырожденная разрешающая полугруппа операторов  $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  уравнения (1), определенная на многообразии  $\mathfrak{M}$ .

1. Джеккер Е. С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 5. С. 1031–1033.
2. Sviridyuk G. A. On the general theory of operator semigroups // Russian Mathematical Surveys. 1994. Vol. 49. № 4. P. 45–74.

# Неединственность решений задачи Шоуолтера–Сидорова для одной математической модели распространения нервного импульса в мембране

О. В. Гаврилова, Н. А. Манакова, Г. А. Свиридюк

*Челябинск, Южно-Уральский государственный университет*  
e-mail: gavrilovaov@susu.ru, manakovana@susu.ru, sviridiukga@susu.ru

Важной частью развития современной биофизики является исследование математических моделей процессов в живой природе. Такие процессы как свертывание крови, распространение нервного импульса, сокращение сердечной мышцы могут быть смоделированы с помощью систем уравнений Фитц Хью – Нагумо

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 v_{ss} + \beta_1 w - \kappa_1 v, \\ 0 = \alpha_2 w_{ss} + \beta_2 w - \kappa_2 v - w^3, \end{cases} \quad v = v(s, t), w = w(s, t), \quad (1)$$

где  $w = w(s, t)$  – функция, описывающая динамику мембранного потенциала,  $v = v(s, t)$  – медленная восстанавливающая функция, связанная с ионными токами,  $\beta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}_+$  – фиксированные параметры, характеризующие свойства и проводимость среды. Необходимость изучения вырожденной системы уравнений (1) связана с тем, что скорость изменения одной из компонент системы (1) может значительно превосходить другую. Фазовое пространство системы уравнений (1) содержит особенности типа сборки Уитни, что приводит к неединственности решений. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с гладкой границей класса  $C^\infty$ . Рассмотрим однородную задачу Дирихле для оператора  $(-\Delta)$  в области  $\Omega$ . Обозначим через  $\varphi$  собственную функцию отвечающую первому простому собственному значению  $\nu_1$ . В цилиндре  $Q = \Omega \times \mathbb{R}_+$  рассмотрим систему уравнений (1) с граничными условиями

$$v(s, t) = 0, w(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

и начальным условием

$$v(0) = v_0. \quad (3)$$

Положим  $\mathfrak{H}_i = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$  и определим пространство  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ . Построим множество  $\mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{H} : -\langle v, \eta \rangle = \left\langle -\frac{\beta_2}{\kappa_2} w + \frac{1}{\kappa_2} w^3, \eta \right\rangle + \right.$



$\left\langle \frac{\alpha_2}{\kappa_2} w_{s_i}, \eta_{s_i} \right\rangle \}$  и отметим, что все решения системы уравнений (1), удовлетворяющие граничным условиям (2) будут лежать в этом множестве.

Рассмотрим случай  $\beta_2 = \alpha_2 \nu_1$ , положим  $\mathfrak{H}_1^\perp = \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1 : \langle v^\perp, \varphi \rangle = 0\}$ ,  $\mathfrak{H}_2^\perp = \{w^\perp \in \mathfrak{H}_2 : \langle w^\perp, \varphi \rangle = 0\}$ . Если  $v \in \mathfrak{H}_1$  и  $w \in \mathfrak{H}_2$  представить в виде  $v = v^\perp + r\varphi$ , то множество  $\mathfrak{M}$  приобретает следующий вид:

$$\mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{H} : \begin{cases} -v^\perp = -\frac{\beta_2}{\kappa_2} w^\perp - \frac{\alpha_2}{\kappa_2} \Delta w^\perp + \frac{1}{\kappa_2} \int_{\Omega} (w^\perp + q\varphi)^3 \varphi ds, \\ -\kappa_2 r = \int_{\Omega} (w^\perp + q\varphi)^3 \varphi ds, \end{cases} \right\}. \quad (4)$$

По  $v_0^\perp$  и  $r_0$  построим  $w_0^\perp$  и  $q_0$ . Положим  $v_0 = v_0^\perp + r_0\varphi$  и  $w_0 = w_0^\perp + q_0\varphi$ , тогда  $u_0 = (v_0, w_0) \in \mathfrak{M}$ . Второе соотношение (4) представим в виде:

$$q^3 \|\varphi\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3q^2 \int_{\Omega} w^\perp \varphi^3 ds + 3q \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi^2 ds + \int_{\Omega} \varphi (w^\perp)^3 ds + \kappa_2 r = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) является кубическим уравнение общего вида  $aq^3 + bq^2 + cq^2 + d = 0$  относительно  $q$ . Согласно формулам Кардано, любое кубическое уравнение общего вида при помощи замены  $q = y - \frac{b}{3a}$  может быть приведено к канонической форме  $y^3 + py + e = 0$  с коэффициентами

$$a = \|\varphi\|_{L_4(\Omega)}^4, \quad b = 3 \int_{\Omega} w^\perp \varphi^3 ds, \quad c = 3 \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi^2 ds, \quad d = \int_{\Omega} \varphi (w^\perp)^3 ds - \kappa_2 r,$$

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad e = \frac{1}{2} \left( \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right), \quad Q = p^3 + e^2.$$

**Теорема 2.** [1] Для любых  $u_0 = (v_0, w_0) \in \mathfrak{H}$ ,  $n \leq 4$ ,  $\alpha_2, \kappa_2 \in \mathbb{R}_+$  и (i)  $\beta_2 \in (0, \alpha_2 \nu_1)$ , тогда существует единственное решение задачи (1) – (3);

(ii)  $\beta_2 = \alpha_2 \nu_1$ ,  $Q > 0$ , тогда существует единственное решение задачи (1) – (3);

(iii)  $\beta_2 = \alpha_2 \nu_1$ ,  $Q = 0$  и выполняется условие  $q^2 \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4 + 2q \int_{\Omega} w^\perp \varphi_1^3 ds + \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds = 0$ , тогда существует два решения задачи (1) – (3);

(iv)  $\beta_2 = \alpha_2 \nu_1$ ,  $Q < 0$ , тогда существует три решения задачи (1) – (3).

1. Manakova N.A., Gavrilova O.V. About nonuniqueness of solutions of the Showalter–Sidorov problem for one mathematical model of nerve impulse spread in membrane // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2018. Т. 11. № 4. С. 161–168.

# О режиме синхронизации в системе двух маятников

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Москва, Московский авиационный институт

e-mail: sglad51@mail.ru, sonjaf@list.ru

В настоящем сообщении приводятся результаты исследования системы двух маятников, движущихся в параллельных плоскостях, но имеющих различную высоту подвеса (рис. 1). В предыдущих авторских рабо-

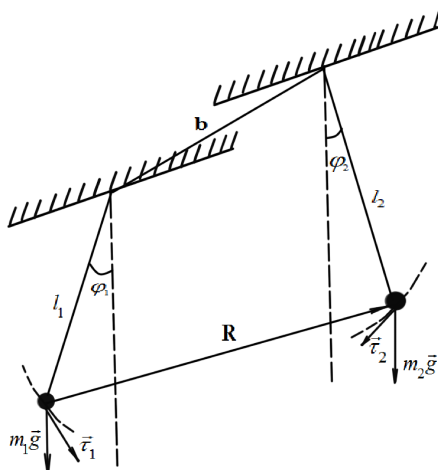


Рис. 1: Маятник с массой  $m_2$  находится выше маятника с массой  $m_1$ , при этом оба маятника колеблются в параллельных плоскостях

тах [1–6] был подробно описан механизм синхронизации в системах, состоящих из двух и более маятников. При этом были рассмотрены случаи, когда маятники колеблются как в одной плоскости, так и в параллельных плоскостях. В настоящем сообщении мы продолжим исследование в этом же направлении, но в отличие от предшествующих работ, рассмотрим немного иную ситуацию, которую можно проиллюстрировать с помощью рис. 1. В основу математического описания динамического поведения системы, представленной на рис. 1, будет заложен тот же физиче-

ский принцип, что и в работах [1–6], основная идея которого основана на электромагнитной природе явления синхронизации. Основная роль при этом отводится двум физическим факторам: 1) энергии электромагнитного взаимодействия, существующего между металлическими шарами

$$U_{EM} = - \frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_e^2 V^2 l_{1c} l_{2c} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{c^2 b} \xi$$

и 2) электромагнитному излучению, проявляющему себя именно в условиях криволинейности траектории движения. Мощность этого излучения можно представить в приближенном виде, как

$$W = \frac{9enVl)^2}{2c^3} (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4) \approx \frac{(enVl)^2}{2c^3} \dot{\varphi}^4.$$

Условие  $|\dot{\varphi}_{1,2}| \ll |\dot{\varphi}_{1,2}^2|$  подтверждается численным расчетом. Используя подход, предложенный в работе [7], будем использовать уравнение сохранения полной мощности системы, а именно

$$\sum \dot{E} + \sum \dot{Q} + \sum W = 0, \tag{1}$$

где  $E$  — полная энергия системы,  $\dot{Q}$  — диссипативная функция,  $W$  — мощность излучений. В пренебрежении диссипативными силами с помощью (1) получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1'' + \sin \varphi_1 - \lambda_1 (\varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \kappa_1 \varphi_1'^3 = 0, \\ \varphi_2'' + \sin \varphi_2 - \lambda_2 (\varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \kappa_2 \varphi_2'^3 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\kappa_1, \kappa_2$  вполне конкретные физические параметры, связанные с маятниками, а дифференцирование ведется по безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$ . Численное решение уравнений (2) для любых начальных условий позволяет описать эволюционное поведение системы, показанной на рис. 1 и доказать принципиальную возможность синхронизации маятников, то есть выполнение условий  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$  и  $\varphi_1 = \varphi_2 + const$ , задолго до момента остановки системы из-за диссипативных сил, что и иллюстрируют рис. 2 и 3.

Единственная стационарная точка системы (2)  $\varphi_{st1,2} = 0$  является асимптотически устойчивой, а потому динамика колеблющихся маятников такова, что переход от хаоса к синхронному поведению вблизи стационарной точки наступит задолго до момента «скатывания» в начало координат.

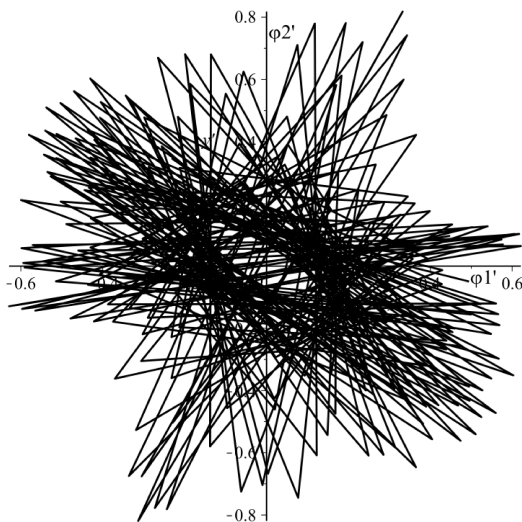


Рис. 2: Зависимость  $\varphi_2'(\varphi_1')$  демонстрирует хаос при  $\tau \in [500, 1000]$ . Значения параметров  $\lambda_1 = 10^{-2}$ ,  $\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\kappa_1 = 10^{-3}$ ,  $\kappa_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ . Начальные условия выбраны в виде  $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{6}$ ,  $\varphi_2(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ .

1. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Хаотическая динамика взаимодействующих маятников (решение проблемы синхронизации) // Инженерная физика. 2019. № 1. С. 49–62.
2. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Теория детерминированного хаоса в системе  $N$  взаимодействующих компланарных маятников // Инженерная физика. 2019. № 3. С. 9–21.
3. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* К теории синхронизации // Материалы 11 Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи», 27 мая – 10 июня 2019. Самара. Самарский государственный технический университет, 2019. С. 242–246.
4. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* К теории детерминированного хаоса // Материалы 5 Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук», 26–29 сентября 2019. Орел. Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, 2019. С. 23–30.
5. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* О возможности синхронного колебания в динамических системах // Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и

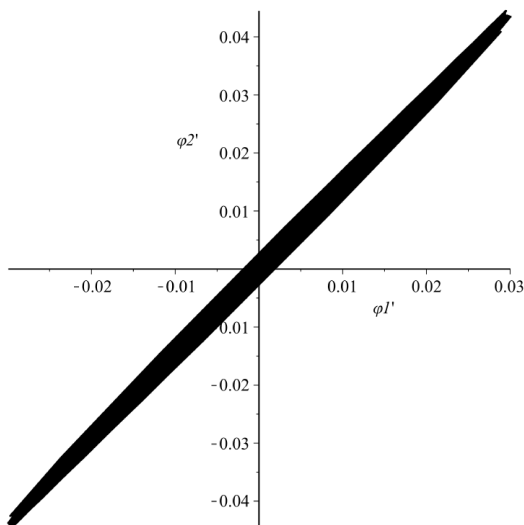


Рис. 3: Зависимость  $\varphi_2'(\varphi_1')$  показывает режим синхронизации при  $\tau \in [739900, 740000]$ . Значения параметров и начальные условия такие же.

механики», 26–29 сентября 2019. Воронеж. Научно-исследовательские публикации, 2019. С. 60–66.

6. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории синхронизации  $N$  взаимодействующих маятников, колеблющихся в параллельных плоскостях // Дальневосточный математический журнал. 2020. № 1. (В печати).
7. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // Журнал технической физики. 2018. Т. 59. № 3. С. 377–341.

# О поправках к уравнению Навье–Стокса

С. О. Гладков, Зо Аунг

Москва, Московский Авиационный Институт  
e-mail: sglad51@mail.ru, shwehtikeaung1993@gmail.com

Задача, о которой пойдет речь в настоящем сообщении относится к общим проблемам классической гидродинамики. Ответ на нее мы не обнаружили ни в одной из множества монографий, посвященных описанию гидродинамических потоков жидкостей и газов [1–5].

Речь идет о вычислении дополнительной поправки к правой части уравнения Навье–Стокса в виде аддитивных слагаемых по числу Кнудсена, стандартно определяемого как  $Kn = \frac{l}{L}$ , где  $l$  — длина свободного пробега молекул жидкости или газа,  $L$  — линейный размер тела.

Наш интерес к этому вопросу продиктован вполне закономерным любопытством. Он связан с тем, что в последнее время довольно модными объектами исследования стали наночастицы, размер которых лежит в диапазоне  $10^{-4} - 10^{-6} \text{cm}$ . Если речь идет о подобного рода линейных размерах, то классическими формулами, типа формулы Стокса для шара, воспользоваться довольно проблематично, поскольку в этом случае длина свободного пробега молекул оказывается сравнимой с линейным размером наночастицы. Именно в этой связи и был поставлен вопрос о том, как вычислить поправку к силе Стокса в виде некоторой функции от числа Кнудсена.

Для ответа на этот вопрос можно воспользоваться хорошо проверенным, как теорией, так и практикой, методом классического кинетического уравнения Больцмана (см., к примеру, [6–8]). Благодаря такому подходу приведен подробный вывод уравнения Навье–Стокса с учетом всех дополнительных слагаемых с точностью до членов порядка  $\tau_p^3$  по времени релаксации  $\tau_p$ , где  $\mathbf{p}$  импульс молекулы. Соответствующие довольно громоздкие вычисления позволяют получить ответ на поставленный вопрос, и вычислить дополнительное слагаемое в правой части уравнения Навье–Стокса, которое будет представлять собой бигармонический оператор, входящий в уравнение со знаком минус.

Как строго аналитически показывается, это слагаемое позволяет вычислить соответствующие поправки по числу Кнудсена  $Kn = \frac{l}{2R}$ , например, к силе Стокса [9–11].

1. *Прандтль Л., Титъенс О.* Гидро- и аэромеханика. М.: ГИТТЛ, 1935.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947.
3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматлит, 1963.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
6. *Gladkov S. O.* The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave // Solid State Communications. 1995. Vol. 94. № 9. P. 789–791.
7. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
8. *Резибуа П., де Лернер М.* Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980.
9. *Гладков С. О.* О доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса // Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61. № 6. С. 103–105.
10. *Гладков С. О.* О конвективном движении газа в цилиндрическом объеме // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. № 12. С. 71–75.
11. *Гладков С. О.* К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // ЖТФ. 2018. Т. 59. № 3. С. 377–381.

## Метод масок получения рекуррентной формулы для пятидиагональных определителей Теплица

**В. И. Данченко, Д. Я. Данченко**

*Владимир, Владимирский государственный университет*  
e-mail: vdanch2012@yandex.ru

В заметке предлагается рекуррентная формула для пятидиагональных определителей Теплица с постоянными диагоналями ( $n$  — порядок

определителя)

$$T_n = \begin{vmatrix} \omega & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \omega & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \omega & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \omega & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \omega & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

**Теорема.** При  $m = 1, 2, \dots$  справедлива рекуррентная формула

$$K_0 T_m + K_1 T_{m+1} + K_2 T_{m+2} + K_3 T_{m+3} + K_4 T_{m+4} + K_5 T_{m+5} + T_{m+6} = 0, \quad (1)$$

где

$$K_0 = \alpha_1^3 \alpha_4^3, \quad K_1 = -\omega \alpha_1^2 \alpha_4^2, \quad K_2 = \alpha_1 \alpha_4 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4), \\ K_3 = -\alpha_1 \alpha_3^2 + 2 \alpha_1 \alpha_4 \omega - \alpha_4 \alpha_2^2, \quad K_4 = \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4, \quad K_5 = -\omega.$$

**Замечание.** Применяемым ниже методом масок можно показать, что для 7-диагональных матриц Тёплица рекуррентное соотношение должно содержать не менее 20 слагаемых, так что уже в этом случае сколь угодно обобщимые формулы получить затруднительно.

В известных авторам работах в [1–3] рассматривались разложения пятидиагональных определителей с непостоянными диагоналями. Они основаны на весьма громоздких компьютерных расчетах, понижающих порядок определителей, но рекуррентные формулы в замкнутой форме (т.е. содержащие только главные миноры) из них не получаются.

Доказательство проведем последовательным разложением определителя  $T_n$  по строкам. На первом шаге, разложив  $T_n$  по первой строке, получим комбинацию трех миноров порядка  $n - 1$ , на втором шаге, разложив каждый из полученных миноров по первой строке, получим сумму девяти миноров порядка  $n - 2$ , на третьем шаге аналогично получается сумма 27 миноров, и т.д. Для обозримого вычисления важно заметить, что на каждом шаге полученное разложение представляет собой комбинацию не более шести различных миноров, не имеющих нулевых столбцов. Эти миноры однозначно соответствуют главным своим минорам  $M^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , третьего порядка, находящимся в верхних левых углах. Будем называть их *масками*. На первом шаге маски  $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}$  имеют



вид:

$$\begin{bmatrix} \omega & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \omega & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \omega \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \omega & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 & \omega \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_2 & \omega & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & \omega \end{bmatrix}$$

На последующих шагах  $m \geq 2$  первые три маски  $M^{(k)}$  имеют тот же вид и еще три маски имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & \omega & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 & \omega \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_1 & \omega & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & \omega \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}.$$

Соответствующие маскам  $M^{(k)}$  миноры порядка  $m$  в текущих разложениях обозначим через  $T_m^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, 6$ . В частности,  $T_m^{(1)} = \det T_m$ . В основе доказательства формулы (1) лежит следующая таблица разложений:

$$T_n = T_n^{(1)} = \omega T_{n-1}^{(1)} - \alpha_3 T_{n-1}^{(2)} + \alpha_4 T_{n-1}^{(3)};$$

$$T_n^{(2)} = \alpha_2 T_{n-1}^{(1)} - \alpha_3 T_{n-1}^{(4)} + \alpha_4 T_{n-1}^{(5)}; \quad T_n^{(3)} = \alpha_2 T_{n-1}^{(2)} - \omega T_{n-1}^{(4)} + \alpha_4 T_{n-1}^{(6)};$$

$$T_n^{(4)} = \alpha_1 T_{n-1}^{(1)}; \quad T_n^{(5)} = \alpha_1 T_{n-1}^{(2)}; \quad T_n^{(6)} = \alpha_1 T_{n-1}^{(4)}.$$

По этой таблице формула (1) проверяется за 6 шагов последовательным понижением порядков определителей, начиная с  $T_{m+6}$  и до  $T_m$ .

1. *Miklosko T.* A recursive computation of the determinant of a pentadiagonal matrix // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1975. Vol. 1 (2). P. 73–78.
2. *Filipiak K., Markiewicz A., Sawikowska A.* Determinants of multidagonal matrices // *Electronic Journal of Linear Algebra*. 2012. Vol. 25. P. 102–118.
3. *Montaner J.M., Alfaro M.* On five-diagonal Toeplitz matrices and orthogonal polynomials on the unit circle // *Numerical Algorithms*. 1995. Vol. 10. P. 137–153.

# Устойчивое решение задачи линейного программирования с приближенной целевой функцией и расширенной матрицей коэффициентов

В. И. Ерохин, В. П. Сугак, А. П. Кадочников

*Санкт-Петербург, Военно-космическая академия имени  
А.Ф. Можайского*

Для решения широкого круга прикладных научно-технических задач необходимо получать устойчивые решения приближённых задач линейного программирования (ЛП).

Рассмотрим пару взаимно двойственных задач ЛП вида

$$L(A, b, c) : Ax = b, x \geq 0, c^T x \rightarrow \max,$$

$$L^*(A, b, c) : u^T A \geq c^T, u^T b \rightarrow \min,$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;  $x, c \in \mathbb{R}^n$ ;  $u, b \in \mathbb{R}^m$ . Матрицу  $A$ , векторы  $x, u, b, c$  будем считать *приближёнными*. Предположим, что существует матрица  $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , векторы  $x_0, c_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_0, b_0 \in \mathbb{R}^m$ , которые будем называть *точными*. Задачи  $L(A_0, b_0, c_0)$  и  $L^*(A_0, b_0, c_0)$  являются собственными, векторы  $x_0$  и  $u_0$  являются их нормальными решениями, и выполняются условия  $\|A - A_0\| \leq \mu$ ,  $\|b - b_0\| \leq \delta_b$ ,  $\|c - c_0\| \leq \delta_c$ , где  $\mu, \delta_b, \delta_c > 0$  – некоторые известные константы, символом  $\|\cdot\|$  обозначена евклидова матричная и векторная норма. Обозначим символами  $\mathcal{X}(A, b, c)$  и  $\mathcal{U}(A, b, c)$  множества решений задач  $L(A, b, c)$  и  $L^*(A, b, c)$ . Известно, что решения указанных задач могут существенно отличаться от  $x_0, u_0$  или вообще отсутствовать, т.е., соответствующие задачи могут быть *несобственными* (см., например, [1–5]).

Для преодоления указанных трудностей в работе рассмотрена задача

$$Z(A, b, c, \mu, \delta_b, \delta_c) : \begin{cases} \text{Найти} \\ x, h_c \in \mathbb{R}^n, u, h_b \in \mathbb{R}^m, H \in \mathbb{R}^{m \times n}, \\ \text{такие, что } \|x\|^2 + \|u\|^2 \rightarrow \min, \\ x \in \mathcal{X}(A + H, b + h_b, c + h_c), \\ u \in \mathcal{U}(A + H, b + h_b, c + h_c), \\ \|H\| \leq \mu, \|h_b\| \leq \delta_b, \|h_c\| \leq \delta_c. \end{cases}$$

Указанная задача является обобщением подхода, предложенного А.Н. Тихоновым для получения устойчивых решений приближённых систем линейных алгебраических уравнений [6]. Рассматриваются методы

решения указанной задачи, основу которых составляют результаты работ [7, 8].

1. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М: Наука, 1981.
2. *Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М: Наука, 1983.
3. *Агаян Г.М., Рютин А.А., Тихонов А.Н.* О задаче линейного программирования с приближенными данными // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1984. Т. 24. № 9. С. 1303–1311.
4. *Васильев Ф.П., Иванецкий А.Ю., Морозов В.А.* Метод поточечной невязки для решения некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38. № 7. С. 1140–1152.
5. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В.* Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. М.: ВЦ РАН, 2006.
6. *Тихонов А.Н.* О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373–1383.
7. *Ерохин В.И.* Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 587–601.
8. *Волков В.В., Ерохин В.И., Красников А.С. и др.* Минимальная по евклидовой норме матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2017. Т. 57. № 11. С. 1788–1803.

## Численное решение многоточечной начально-конечной задачи для линейной системы уравнений Навье–Стокса

С. А. Загребина, А. С. Конкина

г. Челябинск, ЮУрГУ

e-mail: zagrebinasa@susu.ru, konkinaas@susu.ru

Система уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u + \nabla p, \nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

с условием Дирихле

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \quad (2)$$

моделирует динамику простейшей вязкой несжимаемой жидкости. Здесь  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $u_i = u_i(x, t)$ ,  $n = 2, 3$  – вектор-функция, отвечающая скорости жидкости; скалярная функция  $p = p(x, t)$  соответствует давлению жидкости; параметры  $\varkappa \in \mathbb{R}$  и  $\nu \in \mathbb{R}_+$  характеризует вязкость жидкости соответственно. Здесь приводится метод Галеркина для системы Навье-Стокса в случае осесимметричной области с многоточечным начально-конечным условием [1].

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0, n}, \quad (3)$$

Следуя работе Э.Н. Лоренца, будем считать систему (1) инвариантной относительно сдвига вдоль одной из горизонтальных координат, т.е. считаем величины  $u_i = u_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $p = p(x, t)$  неменяющимися вдоль координаты  $x_2$ , а величину  $u_2(x, t)$  считаем постоянной. В этом случае уравнение несжимаемости  $\nabla \cdot u = 0$  приобретает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (4)$$

что позволит нам ввести функцию тока, определенную с точностью до аддитивной постоянной уравнениями:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -u_3, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = u_1. \quad (5)$$

Заменим обозначения координат  $x_1$  и  $x_3$  более стандартными  $x_1 = x$  и  $x_3 = z$  и преобразуем систему (1) к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_1 + \nabla p, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_2 + \nabla p, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_3 + \nabla p. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x_3} = \nu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) - \nabla p, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x_1} = \nu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right) + \nabla p. \end{cases}$$

$$\nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\nu \nabla^4 \Psi, \quad (6)$$

Для уравнения (6) в прямоугольнике  $[0, L] \times [0, H]$  поставим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Psi(x, 0, t) = \Psi(x, H, t), \\ \Psi(0, z, t) = \Psi(L, z, t), \\ \nabla^2 \Psi(0, z, t) = \nabla^2 \Psi(L, z, t). \end{cases}$$

Все нетривиальные решения задачи можно разбить на три семейства:

$$\begin{cases} \alpha_{lk} = \left\{ \sin \frac{\pi l}{H} z \cdot \sin \frac{2\pi k}{L} x \right\}, \quad l, k \in \mathbb{N}, \\ \beta_{lk} = \left\{ \sin \frac{\pi l}{H} z \cdot \cos \frac{2\pi k}{L} x \right\}, \quad l, k \in \mathbb{N}, \\ \gamma_l = \left\{ \sin \frac{\pi l}{H} z \right\}, \quad l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Галеркинское приближение возьмем в виде  $\Psi = X(t)\alpha_{11}$ .

$$\pi^2 \left( \frac{1}{H^2} + \frac{4}{L^2} \right) \dot{X} \alpha_{11} = -\nu \pi^4 \left( \frac{1}{H^2} + \frac{4}{L^2} \right)^2 X \alpha_{11}. \quad (7)$$

Сразу получаем:

$$\dot{X} = -aX, \quad (8)$$

где

$$a = \nu \pi^2 \left( \frac{1}{H^2} + \frac{4}{L^2} \right), \quad (9)$$

1. *Konkina A.S.* Numerical solution of a linear system of Navier – Stokes equations in an axisymmetric domain // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2019. Vol. 6. No. 3. Pp. 69-75.

## Численное решение задачи оптимального управления в модели ионно-звуковых волн в плазме

**А. А. Замышляева, О. Н. Цыпленкова**

*Челябинск, Южно-Уральский государственный университет*

e-mail: zamyshliaeva@mail.ru, tcyplenkovaon@susu.ru

В цилиндре  $\Omega \times \mathbb{R}$  рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)x_{tttt}(s, t) = (\Delta - \lambda')x_{tt}(s, t) + \alpha \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial s_3^2} + u(s, t), \quad s \in \Omega, t \in [0, \tau], \quad (1)$$

с граничным условием

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times [0, \tau]. \quad (2)$$

Здесь  $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c) \subset \mathbb{R}^3$ . Уравнение (1) описывает ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле [1], [2]. Функция  $x(s, t)$  представляет обобщенный потенциал электрического поля,  $u(s, t)$  – внешнее воздействие, константы в уравнении связывают между собой ионную гидрочастоту, радиус Дебая и частоту Ленгмюра.

В подходящих гильбертовых пространствах  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{U}$  задачу (1), (2) удается редуцировать к операторно-дифференциальному уравнению соболевского типа

$$Ax^{(n)} = B_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + B_0x + y + Cu, \quad (3)$$

где операторы  $A, B_{n-1}, \dots, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$ , функции  $u : [0, \tau] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{U}$ ,  $y : [0, \tau] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{Y}$  ( $\tau < \infty$ ).

Рассмотрим условие Шоултера – Сидорова

$$P \left( x^{(m)}(0) - x_m \right) = 0, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad (4)$$

где  $P$  – некоторый спектральный проектор в пространстве  $\mathfrak{X}$ . Таким образом задача оптимального управления заключается в отыскании пары  $(\hat{x}, \hat{u})$ , где  $\hat{x}$  – решение задачи (3), (4), а  $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$  – управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}} J(x, u).$$

Здесь  $J(x, u)$  – функционал качества,  $\mathfrak{U}_{ad}$  – замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений  $\mathfrak{U}$ .

Ранее было доказано [3] существование и единственность сильного решения и оптимального управления задачи (3), (4). В данной работе на основе этих результатов предложен алгоритм нахождения оптимального управления решениями задачи Шоултера–Сидорова для рассматриваемой модели. Условия Шоултера–Сидорова являются обобщением условий Коши [4]. В работе [5] предложен численный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа первого порядка.

1. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

2. *Zamyshlyayeva A. A., Muravyev A. S.* Computational experiment for one mathematical model of ion-acoustic waves // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2015. Vol. 8. No. 2. P. 127–132.
3. *Zamyshlyayeva A. A., Tsyplenkova O. N.* Optimal control of solutions to the Showalter–Sidorov problem in a model of linear waves in plasma // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2018. Vol. 5. No. 4. P. 46–57.
4. *Zagrebinina S. A.* On the Showalter–Sidorov problem // News of Higher Schools. Mathematics. 2007. No. 3. P. 22–28.
5. *Keller A. V.* The algorithm for solution of the Showalter–Sidorov problem for Leontief type models // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2011. Vol. 7. No. 4 (221). P. 40–46.

## Математическая оптимизационная модель подчинительной войны между двумя государствами

**В. К. Захаров**

*г. Москва, МГУ*

e-mail: zakharov\_valeriy@list.ru

На основе созданной автором ранее оптимизационной математической модели конкуренции двух государств [1–4] строится более сложная оптимизационная математическая модель военного нападательно-подчинительного взаимодействия двух государств в пользу одного из них. Далее используются обозначения и сведения из статьи [1]. Рассматриваются государства  $S$  и  $S(I)$ . Каждое государство является сложным трёхуровневым системным обществом, устроенным в виде совокупности основных (под)систем, связанных друг с другом в единую систему и зависящих друг от друга так, что без каждой из этих систем государство существовать не может. Основными системами государства являются *содержательная*  $C$ , *обеспечительная*  $D$ , *учётная*  $E$ , *содержательно-распорядительная*  $F$ , *обеспечительно-распорядительная*  $G$ , *учётно-распорядительная*  $H$  и *верховная система*  $P$ . Для государства  $S(I)$  все соответствующие признаки снабжены римской цифрой  $I$  в круглых скобках.

Для системы уравнений для государства  $S$  рассмотрим первичную совокупность  $\sigma$  всех  $S$ -внутренних управлений  $r$ ,  $B_{EC_b}^{55}$ ,  $B_{ED}^{55}$ ,  $B_{EE}^{55}$ ,  $B_{EF}^{55}$ ,  $B_{EG}^{55}$ ,  $B_{EH}^{55}$ ,  $B_{EP}^{55}$ , заданных как функции от момента времени  $t$  на промежутке времени  $[t_0, T]$ .

Для системы уравнений для государства  $S(I)$  рассмотрим первичную совокупность  $\sigma(I)$  всех  $S(I)$ -внутренних управлений  $r(I)$ ,  $B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)}$ ,  $B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)}$ ,  $B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)}$ ,  $B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)}$ ,  $B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)}$ ,  $B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)}$ ,  $B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)}$ ,  $s(I)$ , заданных как функции от момента времени  $t$  на промежутке времени  $[t_0, T]$ .

Для систем уравнений для государств  $S$  и  $S(I)$  рассмотрим вторичную совокупность  $\tau(I)$  всех  $S(I)$ -нападательных управлений  $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$ ,  $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$ , состоящую из нападательных потоков, заданных как функции от момента времени  $t$  на промежутке времени  $[t_0, T]$ . Совокупное одностороннее управление  $(\sigma(I), \tau(I))$  назовём *нападательным управлением в системе уравнений для государства  $S(I)$  на промежутке времени  $[t_0, T]$* . Совокупное одностороннее управление  $(\sigma, \tau(I))$  назовём *оборонительным управлением в системе уравнений для государства  $S$  на промежутке времени  $[t_0, T]$* . Совокупное двустороннее управление  $(\sigma, \sigma(I), \tau(I))$  назовём *военным управлением в системах уравнений для государств  $S$  и  $S(I)$  на промежутке времени  $[t_0, T]$* .

Рассмотрим *совокупное достояние*  $W_{S(I)}(T, \sigma(I), \tau(I)) = (W_{C(I)}^{1(I)} + W_{D(I)}^{4(I)} + W_{E(I)}^{5(I)} + W_{F(I)}^{2(I)} + W_{G(I)}^{2(I)} + W_{H(I)}^{2(I)} + W_{P(I)}^{3(I)})(T)$  государства  $S(I)$  в момент времени  $T$  при нападательном управлении  $(\sigma(I), \tau(I))$  на промежутке времени  $[t_0, T]$ .

Рассмотрим *совокупное достояние*  $W_S(T, \sigma, \tau(I)) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(T)$  государства  $S$  в момент времени  $T$  при оборонительном управлении  $(\sigma, \tau(I))$  на промежутке времени  $[t_0, T]$ .

Рассмотрим *начальное совокупное достояние*  $W_S(t_0) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(t_0)$  государства  $S$  в момент времени  $t_0$  и *начальное совокупное достояние*  $W_{S(I)}(t_0) = (W_{C(I)}^{1(I)} + W_{D(I)}^{4(I)} + W_{E(I)}^{5(I)} + W_{F(I)}^{2(I)} + W_{G(I)}^{2(I)} + W_{H(I)}^{2(I)} + W_{P(I)}^{3(I)})(t_0)$  государства  $S(I)$  в момент времени  $t_0$ . Рассмотрим начальное число  $\Psi(t_0) = W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0)$ .

Для двустороннего управления  $(\sigma, \sigma(I), \tau(I))$  рассмотрим *целевой функционал*

$$\Psi(T, \sigma(I), \tau(I)) = W_{S(I)}(T, \sigma(I), \tau(I)) - \sup(W_S(T, \sigma, \tau(I)) | \sigma \in \Sigma_S)$$

**абсолютного расхождения** совокупного достояния государства  $S(I)$  к моменту времени  $T$  при нападательном управлении  $(\sigma(I), \tau(I))$  от



носителем превосходственного (супремального) совокупного достояния государства  $S$  к моменту времени  $T$  по всем возможным внутренним управлениям  $\sigma$ , входящим в оборонительные управления  $(\sigma, \tau(I))$ . Здесь через  $\Sigma_S$  обозначено множество всех возможных внутренних управлений для государства  $S$ .

Взаимодействие государств  $S$  и  $S(I)$  при нападательном управлении  $(\sigma(I), \tau(I))$  в системах уравнений для государств  $S$  и  $S(I)$  назовём *нападательным взаимодействием* и обозначим через  $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I))$ .

Нападательное взаимодействие  $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I))$  назовём  *$(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительным* (для государства  $S$  с числовыми уровнями подчинения  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ ), если выполнены два неравенства:

1.  $\Psi(T, \sigma(I), \tau(I)) \geq \alpha \Psi(t_0)$  (итоговое расхождение);
2.  $W_{S(I)}(T, \sigma(I), \tau(I)) \geq \beta W_{S(I)}(t_0)$  (итоговое обогащение).

Функции  $g^{(1)}, g^{(4)}, h^{(1)}, h^{(4)}$  от момента времени  $t$  и числа  $\alpha$  и  $\beta$  считаются входными (наперёд задаваемыми) параметрами этого взаимодействия. Военное  $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительное взаимодействие государств  $S$  и  $S(I)$   $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I))$  обозначим через  $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I), \alpha, \beta)$ .

Нападательное  $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительное взаимодействие называется *оптимальным на промежутке времени  $[t_0, T]$  относительно выбранного целевого функционала  $\Psi(T, \sigma(I), \tau(I))$* , если для любого другого нападательного  $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительного взаимодействия выполнено неравенство  $\Psi(T, \sigma^*(I), \tau^*(I)) \geq \Psi(T, \sigma(I), \tau(I))$ . Задачу на нахождение оптимального нападательного  $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительного взаимодействия  $A(S, S(I), \sigma^*(I), \tau^*(I), \alpha, \beta)$  государств  $S$  и  $S(I)$  можно записать в виде  $\Psi(T, \sigma(I), \tau(I)) \rightarrow \max$ .

1. *Захаров В. К.* Оптимизационные математические модели конкуренции двух государств // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019 (17–29 сентября 2019 г.). Симферополь: Полипринт, 2019. С. 260–263.
2. *Захаров В. К.* Математические модели мирного и военного подчинительных взаимодействий двух государств // 26-ая межд. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (28 января–02 февраля 2019 г.). Тезисы. Пущино: Пущинский центр биолог. исслед. РАН, 2019. С. 238.
3. *Захаров В. К.* Оптимизационная математическая модель военного подчинительного взаимодействия двух государств // Вестник РАЕН. 2019. Т. 19. № 2. С. 69–73.
4. *Zakharov V. K.* Dynamic optimization mathematical model of the military subordinating interaction of two states // Vibroengineering Procedia. 2019. Vol. 25. P. 143–150.

# Численное моделирование диффузии имплантированной примеси в кремниевой структуре при наносекундном лазерном отжиге

Г. М. Заяц

*г. Минск, Институт математики НАН Беларуси*

e-mail: zayats@im.bas-net.by

А. Ф. Комаров

*г. Минск, Институт прикладных физических проблем*

*им. А. Н. Севченко БГУ*

e-mail: KomarAF@bsu.by

Работа посвящена численному исследованию отжига имплантированных ионами кремниевых слоев лазерными наносекундными импульсами. Лазерное облучение, приводящее к рекристаллизации кремния и значительному перераспределению примесей в имплантированном слое, в последнее время находит широкое практическое применение при создании солнечных батарей средней полосы, фотоэлектрических элементов, кремниевых ИК-детекторов и др.

Моделирование нагрева, плавления и кристаллизации кремниевой подложки при воздействии на ее поверхность наносекундного лазерного импульса основано на решении задачи Стефана без явного выделения межфазной границы для одномерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} & \rho(T) (C(T) + L\delta(T - T_m)) \frac{\partial T}{\partial t} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \alpha(T, x) (1 - R(x_r)) q(t) I(x) \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad T(x, t)|_{x=+\infty} = T_0; \quad T(x, t)|_{t=0} = T_0, \quad (2)$$

где  $T(x, t)$  – температура,  $x$  – пространственная координата,  $t$  – текущий момент времени,  $\rho(T)$  – плотность,  $C(T)$  – удельная теплоемкость,  $L$  – скрытая теплота плавления,  $\delta(T - T_m)$  –  $\delta$ -функция,  $T_m$  – температура плавления,  $k(T)$  – коэффициент теплопроводности. Последнее слагаемое в правой части уравнения (1) представляет собой источник тепла вслед-

ствии поглощенной мощности лазерного излучения, где  $\alpha(T, x)$  – коэффициент поглощения,  $R(x_r)$  – коэффициент поверхностного отражения,  $x_r = x_r(t)$  – граница раздела твердой и жидкой фаз,  $q(t)$  – плотность потока лазерного излучения,  $I(x)$  – относительная интенсивность. Плотность потока лазерного излучения во времени моделируем импульсом Гаусса.

Эволюция профиля концентрации примеси при лазерном плавлении и затвердевании моделируется диффузионными уравнениями с учетом рассчитанного в задаче (1)–(2) фронта кристаллизации  $x_r(t)$  и фактора сегрегации примеси  $k_s$ , приводящего к нарушению непрерывности распределения концентрации частиц на границе раздела фаз и оттеснению примеси фронтом кристаллизации к поверхности [1].

Уравнения диффузии примеси в жидкой ( $L$ ) и твердой ( $S$ ) фазах кремния имеют вид

$$\frac{\partial C_L}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C_L}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_r(t), \quad \frac{\partial C_S}{\partial t} = D_S \frac{\partial^2 C_S}{\partial x^2}, \quad x_r(t) < x < l, \quad (3)$$

с граничными и начальными условиями

$$D_L \left. \frac{\partial C_L}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad C_S|_{x=l} = 0; \quad C_0 = C_{impl}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

(граница  $l$  выбирается достаточно большой, чтобы граничное условие было справедливым) и условиями сопряжения на движущемся фронте кристаллизации  $x = x_r(t)$

$$D_L \left. \frac{\partial C_L}{\partial x} \right|_{x=x_r(t)} = D_S \left. \frac{\partial C_S}{\partial x} \right|_{x=x_r(t)}, \quad C_S|_{x=x_r(t)} = k_s C_L|_{x=x_r(t)}, \quad (5)$$

где  $C_S(x, t)$ ,  $D_S$  и  $C_L(x, t)$ ,  $D_L$  – концентрации и коэффициенты диффузии примеси в твердом и расплавленном кремнии.

На основе конечно-разностного метода разработан численный метод решения задачи (1)–(5). Проведено численное моделирование динамики перераспределения имплантированного селена в кремнии при импульсном лазерном нагреве с различными плотностями энергии лазера. Хорошее совпадение расчетных и экспериментальных профилей распределения селена в кремнии после лазерного отжига позволило определить коэффициент диффузии селена в твердой фазе при затвердевании.

1. Komarov F., Ivlev G., Zayats G., Komarov A., Nechayev N., Wendler E., Miskiewicz S. Experimental study and modeling of silicon supersaturated with selenium by ion implantation and nanosecond-laser melting // Acta Physica Polonica A. 2019. Vol. 136. № 2. P. 254–259.

# Выбор оптимальной по быстродействию математической модели колонны трубоукладчиков при укладке трубопровода

В. Н. Иванов, В. А. Шимановский

*Пермь, Пермский государственный национальный исследовательский университет*

e-mail: precol@psu.ru, vlshim@psu.ru

При проектировании новых образцов изделий машиностроения требуется проведение большого числа вычислительных экспериментов с целью подтверждения правильности выбранных конструктивных решений и определения технических характеристик в различных условиях эксплуатации. Время, затрачиваемое на организацию и проведение вычислительных экспериментов, оказывает существенное влияние на сроки проектирования. Поэтому задача выбора наилучшей по быстродействию математической модели технического изделия является актуальной.

В работе проводится анализ вычислительных затрат различных алгоритмов компьютерного моделирования динамики технических систем, расчётная схема которых представима в виде связки абсолютно твёрдых тел (СТТ). Выполнено сравнение этих алгоритмов по объёму арифметических операций (теоретическая оценка) и времени интегрирования (экспериментальная оценка).

Построены теоретические оценки зависимости числа операций с плавающей точкой (флопов), требуемых на каждом шаге численного интегрирования уравнений движения (УД), от количества тел в механической системе, её кинематической структуры и числа степеней свободы в шарнирах. В оценки включены затраты на вычисление кинематических характеристик, формирование УД в матричном виде и разрешения их относительно групп независимых переменных. Были выделены два основных параметра, характеризующих структуру графа СТТ и влияющих на вычислительную сложность алгоритмов. Один характеризует глубину графа, другой его ширину.

Рассматривались эффективность методов формирования УД СТТ в форме уравнений Ньютона-Эйлера, Лагранжа I и II рода [1]. Для их решения относительно обобщённых ускорений использовались методы прогонки,  $L^TDL$ -разложения и сопряжённых направлений [2, 3].

Практическая эффективность этих алгоритмов проверялась на примере задачи моделирования процесса укладки трубопровода колонной тру-

боукладчиков.

Каждый трубоукладчик моделировался системой абсолютно твёрдых тел (тягача, стрелы крана, противовеса, элементов подвески и блоков силовых приводов), соединённых различными типами шарниров, обеспечивающих возможность линейного и углового перемещения элементов конструкции в различных направлениях. Во всех шарнирах задавались упруго-демпфирующие силы и моменты. Труба моделировалась цепочкой твёрдых тел, соединённых четырёхстепенными поступательно-сферическими шарнирами. По каждой степени свободы задавались упруго-демпфирующие силы с приведёнными коэффициентами жёсткости и демпфирования. Взаимодействие трубы с трубоукладчиками и грунтом задавалась с помощью силовых шарниров. Такая конечно-элементная модель позволила учесть продольно-поперечные и крутильные колебания трубы как длинного тонкостенного упругого стержня, проходящего через большое количество опор.

Приводятся диаграммы зависимости вычислительных затрат для различных методов формирования УД в зависимости от числа трубоукладчиков, длины участка трубопровода и сложности модели отдельного трубоукладчика. Диаграммы наглядно демонстрируют преимущества того или иного подхода к решению практических задач. Проведённые численные расчёты подтверждают построенные теоретические оценки.

Полученные в работе формулы и диаграммы позволяют инженеру правильно ориентироваться в выборе лучшего подхода к компьютерному моделированию при проектировании новых технических устройств.

1. *Иванов В.Н., Домбровский И.В., Набоков Ф.В. и др.* Классификация моделей систем твердых тел, используемых в численных расчетах динамического поведения машиностроительных конструкций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 2. С. 139–155.
2. *Иванов В.Н., Шимановский В.А.* Применение итерационных методов для разрешения уравнений движения систем связанных твердых тел // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2008. № 4 (4). С. 109–116.
3. *Шимановский В.А.* Метод компьютерного моделирования динамики систем связанных твердых тел // Фундаментальные исследования. 2017. № 8. С. 104–109.

# Методы вычислительной топологии в задачах построения эффективных численных алгоритмов трехмерных областях

И. Р. Кадыров, С. П. Копысов

Ижевск, ФГБОУ ВО УдГУ

e-mail: slashesheek@email.com, s.kopysov@gmail.com

Главной задачей прикладной вычислительной топологии является создание и совершенствование методов вычисления топологических элементов, например, компонент связности, особых точек, нестягиваемых циклов, ручек и т.п. [1] Топологическими характеристиками называются характеристики тела, в общем случае описывающие явление его непрерывности. Одними из основных топологических характеристик являются числа Бетти, в общем случае характеризующие количество связных компонент тела и количество пустот в нём. Процесс вычисления чисел Бетти для произвольного тела является задачей нетривиальной и достаточно сложной.

В данной работе рассматривается алгоритм вычисления критических точек для триангулированных трехмерных областей на основе дискретных функций Морса [2] и графа Рибо [3] для построения разделения сеточной области на подобласти без ветвления внутренних границ [4] и их применение в численных алгоритмах.

Объемный граф Рибо  $R(V, E)$  формируется по триангулированной области, состоящей из 3-симплексов  $T$ . Изначально строится только один граф Рибо области  $T$  в одной координатной плоскости. На следующем шаге вычисляются значения функции уровня Морса  $F$  для всех 0-симплексов  $\sigma \in T$  области. Для всех  $\sigma$  по функции Морса  $F$  проверяется наличие особенностей топологии по «линкам», тем самым формируются вспомогательные и критические вершины [4]. Формируется граф Рибо  $R_1(V, E)$ . Далее область  $T$  делится на подобласти  $M_i$  относительно функции  $F$  с заданным шагом по другой координатной плоскости. По вспомогательным вершинам графа  $R_1(V, E)$  формируется слой  $l \in L$  и  $L \supseteq T$ , по значениям функции Морса  $F$ . Для всех  $l$  определяется особенность топологии. Формируется объемный граф Рибо  $R(V, E)$ .

Пример работы алгоритма построения объемного графа Рибо, изображен на рис. 1 и 2.

Исследуется применение разделение сеточной области без ветвления внутренних границ при построении эффективных параллельных конечно-

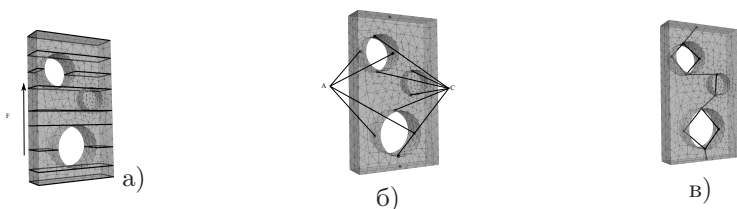


Рис. 1: Построение плоского граф Рибба: а)  $F$  функция Морса – линии уровня; б) критические  $c$ , вспомогательные  $a$ ; в) граф Рибба  $R(V, E)$ .

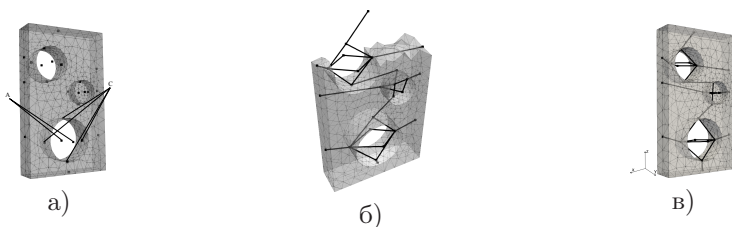


Рис. 2: Построение объемного граф Рибба  $R_V(V, E)$ : а) критические вершины по  $z$  и  $x$ ; б) граф слоя; в) граф Рибба для  $F(z)$  и  $F(x)$ .

элементных алгоритмов с локализацией доступа к памяти для неструктурированных стек, формировании грубых сеточных пространств при формировании предобуславливателей при решении систем уравнений итерационными методами, на этапе предобработки при генерации сеток из шестигранных ячеек в областях сложной геометрии.

1. *Базайкин Я.В., Тайманов И.А.* Об одном численном алгоритме вычисления топологических характеристик трехмерных тел // ЖВМиМФ. 2013. Т. 53. № 4. С. 523–530.
2. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965.
3. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
4. *Кадыров И.Р., Копысов С.П., Новиков А.К.* Разделение триангулированной многосвязной области на подобласти без ветвления внутренних границ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2018. Т. 160. № 3. С. 544–560.

# Воксельный генератор сеток из САД-моделей

А. С. Караваев, С. П. Копысов

*Ижевск, ФГБОУ ВО УдГУ*

e-mail: karavaev-alexander@yandex.ru, s.kopysov@gmail.com

Предварительным этапом в задаче генерации расчетной сетки является описание начальной геометрии. Поверхностное представление модели в виде набора поверхностей, составляющих ее границу, является основным для инженерных расчетов и широко применяется в существующих САД-системах.

Вместе с тем, для некоторых приложений, таких как биомоделирование, единственно возможным вариантом является применение воксельных данных, полученных из компьютерных томографов.

При построении геометрических моделей биологических тканей точное восстановление углов и граней модели не является столь критичным требованием. Сеточные генераторы в этом случае как правило обладают высокой производительностью, надежностью и основаны на попарном объединении вокселей декартовой сетки в шестигранные ячейки с дополнительным уточнением позиции узлов на границе.

Вместе с тем в настоящий момент не решена задача полностью автоматического построения шестигранной сетки заданного качества, обеспечивающая детальное описание границ произвольной САД-модели [1]. Отметим, что также разработано достаточное число алгоритмов каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками.

В настоящей работе рассматривается модификация ранее разработанного воксельного сеточного генератора для построения моделей, обеспечивающих построение шестигранной сетки для любого формата описания исходных данных [2].

Рассматриваемый подход относится к семейству методов на основе регулярной сетки [3] с комбинированным использованием как исходного поверхностного представления расчетной области, так и полученных из STL геометрии воксельных данных в формате «знакоопределенные поля расстояний».

Среди нового функционала можно выделить следующее:

— построение из исходной STL геометрии множества  $\Lambda$  так называемых «характеристических» ребер и узлов, позиции которых должны быть сохранены в результирующей шестигранной сетке  $\mathcal{T}$ . Множество  $\Lambda$  представляет собой «каркас» модели, сохраняющий все ее острые углы и гра-



ни.

— определение и отображение части граничных узлов сетки  $\mathcal{T}$  на множество  $\Lambda$  для обеспечения точного восстановления граничного контура модели. Процедура основана на последовательной проекции узлов  $\mathcal{T}$  на каждый элемент  $\Lambda$ . При этом выбираются наиболее подходящие узлы в соответствии с разработанными критериями приоритета, включающими анализ числа прилегающих шестигранников, значений мер качества граней и ячеек, расстояния до элементов множества  $\Lambda$ .

— реализация этапа удаления вывернутых ячеек сетки  $\mathcal{T}$ , образующихся вдоль ребер  $\Lambda$ . Рассматриваемая операция состоит из вставки дополнительного поверхностного слоя шестигранников вдоль «характеристических» ребер, а также перестроения вывернутых ячеек на четыре новых согласно шаблону описанному в [2].

Применение новых процедур позволяет генерировать однородную шестигранную сетку, детально описывающую исходную геометрию произвольной CAD-модели.

Алгоритмы протестированы на моделях различной степени сложности и намечены исследования расширения созданного функционала для генерации адаптивных шестигранных сеток.

1. *Pellering J. et al.* Identifying combinations of tetrahedra into hexahedra: a vertex based strategy. // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 203. Pp. 2–13.
2. *Schneiders R.* A grid-based algorithm for the generation of hexahedral element meshes // *Engineering with Computers*. 1996. № 12. Pp. 168–177.
3. *Караваяев А.С., Копысов С.П.* Метод построения неструктурированных шестигранных сеток из объемных данных // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2013. № 5. С. 11–24.

# Модель Баренблатта–Желтова–Кочиной в пространстве дифференциальных форм с «шумами»

О. Г. Китаева, Д. Е. Шафранов, Г. А. Свиридюк

Челябинск, Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

e-mail: kitaevaog@susu.ru, shafranovde@susu.ru, sviridiukga@susu.ru

Уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$(\lambda - \Delta)\dot{u} = \alpha\Delta u \quad (1)$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде. Параметры  $\alpha$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  характеризуют среду и свойства жидкости. Для изучения вопросов разрешимости и устойчивости стохастического уравнения (1) в пространствах дифференциальных форм на гладком римановом многообразии без края сведем его к уравнению соболевского типа

$$L \overset{\circ}{\eta} = M\eta, \quad (2)$$

где  $\eta = \eta(t)$  — искомый винеровский стохастический процесс, в частности «белый шум», а  $\overset{\circ}{\eta}$  — его производная Нельсона–Гликлиха [1]. Далее мы используем результаты для линейных уравнений соболевского типа [2] и стохастических линейных уравнений соболевского типа [3]. Здесь  $L$ ,  $M$  — линейные и непрерывные операторы, причем оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограниченный,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

Пусть  $\Omega_n$  — риманово компактное ориентированное связное  $n$ -мерное многообразие без края. Определим пространства гладких дифференциальных  $q$ -форм с коэффициентами являющихся стохастическими процессами

$$\begin{aligned} w(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{|i_1, i_2, \dots, i_q|=q} \chi_{i_1, i_2, \dots, i_q}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}, \end{aligned}$$

где  $|i_1, i_2, \dots, i_q|$  — мультииндекс, а коэффициенты  $\chi_{i_1, i_2, \dots, i_q}$  — стохастические  $\mathbf{K}$ -процессы имеющие вид

$$\chi_{i_1, i_2, \dots, i_q}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_{k, i_1, i_2, \dots, i_q}(t) \varphi_k.$$

При фиксированных  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  операторы  $L$ ,  $M$  определим формулами  $L = (\lambda + \Delta)$ ,  $M = -\alpha\Delta$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа–Бельтрами. Тогда уравнение (1) мы можем свести к задаче Коши

$$\eta(0) = \eta_0 \tag{3}$$

для уравнения (2) и получить следующие результаты

**Теорема 1.** При любых  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  существует решение  $\eta = \eta(t)$  задачи (2), (3), которое имеет вид

$$\eta(t) = \sum_{l=1}^{\infty} ' \left[ \exp\left(\frac{\alpha\nu_l}{\lambda - \nu_l} t\right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k(\varphi_k, \varphi_l)_2 \varphi_l \right) \right].$$

Здесь штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с индексами  $l$  такими, что  $\lambda = \nu_l$ .

**Теорема 2.** При любых  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_-$  существуют экспоненциальные дихотомии решений задачи (2), (3).

1. *Gliklikh Yu.E.* Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics. London–Dordrecht–Heidelberg–N.Y.: Springer, 2011.
2. *Свиридюк Г.А., Келлер А.В.* Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева // Изв. ВУЗ. Математика. 1997. № 5. С. 60–68.
3. *Sviridyuk G.A., Manakova N.A.* The dynamical models of Sobolev type with Showalter–Sidorov condition and additive «noise» // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. 2014. Vol. 7. No. 1. Pp. 90–103.
4. *Shafranov D.E., Kitaeva O.G.* The Barenblatt–Zheltov–Kochina model with the Showalter–Sidorov condition and additive “white noise” in spaces of differential forms on Riemannian manifolds without boundary // Global and Stochastic Analysis. 2018. Vol. 5. No. 2. Pp. 145–159.
5. *Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridiuk G.A.* Exponential dichotomies in the Barenblatt–Zheltov–Kochina model in spaces of differential forms with “noise” // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). 2019. Vol. 2. No. 12. Pp. 47–57.

# К вопросу об использовании электрического поля в системах с обратной связью для управления частотой колебаний гармонического осциллятора

М. А. Клочков

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: mike919@udmlink.ru

**Определение 1.** Пусть  $T$  — произвольный самосопряжённый оператор с простым спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  по закону  $Tu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, X_k \rangle X_k$ , где  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  — полная ортонормированная система элементов из  $H$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  — однократные собственные значения, образующие чисто точечный спектр  $\sigma_p(T)$  оператора  $T$ . Область определения такого оператора  $T$  имеет вид  $\mathcal{D}(T) = \left\{ u \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\langle u, X_k \rangle|^2 < \infty \right\}$ .

**Замечание 1.** Описание способа разложения по обобщённым собственным функциям для произвольного самосопряжённого оператора подробно изложено, например, в работе [1, с. 271]. Таким образом, обширный список различных разложений в ряды по системам ортогональных функций, например [2], [3], [5, с. 638], представляет перечень частных случаев разложений по обобщённым собственным функциям, получаемых применением спектральной теоремы [1, с. 251]. Также, вопросам расширения спектральной теории для неограниченных операторов в гильбертовом пространстве посвящена [4, гл. XII].

В работе Исламова Г.Г. [6] была поставлена и решена задача о построении возмущения минимального ранга  $K = -BQ$ , которое для динамической управляемой системы  $\dot{x} = Ax + Bu$  с линейной обратной связью  $u = Qx$  управляет заданным подмножеством  $\Omega$  собственных значений матрицы  $A$ , таким образом, что у класса матриц  $V = A - K$  в  $\Omega$  отсутствуют собственные значения. Полученные результаты были использованы Исламовым Г.Г. в работе [7] для исследования минимального ранга уже всех конечномерных операторов  $K$  изменяющих точечный спектр произвольного замкнутого оператора описанным выше способом. Для нормального компактного оператора, действующего в гильбертовом

пространстве, Исламову Г.Г. в работе [8] удалось показать основные свойства одноранговых возмущений.

Дальнейшее развитие подходов к решению задачи управления точечным спектром возмущениями минимального ранга получило в работах автора тезисов для некоторых классов дифференциальных операторов в случае простых и кратных собственных значений [9], исследована задача управления колебаниями струны [10] в случае формирования интенсивности внешнего воздействия по принципу обратной связи в виде однорангового оператора  $Ku = a \langle u, b \rangle$ , действующего из  $\mathcal{D}$  в  $L^2(0, \pi)$ . В авторской диссертации и работе [11] задача управления спектром и её решение сформулированы в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество  $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_m}\}$  изолированных собственных значений оператора  $T$  в произвольно заданное множество  $\Theta = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ ,  $\kappa_i \neq \kappa_j$  при  $i \neq j$ ,  $\Theta \cap \Omega = \emptyset$ , с помощью однорангового возмущения вида  $Ku = a \langle u, b \rangle$  необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а)  $\nu_j \beta_j = 0$  для индексов  $j \notin \Lambda = \{k_1, \dots, k_m\}$ ;

б)  $\nu_{k_i} \beta_{k_i} = \frac{P(\lambda_{k_i})}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , где  $P(\lambda) = \prod_{j=1}^m (\lambda - \kappa_j)$ .

**Замечание 2.** Из данной теоремы следует, что существует описание конструктивного способа сдвига собственных значений, составляющих подмножество  $\Omega$  возмущаемого оператора, во множество  $\Theta$ . Кратность собственных значений из  $\Omega$  и  $\Theta$  равна единице. Вполне возможно сдвинуть  $\Omega$  в нулевую точку кратности  $m$ , что и неявно показал в своих работах Исламов Г.Г.

В рамках физической интерпретации построенной математической модели управления точечным спектром предлагается использовать физическую модель гармонического осциллятора в электрическом поле, представляющую собой закрепленную с одного конца механическую пружину и с точечным зарядом  $q$  на свободном конце, размещенную между обкладок конденсатора. Таким образом, автор предлагает изменять напряжение на обкладках конденсатора по принципу обратной связи в форме однорангового возмущения, чтобы управлять частотой колебаний осциллятора.

**Замечание 3.** Обозначим через  $u = u(t)$  смещение материальной точки нашего гармонического осциллятора относительно её положения равновесия. В форме записи для однорангового возмущения  $Ku = a \langle u, b \rangle$ , где

$\langle u, b \rangle$  — скалярное произведение в сепарабельном гильбертовом пространстве, то есть некоторая константа, которая вычисляется по принципу обратной связи. В данной постановке задачи управления спектром даже нет необходимости знать текущее точное выражение или численное значение функции  $u$  в некоторые моменты времени, достаточно того факта, что обратная связь формируется по определенному закону, а погрешности можно компенсировать благодаря вариантам выбора элементов  $a$  и  $b$  однорангового возмущения  $K$ .

1. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теория операторов. Москва: Мир, 1983.
2. Плеснер А.И. Основные понятия спектральной теории эрмитовых операторов // УМН. 1946. Т. 1. Вып. 1 (11). С. 192–216.
3. Benzinger H.E. A canonical form for a class of ordinary differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 63. Pp. 281–286.
4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. В 3 томах. Т. 2. Спектральная теория. Москва: Мир, 1966.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
6. Исламов Г.Г. Об управлении спектром динамической системы // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1299–1302.
7. Исламов Г.Г. Экстремальные возмущения замкнутых операторов // Изв. вузов. Матем. 1989. № 1. С. 35–41.
8. Исламов Г.Г. Свойства одноранговых возмущений // Изв. вузов. Матем. 1989. № 4. С. 29–35.
9. Клочков М.А. Конструкции конечномерных возмущений // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2001. № 3. С. 59–64.
10. Клочков М.А. Управление колебаниями струны // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2002. № 1. С. 33–41.
11. Клочков М.А. Оценки нормы одноранговых возмущений // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2005. № 1. С. 75–90.

# Метод конечных элементов со сглаживанием производных в контактных задачах динамики деформируемых тел

С. П. Копысов, А. С. Караваев

*Ижевск, ФГБОУ ВО УдГУ*

e-mail: karavaev-alexander@yandex.ru, s.kopysov@gmail.com

Изучение динамических контактных задач деформируемых тел является актуальной задачей для тех отраслей науки и техники, где приходится иметь дело с ударными нагрузками, вызывающие структурные изменения материалов, контактные эффекты и распространение волн.

Для комплексного анализа таких явлений особенно важным является разработка и развитие численных методов, которые позволяют получить оценки для предельных случаев. Контактные напряжения являются одной из искомым функций в рассматриваемых задачах с односторонними связями и должны быть вычислены с высокой степенью точности.

Для решения задач динамического контактного воздействия нескольких тел в современной литературе предложены разнообразные подходы и методы, обзор которых можно найти в работах, основанных, в как правило, на методах декомпозиции области и методе перемещений при конечно-элементной постановке задачи теории упругости [1]. Известно, что в такой формулировке МКЭ матрица жесткости имеет завышенные оценки, и соответственно получаемые компоненты вектора перемещений меньше реальных значений.

При решении контактной задачи на поверхностях контакта тел дополнительно должны быть выполнены условия контактного взаимодействия как перемещениям, так и напряжениям.

В работе рассматривается сглаженный метод конечных элементов (SCFEM) [2], позволяющий повысить точность вычисления напряжений и скорость сходимости итерационного процесса решения контактной задачи, обеспечить возможности представления аппроксимации контактной границы «узел-узел» на нестыкующихся сетках деформируемых тел, получение верхних и нижних оценок энергии деформации.

В сглаженном по ячейкам методе МКЭ (CSFEM) использована существующая технология МКЭ совместно с вычислением сглаживанием производных функций формы (тензора деформации) применяемым в бессеточных методах. Отметим, что производная функции формы в явном виде не используется при вычисление градиентов для формирования мат-

риц жесткости МКЭ. Для определения области сглаживания выбираются элементы сеточной структуры: ячейки, узлы, ребра или грани конечных элементов. В CSFEM конечные элементы делятся на  $k$  ячеек, над которыми сглаживается совместимое поле деформации  $\bar{\varepsilon}_k$

$$\bar{\varepsilon}_k(x_C) = \int_{\Omega_k} \varepsilon^h(x) W_k(x - x_c) d\Omega = \int_{\Omega_k} L_d u^h(x) W_k(x - x_c) d\Omega,$$

где  $\varepsilon^h(x)$  — тензор деформации, обычно получаемый через производные вектора перемещений  $u^h$ ;  $L_d$  — матрица оператора производных;  $W_k(x - x_c)$  — сглаживающая функция принимающая значение  $1/V_k$  для всех точек  $x \in \Omega_k$  и ноль в противоположном случае. Используя формулы Грина, получим

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{V_k} \int_{\Gamma_k} L_n u^h(x) d\Gamma,$$

здесь  $L_n$  — матрица, содержащая компоненты единичных внешних нормалей к поверхности сглаживаемой области. На основе метода сглаживания тензора деформаций  $\bar{\varepsilon}$  строится слабая форма метода Галеркина с контактной границей.

Рассмотрены численные схемы сглаженного МКЭ и выполнено сравнение с МКЭ в перемещениях по точности, сходимости, эффективности при решении динамических контактных задачах. Показана возможность повышения точности изопараметрических шестигранных конечных элементов без использования дополнительных степеней свободы.

В качестве примера рассматривается напряженное состояние при ударном взаимодействии двух сфер, каждая из них имеет внутреннюю контактную границу, определяемую сферой меньшего диаметра. В недеформированном начальном состоянии одна из больших сфер покоится, а вторая движется с заданной скоростью. До столкновения контактные задачи рассматриваются для каждой пары большой и малой сфер, а в дальнейшем рассматриваются контактные эффекты и распространение волн с учетом взаимодействия сфер большего диаметра.

1. *Караваяев А.С., Копысов С.П.* Пошаговый контактный алгоритм на основе метода декомпозиции Шварца для деформируемых тел // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 3. С. 396–413.
2. *Liu G.R.* Mesh free methods: moving beyond the finite element method. Florida: CRS Press LLC, 2000.



## Тандем тонких профилей с проницаемыми участками на контурах

А. Я. Корнилов, Е. В. Васильева

г. Чебоксары, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет  
им. И.Н. Ульянова»

e-mail: korn-sasha@rambler.ru, lenok-vasilek@inbox.ru

В докладе представлены результаты ранее начатых исследований [1, 2]. Решена гидродинамическая задача обтекания тандема из двух тонких профилей потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости с проницаемыми участками на контурах.

Аналитически найдено решение поставленной задачи. Проведено исследование на существование и единственность решения в различных классах функций, в зависимости от особенностей на концах проницаемых участков. Проведен числовой эксперимент на основе аналитического решения и найдены оптимальные условия перфорации контуров тонких профилей.

1. *Корнилов А. Я., Васильева Е. В.* Конформное отображение плоскости с двумя исключенными параллельными отрезками на прямоугольник статьи // Сборник научных трудов «Математические модели и их приложения». Чебоксары: ФГОУ ВПО «Чуваш. гос. ун-т», 2005. С. 121–128.
2. *Kornilov A., Vasileva E.* Mathematical model and calculation of the working part of the power plant // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. 012181. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012181.

# Моделирование метаногенеза при изменении условий теплообмена с окружающей средой

**С. А. Королев,**

*Ижевск, ФГБОУ ВО Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова*

e-mail: stkj@mail.ru

**Д. В. Майков**

*Ижевск, БПОУ УР Ижевский торгово-экономический техникум*

e-mail: MaykovD@yandex.ru

Крупные животноводческие предприятия, например, птицефабрики, свинокомплексы и фермы крупного рогатого скота (КРС), производят большое количество отходов, загрязняющих окружающую среду. Данные отходы можно путем метаногенеза переработать в топливный газ (биогаз) и биоудобрения. Обычно метаногенез осуществляется в мезофильной (оптимальная температура ( $T_{opt}$ )  $37^{\circ}\text{C}$ , продолжительность 25 суток) и термофильной (оптимальная температура  $56^{\circ}\text{C}$ , продолжительность 12 суток) средах. Для описания процесса роста популяции метанообразующих бактерий используется следующая математическая модель [1]:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left( \frac{\mu_{mg}L}{a+L} - \frac{\mu_{md}b}{b+L} - u \right) \cdot X, \\ \frac{dL}{dt} = u \cdot (L_0 - L) - \frac{\beta\mu_{mg}LX}{a+L}, \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{q\gamma\mu_{mg}LX}{a+L}, \end{cases} \quad (1)$$

Переменными модели служат  $X$  — концентрация бактерий ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ),  $L$  — концентрация питательных веществ, усваиваемых бактериями,  $Q$  — общий выход биогаза ( $\text{МДж}/\text{сут.}$ ). Параметрами модели являются величины  $a$ ,  $b$ ,  $q = 23 \text{ МДж}/\text{м}^3$ ,  $u$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ . Параметры  $\mu_{mg}$  и  $\mu_{md}$  зависят от температуры субстрата  $T_c$ . В данной работе использовались следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \mu_{mg}(T_c) &= r_{mg} \exp\left(-\frac{(T_c - T_{opt})^2}{c_{mg}}\right), \\ \mu_{md}(T_c) &= 1 - (1 - r_{md}) \exp\left(-\frac{(T_c - T_{opt})^2}{c_{md}}\right), \end{aligned}$$

Алгоритм нахождения оценок параметров по экспериментальным данным описан в работе [2], эти оценки приведены в таблице.

Табл. Оценки значений параметров модели метаногенеза  
для мезофильной / термофильной сред

3.33pt=3.5pt

Коэффициент	Отходы птицефабрик	Отходы свинокомплексов	Отходы ферм КРС
$r_{mg}$	0,482 / 0,821	0,346 / 0,783	0,297 / 0,563
$c_{mg}$	113,595 / 73,231	76,995 / 62,211	60,197 / 48,932
$r_{md}$	0,353 / 0,528	0,291 / 0,423	0,254 / 0,351
$c_{md}$	76,590 / 23,729	26,596 / 20,777	22,089 / 17,020
$a$	34,781 / 43,875	7,242 / 21,653	5,013 / 8,733
$b$	116,457 / 14,674	37,347 / 9,278	18,722 / 5,455
$\beta$	2,344 / 3,189	1,495 / 2,084	1,413 / 1,983
$\gamma$	1,463 / 1,963	1,373 / 1,907	1,299 / 1,813

На величину полезного выхода биогаза существенное влияние оказывают тепловые потери биогазовой установки [3].

В результате численных исследований установлено, что для термофильного режима полезный выход биогаза практически вдвое выше, чем для мезофильного. Полезный выход биогаза выше для отходов птицефабрик, ниже для отходов ферм КРС. Доля тепловой энергии, потребляемой на собственные нужды биогазовой установки для мезофильного режима при использовании в качестве сырья отходов птицефабрик составила 10%, для отходов свинокомплексов – 14%, для отходов ферм КРС – 28%. Для термофильного режима эти доли равны 12%, 18% и 31% соответственно.

1. *Русяк И.Г., Королев С.А., Майков Д.В.* Исследование стационарных решений и оптимизация параметров математической модели метаногенеза // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3 (19). С. 15–21.
2. *Королев С.А., Майков Д.В.* Метод идентификации параметров модели метаногенеза в виде системы дифференциальных уравнений на основе генетического алгоритма // Интеллектуальные системы в производстве. 2012. № 1. С. 29–35.
3. *Королев С.А., Майков Д.В.* Влияние климатических условий на тепловой режим работы биогазовой установки // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2011. № 2 (50). С. 209–213.

# Слабое равновесии по Бержу в играх $N$ лиц

К. Н. Кудрявцев

Челябинск, Южно-Уральский государственный университет

e-mail: kudrkn@gmail.com

Альтруистическая концепция равновесия в бескоалиционных играх, названная равновесием по Бержу [1], обладает одним существенным недостатком. В играх нескольких (больше чем двух) лиц с конечным числом стратегий такое равновесие может не существовать даже в смешанных стратегиях [2]. Предлагаемая ниже концепция, в отличие от равновесия по Бержу, опирающегося на Золотое правило нравственности [3], основывается на клятве Гиппократа «Не навреди!»

Рассмотрим бескоалиционную игру трех лиц в нормальной форме

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  — множество порядковых номеров игроков; множество стратегий  $x_i$  у  $i$ -го игрока ( $i \in \mathbb{N}$ ) обозначено через  $X_i$ , где  $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ . В результате выбора игроками своих стратегий, складывается ситуация  $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ ). На множестве ситуаций  $X$  для каждого игрока  $i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) определена скалярная функция выигрыша  $f_i(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Значение  $f_i(x)$ , реализовавшееся на выбранной игроками ситуации  $x \in X$  называется выигрышем  $i$ -го игрока.

Партия игры  $\Gamma$  проходит следующим образом. Каждый игрок  $i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ), не вступая в коалицию с другими игроками, выбирает свою стратегию  $x_i \in X_i$ . В результате такого выбора, складывается ситуация  $x = (x_1, \dots, x_N) \in X$ . После этого, каждый игрок  $i$  получает свой выигрыш  $f_i(x)$ .

Таким образом, принимая решение, игрок вынужден ориентироваться не только на свою функцию выигрыша, но и на возможный выбор остальных участников игры.

Далее через  $(y_i, x_{-i})$  обозначается ситуация, полученная из ситуации  $x$  заменой стратегии  $i$ -го игрока  $x_i$  на  $y_i$ :  $(x_i, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$ .

**Определение 1.** Назовем ситуацию  $x^w = (x_1^w, \dots, x_n^w)$  *ситуацией слабого равновесия по Бержу*, если для каждого игрока  $i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) стратегия  $x_i^w$  максимальна по Парето в  $n - 1$ -критериальной задаче

$$\Gamma_i = \langle X_i, \{f_j(x_i, x_{-i}^w)\}_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} \rangle.$$

Сопоставим игре  $\Gamma$  вспомогательную игру

$$\tilde{\Gamma} = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{g_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где множество игроков  $\mathbb{N}$  и множество стратегий  $X_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) тоже, что и в игре  $\Gamma$ , а функции выигрыша  $g_i(x)$  имеют вид

$$g_i(x) = \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} f_j(x).$$

**Лемма.** *Ситуация равновесия по Нэшу в игре  $\tilde{\Gamma}$  является ситуацией слабого равновесия по Бержу в игре  $\Gamma$ .*

Таким образом, чтобы построить ситуацию WBE в игре  $\Gamma$  надо:

**Во-первых,** составить вспомогательную игру  $\tilde{\Gamma}$ ;

**Во-вторых,** построить ситуацию  $x^e$  равновесия по Нэшу в  $\tilde{\Gamma}$ ;

**В-третьих,** найденная ситуация  $x^e$  будет являться ситуацией WBE в исходной игре  $\Gamma$ .

Следуя лемме, можно получить достаточные условия существования WBE при привычных для теории игр ограничениях.

**Теорема 1.** *В бескоалиционной игре  $n$  лиц  $\Gamma$  с конечным множеством стратегий существует ситуация WBE в смешанных стратегиях.*

**Теорема 2.** *Если в бескоалиционной игре  $n$  лиц  $\Gamma$  множества стратегий  $X_i$  являются выпуклыми компактами, а функции выигрыша  $f_i(x)$  непрерывны по совокупности переменных, то в игре  $\Gamma$  существует ситуация WBE в смешанных стратегиях.*

1. Жуковский В.И., Чижрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1994.
2. Rykacz J., Vytner P., Frackiewicz P. Example of a finite game with no Berge equilibria at all // Games. 2019. Vol. 10. Issue 1. Article 7.
3. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Математические основы Золотого правила. I. Статический вариант // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7. № 3. С. 16–47.

# Распределенная реализация решения сопряженных задач FSI в многосвязных областях

И. М. Кузьмин, Л. Е. Тонков

Ижевск, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»  
e-mail: imkuzmin@gmail.com, letonkov@gmail.com

Моделирование взаимодействия потока газа с деформируемыми конструкциями (FSI — Fluid-Structure Interaction) в рамках разделенного подхода [1], предполагает решение каждой из отдельных физических задач независимо. При таком подходе можно легко реализовать параллельные вычисления, так как каждая задача решается своим приложением и выполняется независимо от других приложений.

При разделенном подходе распределенная программная модель наиболее естественно реализуется в рамках парадигмы клиент–сервер. В представленной работе, в качестве промежуточного программного обеспечения, реализующего парадигму клиент–сервер выбрано ППО ZeroC Ice [2]. При этом выделяется клиентское приложение, реализующее логику работы всей программы, и связанное с приложениями, непосредственно осуществляющими решение физических подзадач.

Описанный механизм связывания объектно-ориентированной модели и инфраструктуры Ice позволяет, путем замены объектов, получить распределенную объектно-ориентированную программу. Такой подход обеспечивает наибольшую универсальность и позволяет объединять независимые приложения, от которых требуется лишь реализация и использование соответствующего прикладного программного интерфейса.

В качестве тестовых задач рассматривались несколько сопряженных задач газодинамики и механики деформируемого тела в различных сочетаниях числа областей занятых газом и твердым телом. Один из тестов представляет собой моделирование задачи о взаимодействии плоской ударной волны с упруго-деформируемым обтюратором в двумерной постановке. Расчетная область (рис. 1) представляет собой модель закрытой ударной трубы, где в объеме 1, отделенном перегородкой, находится неподвижный, сжатый до давления  $p_1 = 2.45 \cdot 10^5$  Па, идеальный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$  и температурой  $T_1 = 293$  К. Остальной объем заполнен тем же газом с параметрами  $p_2 = 1 \cdot 10^5$  Па,  $T_2 = T_1$ . В момент времени  $t = 0$  перегородка разрушается и в области 2 формируется плоская ударная волна, которая далее, взаимодействуя с де-

формируемым обтюратором, формирует в области 3 вихревое течение со сверхзвуковым ядром. Обтюратор выполнен в виде двух расположенных симметрично упругих пластин высотой 50 мм и толщиной 1 мм. Модуль Юнга  $E = 210$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . При решении данной задачи процесс рассматривался до момента времени, когда возмущения достигают правой границы расчетной области.

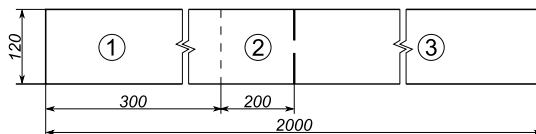


Рис. 1: Схема расчетной области: пунктиром показано положение разрушаемой перегородки

При решении рассматриваемой сопряженной задачи расчет для каждой из пластин обтюратора осуществляется независимо отдельным приложением. Решение задачи газодинамики также осуществляется собственным приложением. Помимо этого на основе двух отдельных серверов осуществляется согласование решений и интерполяция данных на интерфейсной границе двух сред. На рис. 2 представлены результаты расчетов поля скоростей, индуцированного взаимодействием ударной волны с упруго-деформируемым обтюратором в разные моменты времени.

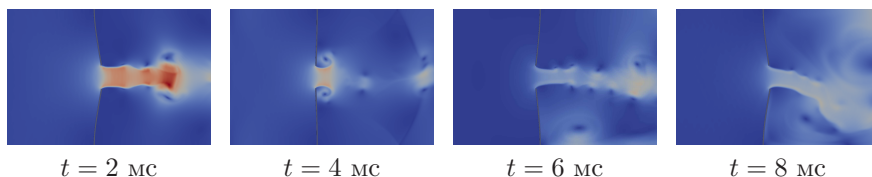


Рис. 2: Поле скоростей, индуцированное взаимодействием ударной волны с упруго-деформируемым обтюратором в разные моменты времени

1. *Farhat C., Lesoinne M.* Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. Vol. 182. P. 499–515.
2. *Henning M.* A new approach to object-oriented middleware // *Internet Computing, IEEE*. 2004. Vol. 8. № 1. P. 66–75.

# О построении математической модели функционирования мозга человека

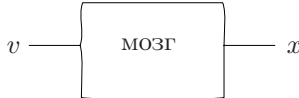
С. Ю. Култышев, Л. М. Култышева

Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

e-mail: kultyshev.su@yandex.ru, kultysheva.lm@yandex.ru

**Обозначения:**  $R^n$  — пространство  $n$ -мерных векторов с действительными числовыми компонентами,  $L_2^n[\theta, T]$  — пространство  $n$ -мерных вектор-функций с квадратично-суммируемыми на отрезке  $[\theta, T]$  компонентами,  $[\theta, T] \subset R^1$ ;  $v(t)$  —  $m$ -мерный вектор параметров, характеризующих внешние воздействия на мозг человека в момент времени  $t \in [\theta, T]$ ,  $v(t) \in R^m$ ;  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор параметров, характеризующих реакцию мозга на внешние воздействия в момент времени  $t \in [\theta, T]$ ,  $x(t) \in R^n$ ,  $v$  и  $x$  — вектор-функции, которые удовлетворяют условиям  $v \in V$ ,  $x \in X$ , где  $V$  и  $X$  — некоторые подмножества из  $L_2^m[\theta, T]$  и  $L_2^n[\theta, T]$  соответственно;  $\theta$  — момент рождения человека,  $T$  — момент смерти человека.

Структурную схему мозга человека можно изобразить в виде:



Это известная схема «чёрного ящика», на вход которого поступает вектор-функция  $v$ , на выходе получается вектор-функция  $x$ , а внутренняя структура этого ящика (мозга человека) неизвестна.

Предлагается строить имитационную математическую модель мозга в виде оператора вход-выход упомянутого «чёрного ящика» по формуле

$$x(t) = A(t)v(t) + B(t) \int_{\theta}^t v(s)ds + c(t), t \in [\theta, T], \quad (1)$$

где  $A(t)$  и  $B(t)$  —  $n \times m$ -матрицы, а  $c(t)$  —  $n$ -мерный вектор, т.е.  $A(t) \in R^{n \times m}$ ,  $B(t) \in R^{n \times m}$ ,  $c(t) \in R^n$  при каждом (почти каждом)  $t \in [\theta, T]$ .

Если удастся измерить вектор-функции  $v$  и  $x$  на некотором отрезке времени  $[\mu, \tau] \subset [\theta, T]$ , то построение математической модели (1) сведётся к нахождению матриц  $A(t)$ ,  $B(t)$  и вектора  $c(t)$  при всех  $t \in [\theta, T]$  по результатам этих измерений, т.е. к задаче идентификации модели (1)



по измерениям (наблюдениям) входа и выхода «чёрного ящика». Пусть измерения входа и выхода объекта (мозга) имеют вид:

$$y = P \begin{pmatrix} \tau \\ \mu \end{pmatrix} S v + \xi, z = Q \begin{pmatrix} \tau \\ \mu \end{pmatrix} S x + \eta, \quad (2)$$

где  $P : \bar{V} \rightarrow Y$  и  $Q : \bar{X} \rightarrow Z$  — непрерывные операторы,  $\bar{V}$  и  $\bar{X}$  — множества вектор-функций  $v \in V$  и  $x \in X$ , суженных на отрезок  $[\mu, \tau]$ ,  $\overset{\tau}{S} \overset{\mu}{}$  — оператор сужения вектор-функций на отрезок  $[\mu, \tau]$ ,  $y \in Y$ ,  $z \in Z$ ,  $Y$  и  $Z$  — нормированные пространства результатов измерений,  $y$  и  $z$  — результаты измерений, а  $\xi$  и  $\eta$  — ошибки измерений входа и выхода соответственно. Предлагается строить  $v$  и  $x$  приближённо в виде  $v \approx \tilde{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i$ ,  $x \approx \tilde{x} = \sum_{j=1}^M \beta_j \psi_j$  по измерениям (2), где  $\varphi_i$  и  $\psi_j$  базисные вектор-функции в пространствах  $L_2^m[\theta, T]$  и  $L_2^n[\theta, T]$  соответственно, а  $\alpha_i \in R^1$  и  $\beta_j \in R^1$ . Тогда задача идентификации сведётся к приближённому нахождению матриц  $A$ ,  $B$  и вектора  $c$  по известным  $\tilde{v}$  и  $\tilde{x}$ . При этом математическая модель получается приближённая. В докладе предлагаются простые формулы решения этой задачи для модели (1). В качестве иллюстрации приводится пример построения математической модели эмоциональной реакции мозга человека на стихи и музыку (песню).

### Замечание.

Задаче идентификации математических моделей согласно данным интернета посвящено более 1 миллиона публикаций и она рассматривалась нами в [1] и [2].

1. *Култышев С.Ю., Култышева Л.М.* Идентификация математических моделей реальных объектов: теория и приложения. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2017.
2. *Култышев С.Ю., Култышева Л.М., Миллюша М.В.* Идентификация математической модели при наличии неизмеряемых внешних воздействий на моделируемый объект // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 3. С. 124–142.

# Управление бесконфликтной посадкой и вылетом воздушных судов

**С. И. Кумков**

*Екатеринбург, Институт математики и механики*

*им. Н.Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: sikumkov@gmail.com

**С. Г. Пятко**

*Санкт-Петербург, ООО “Фирма НИТА”*

e-mail: psgate@gmail.com

**М. М. Овчинников**

*Екатеринбург, Институт математики и механики*

*им. Н.Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: o-mm@bk.ru

Разработаны алгоритмы управления бесконфликтным (с заданными безопасными временными интервалами) одновременным выполнением посадки потока прилетающих воздушных судов (ВС) и ВС очереди на вылет. Алгоритмы предназначены для использования в диспетчерских тренажерах с системой АМАН и перспективных автоматизированных системах управления воздушным движением [1, 2]. Глобальным критерием управления слиянием потоков прилетающих (садящихся) ВС и ВС на вылет является оптимизация (минимизация) их суммарной задержки.

Совокупность вылетающих судов рассматривается как еще один дополнительный поток, и задаются требуемые безопасные временные интервалы (спереди и сзади) как ВС на вылет, так и садящихся ВС.

Предлагается управлять моментом прибытия каждого вылетающего ВС в точку слияния на взлетно-посадочной полосе (ВПП) регулированием момента его отправки *из специальной позиции ожидания после отвода от посадочного терминала*. Такое ожидание-задержка без запуска двигателей является *беззатратным*. При этом расчет момента прибытия судна из этой позиции в точку слияния на ВПП выполняется с учетом затрат времени на запуск двигателей и времени руления до точки слияния с небольшим запасом на возможные разбросы положения нужного “окна” между садящимися ВС.

В случае выявления конфликта (невыполнения заданных безопасных временных интервалов) между вылетающими и садящимися ВС, его устранение выполняется с помощью допустимого ускорения момента вылета взлетающего ВС, или увеличением длительности окна на вылет путем допустимого ускорения момента прибытия садящегося ВС или

минимально необходимой величиной его задержки. Предпочтительным является ускорение момента прибытия садящихся ВС.

Результаты работы алгоритмов в форме рекомендаций представляют диспетчерам старта и посадки. Алгоритмы слияния снабжены диалоговым режимом взаимодействия этих диспетчеров. Для обоснованного принятия диспетчерами решений по выдаче команд управления на вылет и посадку предусмотрен вывод контрольной информации о занятости ВПП, планируемых моментах посадки и взлета, а также о текущем выполнении указаний диспетчеров. Алгоритмы разрабатывались в соответствии с требованиями Технологий управления воздушным движением [1], [2] и Европейскими Рекомендациями по применению веерных схем организации воздушного движения [3]. Отработка алгоритмов велась на реальном варианте организации воздушного пространства а/п Кольцово, Екатеринбург, Россия. Функционирование разработанных алгоритмов иллюстрируется на рис. 1. Предлагается компьютерная анимация работы алгоритмов.

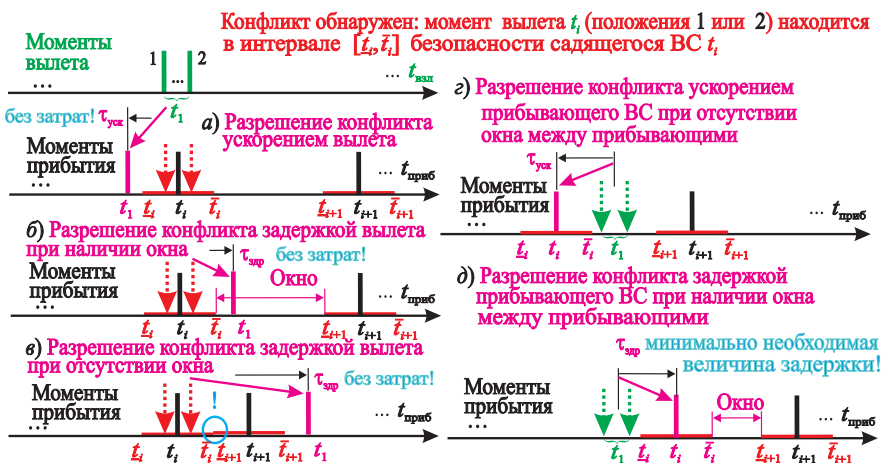


Рис. 1: Обнаруженный конфликт и варианты его разрешения.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 18-01-00410.

1. Королев Е. Н. Технологии работы диспетчеров управления воздушным движением. Москва: Воздушный транспорт, 2000.
2. Пятко С. Г., Красов А. И. (Ред.) Автоматизированные системы управления воздушным движением. Санкт-Петербург: Политехника, 2004.
3. *Arrival Manager*. Implementation GUIDILINES and Lessons Learned // European Organization for the Safety of Air Navigation. 2010, Edition 01.

# Исследование продольных колебаний бесконечного неоднородного стержня при помощи метода Римана

**В. Л. Литвинов**

*Москва, Московский государственный университет*

*им. М. В. Ломоносова*

*Самарский государственный технический университет,*

*филиал в г. Сызрани*

e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

Рассмотрим продольные колебания неограниченного неоднородного стержня. Дифференциальное уравнение имеет вид [1–3]

$$U_{tt}(x, t) - a^2(x, t)U_{xx}(x, t) = 0. \quad (1)$$

Начальные условия

$$U(x, 1) = f(x); \quad (2)$$

$$U_t(x, 1) = F(x). \quad (3)$$

В задаче (1)–(3) обозначено:  $U(x, t)$  — продольное смещение точки стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $a(x, t) = x/t$  — переменная скорость распространения продольных волн в стержне.

Введем в задачу (1)–(3) новые переменные:

$$\xi = xt; \quad \tau = \frac{t}{x}.$$

После преобразований получим:

$$U_{\xi\tau}(\xi, \tau) - \frac{1}{2\xi}U_{\tau}(\xi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$U_{\xi}|_{\xi\tau=1} = \frac{1}{2}f'(\xi) + \frac{1}{2\xi}F(\xi); \quad (5)$$

$$U_{\tau}|_{\xi\tau=1} = -\frac{\xi^2}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2}F(\xi); \quad (6)$$

$$U|_{\xi\tau=1} = f(\xi) \quad (7)$$

Для решения задачи (4)–(7) используем метод Римана, изложенный в [9]. В итоге получим:

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left( f(\xi) + \sqrt{\xi\tau} f\left(\frac{1}{\tau}\right) + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \int_{\xi}^{\frac{1}{\tau}} \frac{f(\xi) - 2F(\xi)}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi \right),$$

или, возвращаясь к исходным переменным,

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \left( f(xt) + tf\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{\sqrt{xt}}{2} \int_{xt}^{\frac{x}{t}} \frac{f(z) - 2F(z)}{z^{\frac{3}{2}}} dz \right).$$

Таким образом, применение метода Римана [9] позволило получить сравнительно простое выражение для продольных колебаний неоднородного стержня, что позволяет использовать полученные результаты для анализа колебаний одномерных технических объектов [4–8].

1. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
2. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
3. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. №1. С. 159–161.
4. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Применение метода Канторовича–Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. С. 70–77.
5. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. Самар. гос. техн. ун-т, 2017. 149 с.
6. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о колебаниях балки с движущейся границей: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2011. С. 10–14.
7. Анисимов В. Н., Корпен И. В., Литвинов В. Л. Резонансная амплитуда колебаний балки переменной длины. Третья международная конференция Математическая физика и ее приложения: Материалы конф. под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2012. С. 37–38.

8. Анисимов В. Н., Корпен И. В., Литвинов В. Л. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Техн. науки. 2013. № 1 (37). С. 93–98.
9. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

## Перспективные численные методы для решения задач механики сплошных сред

С. И. Мартыненко

Москва, Центральный Институт Авиационного Моторостроения  
e-mail: Martynenko@ciam.ru

Черноголовка, Институт Проблем Химической Физики РАН  
e-mail: Martynenko@icp.ac.ru

Современные математические модели предназначены для исследования сложных природных явлений или физико-химических процессов, протекающих в технологическом оборудовании. Многодисциплинарность моделей, сложный математический аппарат решения основополагающих уравнений и суперкомпьютерные технологии не позволяют одному специалисту охватить все аспекты математического моделирования. Поэтому неоднократно предпринимались попытки разработать программные комплексы, устроенные по принципу “чёрного ящика” (black box software), которые существенно облегчат составление математических моделей и численное решение основополагающих уравнений.

**Определение 1.** Программа (для численного решения (начально-)краевых задач) называется *автономной* (или устроенной по принципу “чёрного ящика”), если она не требует каких-либо дополнительных данных от пользователя, кроме определения физической задачи, состоящей из геометрии области, граничных и начальных условий, перечня уравнений, которые необходимо решить (уравнение теплопроводности, уравнения Навье–Стокса, уравнения Максвелла и т.д.), и рабочих сред. Пользователю не нужно ничего знать о численных методах, высокопроизводительных и параллельных вычислениях.

Совокупность требований к численным методам для программных комплексов, устроенных по принципу “чёрного ящика”, образует проблему

“универсальность–эффективность–параллелизм”. Формализация вычислений в перспективных программных комплексах означает разработку и применение универсальных (т.е. с минимальным количеством проблемно-зависимых компонентов), эффективных (т.е. с трудоёмкостью не более  $W = O(n_b^{-2} N^3 \log N)$  арифметических операций, где  $1 < n_b \leq N$ ;  $N$  – количество неизвестных,  $n_b$  – количество неизвестных в блоке) и параллельных (т.е. выполняемых быстрее наилучшего последовательного алгоритма) численных методов для решения задач, которые мы умеем решать.

В докладе рассмотрена Универсальная Многосеточная Технология (УМТ) с точки зрения использования её в перспективном программном обеспечении [1–4]. Показано, что топология вычислительной сетки определяет эффективность численных методов для решения задач механики сплошных сред:

*Глобально структурированные сетки.* Если вычислительная сетка является глобально структурированной, то УМТ содержит минимальное количество проблемно-зависимых компонентов (упорядочение неизвестных, обеспечение сходимости итераций по нелинейности и критерий останова многосеточных итераций), обладает близкой к оптимальной трудоёмкостью ( $O(n_b^{-2} N^3 \log N)$  арифметических операций в широком диапазоне параметров задачи), высоким параллелизмом (ускорением по сравнению с наилучшим последовательным алгоритмом), адаптивностью (возможностью гибкого изменения способа и порядка аппроксимации) и минимальным использованием ресурсов компьютера;

*Локально структурированные сетки.* Если вычислительная сетка является локально структурированной, то в конструкции УМТ появляется новая проблемно-зависимая компонента – локальная интерполяция на границе или в области пересечения блоков сеток;

*Неструктурированные сетки.* Если сетка является неструктурированной, то в конструкции УМТ появляется новая проблемно-зависимая компонента – глобальная интерполяция между структурированной и неструктурированной сетками.

УМТ является комплексным решением проблемы «универсальность–эффективность–параллелизм», причем начиная с исходной (интегро-)дифференциальной задачи, а не с результирующей СЛАУ.

1. Мартыненко С. И. Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2000. Т. 1. С. 83–102.

2. Мартыненко С.И. Многосеточная технология: теория и приложения / Под ред. М.П. Галанина. Москва: Физматлит, 2015.
3. Мартыненко С.И. Численные методы для программного обеспечения, устроенного по принципу «чёрного ящика» // Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. С. 147–169.
4. Martynenko S.I. The robust multigrid technique: For black-box software. Berlin: De Gruyter, 2017.

## Численное решение краевых задач на многоблочных сетках

**С. И. Мартыненко**

*Москва, Центральный Институт Авиационного Моторостроения*  
e-mail: Martynenko@ciam.ru

*Черноголовка, Институт Проблем Химической Физики РАН*  
e-mail: Martynenko@icp.ac.ru

В докладе представлены результаты теоретического анализа сходимости геометрических многосеточных алгоритмов (ГММ) при решении линейных краевых задач на двухблочной сетке. Доказано свойство сглаживания для несимметричного итерационного метода с параметром и сходимость универсальной многосеточной технологии. Показано, что количество многосеточных итераций не зависит ни от величины шага, ни от количества блоков сетки. Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению трёхмерной краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона, иллюстрирующие теоретический анализ. Доклад представляет интерес для разработчиков высокоэффективных алгоритмов решения краевых задач в областях со сложной геометрией. Целью данной работы является теоретическое исследование сходимости ГММ на локально структурированных (многоблочных) сетках в рамках классического многосеточного анализа, предложенного В. Хакбушем [3].

Итерации ГММ на двухблочной сетке представимы в виде

$$\psi^{(q+1)} = \psi^{(q)} + \mathbf{c}_0^{(\nu_0)} = Q_0 \tilde{A}_0 \psi^{(q)} + (\tilde{A}_0^{-1} - Q_0) \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* \mathbf{r}_0,$$

т.е. матрица многосеточной итерации на многосеточной структуре, порождённой двухблочной сеткой, есть  $Q_0 \tilde{A}_0$ . Здесь  $\mathbf{r}_0$  есть вектор невязки,



вычисленный на самой мелкой сетке, а  $\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^*$  – оператор, проектирующий невязку с самой мелкой сетки на сетки текущего уровня, а матрица  $Q_l$  определена рекуррентным образом:

$$Q_l = \begin{cases} S_l^{\nu_l}(\omega_l) \left( d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* + \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} Q_{l+1} \right), & l = 0, 1, 2, \dots, L_3^+ - 2 \\ S_l^{\nu_l}(\omega_l) d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^*, & l = L_3^+ - 1 \end{cases}.$$

Исследование сглаживания в несимметричном случае основано на следующей лемме:

**Лемма.** Пусть для матрицы сглаживающих итераций  $S(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  выполнено  $\|S(0)\| < 1$  и  $\|W\| \leq C \|\tilde{A}\|$  в некоторой операторной норме и  $C$  есть некоторая константа. Тогда в той же норме при  $3 - 2\sqrt{2} \leq \omega \leq 3 + 2\sqrt{2}$  справедливо:

а)

$$\|\tilde{A}S^\nu(\omega)\| \leq C \frac{1 + \omega}{\sqrt{e\omega\nu}} \|\tilde{A}\|.$$

б)

$$\|r^{(\nu)}\| \leq C \frac{1 + \omega}{\sqrt{e\omega\nu}} \|\tilde{A}\| \cdot \|\psi^{(0)} - \psi\| \leq C \frac{1 + \omega}{\sqrt{e\omega\nu}} \text{cond}(\tilde{A}) \|r^{(0)}\|,$$

где  $r^{(\nu)} = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\psi^{(\nu)}$  есть невязка  $\nu$ -ого приближения  $\psi^{(\nu)}$  к решению  $\psi = \tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$ .

С помощью данной леммы можно доказать следующую теорему:

**Теорема.** Предположим, что выполнены свойства сглаживания и аппроксимации, а так же  $\|I - W_l^{-1}\tilde{A}_l\| < 1$ ,  $\|\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^*\| \leq C_{\mathcal{R}}$  и  $3 - 2\sqrt{2} \leq \omega_l \leq 3 + 2\sqrt{2}$ . Тогда многосеточные итерации сходятся, причём

$$\|\tilde{A}_0 Q_0\| \leq C_A C C_{\mathcal{R}} \sum_{l=0}^{L_3^+ - 1} C_*^l \frac{1 + \omega_l}{\sqrt{e\omega_l \nu_l}}.$$

Доказанная теорема показывает, что сходимость ГММ не зависит ни от шага двухблочной сетки, а определяется только количеством сглаживающих итераций  $\nu_l$ , выполняемых на сетках уровней  $l$ . Выполняя достаточное количество сглаживающих итераций можно добиться, что  $\|\tilde{A}_0 Q_0\| < 1$  (достаточное условие сходимости). Полученные результаты легко обобщить на многоблочные сетки с количеством блоков больше двух и УМТ [1, 2, 4].

1. Мартыненко С.И. Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2000. Т. 1. С. 83–102.
2. Мартыненко С.И. Многосеточная технология: теория и приложения / Под ред. М.П. Галанина. Москва: Физматлит, 2015.
3. Hackbusch W. Multi-grid methods and applications. Berlin: Springer, 1985.
4. Martynenko S.I. The robust multigrid technique: For black-box software. Berlin: De Gruyter, 2017.

## **О математическом моделировании распространения информации в телекоммуникационных системах**

**В. А. Минаев**

*Москва, Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана  
e-mail: m1va@yandex.ru*

**М. И. Купцов**

*Рязань, Рязанский государственный радиотехнический университет  
e-mail: kuptsov\_mikhail@mail.ru*

Моделирование информационных процессов, протекающих в телекоммуникационных системах, позволяет прогнозировать агрессивные акции в информационной среде. В связи с широким распространением телекоммуникационных сетей применение данных моделей может затрагивать большой спектр вопросов: от распространения компьютерных вирусов и инженерно-технических проектов до экономики, социологии и ведения информационных войн. Моделирование осуществляется на основе понятийного аппарата, оперирующего такими терминами, как информационные заражение, иммунитет, воздействие, противодействие и т.п. При этом структурные связи между субъектами и объектами информационных процессов описываются преимущественно системами дифференциальных уравнений.

Развивая идеи, изложенные авторами в [1, 2], рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(y, \varepsilon, t), \quad (1)$$

в которой  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $t$  – время,  $y = \text{colon}(y_1, y_2, y_3)$ ,  $f(y, \varepsilon, t) = \text{colon}(f_1(y, \varepsilon, t), f_2(y, \varepsilon, t), f_3(y, \varepsilon, t))$ ,  $f(0, \varepsilon, t) \equiv 0$ ,  $f(y, \varepsilon, t) = B(\varepsilon, t)y + \bar{f}(y, \varepsilon, t)$ ,  $B(\varepsilon, t) - 3 \times 3$ -матрица,  $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} (\|\bar{f}(y, \varepsilon, t)\| / \|y\|) = 0$  равномерно относительно совокупности переменных  $(\varepsilon, t)$  в области  $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times [t_0, +\infty)$ ,  $\Lambda_1 = \{y : \|y\| \leq \Delta_1\} \subset R^3$ ,  $\Lambda_2 = \{\varepsilon : \|\varepsilon\| \leq \Delta_2\} \subset R^n$ ,  $\Delta_1, \Delta_2$  – константы,  $R^p$  – стандартное евклидово пространство размерности  $p$  и  $\|\cdot\|$  – евклидова норма в  $R^p$ ,  $\varepsilon = \text{colon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  – параметры моделируемого информационного процесса,  $y_1$  – общее (относительное) количество объектов, вовлечённых в информационный процесс,  $y_2$  – относительное количество объектов, позитивно реагирующих на информационное воздействие (например, те сетевые узлы при вирусной атаке, которые обладают достаточным иммунитетом, или пользователи информационной сети, не поддающиеся агрессивному информационному воздействию),  $y_3$  – относительное количество объектов, негативно реагирующих на информационное воздействие (например, инфицированные сетевые узлы при вирусной атаке, или пользователи информационной сети, принявшие идею негативного информационного воздействия). Величины  $\varepsilon_i$  характеризуют всевозможные параметры моделируемого информационного процесса, например: скорости распространения конкурирующих воздействий, вероятности заражения объектов негативным информационным воздействием, уровень иммунитета к негативным воздействиям и т.д.

Показано, что при определённых условиях, к системе (1) могут быть адаптированы и применены теоремы о существовании и устойчивости локальных интегральных многообразий из работ [3,4]. При этом устойчивые интегральные многообразия будут интерпретироваться в зависимости от моделируемой ситуации. В частности, при моделировании распространения информации в социальных сетях это могут быть социальные группы, устойчивые к негативным (позитивным) информационным воздействиям.

На основе изучения свойств решений системы (1) строятся имитационные модели, позволяющие определить те значения параметров информационных процессов, включая начальные данные, при которых информационные процессы протекают по управляемому сценарию.

1. *Minaev V., Vaiz E., Kuptsov M., Yablochnikov S., Vidov S.* Modeling of information impacts on elements of onboard system // 2018 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications, 14–15 марта 2018. Москва: IEEE, 2018. С. 1–5.
2. *Yablochnikov S., Yablochnikova I., Minaev V., Kuptsov M., Vidov S., Shved V.* System-dynamic modeling of information influences and co-operations // CEUR Workshop Proceedings. 2018. Т. 2104. С. 222–232.

3. *Kuptsov M. I., Minaev V. A.* Stability integral manifold of the differential equations system in critical case // Journal of Physics: Conference Series. 2018. № 973. 012055.
4. *Купцов М. И., Минаев В. А., Фаддеев А. О., Яблочников С. Л.* Об устойчивости интегрального многообразия системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 168. С. 61–70.

## Терминальное управление сферическим движением

**Н. Е. Мисюра, А. Е. Ламоткин, Е. А. Митюшов**

*Екатеринбург, Уральский федеральный университет*

e-mail: n\_misura@mail.ru, alexey.lamotkin@urfu.ru, mityushov-e@mail.ru

В работе приводится решение задачи об управлении сферическим движением твердого тела при произвольных краевых условиях по ориентации и угловым скоростям. Управляющие моменты находятся из решения обратной задачи динамики. В качестве конфигурационного многообразия рассматривается отображение группы вращений  $SO(3)$  в шар радиусом  $\pi$  пространства  $R^3$ . В качестве программных траекторий выбираются полиномиальные траектории близкие к траекториям эйлеровых поворотов, соединяющие начальную и конечную точки и обеспечивающие выполнение заданных краевых условий.

Терминальное управление — это управление, цель которого заключается в переводе объекта управления в заданное конечное состояние в заданный момент времени. Формальная постановка задачи терминального управления в приложении к управлению сферическим движением твердого тела отражает актуальные технические проблемы, возникающие при решении различных задач робототехники и навигации. В частности, при управлении разворотом космических аппаратов под действием реактивных или гироскопических моментов [1].

Описание сферического движения в работе выполняется с использованием единичных кватернионов  $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ ,  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$  путем отображения их геометрического представления в виде единичной гипersферы  $S^3$  в шар радиусом  $\pi$  пространства  $R^3$  [2]. Получаемое таким образом конфигурационное многообразие используется для получения на-

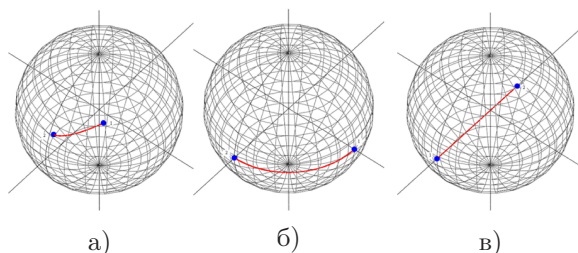


Рис. 1: Шар радиусом  $\pi$  в  $R^3$  и траектории эйлеровых поворотов по маршрутам: а)  $[0.5, 0.5, 0.5, 0.5] \rightarrow [0.5, 0.5, -0.5, -0.5]$ , б)  $[0, 0, 1, 0] \rightarrow [0, 1, 0, 0]$ , в)  $[0, 1, 0, 0] \rightarrow [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0]$

глядных траекторий поворотов твердого тела.

В работе показано, что эйлеровым траекториям соответствуют дуги большого круга сферы  $S^3$ , а их отображения в шаре радиусом  $\pi$  — либо плоские кривые, либо окружности, либо отрезки прямых, в зависимости от расположения гиперплоскости секущей сферу  $S^3$  (рис. 1).

Для решения задачи терминального управления было выполнено конструирование уравнений движения точки в шаре радиусом  $\pi$  таким образом, чтобы траектории движения была близки к эйлеровым и были удовлетворены краевые условия по положениям и угловым скоростям объекта управления в начальный и конечный моменты времени.

В качестве примера на рис. 2 приведены графики изменения координат кватерниона при движении объекта управления по эйлеровой и по программной траектории и координат вектора угловой скорости в проекциях на связанные оси.

1. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. Москва: Физматлит, 2011.
2. *Арнольд В.И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. Москва: Издательство МЦНМО, 2002.

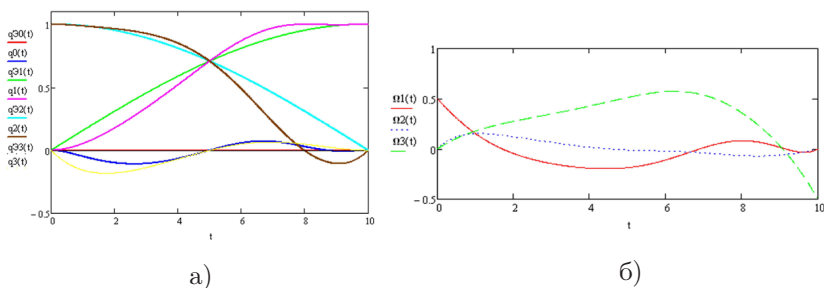


Рис. 2: Графики изменения координат кватерниона и вектора угловой скорости при движении объекта управления по маршруту  $[0, 0, 1, 0] \rightarrow [0, 1, 0, 0]$ , ( $\Omega_{10} = 0.5, \Omega_{20} = 0, \Omega_{30} = 0, \Omega_{1T} = 0, \Omega_{2T} = 0, \Omega_{3T} = -0.5$ )

## Моделирование эталонных групп вращений

**Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, А. Е. Ламоткин**

*Екатеринбург, Уральский федеральный университет*

e-mail: mityushov-e@mail.ru, n\_misura@mail.ru, alexey.lamotkin@urfu.ru

В работе дается определение эталонной группы вращений твердого тела, как конечной подгруппы группы  $SO(3)$ . Доказывается существование пяти эталонных групп, вводится упорядоченность их элементов и строится кратчайшая траектория, проходящая через все элементы группы.

Как известно, проблемами Смейла назван список из восемнадцати нерешенных математических проблем, предложенный Стивенем Смейлом в 1998 году по просьбе Владимира Арнольда [1]. Седьмая проблема называлась: распределение точек на двумерной сфере. Эта проблема обобщает проблему Томсона, которая заключается в определении такой конфигурации расположения  $K$  электронов на поверхности сферы единичного радиуса, чтобы потенциальная энергия системы была минимальна. Одним из обобщений задачи о распределении точек, в частности на трехмерной гиперсфере, может служить задача о нахождении эталонных групп ориентаций твердого тела равномерно заполняющих все ориентационное пространство. Для этого в работе воспользовались соответствующими группами перестановок, которые определяют вершины правильных четырехмерных многогранников [2]. Затем с учетом изоморфизма этих групп и

соответствующих групп единичных кватернионов найдены конечные подгруппы специальной ортогональной группы вращений  $SO(3)$  трехмерного евклидова пространства.

Доказано существование пяти эталонных конечных подгрупп группы  $SO(3)$  из 4, 8, 12, 60, и 300 элементов со свойством равномерного покрытия всего ориентационного пространства. Найдено графическое представление элементов этих групп набором точек в  $R^3$ , выполнено их упорядочение и построены кратчайшие графы, соединяющие элементы групп.

В качестве иллюстрации рассмотрена задача о моделировании эталонной группы, порождаемой двадцатичетырехячейником со следующими декартовыми координатами вершин равномерно расположенными на гиперсфере  $S^3$  единичного радиуса:  $(\pm 1, 0, 0, 0)$ ,  $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$  — всевозможные перестановки.

Гиперсфера единичного радиуса является гладким многообразием группы  $Sp(1)$  единичных кватернионов  $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ ,  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ . Она двулиственным образом накрывает группу вращений. Кватернионы  $q$  и  $-q$  описывают одно вращение, т.е. один и тот же поворот твердого тела. После отбрасывания зеркально симметричных вершин остаются двенадцать вершин и находятся соответствующие элементы эталонной группы вращений. На рис. 1 приведены графическое представление эталонной группы вращений, порождаемой двадцатичетырехячейником, и кратчайший граф, соединяющий ее элементы.

1. *Smale S.* Mathematical problems for the next century // *Mathematical Intelligencer*. 1998. Vol. 20. No. 2. Pp. 7–15.
2. *Coxeter H.S.M.* Introduction to geometry. John Wiley & Sons Inc., 1989.

## Решение систем уравнений при коллективном использовании CPU и GPU

Н. С. Недожогин, С. П. Копысов, А. К. Новиков

Ижевск, ФГБОУ ВО Удмуртский Государственный Университет  
e-mail: Nedozhogin@inbox.ru

Одной из трудоёмких операций в численных методах является параллельное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

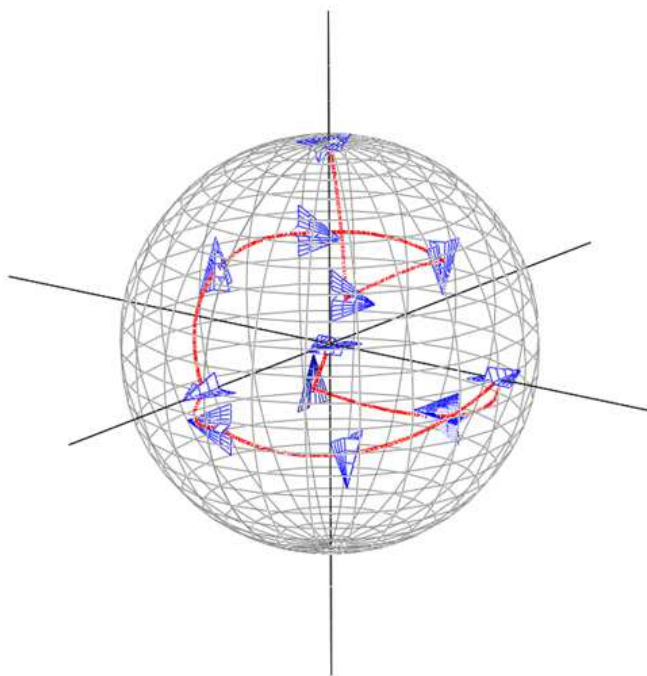


Рис. 1: Кратчайший граф и элементы эталонной группы, порождаемой двадцатичетырехячейником



Построение гибридных решателей с комбинированием прямых и итерационных методов для решения СЛАУ позволяет использовать несколько уровней параллелизма [1].

Так в [2] построен и реализован гибридный метод решения систем уравнений при совместном использовании центральных процессоров (CPU) и графических ускорителей (GPU). Такой подход показал, что затраты на коммуникации не могут перекрыть вычислительные затраты, тем самым время выполнения алгоритма при увеличении числа исполняющих устройств не уменьшается.

Для сокращения коммуникаций в методе сопряжённых градиентов предложен конвейерный вариант алгоритма. В отличие от классического подхода, в конвейерном алгоритме скалярные произведения векторов собираются в одном месте в конце каждой итерации. С одной стороны, это позволяет проводить одну синхронизацию на каждой итерации алгоритма вместо трёх. С другой стороны перемещение скалярных произведений увеличивают вычислительную нагрузку, так как необходимо делать на 5 векторных операций (сложение векторов и умножения на скаляр) больше. При этом часть вычислений возможно производить одновременно с коммуникациями между исполняющими устройствами.

Для решения СЛАУ на нескольких GPU был построен блочный алгоритм конвейерного метода сопряжённых градиентов. Число и размеры блоков матрицы позволяет распределять нагрузку в соответствии производительности, имеющихся исполнительных устройств, в том числе и выделение нескольких блоков на одно устройство.

Тогда при реализации блочного вариант конвейерного метода, на каждом исполняющем устройстве будут происходить следующие изменения: векторные операции на каждом исполняющем устройстве происходят в два этапа, для внутренних и граничных узлов; скалярные произведения векторов выполняются независимо каждым выполняющим устройством над своими частями векторов; суммирования промежуточных скаляров происходит в параллельных потоках, отвечающих за коммуникации, что является точкой синхронизации на каждой итерации алгоритма; матрично-векторное произведение выполняется как на GPU так и на CPU. На CPU происходит умножения части матрицы, отвечающей за границу, полученную при разделении матрицы на блоки.

Обмен данными между разными GPU в рамках одного вычислительного узла осуществляется с помощью технологии OpenMP, а обмен между разными вычислительными узлами – с помощью технологии MPI. Для примера рассмотрим узел, содержащий центральный восьмиядерный процессор и два графических ускорителя. Число OpenMP нитей выбирается

по числу доступных ядер CPU. Первые две OpenMP-нити связываются с одним из доступных GPU-устройств и отвечают за пересылку данными между GPU-CPU. Нити 2-6 обеспечивают вычисления на CPU и выполняют вычислительную работу над отдельным блоком матрицы СЛАУ. Последняя нить отвечает за коммуникациями между различными вычислительными узлами и различными GPU.

Вычислительные эксперименты выполнялись на вычислительных узлах нескольких типов кластера “Уран” суперкомпьютерного центра ИММ УрО РАН (СКЦ ИММ УрО РАН), .

Конвейерный алгоритм показал сокращение времени выполнения на небольших СЛАУ, для которых характерна небольшая вычислительная нагрузка, за счёт чего сокращение коммуникаций обеспечивает меньшие временные затраты. Для систем больших размерностей ( $>500000$ ) ускорения не наблюдается за счёт того, что сокращения коммуникаций не перекрывает дополнительные векторные операции. Использование блочного алгоритма позволило сократить время выполнения программы для матриц с большим числом строк в том случае, когда размер блока при разделении был меньше 500000.

Предложенные алгоритмы, помимо сокращения времени выполнения, позволяют решать системы линейных уравнений и большего порядка, для которых не обеспечиваются необходимые ресурсы памяти одним GPU или вычислительным узлом.

1. Agullo E., Giraud L., Guermouche A., Roman J. Parallel hierarchical hybrid linear solvers for emerging computing platforms // *Comptes Rendus Mecanique*. 2011. Vol. 333. P. 96–103.
2. Копысов С., Кузмин И., Недозhogин Н., Новиков А., Сагдеева Y. Scalable hybrid implementation of the Schur complement method for multi-GPU systems // *The Journal of Supercomputing*. 2014. Vol. 69. P. 81–88.

# Многоуровневое распараллеливание при решении задачи контактной динамики

А. К. Новиков, С. П. Копысов, А. С. Караваев

*Ижевск, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»*  
e-mail: alexander.k.novikov@gmail.com, s.kopysov@gmail.com,  
karavaev-alexander@yandex.ru

При решении задачи динамического контакта нескольких деформируемых тел возникает несколько связанных подзадач: движение контактирующих тел, их деформирование, поиск поверхности контакта. Альтернирующий вариант метода декомпозиции Шварца с чередованием граничных условий Дирихле и Неймана [1], обладая естественным параллелизмом, позволяет выделить подзадачу деформирования каждого тела (задача теории упругости) в отдельный вычислительный процесс и выполнять эти процессы параллельно. Вместе с тем, на каждом шаге по времени выполняется несколько контактных итераций, на каждой из которых необходимо дважды методом конечных элементов (МКЭ) решать задачи теории упругости, чередуя граничные условия. Поэтому, чтобы уменьшить время выполнения шага по времени необходимо распараллелить наиболее затратные шаги алгоритма: численное интегрирование конечно-элементных матриц и векторов, решение получаемой системы уравнений, поиск контактной границы. Кроме использованного в данной работе распараллеливания по пространству, следует отметить существующие подходы к распараллеливанию по времени, которые позволяют увеличить шаг по времени или использовать несколько шагов по времени [2] с сохранением устойчивости вычислений.

Учитывая сложность подзадач, были выделены следующие уровни алгоритмического и программного распараллеливания: 1) вычисления для каждого деформируемого тела; 2) формирования систем конечно-элементных уравнений, включая вычисление локальных матриц жесткости и векторов нагрузки, объединение их в систему и задание граничных условий Дирихле с сохранением симметрии; 3) решения полученной системы алгебраических уравнений на ускорителе.

Первый уровень был реализован в рамках модели обмена сообщениями, когда каждый процесс MPI осуществлял вычисления, связанные с одним из тел и выполнялся на отдельном вычислительном модуле (узле), т.е. число запускаемых процессов равно числу тел. В этом случае, входные данные: сетка для каждого тела, характеристики материалов, начальные

и граничные условия помещались в каждый процесс MPI. На данном этапе исследований, чтобы сократить затраты на пересылки, в каждом процессе MPI хранились сетки для всех тел. При поиске контактной границы и чередовании граничных условий между процессами MPI передавались только значения перемещений в узлах сеток.

На втором уровне средствами OpenMP распараллеливались вычисления, связанные с отдельным телом (численное интегрирование конечно-элементных матриц, сборка системы уравнений, поиск сопряженных точек на контактной границе). Для этого, в каждом процессе MPI создавались потоки OpenMP, число которых равно числу ядер центральных процессоров, размещенных в вычислительном модуле (ВМ).

При решении получаемых на каждой контактной итерации систем алгебраических уравнений применялся предобусловленный метод сопряженных градиентов с хранением матрицы в компактном строчном формате и реализацией с распараллеливанием циклов в OpenMP.

Представлены результаты математического моделирования одностороннего динамического контакта нескольких деформируемых тел, выполненные на вычислительной системе МВС-10П ОП (МСЦ РАН — филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН) в рамках программной модели MPI+OpenMP.

Дальнейшим развитием первого уровня распараллеливания является улучшение масштабируемости за счет разделения деформируемых тел на подобласти без ветвления внутренних границ и распределение подобластей между процессами MPI (модулями вычислительной системы). Применение поэлементных и «безматричных» схем МКЭ на втором уровне практически снимает ограничение на требуемый объем памяти ВМ. Сбалансированное распределение вычислений по ядрам процессоров может быть обеспечено: распределением тел (сеток) или их подобластей. Третий уровень распараллеливания отработан ранее [3] на технологии CUDA, его применение зависит от наличия графических ускорителей в вычислительной системе.

1. *Karavaev A.S., Kopysov S.P., Novikov A.K.* Decomposition method for dynamic contact problems of several deformable bodies // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1158. No. 3. 032003. P. 1–9.
2. *Kale K.G., Lew A.J.* Parallel asynchronous variational integrators // *J. Numer. Meth. Engng.* 2007. Vol. 70. P. 291–321.
3. *Karavaev A.S., Kopysov S.P., Novikov A.K.* Voxel-based finite element simulation of craniocerebral traumas // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2019. Vol. 131. P. 293–308.

# Математическая модель группы роботов, находящейся в эмоциональном ступоре

Н. В. Ощепкова

Пермь, Пермский государственный национальный исследовательский университет

e-mail: nvo@psu.ru

В работах [1–4] показано, что воспитание группы из  $n$  роботов удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=1}^n R_{j,i} = \sum_{j=1}^n r_{j,i} + \sum_{j=1}^n \theta_{j,i} R_{j,i-1}, \quad (1)$$

где  $j$  – порядковый номер робота в группе,  $\theta_{j,i}$  – коэффициент памяти робота к моменту воздействия на него сюжетом с порядковым номером  $i$ ,  $\theta_{j,i} \in (1, 1 - \delta_j]$ ,  $0 < \delta_j < 1$ ,  $\delta_j = \text{const}$ ,  $r_{j,i}$  – элементарное воспитание робота  $j$ ,  $R_{j,i}$  – суммарное воспитание робота, полученное им в результате воздействия на него общего количества сюжетов.

**Определение 1.** Эмоциональным ступором группы называется момент, при котором сумма всех индивидуальных воспитаний роботов в группе равна нулю, т.е.  $\sum_{j=1}^n R_{j,i} = 0$ .

Рассмотрим случай, когда все элементарные воспитания равны между собой  $|r_{j,i}| = q$ , т.е. группа роботов с равноценными эмоциями, тогда эмоциональному ступору группы будет соответствовать равенство

$$\sum_{j=1}^n \theta_{j,i} R_{j,i-1} = 0. \quad (2)$$

Разобьем группу роботов на три подгруппы. Первая подгруппа включает в себя роботов, имеющих нулевые индивидуальные воспитания, и для определения наличия ступора эти роботы в рассмотрения не берутся. Вторая подгруппа формируется из роботов, имеющих только положительные индивидуальные воспитания  $R_{j,i-1}^+$ , а третья – только отрицательные индивидуальные воспитания  $R_{j,i-1}^-$ . Например, во второй группе у нас будет  $m_1$  роботов, а в третьей –  $m_2$ .

Тогда

$$\sum_{j=1}^n \theta_{j,i} R_{j,i-1} = \sum_{j=1}^{m_1} \theta_{j,i} R_{j,i-1}^+ + \sum_{j=1}^{m_2} \theta_{j,i} R_{j,i-1}^- = 0. \quad (3)$$

Равенство (3) будет тождественно выполняться в том случае, когда коэффициенты памяти  $\theta_{j,i}$  будут равны между собой. Если хотя бы один из индивидуальных коэффициентов памяти будет отличен от других, то вечный ступор в группе не наступит никогда.

**Определение 2.** Группа роботов называется *постоянно нерешительной группой*, если она все время находится в ступоре по воспитаниям.

**Теорема.** *Группа равномерно-забывчивых роботов с одинаковыми по модулю равноценными эмоциями не будет являться постоянно нерешительной группой, если хотя бы один коэффициент памяти роботов в группе отличен от других.*

Вторая и третья подгруппы роботов могут конфликтовать между собой и таким образом вводить всю группу в эмоциональный ступор.

Можем вычислить величину суммарного воспитания каждой из подгрупп, исходя из этих величин можно сделать вывод о размере конфликта в целой группе.

**Определение 3.** *Силой конфликта (силой ступора)* назовем величину суммы положительных воспитаний роботов.

Таким образом, впервые введены определения постоянно нерешительной группы и силы конфликта.

1. Пенский О.Г., Черников К.В. Математические модели психологических установок роботов // Искусственный интеллект и принятие решений. М.: Институт системного анализа РАН. 2013. № 2. С. 63–67.
2. Пенский О.Г., Черников К.В. Основы математической теории эмоциональных роботов. Пермь: Перм. гос. ун-т. 2010.
3. Пенский О.Г., Ощепкова Н.В. Простейшие математические модели пропаганды и контрпропаганды // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1(40). С. 32–35.
4. Ощепкова Н.В. Исследование математической модели воспитания группы роботов // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 39–43.

## Уравнения для моделирования затухающих инвазионных процессов насекомых

А. Ю. Переварюха

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский институт информатики  
и автоматизации РАН*

e-mail: madelf@pisem.net

Вторжения чужеродных видов насекомых-фитофагов генерирует ряд разнообразных экстремальных явлений популяционной динамики. Вспышка может затухнуть после первого пика, либо происходит серия нерегулярных вспышек или произойти полная элиминация вселенца. Наиболее агрессивно процессы стремительного распространения видов в новые ареалы, где исходное видовое разнообразие ограничено: Австралия, Канада, острова Тихого океана. Вселения сопровождаются резкими изменениями численности с дефолиацией леса. С точки зрения теории бифуркаций мы имеем дело с принципиально разными сценариями экодинамики, которые не описываются системой уравнений «хищник-жертва». Подобные резкие изменения представляют проблему для математического моделирования и составляют большую группу переходных процессов существования экосистем [1], которые переходят в устойчивые режимы. Нами разработаны сценарии для особых случаев популяционной динамики и взаимодействия противоборствующих организмов на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием  $t - \tau$ . Нами выбраны модификации известных уравнений для описания особой колебательной активности после обычной бифуркации Андронова-Хопфа в (1) после увеличения репродуктивного параметра  $R$ , но с последующим разрушением образовавшегося цикла.

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau_1)}{\mathfrak{K}} \right) (\mathfrak{U} - N(t - \tau_2)). \quad (1)$$

где параметр  $\mathfrak{U}$  величина, что выполняется  $\mathfrak{U} < \mathfrak{K} \times 0.75$  — это величина, которую мы назвали предкритической емкостью полунасыщения вида-вселенца. Значение численности  $\mathfrak{U}$  играет роль «спускового крючка» для ряда необратимых деструктивных процессов при инвазии и мешает эффективному биотическому противодействию. Важно, что при большом диапазоне значений  $R\tau_1$  система не имеет обычного балансового равновесия-точки  $N(t) \rightarrow K$  и не имеет неустойчивого равновесия, вокруг которого происходят орбитально устойчивые колебания  $N_*(t; R\tau_1\tau_2)$ . Объем «Экологической ниши» в такой небалансируемой ситуации про-

сто не существует. Потому мы заменили в (1) традиционное обозначение величины ниши  $K$  на  $\mathfrak{K}$ , так по своему смыслу эти величины иные, чем в известной «колебательной» модели Хатчинсона для популяции насекомых, изолированных от внешнего действия в лабораторных условиях:

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right). \quad (2)$$

Модель с запаздыванием в экологии традиционно исследуют с константой функцией-предысторией.  $K$ -емкость традиционно усредненный равновесный уровень. Квадратичный закон регуляции в (2) исключительно умозрительное предположение. Минимумы колебаний в (2) так быстро становятся глубокими и околонулевыми  $\min N_*(t; R\tau) \rightarrow 0, R < M < \infty$ , что пользоваться моделью Хатчинсона в реальности невозможно. Популяция для существования должна всегда поддерживать минимально допустимую численность  $N(t) > \mathfrak{L}$ . Для описания начала осциллирующей вспышки можно использовать  $\mathfrak{B}$  как порог активного сопротивления:

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left( \frac{\mathfrak{B} - N^2(t - \tau_1)}{(\mathfrak{B} + lN^3(t - \tau))} \right), \quad (3)$$

где  $\mathfrak{B}$  — нижний порог запуска серии пиков численности. Величина емкости ниши  $K$  это инфимум для множества значений  $\mathfrak{B}$ . Полученная серия пиков в (3) без нереального свойства  $\min N_*(R\tau, t) \rightarrow 0 + \epsilon$  и с наибольшим  $\max N_*(R\tau, t_{m1}) > \max N_*(R\tau, t_{m1} + t_p)$  в самом начале вспышки описывает ряд ситуации периодических нашествий насекомых, как начало пилообразной вспышки кольчатого шелкопряда в лесах Востока Канады. Для описания противодействия и затухания экстремального процесса предлагаем включить в модель (3) фактор сопротивления биотического окружения или выброса клеток иммунной системой на появление вируса, который будет зависеть и от начальной численности вселенца  $N(0)$ :

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left( \frac{\mathfrak{B} - N^2(t - \tau_1)}{(\mathfrak{B} + EN^3(t - \tau))} \right) - \gamma \frac{N^m(t)}{H + N^2(0)}, 2 < m < 3, \quad (4)$$

где  $\gamma$  — параметр эффективности биотического противодействия виду-вселенцу, что не сразу проявляется со стороны автохтонного окружения.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 17-07-00125.

1. *Переварюха А.Ю.* Запаздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата // Динамические системы. 2017. Т. 7. № 2. С. 157–165.



# Представление повторных стохастических интегралов Стратоновича в спектральной форме математического описания

К. А. Рыбаков

*Москва, Московский авиационный институт*

e-mail: rkoffice@mail.ru

Моделирование повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича составляет основу методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений, построенных на разложениях Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича [1–4]. Такие интегралы могут быть представлены на основе ортогональных разложений винеровских процессов или процессов типа гауссовского белого шума. Наиболее полно вопросы представления и моделирования повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича изложены в [5].

Предлагается использовать спектральную форму математического описания, которая применяется для решения задач анализа, синтеза и идентификации детерминированных и стохастических систем управления, а также соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение [6, 7]. С ее помощью ранее было получено представление повторных стохастических интегралов второй кратности [8]. В данной работе развивается этот подход и с помощью спектральной формы математического описания получено представление повторных стохастических интегралов произвольной кратности.

Повторный стохастический интеграл как функцию длины интервала времени можно рассматривать в качестве выходного сигнала динамической системы, представленной в виде соединения усилительных, интегрирующих и множительных звеньев. В наиболее простом случае достаточно только интегрирующих и множительных звеньев. Входные сигналы системы — стандартные гауссовские белые шумы, их количество равно кратности повторного стохастического интеграла. Каждому такому звену соответствует спектральная характеристика, которая для усилительного и интегрирующего звеньев представляется бесконечной плоской матрицей, а для множительного звена — бесконечной пространственной матрицей. Матрицы зависят от выбора базисной системы. Стандартные гауссовские белые шумы представляются в виде бесконечных матриц-столбцов, элементы которых — это независимые случайные величины, имеющие стандартное гауссовское распределение. В результате повторный стохастиче-

ский интеграл произвольной кратности представляется в виде произведения детерминированных плоских и пространственных матриц, а также бесконечных матриц-столбцов со случайными элементами.

Проведено моделирование повторных стохастических интегралов до пятой кратности включительно при выборе в качестве базисной системы полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функции Уолша и Хаара с различными порядками усечения спектральных характеристик.

1. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988.
2. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Springer-Verlag, 1995.
3. *Аверина Т.А., Пригарин С.М.* Вычисление стохастических интегралов от винеровских процессов // Препринт 1048. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1995.
4. *Кузнецов Д.Ф.* Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1997. № 1. С. 18–77.
5. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 4. С. А.1–А.1073.
6. *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания / В кн. Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2018. С. 171–199.
7. *Рыбаков К.А.* Развитие и перспективы программного обеспечения спектрального метода Spectrum // Информационные и телекоммуникационные технологии. 2019. № 43. С. 57–63.
8. *Рыбаков К.А.* Применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. № 4. С. 1–31.

# Моделирование дробного броуновского движения с применением ортогональных разложений случайных процессов

К. А. Рыбаков, А. А. Ющенко

Москва, Московский авиационный институт

e-mail: rkoffice@mail.ru, artem55\_55@mail.ru

В докладе рассматривается спектральный метод моделирования дробного броуновского движения  $w^H(t)$ , или обобщенного винеровского процесса, — гауссовского случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$R_{w^H}(t, \tau) = \frac{1}{2} (t^{2H} + \tau^{2H} - |t - \tau|^{2H}), \quad t, \tau \geq 0,$$

где  $H \in (0, 1]$  — показатель Хёрста [1].

В основе метода лежит спектральная форма математического описания сигналов и линейных систем [2]. Спектральная характеристика линейного интегрального оператора с ядром  $R_{w^H}(t, \tau)$  выражена через спектральные характеристики оператора дробного интегрирования (линейного оператора, ставящего в соответствие функции левосторонний интеграл Римана–Лиувилля) и оператора отражения (линейный оператор инверсии времени, позволяющий перейти к правостороннему интегралу Римана–Лиувилля). Такой подход позволяет использовать алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов дробного интегрирования и отражения, которые сформированы для различных базисных систем: полиномов Лежандра, функций Уолша и Хаара.

Пусть  $t \in [0, T]$ , система функций  $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  является полной и ортонормированной в  $L_2([0, T])$ . Определим линейный оператор  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{R}x(t) = \int_0^T R_{w^H}(t, \tau)x(\tau)d\tau, \quad x(t) \in L_2([0, T]).$$

Тогда его спектральная характеристика [2] — это бесконечная матрица  $R$  с элементами

$$R_{ij} = \int_0^T \int_0^T R_{w^H}(t, \tau)q(i, t)q(j, \tau)d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Используя следующее представление элементов  $R_{ij}$ :

$$R_{ij} = \frac{\Gamma(2H+1)}{2} \left( \int_0^T \mathcal{J}_{0+}^{2H} 1(t) q(i, t) dt \int_0^T q(j, \tau) d\tau + \int_0^T q(i, t) dt \int_0^T \mathcal{J}_{0+}^{2H} 1(\tau) q(j, \tau) d\tau - \int_0^T q(i, t) \mathcal{J}_{0+}^{2H+1} q(j, t) dt - \int_0^T q(i, t) \mathcal{J}_{T-}^{2H+1} q(j, t) dt \right),$$

где  $\Gamma(\mu)$  — гамма-функция,  $\mathcal{J}_{0+}^\mu$  и  $\mathcal{J}_{T-}^\mu$  — левосторонний и правосторонний операторы интегрирования Римана–Лиувилля дробного порядка  $\mu$ ,  $1(t)$  — единичная функция, а также связь левостороннего и правостороннего операторов интегрирования Римана–Лиувилля и оператора отражения [2], спектральную характеристику  $R$  можно представить в виде

$$R = \frac{\Gamma(2H+1)}{2} ([P^{-2H} \cdot \mathbf{1}] \cdot \mathbf{1}^T + \mathbf{1} \cdot [P^{-2H} \cdot \mathbf{1}]^T - P^{-2H-1} - M \cdot P^{-2H-1} \cdot M),$$

где  $P^{-\mu}$  — спектральная характеристика левостороннего оператора интегрирования Римана–Лиувилля  $\mathcal{J}_{0+}^\mu$ ,  $\mathbf{1}$  — спектральная характеристика единичной функции  $1(t)$ ,  $M$  — спектральная характеристика оператора отражения. Тогда

$$w^H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} W_i^H q(i, t), \quad W^H = G \cdot \mathcal{V},$$

где  $G$  удовлетворяет условию  $R = G \cdot G^T$ ,  $\mathcal{V}$  — бесконечная матрица-столбец с независимыми случайными величинами  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Для приближенного моделирования случайного процесса  $w^H(t)$  верхний предел суммирования требуется заменить конечной величиной  $L-1$ , перейдя от бесконечных матриц к матрицам конечных размеров  $L \times L$  для  $G$ ,  $R$  и  $L$  для  $\mathcal{V}$ ,  $W^H$  ( $L$  — порядок усечения спектральных характеристик). Полученные результаты позволяют моделировать не только дробное броуновское движение без перехода к дискретному времени, но и более сложные случайные процессы, например дробный процесс Орнштейна–Уленбека [1].

1. *Kubilius K., Mishura Y., Ralchenko K.* Parameter estimation in fractional diffusion models. Springer, 2018.
2. *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. М.: Изд-во МАИ, 2016.

# Проекционные методы с коррекцией скорости для численного решения задач гидродинамики

А. А. Сидорова, Л. Е. Тонков

Ижевск, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

e-mail: sidorova\_albina@bk.ru, letonkov@mail.ru

Одним из подходов к построению приближенного решения системы уравнений Навье–Стокса является проекционный метод, предложенный Чориным [1] и Темамом [2], в основе которого лежит теорема Гельмгольца о разложении векторного поля на соленоидальную и потенциальную составляющие. Применительно к решению задачи о течении несжимаемой вязкой жидкости проекционный метод может трактоваться как расщепление исходной системы уравнений по физическим процессам, в котором отдельно учитываются конвективный перенос и действие градиента давления, при этом расщепление может быть выполнено различными способами.

Рассматривается система нестационарных уравнений Навье–Стокса, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \nabla p = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор скорости,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $p$  — давление, отнесенное к плотности среды. Жидкость занимает область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , с границей  $S = S_i \cup S_w \cup S_o$ , где  $S_i$  и  $S_o$  входная и выходная границы соответственно с заданными на них значениями давления,  $S_w$  — непроницаемая твердая стенка.

Численное решение системы (1) ищется при помощи проекционной схемы с коррекцией поля скорости. Основное отличие от классической схемы Чорина–Темама с коррекцией давления состоит в том, чтобы поменять роли скорости и давления в вычислительном процессе. На первом этапе по известному с шага  $k$  полю промежуточной скорости  $\tilde{\mathbf{u}}^k$  определяется поле давления  $p^{k+1}$ , а затем поле скорости  $\mathbf{u}^{k+1}$ , удовлетворяющее условию несжимаемости на шаге  $k+1$ :

$$\delta t \nabla^2 p^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}^k, \quad \mathbf{u}^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}^k - \delta t \nabla p^{k+1}.$$

На втором этапе вычисляется новое поле промежуточной скорости путем решения уравнений импульса без учета влияния градиента давления:

$$(1/\delta t)(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1}) = -(\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$$

и далее вычисления повторяются на новом шаге по времени. Дискретизация дифференциальных операторов со вторым порядком осуществляется методом контрольных объемов на совмещенной сетке, то есть компоненты скорости и давление определяются в центрах ячеек.

Аналогичным образом строится вариант проекционной схемы с коррекцией скорости в приращениях на основе которой далее формулируется схема, имеющая второй порядок аппроксимации как по скорости, так и по давлению.

Результаты тестовых расчетов хорошо согласуются с решениями, представленными в [4,5], а так же с результатами вычислений методом PISO. Схемы с коррекцией скорости могут оказаться более эффективными при решении сопряженных задач взаимодействия жидкости и деформируемых тел (FSI) в рамках разделенного подхода как за счет большего перекрытия подзадач, так и за счет лучшей сходимости итерационного процесса сопряжения решений на границе «жидкость–твердое тело».

1. *Chorin A.* Numerical solution of the Navier–Stokes equations // *Math Comput.* 1968. Vol. 22. P. 745–762.
2. *Temam R.* Sur l’approximation de la solution des equations de Navier–Stokes par la methode des pas fractionnaires ii // *Archiv Ration Mech Anal.* 1969. Vol. 33. P. 377–385.
3. *Guermont J.-L., Mineev P., Shen, J.* An overview of projection methods for incompressible flow // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2006. Vol. 195. P. 6011–6045.
4. *Fernandez-Feria R., Sanmiguel-Rojas E.* An explicit projection method for solving incompressible flows driven by a pressure difference // *Computers and Fluids.* 2004. Vol. 33. P. 463–483.
5. *Лучишина Е.А., Тонков Л.Е., Копысов С.П.* Применение проекционного метода второго порядка в задаче о течении жидкости под действием заданного перепада давления // *Труды ИМ УрО РАН «Проблемы механики и материаловедения».* 2017. Т. 1. № 1. С. 65–75.

## Процедура оптимизации слитой очереди воздушных судов с учетом их типов

А. А. Спиридонов, С. С. Кумков

*Екатеринбург, Институт математики и механики  
им. Н. Н. Красовского*

e-mail: spiridonov@imm.uran.ru, sskumk@gmail.com

Движение воздушных судов (ВС) организовано по специальным трассам, состоящим из коридоров в горизонтальной плоскости и эшелонов в вертикальной плоскости. Трассы могут разветвляться или соединяться. В точке соединения трасс возникает задача бесконфликтного слияния потоков ВС. Особенно такая задача актуальна вблизи аэродромов и близлежащих районах, где плотность воздушного трафика особенно высока. В качестве главного требования в слитой очереди ВС используется наличие безопасного временного промежутка между ВС.

Разрешать возникающие в точке слияния потоков ВС конфликты безопасности (отсутствие минимального безопасного временного интервала между судами) можно несколькими способами: регулировка скорости движения судна (ускорение, замедление) и использование возможностей трассы (элементы спрямления маршрута, схемы задержки).

При формировании безопасной очереди ВС следует учитывать, что изменение момента прибытия в точку слияния влечёт за собой определённые затраты и дополнительные операции, которые следует сокращать: время задержки, дополнительный расход топлива, излишняя работа диспетчеров. Задача построения оптимальной очереди ВС была формализована как задача условной конечномерной оптимизации. Для неё авторами были предложены и исследованы выпуклые кусочно-линейные и нелинейные критерии оптимальности [1]. Для ряда критериев были доказаны утверждения о совпадении порядков номинальных моментов прибытия ВС и порядка ВС в слитой оптимальной очереди.

Однако в рамках ранее проведённых исследований не учитывалась типизация ВС. После введения типов судов (лёгкий, средний, тяжёлый) легко можно привести примеры, когда доказанные утверждения о сохранении исходного порядка на оптимальном решении не выполняются.

В докладе будет описана процедура формирования оптимальной очереди ВС с учётом их типов (и, как следствие, различных интервалов безопасности после них) и промежутков возможного варьирования момента прибытия. Процедура носит дискретно-непрерывный характер. В дис-

кретной части посредством частичного перебора выбирается оптимальный (или субоптимальный) порядок судов в очереди. В непрерывной части для критерия в виде суммы взвешенных модулей отклонений моментов прибытия ВС от номинальных значений методами линейного программирования находятся оптимальные моменты прибытия ВС в выбранном порядке.

Разработка процедуры проводилась с учётом основных требований по технологии работы диспетчеров управления воздушным движением [2,3]. Движение и моменты прибытия судов рассчитывались по их текущим полётным планам в соответствии с ГОСТ [4].

1. *Spiridonov A.A., Kumkov S.S.* Non-conflict merging aircraft flows under given arrival schedule // Journal of Scheduling. 2020. 24 p. (Submitted).
2. *Королёв Е.Н.* Технологии работы диспетчеров управления воздушным движением. М.: Воздушный транспорт, 2000. 155 с.
3. *Ахмедов Р.М., Пятко С.Г., Васильев А.В. и др.* Автоматизированные системы управления воздушным движением: Новые информационные технологии в авиации. СПб.: Политехника, 2004. 446 с.
4. *ГОСТ 20058-80.* Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М. : Госстандарт, 1980.

## К вопросу о выборе равновесий в нечетких биматричных играх

И. С. Стабулит

Челябинск, Южно-Уральский государственный университет

e-mail: stabulitis@susu.ru

При математическом моделировании реальных процессов, как правило, возникают проблемы, связанные с неточностью и неполнотой информации. Один из подходов к учету таких неточностей, заключается в использовании нечетких чисел. В представляемом докладе будут использоваться треугольные нечеткие числа [1]

$\tilde{A}$  называется *треугольным нечетким числом*, если его функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+l}{l}, & x \in [a-l, a], \\ \frac{a+r-x}{r}, & x \in [a, a+r], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$



где,  $a, l$  и  $r$  – действительные (четкие) числа, и  $l, r$  – неотрицательны. Множество таких чисел обозначим через  $\mathfrak{F}_3$ .

Рассмотрим биматричную игру с треугольными нечеткими платежами. Такую игру можно задать с помощью двух матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  одинаковой размерности, элементами которых являются треугольные нечеткие числа.

Существует ряд подходов к решению нечетких игр. В [2, 3] были предложены понятия  $T$ -равновесий по Нэшу и  $T_1 T_2$ -седловой точки, зависящие от выбора способа сравнения нечетких чисел, а именно, от выбора оператора дефазификации  $T(\cdot)$ . Эти понятия, при различных  $T(\cdot)$ , включают в себя большинство других понятий решения. Аналогичным образом может быть введено и понятие  $T$ -равновесия по Бержу [4]

Рассмотрим бескоалиционную игру  $N$  лиц с треугольными нечеткими платежами в нормальной форме

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{\tilde{f}_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

в которой  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  – множество порядковых номеров игроков; множество стратегий  $x_i$  у  $i$ -го игрока ( $i \in \mathbb{N}$ ) обозначено через  $X_i$ , где  $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ . В результате выбора игроками своих стратегий, складывается ситуация  $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ ). На множестве ситуаций  $X$  для каждого игрока  $i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) определена нечеткая функция выигрыша  $f_i(x) : X \rightarrow \mathfrak{F}_3$ . Значение  $f_i(x)$ , реализовавшееся на выбранной игроками ситуации  $x \in X$  есть выигрыш  $i$ -го игрока.

**Определение.** Ситуация  $x^e = (x_1^e, \dots, x_N^e) \in X$  называется  $T(\cdot)$ -равновесием по Нэшу в игре  $\Gamma$ , если

$$f_i(x^e || x_i) \preceq_T f_i(x^e) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Здесь  $\preceq_T$  означает «меньше или равно по оператору дефазификации  $T$ ».

**Пример.** Рассмотрим биматричную игру, заданную матрицами

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (20, 5, 10) & (5, 10, 5) \\ (5, 10, 5) & (10, 5, 5) \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} (10, 10, 5) & (15, 5, 10) \\ (10, 10, 20) & (5, 10, 5) \end{pmatrix}.$$

При использовании оператора  $U(\cdot, \nu)$  из [5] при  $\nu = 0$   $U(\cdot, 0)$ -равновесие по Нэшу будет  $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ , где  $x_1^e = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ ,  $x_2^e = (\frac{3}{10}, \frac{7}{10})$ .

А при  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $U(\cdot, \frac{1}{2})$ -равновесие по Нэшу примет вид  $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ , где  $x_1^e = (\frac{7}{13}, \frac{6}{13})$ ,  $x_2^e = (\frac{5}{19}, \frac{14}{19})$ .

Однако, остается открытым вопрос о выборе оператора дефазификации  $T(\cdot)$ . В докладе рассматриваются результаты эксперимента по выбору равновесия в биматричных играх с треугольными нечеткими платежами группой студентов и статистика совпадений такого выбора с  $T$ -равновесиями по Нэшу при различном выборе оператора  $T(\cdot)$ .

1. *Zimmermann H.J.* Fuzzy set theory and its applications. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. *Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I.* A bimatrix game with fuzzy payoffs and crisp game // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1987. P. 343–349.
3. *Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I.* One approach to fuzzy matrix games // CEUR Workshop Proceedings. 2018. Vol. 2098. P. 228–238.
4. *Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.* Математические основы Золотого правила. I. Статический вариант // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7. № 3. С. 16–47.
5. *Ухоботов В.И., Михайлова Е.С.* О сравнении нечетких чисел в задачах принятия решений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 1. С. 87–94.

## Модели и методы исследования устойчивости управления динамическими активными системами

**В. П. Сугак, В. И. Ерохин, С. В. Сотников**

*Санкт-Петербург, Военно-космическая академия имени  
А.Ф. Можайского*

В реальных условиях на процессы управления динамическими активными системами (ДАС) оказывают влияние различного рода возмущения. Под ДАС будем понимать материальные объекты, перемещающиеся в пространстве и осуществляющие информационное, вещественное и энергетическое взаимодействие с объектами, пунктами управления и другими ДАС. Наличие случайных факторов, либо целенаправленных воздействий среды и других систем приводит к нарушению устойчивости процессов управления ДАС. Авторами предлагаются модели и методы

исследования устойчивости управления ДАС. Процесс управления описывается в виде динамической модели

$$\dot{x}_{ik} = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij}(t) \cdot \Theta_{ikj} \cdot u_{ikj}(t), \quad i = 1, \dots, n;$$

$$k = 1, \dots, S_i; \quad j = 1, \dots, m,$$

включающей следующие элементы:  $x_{ik}$  – переменная, характеризующая состояние (объем) выполнения операции управления  $D_k^i$  в ходе реализации процесса  $A_i$ ;  $u_{ikj}$  – управляющее воздействие, при этом  $u_{ikj}(t) = 1$ , если операция  $D_k^i$  выполняется с использованием соответствующего ресурса  $B_j$ ,  $u_{ikj}(t) = 0$  – в противоположном случае;  $\varepsilon_{ij}(t)$  – матричная временная функция, задающая пространственно-временные ограничения, связанные с взаимодействием процесса  $A_i$  с ресурсом  $B_j$ ;  $\Theta_{ikj}$  – матричная временная функция, характеризующая технические возможности реализации операций  $u_{ikj}$ .

Наряду с ограничениями пространственно-временного, технического и технологического характера, учитывающими логическую последовательность выполнения операций управления, дополнительно введено множество  $\Xi$  сценариев реализации возмущающих воздействий [1], оказывающих влияние на устойчивость управления ДАС,  $\vec{\xi}(t) \in \Xi$  – вектор возмущающих воздействий, задаваемый в виде соответствующих сценариев.

Задача исследования устойчивости управления возникает, когда в рамках непредусмотренных схем и сценариев возмущающие воздействия существенно снижают эффективность применения ДАС.

Следует отметить, что исследование устойчивости процессов функционирования сложных систем в большинстве практических случаев затрудняется в связи с невозможностью построения в явной аналитической форме достаточно адекватных моделей таких систем. Одной из альтернатив имитационным и аналитическим многокомпонентным моделям при исследовании устойчивости управления ДАС могут служить качественные методы. Эти методы, основу которых составляет второй метод А.М. Ляпунова [2], позволяют на предварительном этапе исследования свойства устойчивости обойтись более агрегированными аналитическими моделями и, тем самым, устранить отмеченные выше трудности.

В работе введено определение устойчивости управления ДАС, доказывается, что введенное определение согласуется с известным определением устойчивости по Ляпунову. Основываясь на фундаментальных результатах работ [2–4] получены выражения для критериев устойчивости, позволяющие на основе анализа свойств специально построенной функции

Ляпунова [5] и характеристик возмущений установить факт устойчивости или неустойчивости процесса управления. Приведены примеры исследования устойчивости процесса управления ДАС при случайных возмущающих воздействиях. Предложены количественные характеристики, связанные с устойчивостью - момент первого выхода, запас, степень и область устойчивости.

1. *Троцкий Д.В., Городецкий В.И.* Сценарная модель знаний и язык описания процессов для оценки прогнозирования ситуаций //Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 8. С. 94–127.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М: Гостехиздат, 1950.
3. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 809–823.
4. *Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.* Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. №. 3. С. 185-201.
5. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: Анализ динамических свойств нелинейных систем. М: Физматлит, 2001.

## Анализ показателей рейтинга математических журналов по межгосударственным и междисциплинарным корреляциям

А. Г. Таташев<sup>1,2</sup>, М. Э. Караева<sup>1</sup>, М. В. Яшина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Москва, Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)

<sup>2</sup> Москва, Московский техн. унив. связи и информатики (МТУСИ)  
e-mail: a-tatashev@yandex.ru, karaeva96@gmail.com, mv.yashina@madi.ru

В настоящей работе разрабатываются подходы к статистическому исследованию показателей рейтинга научных журналов на примере данных в информационной базе Scimago [1], а также приводимых в [3] данных о математических журналах, выпускаемым издательством Elsevier (в [3] по

информации баз Scopus и Web of Science), результаты могут использоваться при выборе журнала для представления в него математической статьи, [4].

На основе данных базы Scimago определены места стран по значению индекса Хирша и данным по каждой из 27 областей знаний (subject areas): США; 2-е место — Великобритания (21 обл.); Германия (4 обл.); Китай (2 обл.). На 3-м месте по 13 обл. — Германия, по 7 обл. — Канада, и т.д. По 1-й обл. Россия занимает наиболее высокое место в: - Physics and Astronomy (12 место); - Earth and Planetary Sciences (16); Multidisciplinary (20).

**Утверждение 1.** Коэффициент ранговой корреляции Спирмена между значениями для России пары показателей (индекс Хирша — SJR журнала с наивысшим значением этого показателя) равен 0.317.

**Утверждение 2.** Значения коэффициента Спирмена равны 1. Cite Score — Impact Factor  $r = 0.967$ ; 2. Impact Factor — SNIP  $r = 0.748$ ; 3. SNIP — SJR  $r = 0.746$ ; 4. Cite Score — SNIP  $r = 0.732$ ; 5. Impact Factor — SJR  $r = 0.710$ ; 6. Site Scorer — SJR  $r = 0.602$ .

**Утверждение 3.** Для любой пары независимости показателей гипотеза о независимости этих показателей отвергается при уровне значимости 0.001.

Рассмотрим журнал “Mathematical, Methods of the Applied Science” (MMAS) [6], издательство “Wiley”. Разобьем множество 38 выпускаемых математических журналов издательством “Elsevier”, на три подмножества: 1) Подмножество содержит журналы, которые по всем четырем показателям (Site Score, Impact Factor, SNIP и SJR) превосходят журнал, к нему относится 14 журналов. 2) Подмножество содержит журналы, которые имеют меньшие значения всех четырех показателей, чем журнал MMAS, его мощность равна 3; 3) Остальные 21 журналов составляют подмножество такое, что каждый журнал этого подмножества занимает хотя бы по 1-му показателю более высокое место, чем журнал MMAS, и хотя бы по 1-му — более низкое место.

**Утверждение 4.** Каждый журнал из 3-го подмножества обладает таким свойством, что для каждой пары журналов, каждый из двух журналов превосходит другой хотя бы по одному показателю из рассматриваемых четырех показателей (множество Парето, [5]).

**Утверждение 5.** Максимальные значения коэффициента ассоциации  $K_a$ , для пар областей: 1. Math. — Comp. Sci.  $K_a = 0.921$ . 2. Math. — Phy. and Astr.  $K_a = 0.614$ . 3. Math. — Eng.  $K_a = 0.521$ . 4. Math. — Chem.

*Eng.*  $K_a = 0.362$ . 5. *Math.* — *Ener.*  $K_a = 0.162$ . 6. *Math.* — *Chemistry*  $K_a = -0.027$ . 7. *Math.* — *Env. Sci.*  $K_a = -0.270$ .

Таким образом, можно считать, что для журналов России тематика журналов, в которых могут публиковаться математические работы, может пересекаться с тематикой, относящейся к следующим областям: Computer Science, Physics and Astronomy, Engineering, Chemical Engineering, Energy, Chemistry, Environmental Science.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 17–29–03419.

1. МБД SJR Scimago Journal & Country Rank Sscimagojr.com
2. МБД [www.scopus.com](http://www.scopus.com)>Sources
3. *Latest metrics of Elsevier's Mathematics journals*. <https://www.elsevier.com/>
4. *Dotkulova A.S., Yashina M.V. et al* Search optimization of tutorial web-service architecture for cognitive mathematical education. 2018 IEEE Int. Conf. IT&Qm&IS, 2018. DOI: 10.109/ITMQIS.2018.8525036
5. *Лындина М.И.* Математическая теория рейтингов. Научный журнал. Куб. ГАУ. Физико-математические науки, 2015.
6. МБД [wiley.com/en-gb/Mathematical+Methods+in+the+Applied](http://wiley.com/en-gb/Mathematical+Methods+in+the+Applied)

## Применение генетических алгоритмов для решения задач оптимального управления и условной оптимизации

**В. А. Тененев, А. С. Шаура**

*Ижевск, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН*  
e-mail: v.tenenev@gmail.com, shauraa@mail.ru

**Д. С. Шаура**

*Ижевск, ООО «Ижевский радиозавод»*  
e-mail: clawfinger1-Do@yandex.ru

При решении обратных задач, описываемых дифференциальными уравнениями, возникает проблема корректности их постановки. Генетические алгоритмы позволяют справиться с этой проблемой. Обратные

задачи могут быть сведены к задачам оптимального управления соответствующими системами с последующей редукцией к задаче нелинейного программирования с ограничениями в результате конечно-разностной дискретизации математической модели. При этом определяемые параметры становятся искомым управлением.

Полученная задача нелинейного программирования в общем случае может быть представлена минимизацией целевой функции

$$F(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

при наличии ограничений

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{1, m_1}, \quad (2)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, i = \overline{1, m_2}. \quad (3)$$

Ограничения-равенства считаются выполненными приближенно с погрешностью  $\varepsilon$  и заменяются неравенствами

$$|h_i(\mathbf{x})| - \varepsilon \leq 0, i = \overline{1, m_2},$$

поэтому соотношения (2) и (3) приводятся к виду (4)

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}, m = m_1 + m_2. \quad (4)$$

Целевая функция  $F(\mathbf{x})$  может быть многоэкстремальной, недифференцируемой, иметь овражный характер, а допустимая область, определяемая (4), – многосвязной, что делает невозможным применение классических градиентных или прямых методов оптимизации.

Для решения задачи условной оптимизации общего вида (1), (4) в работе предложен генетический алгоритм с дополнительной популяцией для поиска допустимых особей и модифицированным турнирным отбором [1]. При поиске решения акцент сделан на его допустимости, поэтому оценка приспособленности особей в первую очередь определяется не сравнением значений целевой функции, а качеством выполнения ограничений. Такой подход сочетает в себе эффективность генетических алгоритмов при решении задач глобальной оптимизации с простым и естественным непосредственным учетом условий в виде равенств или неравенств при поиске оптимального решения, не требуя дополнительных преобразований исходной задачи или сведения ее к безусловной оптимизации. Для улучшения качества дополнительной популяции с допустимыми решениями применяются дополнительные операторы: поиск седловой точки функции

Лагранжа; решение системы нелинейных ограничений равенств гибридным генетическим алгоритмом с использованием метода Мак-Кормика.

В качестве иллюстрации применения предлагаемого алгоритма приводятся результаты решения обратных задач: внутренней баллистики – определение характеристик по заданной кривой давление – время [2, 3]; конвективной диффузии – определение интенсивности нескольких источников примесей по результатам мониторинга.

Работа выполнена в рамках темы НИР УдмФИЦ УрО РАН «Искусственный интеллект в разработке, обучении и сопровождении экспертных систем представления и использования знаний в естественнонаучных, технических и социогуманитарных направлениях» АААА-А19-119092690104-4.

1. *Тенев В.А., Шаура А.С.* Решение задач нелинейного программирования общего вида генетическим алгоритмом // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 18. № 4. С. 137–142.
2. *Tenenev V.A., Rusyak I.G., Sufyanov V.G., Ermolaev M.A., Nefedov D.G.* Construction of approximate mathematical models on results of numerical experiment // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8. № 1. С. 76–87.
3. *Тенев В.А., Шаура А.С., Шаура Д.С.* Решение обратных задач внутренней баллистики генетическим алгоритмом условной оптимизации // Химическая физика и мезоскопия. 2019. Т. 21. № 4. С. 533–540.

## Многосеточное предобуславливание на графическом процессоре

**Р. Т. Хазияхметов**

*Ижевск, ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»*

e-mail: rysel777@inbox.ru

Целью исследования является анализ эффективности использования алгебраического многосеточного предобуславливателя (АМП) в сравнении с методом сопряженных градиентов (МСГ) без предобуславливания и диагональным предобуславливанием при решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на графических ускорителях (graphics processing unit (GPU)). Сравнение методов осуществляется в рамках одной программной реализации — библиотека программ *cusp-library* [1],



построенная на технологии параллельного программирования (Compute Unified Device Architecture (CUDA)).

Задачи исследования:

1. Сравнение отличительных особенностей форматов хранения разреженных матриц.
2. Сравнение эффективности применения методов предобуславливания к (СЛАУ).
3. Проведение оценочных вычислительных экспериментов при помощи коллекции разреженных матриц Университета Флориды [2].

Для исследования отбирались матрицы только симметричные, положительно определённые. С числом ненулевых элементов матрицы до одного миллиона. В терминах размерности системы от 10 до 100 000 уравнений. Матрицы получены методами конечных элементов, конечных разностей, конечных объёмов.

Для сравнения интерес представляют случаи хорошо и плохо обусловленных систем. Вычислительные эксперименты проводились с использованием вещественных положительно определённых матриц: Куи, Муи, bcsttk38, ex15, slrmt3m1, s2rmt3m1, s3rmt3m1, s3rmt3m3 и с целыми значениями элементов матрицы Trefethen20, Trefethen20b, взятых из коллекции разреженных матриц Университета Флориды [2].

Методика вычислительного эксперимента:

1. Матрица коэффициентов  $A$  системы  $Ax = b$  берется из коллекции разреженных матриц Университета Флориды [2].
2. Задается модельное решение  $\bar{x}(i) = 1, i = 1, 2, \dots, N$ .
3. Полагается  $b = A\bar{x}$ .
4. Решается система уравнений  $Ax = b$ .

Сравнения трех методов решения (СЛАУ) ((МСГ) с алгебраическим многосеточным предобуславливанием, без предобуславливания и диагональным предобуславливанием) показало высокую эффективность алгебраического предобуславливания при решении, как сравнительно хорошо обусловленных, так и плохо обусловленных систем ( $\lg(\text{cond}(A)) > 6$ ). Это было достигнуто за счет скорости сходимости метода, несмотря на многократное увеличение времени формирования предобуславливателя (до 91% от общего времени решения системы).

1. CUSP: Main page. <http://cusplibrary.github.io> (дата обращения: 01.03.2020).
2. *Davis T.A., Hu Y.F.* University of Florida sparse matrix collection. // ACM Transaction on Mathematical Software. 2011. Vol. 38. Pp. 1–25. <http://yifanhu.net/PUB/matrices.pdf> (дата обращения: 01.03.2020)

## Учет выгорания при распространении пламени по поверхности горючего материала

А. А. Шаклеин, А. И. Карпов

*Ижевск, УдмФИЦ УрО РАН*

e-mail: shaklein@udman.ru

В работе рассматривается задача оценки регрессии поверхности горючего материала в ходе распространения пламени. Учет выгорания поверхности позволит определять размер горячей области и проводить моделирование горения материалов с уступами и выступами. Математическая модель процесса распространения пламени представлена, например, в [1]. Скорость газификации горючего материала на поверхности определяется линейным интегралом объемной скорости пиролиза по толщине образца  $u_s = \int_h W_s dx$ . Соответственно, размер выгоревшего материала определяется интегрированием скорости газификации по времени  $h_{burnt} = \int_t u_s dt$ .

Учет регрессии предлагается оценивать различными способами. Наиболее простой метод заключается в выключении из расчета  $u_s$  областей твердого материала, которые не удовлетворяют условию  $h_{burnt} < x < h$ . Другой способ связан с динамическим изменением граничных условий в задаче таким образом, чтобы область с выгоревшим твердым материалом описывалась уравнениями газовой фазы.

Оценочные расчеты проведены для задач распространения пламени при горизонтальной и вертикальной ориентациях горячей поверхности.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20-08-00481 а.

1. *Karpov A.I., Korobeinichev O.P., Shaklein A.A., Bolkisev A.A., Kumar A., Shmakov A.G.* Numerical study of horizontal flame spread over PMMA surface in still air // Applied Thermal Engineering. 2018. Vol. 144. Pp. 937–944.

## Рассеяние поля электрического диполя на многослойном биизотропном шаре

Г. Ч. Шушкевич

Гродно, Гродненский государственный университет

e-mail: gsys@grsu.by

Актуальность изучения рассеяния электромагнитных волн на искусственных композитных материалах [1] обусловлена способностью таких сред как усиливать, так поглощать электромагнитные поля [2–4].

Пусть пространство  $R^3$  разделено концентрическими сферами  $S_j$  ( $r_j = a_j$ ),  $j = \overline{0, N}$ ,  $N > 1$ , с центром в точке  $O$  на  $N + 2$  области:  $D_0$  ( $a_0 < r$ ),  $D_j$  ( $a_j < r < a_{j-1}$ ),  $j = \overline{1, N}$ ,  $D_{N+1}$  ( $r < a_N$ ). Область  $D_0$  заполнена средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$  и магнитной проницаемостью  $\mu_0$ , область  $D_j$ ,  $j = \overline{1, N+1}$  – однородной биизотропной средой, материал которой характеризуется параметрами  $\varepsilon_j$ ,  $\mu_j$ ,  $G_j$ ,  $Z_j$  [4, 5].

На расстоянии  $h$  ( $h > a_0$ ) от точки  $O$  расположен электрический диполь Герца, колеблющийся с круговой частотой  $\omega$ . Будем полагать, что на поверхностях  $S_j$ ,  $j = \overline{0, N}$ , отсутствуют поверхностные токи и заряды.

Обозначим через  $\vec{E}_e$ ,  $\vec{H}_e$  вектора напряженности электрического и магнитного поля диполя соответственно. В результате взаимодействия электромагнитного поля диполя с многослойным биизотропным шаром образуются вторичные поля  $\vec{E}_j$ ,  $\vec{H}_j$ ,  $j = \overline{1, N+1}$ . Электромагнитное поле в области  $D_0$  представим в вид  $\vec{E}_0 = \vec{E}_e + \vec{E}'$ ,  $\vec{H}_0 = \vec{H}_e + \vec{H}'$ , где  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  – поле, отражённое от границы  $S_0$ .

Постановка задачи. Требуется определить вторичные электромагнитные поля  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$ ,  $\vec{E}_j$ ,  $\vec{H}_j$ , которые удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E}'_0 = i\omega\mu_0 \vec{H}'_0, \quad \operatorname{rot} \vec{H}'_0 = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}'_0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_j = i\omega \left( \mu_j \vec{H}_j + Z_j \vec{E}_j \right), \quad \operatorname{rot} \vec{H}_j = -i\omega \left( \varepsilon_j \vec{E}_j + G_j \vec{H}_j \right), \quad (2)$$

граничным условиям на поверхности сферы  $S_j$ ,  $j = \overline{0, N}$ ,

$$\left[ \vec{n}, \vec{E}_j \right] \Big|_{S_j} = \left[ \vec{n}, \vec{E}_{j+1} \right] \Big|_{S_j}, \quad \left[ \vec{n}, \vec{H}_j \right] \Big|_{S_j} = \left[ \vec{n}, \vec{H}_{j+1} \right] \Big|_{S_j}, \quad (3)$$

где  $\vec{n}$  – единичная нормаль к поверхности  $S_j$ ,

и условию излучения на бесконечности [4, 5]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \vec{E}'}{\partial r} - ik_0 \vec{E}' \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \vec{H}'}{\partial r} - ik_0 \vec{H}' \right) = 0. \quad (4)$$

Электромагнитное поле электрического диполя представим в виде суперпозиции векторных сферических волновых функций

$$\vec{E}_e = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n^1 \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0), \quad \vec{H}_e = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n^1 \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0),$$

где  $E_0 = ik_0^3 p / 4\pi\epsilon_0$ ,  $H_0 = E_0 k_0 / i\omega\mu_0$ ,  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  – момент диполя,  $k_0 = \omega/c$ .

Представление функций  $\vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0)$ ,  $\vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0)$  и коэффициентов  $\tilde{A}_n^1$  приведено в [4]– [5].

Отраженное от границы  $S_0$  электромагнитное поле  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  представим через векторные сферические базисные поля, которые удовлетворяют уравнениям (1) и условию на бесконечности (4). Электромагнитное поле в области  $D_j$ ,  $j = \bar{1}, N + 1$  представим через векторные сферические поля в композитных средах, которые удовлетворяют уравнениям (2).

Выполняя граничные условия (3) и учитывая ортогональность присоединённых функций Лежандра на отрезке  $[0, \pi]$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, входящих в представление вторичных полей.

Численно исследована диаграмма направленности отраженного электрического поля в зависимости от некоторых параметров задачи.

Работа поддержана ГПНИ Конвергенция - 2020.

1. *Cui T. J., Smith D. R., Liu R.* Metamaterials. Theory, Design and Applications. Boston: Springer, 2010.
2. *Шорохова Е. А.* Излучение элементарных источников в киральной среде // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. № 6. С. 680–688.
3. *Фисанов В. Д.* Электромагнитные волны в изотропной метакиральной среде // Доклады ТУСУРа. 2015. № 1(35). С. 5–8.
4. *Куц А. И., Шушкевич Г. Ч.* Численное исследование рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре // Информатика. 2015. № 2. С. 46–54.
5. *Ерофеев В. Т., Козловская И. С.* Аналитическое моделирование в электродинамике. М.: Либроком, 2014.

# Аспекты задачи о колесном экипаже для приложений в модели коллективного движения автомобилей

В. Б. Яшин

Москва, Московский технический университет связи и информатики  
(МТУСИ)

e-mail: hekkoki@gmail.com

Классические исследования в теории транспортных потоков используют усреднения по времени и пространству в качестве транспортных характеристик. При этом модели часто не учитывают поведенческого фактора водителей, а также сцепные характеристики дорожного покрытия, что является существенным для оценки адекватности экспериментальным данным. Актуальными задачами являются разработка методов математического моделирования, позволяющие включать в модель потока параметры так называемого интеллекта, [1], и анализ взаимодействия частиц в потоке - коллективное поведение. Модель Умного водителя (Intelligent driver model), [1], оценивает ускорение автомобиля по динамике движущегося впереди автомобиля:

$$\frac{dv}{dt} = a \left( 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left( \frac{s_0 + vT + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}}}{s} \right)^2 \right), \quad (1)$$

где  $a$  — максимально-разрешенное ускорение,  $b$  — допустимое торможение,  $s$  — расстояние между автомобилями,  $s_0$  — минимально-допустимое расстояние между автомобилями,  $\Delta v$  — разность скоростей автомобилей,  $T$  — допустимый промежуток времени. Вопрос состоит в том, как достоверно оценить параметры модели, учитывая динамику автомобиля как механической системы.

Одни из первых исследований динамики колесных экипажей появились в книге Рокара [2], где сформулирована гипотезу бокового увода колеса вследствие автоколебаний, вызванных неустойчивостью прямолинейного качения. В [3] и [4] развиты подходы моделирования движения колесных экипажей с одной подвижной колесной парой и одной фиксированной, адекватно описывающие маневренные современные автомобили. Более детально вопрос о механике колеса как твердого тела при наличии таких связей, как сухое трение, были рассмотрены в [4], где сделана

попытка сформулировать задачу таким образом, чтобы не было необходимости дополнительно вводить допущения и гипотезы, чтобы избежать парадоксальных ситуаций при описании движения твердых тел (например, таких как парадоксы Пэнлеве). Дальнейшие исследования [5] рассматривают задачу колесного экипажа на плоскости с двумя свободными колесными парами, и проинтегрированная задача приведена к более удобному для исследования виду.

В работе на основе модели [6] показано, что модель с закрепленными осями дает возможность оценить критические значения ускорения движения центра масс для использования в модели (1).

**Теорема 1.** *При условиях, что коэффициент трения опорной плоскости настолько велик, что в точках касания отсутствует проскальзывание, то угол поворота шасси  $\varphi$  удовлетворяет соотношению*

$$\dot{\varphi} = (C_0 \operatorname{tg} \theta) / \sqrt{A \operatorname{tg}^2 \theta + B}.$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 17–29–03419.

1. *Kesting A., Treiber M., Helbing D.* Enhanced intelligent driver model to access the impact of driving strategies on traffic capacity // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 2010. Vol. 368. No. 1928. Pp. 4585–605.
2. *Рокар И.* Неустойчивость в механике: Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во Иностр. Литературы. 1959.
3. *Розенблат Г. М.* К динамике неголономных моделей колесных экипажей // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2008. Вып. 3. С. 99–108.
4. *Розенблат Г. М.* К постановке задач в динамике несвободного движения твердого тела и парадоксы Пэнлеве // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2009. Вып. 2. С. 75–88.
5. *Борисов А. В., Луценко С. Г., Мамаев И. С.* Динамика колесного экипажа на плоскости // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2010. Вып. 4. С. 39–48.
6. *Rosenblat G.M., Tishkin V.F., Yashin V.B.* Model of carriage movement on plane with dry friction forces // *International Journal of Online and Biomedical Engineering.* 2020. (To be appeared).

# О спектральных свойствах модели пересечения транспортных траекторий с двумя конфликтными точками

М. В. Яшина, А. Г. Тагашев, О. С. Лавров

Москва, Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)

e-mail: mv.yashina@madi.ru, a-tatashev@yandex.ru, lavrovlegs@yandex.ru

Современные транспортные системы определяются сложными социально-техническими процессами, моделирование которых является актуальной и содержательной проблемой, [1]. Рассматриваемая динамическая система принадлежит классу динамических систем массо-переноса на регулярных сетях с конфликтными узлами, [2]. Предположим, что система содержит два контура 1 и 2, длина каждого из которых равна 1, Рис.1 а). На каждом контуре введена система координат  $[0, 1)$ , узлы имеют координату 0 и  $d$ ,  $d \leq 1/2$ . На каждом контуре  $i$  в заданном направлении движется (кластер  $i$ )  $i = 1, 2$ , длиной  $l < 1$ . Спектр такой системы в дискретном случае исследован в [3], а в непрерывном - в [4]. В настоящей работе исследуется поведение системы при малых значениях расстояния между узлами и приложение этой модели для реального дорожного перекрестка.

**Определение 1.** Состояние системы в момент  $t$  – вектор  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , где  $x_i(t)$  – координата передней точки кластера  $i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $X$  – множество всех допустимых состояний.

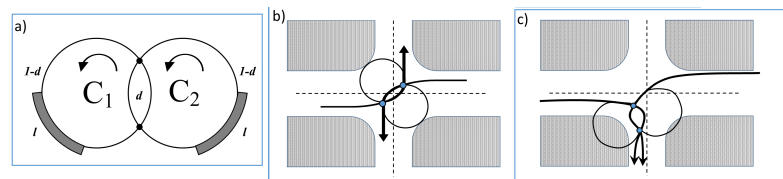


Рис. 1: а) Схема модели, б) схема пересекающихся траекторий на перекрестке с право-приоритетным правилом разрешения конкуренции в однопольном режиме, в) в со-направленном режиме

**Определение 2.** Циклическая траектория в  $X$  называется *спектральным циклом*. Средняя скорость кластера определяется как отношение пройденного расстояния в течение спектрального цикла к его периоду. *Спектром системы* называется множество различных спектральных циклов с соответствующими средними скоростями.

Для  $X \subset [0, 1] \times [0, 1]$  в [4] показано, что при фиксированных  $l$  и  $d$  спектр скоростей может иметь не более двух значений. Тогда справедливы

**Теорема 1.** Пусть  $l < \frac{1}{2}$  и  $d < \min(l, \frac{1}{2} - l)$ . Тогда в зависимости от начального состояния спектральная скорость равна либо 1 (свободное движение), либо 0 (коллапс), причем при  $d \rightarrow 0$  мера множества начальных состояний, приводящих к коллапсу, стремится к нулю.

**Теорема 2.** При  $l \geq \frac{1}{2}$ ,  $d < \frac{1-l}{2}$  спектр имеет два значения 0 и  $v = \frac{1}{2(l+d)}$ . При этом в зависимости от начального состояния спектральная скорость равна либо 0 (коллапс), либо  $v < 1$ , причем при  $d \rightarrow 0$  мера множества начальных состояний, приводящих к коллапсу, стремится к нулю.

Разработаны методы автоматизированного видео-мониторинга характеристик транспортных потоков на перекрестке, см. рис. 1,  $b$  и  $c$ , при этом общие узлы модели соответствуют конфликтным точкам пересекающихся траекторий. Статистическая обработка результатов подтвердила теоретические выводы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00222.

1. Kozlov V.V., Chetverushkin B.N., Buslaev A.P., Tatashev A.G., Yashina M.V. Algebraic and geometric aspects of flow modeling and prospects of natural science applications // Proc. of TGF 2017. Cham: Springer, 2019. Pp. 433–442.
2. Buslaev A.P., Tatashev A.G., Yashina M.V. Flows spectrum on closed trio of contours // Eur. J. P. Appl. Math. 2018. Vol. 11. No. 1. Pp. 260–283.
3. Yashina M.V., Tatashev A.G. Spectral cycles and average velocities of clusters and average velocity of clusters in discrete two-contours system with two nodes // MMAS Wiley, 2020. DOI: 10.1002/mma6194
4. Yashina M.V., Tatashev A.G. Uniform cluster traffic model on closed two-contours system with two non-symmetrical common nodes // Proc. of TGF 2019. Springer, 2020. (To be appeared).



---

---

# Общая топология

## On the group of diffeomorphisms of foliated manifolds

G. M. Abdushukurova, A. Ya. Narmanov

*Tashkent, National University of Uzbekistan*

e-mail: narmanov@yandex.ru

It is known that the group  $Diff(M)$  is topological group in compact open topology [1].

Let  $M$  be a smooth connected Riemannian manifold of dimension  $n$ . We will denote by  $(M, F)$  manifold  $M$  with  $k$ -dimensional foliation  $F$  on  $M$ . Let  $L(p)$  be a leaf of the foliation  $F$  passing through point the  $p$ ,  $T_p F$  be the tangent space to the the leaf  $L(p)$  at  $p$ .

We get subbundle (smooth distribution)  $TF = \{T_p F : p \in M\}$  of the tangent bundle  $TM$  of the manifold  $M$ .

Let us denote by  $V(M)$ ,  $V(F)$  the set of smooth sections of bundles  $TM$ ,  $TF$  respectively. The set  $V(F)$  consists of vector fields tangent to the foliation  $F$ . The set  $V(M)$  is a Lie algebra with respect to the Lie bracket of vector fields, the set  $V(F)$  is a Lie subalgebra of  $V(M)$ .

**Definition 1.** If for the some  $C^r$ -diffeomorphism  $\varphi : M \rightarrow M$  the image  $\varphi(L_\alpha)$  of any leaf  $L_\alpha$  of foliation  $F$  is a leaf of foliation  $F$ , we say that the  $\varphi$  is  $C^r$ -diffeomorphism of foliated manifold and write as  $\varphi : (M, F) \rightarrow (M, F)$ .

Let's denote by  $Diff_F(M)$  the set of all  $C^r$  diffeomorphisms of foliated manifold  $(M, F)$ , where  $r \geq 0$ . The group  $Diff_F(M)$  is subgroup of  $Diff(M)$  and therefore it is topological group in compact open topology

Recall a vector field  $X$  is called a foliated field if for every vector field  $Y$ , tangent to  $F$ , Lie brocket  $[X, Y]$  also is tangent to  $F$ . It is known that flow of every foliated field consists of diffeomorphisms of foliated manifold  $(M, F)$  [2]. The set  $L(M, F)$  of foliated vector fields is a Lie subalgebra of Lie algebra  $V(M)$ . It follows from here that the group  $Diff_F(M)$  contains the Lie group for which the Lie algebra is an algebra  $L(M, F)$ .

**Theorem 1.** *Let  $(M, F)$  be foliated manifold where  $M$  is a smooth connected finite-dimensional manifold. Then the group  $Diff_F(M)$  is a closed subgroup of  $Diff(M)$  in compact open topology.*

The closedness of the set  $Diff_F(M)$  allows us to state the following corollary.

**Corollary 1.** *Factor space  $Diff(M)/Diff_F(M)$  is regular homogeneous topological space.*

**Definition 2.** An isometry  $\varphi : M \rightarrow M$  is called an isometry of foliated manifold  $(M, F)$  if it is diffeomorphism of foliated manifold  $(M, F)$ ,

We will denote by  $Iso_F(M)$  the set of all  $C^r$  – isometries of foliated manifold  $(M, F)$ , where  $r \geq 0$ . If  $X$  is foliated Killing vector field, it's flow consists of isometries of foliated manifold  $(M, F)$ .) The set  $K(M, F)$  of foliated Killing vector fields is a Lie subalgebra of Lie algebra  $L(M, F)$ . It follows from here that the group  $Iso_F(M)$  contains the Lie group for which the Lie algebra is an algebra  $K(M, F)$ .

It is known that limit of isometries is an isometry. By using this fact and arguments of theorem-1 it is not difficult to prove following theorem.

**Theorem 2.** *Let  $(M, F)$  is foliated manifold where  $M$  is a smooth connected finite-dimensional Riemannian manifold. Then the group  $Iso_F(M)$  is closed subset of  $Iso(M)$  in compact open topology.*

Well known that group of isometries  $I(M)$  of riemannian manifold  $M$  is Lie group. From the Theorem-2 and Cartan theorem it follows very important fact that the group  $Iso_F(M)$  is Lie group. Really Cartan's theorem states that on a closed subgroup of a Lie group there exists a differential structure with respect to which the closed subgroup is a Lie subgroup of a given Lie group. This fact we formulate as theorem in following form.

**Theorem 3.** *Let  $(M, F)$  is foliated manifold where  $M$  is a smooth connected finite-dimensional Riemannian manifold. Then the group  $Iso_F(M)$  is Lie subgroup of Lie group  $Iso(M)$ .*

The work is supported by Uzbek-Russian grant MRU-10/2017

1. *Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries // Methods of Functional Analysis and Topology. 2009. Vol. 15. No. 2. Pp. 195–209.*
2. *Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds. New York: Springer, 1988.*
3. *Narmanov A., Saitova S. On the geometry of orbits of Killing vector fields // Differential Equations. 2014. Vol. 50. No. 12. Pp. 1584–1591.*

## О полукольце непрерывных частичных числовых функций, рассматриваемом с расширенным сложением

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

Киров, Вятский государственный университет (ВятГУ)

e-mail: vecht@mail.ru, shishkina.en@mail.ru

Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $C(X) = C(X, \mathbf{R})$  — кольцо всех непрерывных действительных функций на  $X$  с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций,  $CP(X) = \bigcup \{C(Y) : Y \text{ — открыто-замкнутое множество в } X\}$ . Обозначим через  $D(f)$  область определения частичной функции  $f$  из  $X$  в  $\mathbf{R}$ .

На множестве  $CP(X)$  зададим операции сложения и умножения частичных функций поточечно: для  $f, g \in CP(X)$  имеем  $D(f+g) = D(f) \cup D(g)$ ,  $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$  при  $x \in D(f) \cap D(g)$ ,  $f+g = f$  на  $D(f) \setminus D(g)$  и  $f+g = g$  на  $D(g) \setminus D(f)$ ,  $D(fg) = D(f) \cap D(g)$  и  $(fg)(x) = f(x)g(x)$  при  $x \in D(f) \cap D(g)$ . Относительно введенных операций  $CP(X)$  становится полукольцом с коммутативным умножением с нулем  $\emptyset$  и единицей — функцией-константой 1 на  $X$ , подполукольцом которого служит  $C(X)$ .

Под *полукольцом* понимается алгебраическая структура с коммутативно-ассоциативной операцией сложения  $+$  и ассоциативной операцией умножения  $\cdot$ , такая, что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Пусть  $\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$  — полукольцо, полученное добавлением к полю  $\mathbf{R}$  действительных чисел нулевого элемента  $\emptyset$ . При одноэлементном множестве  $X$  полукольцо  $CP(X)$  изоморфно  $\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$ . Наделим множество  $\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$  топологией, оставляя топологию на  $\mathbf{R}$  естественной и считая одноточечное множество  $\{\emptyset\}$  открыто-замкнутым. В результате получаем топологическое полукольцо  $\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$ , при этом  $CP(X) = C(X, \mathbf{R} \cup \{\emptyset\})$  будет полукольцом всех непрерывных функций на топологическом пространстве  $X$  со значениями в топологическом полукольце  $\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$ . Если пространство  $X$  связно, то  $CP(X) = C(X) \cup \{\emptyset\}$ . Если же  $X$  дискретно, то  $CP(X)$  есть полукольцо всех частичных действительных функций на  $X$  [1].

**Замечание.** Ранее мы изучали полукольцо  $\mathbf{R}P^X$  всех непрерывных частичных  $\mathbf{R}$ -значных функций на  $X$ , когда сумма частичных функций  $f$  и  $g$  определена, как и произведение, на их общей области определения  $D(f) \cap D(g)$ . Мы исследуем алгебраические свойства полуколец  $CP(X)$ ;

они существенно отличаются от случая полуколец  $\mathbf{RP}^X$ .

Для тихоновского пространства  $X$  через  $\beta X$  обозначается его компактификация Стоуна–Чеха, а через  $\nu X$  — расширение Хьюитта. Отметим, что для всякого топологического пространства  $X$  полукольца  $CPF(X)$ ,  $CP(\tau X)$  и  $CP(\nu\tau X)$  канонически изоморфны, где  $\tau X$  — так называемая тихоновизация пространства  $X$ .

Пусть  $[Y]$  — замыкание в  $\beta X$  множества  $Y \subseteq \beta X$ . Для точки  $p \in \beta X$  положим  $M^p = \{f \in CPF(X) : p \in [f^{-1}(0)] \text{ или } p \notin [D(f)]\}$ .

Множество всех максимальных идеалов полукольца  $CPF(X)$  с топологией Стоуна–Зариского называется его *максимальным спектром*.

**Теорема 1.** *Для любого тихоновского пространства  $X$  множествами  $M^p$  по всем точкам  $p \in \beta X$  исчерпываются все максимальные идеалы полукольца  $CPF(X)$ . При этом максимальный спектр полукольца  $CPF(X)$  гомеоморфен стоун-чеховской компактификации  $\beta X$ .*

Данная теорема является аналогом классической теоремы Гельфанда–Колмогорова о строении максимальных идеалов колец  $C(X)$ .

Отношением Берна по идеалу  $J$  полукольца  $S$  называется такая конгруэнция  $\rho$  на  $S$ , что для любых  $s, t \in S$  имеем:  $s\rho t$  тогда и только тогда, когда  $s + a = t + b$  для некоторых  $a, b \in J$ .

**Теорема 2.** *Всякая максимальная конгруэнция на полукольце  $CPF(X)$  над произвольным топологическим пространством  $X$  либо двухклассовая, либо является отношением Берна по некоторому максимальному идеалу в  $CPF(X)$ .*

**Теорема 3.** *Для любых топологических пространств  $X$  и  $Y$  каждый изоморфизм полуколец  $CPF(X)$  и  $CPF(Y)$  индуцирован однозначно определенным гомеоморфизмом топологических пространств  $\nu\tau X$  и  $\nu\tau Y$ .*

**Следствие.** *Произвольное хьюиттовское пространство  $X$  определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, полукольцом  $CPF(X)$ .*

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9

1. *Вечтомов Е.М.* О полукольцах частичных функций с расширенным сложением // Международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ. Тезисы докладов. М.: МГУ, 2019. С. 18–19.

## Связь тесноты и псевдохарактера в $T_1$ компактах

Р. А. Головазов

*Ижевск, УдГУ*

e-mail: rpa4@bk.ru

Компактные  $T_1$ -пространства обладают некоторыми свойствами хаусдорфовых компактных пространств.

Так, для них справедливо неравенство  $|X| \leq 2^{\psi(X)}$  [2], обобщающее общеизвестную оценку А. В. Архангельского для хаусдорфовых компактных пространств. Однако связь между другими кардинальными инвариантами для  $T_1$ -пространств сложнее.

Так, если для хаусдорфовых компактных пространств выполнено соотношение:  $\psi(X) = \chi(X) \geq t(X)$ , здесь  $\psi(X)$ ,  $\chi(X)$ ,  $t(X)$  — это псевдохарактер, характер и теснота пространства, то для компактного  $T_1$ -пространства справедливо неравенство  $\psi(X) \leq \chi(X)$ .

Среди компактных  $T_1$ -пространств особое место занимают так называемые самосопряженные пространства [1], в которых множества замкнуты тогда и только тогда, когда они компактны.

Самосопряженные  $T_1$ -пространства обладают рядом свойств хаусдорфовых компактных пространств, а самосопряженные  $T_1$ -пространства со счетным характером являются хаусдорфовыми компактными пространствами.

В [3] доказано, что для самосопряженного  $T_1$ -пространства выполняется  $t(X) \leq \psi(X)$ , то есть справедливо неравенство такое же, как и для хаусдорфова компактного пространства.

Следующие два примера иллюстрируют, что если отказаться от свойства самосопряженности, то связи между теснотой и псевдохарактером в  $T_1$  компактных пространствах нет.

**Пример 1.** Пусть  $X = [-1, 1] \cup \{a\}$ , где  $a \notin [-1, 1]$ . Топологию на пространстве  $X$  определим следующим образом.

Окрестности всех точек на  $[-1, 1] \setminus \{0\}$  обычные.

Окрестностями точки 0 являются множества  $U(0) = O(0, \epsilon) \setminus E$ , где  $|E| = \omega$ ,  $0 \notin E$ , где  $O(0, \epsilon)$  — обычная  $\epsilon$ -окрестность точки 0.

Окрестностями точки  $a$  являются множества  $U(a) = \{a\} \cup O(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ .

Пространство  $X$  является компактным  $T_1$ -пространством. Счетность псевдохарактера в точках пространства  $X$  очевидна. Однако теснота в точке 0 несчетна.

**Пример 2.** Пусть  $X$ ,  $|X| > \omega$ , —  $T_1$ -минимальное пространство, то есть открытыми множествами в  $X$  являются дополнения до конечных множеств.

Пространство  $X$  компактное  $T_1$ -пространство со счетной теснотой, но псевдохарактер в любой точке  $X$  несчетен.

1. Архангельский А.В. Отображения и пространства // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. Вып. 4(130). С. 133–184.
2. Грызлов А.А. Две теоремы о мощности топологических пространств // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 780–783.
3. Грызлов А.А., Головастов Р.А. Теснота и псевдохарактер компактных  $T_1$ -пространств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 312–318.

## Геометрия орбит конформных векторных полей

Э. О. Ражабов, Х. Ф. Шарипов

*Tashkent, Uzbekistan, National University of Uzbekistan*

e-mail: rajabov\_2019@bk.ru., sh\_xurshid@yahoo.com

Пусть  $M$  — гладкое многообразие размерности  $n$ ,  $D$  — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии  $M$ . Семейство  $D$  может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей. Для векторного поля  $X \in D$  через  $X^t(x)$  обозначим интегральную кривую векторного поля  $X$ , проходящую через точку  $x \in M$  при  $t = 0$ . Отображение  $t \rightarrow X^t(x)$  определено в некоторой области  $I(x)$ , которая в общем случае зависит не только от поля  $X$ , но и от начальной точки  $x$ .

**Определение 1.** Орбита  $L(x)$  семейства  $D$  векторных полей, проходящая через точку  $x$  из  $M$ , определяется как множество таких точек  $y$  из  $M$ , для которых существуют действительные числа  $t_1, t_2, \dots, t_k$  и векторные поля  $X_1, X_2, \dots, X_k$  из  $D$  (где  $k$  произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots))$$

Геометрия орбит семейства векторных полей, является объектом многочисленных исследований [1–5].

Теорема Фробениуса, обобщенная Херманном для распределений непостоянной размерности, дает необходимое и достаточное условие для вполне интегрируемости семейства векторных полей, состоящее из конечного числа векторных полей [2].

**Теорема 1.** Пусть  $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  — семейство векторных полей на многообразии  $M$ . Семейство  $D$  порождает вполне интегрируемое распределение, тогда и только тогда, когда оно инволютивно.

Инволютивность семейства векторных полей  $D = X_1, X_2, \dots, X_k$  означает следующее: для каждого  $X, Y \in D$ , существуют гладкие функции  $f^l(x), x \in M, l = 1, \dots, k$  такие, что

$$[X, Y] = \sum_{l=1}^k f^l(x) X_l$$

Рассмотрим конформные векторные поля в евклидовом пространстве  $R^n$

$$Y_l = 2x_l \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad l = 1 \dots n.$$

Напомним, что векторное поле  $X$  на  $(M, g)$  называется конформным, если локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная векторным полем  $X$ , состоит из конформных преобразований.

Нетрудно проверить, что для скобки Ли имеет место равенство

$$[Y_i, Y_j] = 0,$$

т. е. векторные поля  $Y_i, Y_j$  коммутируют. По теореме Херманна это семейство векторных полей вполне интегрируемо.

Рассмотрим многообразие  $M = R^n \setminus O$  с индуцированной римановой метрикой из  $R^n$ , где  $O$  — начало координат.

**Теорема 2.** Орбиты семейства конформных векторных полей

$$D = \{\bar{Y}_i : i = 1, 2, \dots, n - 1\}$$

на многообразии  $M$  порождают слоение коразмерности один, слоями которого являются гиперповерхности, задаваемые уравнениями:

$$L_c^+ : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = cx_k : c > 0,$$

$$L_c^- : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = cx_k : c < 0,$$

$$L^0 : x_k = 0,$$

где  $l_i \neq k, k = 1, 2, \dots, n$ .

1. *Alekseevskii D.V.* Groups of conformal transformations of Riemannian spaces // Math. USSR-Sb. 1972. Vol. 18. No. 2. Pp. 285–301.
2. *Narmanov A.Ya., Saitova S.S.* On the geometry of orbits of Killing vector fields // Differential Equations. 2014. Vol. 50. No. 6. Pp. 247–258.
3. *Narmanov A.Ya., Rajabov E.O.* On the geometry of orbits of conformal vector fields // J. Geom. Symmetry Phys. 2019. Vol. 51. Pp. 29–39.
4. *Rajabov E.O.* Geometry of orbits of conformal vector fields // Uzbek Mathematical Journal. 2019. No. 4. Pp. 138–142.
5. *Sussman H.J.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Transactions of the AMS. 1973. Vol. 180. Pp. 171–188.

## Достаточные условия гомеоморфности вещественных кубических гиперповерхностей

**А. В. Селиверстов**

*Москва, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича  
Российской академии наук  
e-mail: slvstv@iitp.ru*

Рассмотрим неприводимую кубическую форму с рациональными коэффициентами от нескольких переменных. Она определяет вещественную проективную кубическую гиперповерхность в  $\mathbb{RP}^n$ . Например, все плоские кривые и поверхности в трёхмерном пространстве — это гиперповерхности. В особой точке градиент соответствующей формы равен нулю. Если эта гиперповерхность гладкая, то она либо связная, либо содержит две компоненты связности, одна из которых ориентируемая, а другая неориентируемая и гомеоморфная гиперплоскости.



В общем случае не известен быстрый алгоритм распознавания связности. Существует вероятностный алгоритм проверки связности гладкого и ограниченного вещественного алгебраического множества, время работы которого экспоненциально зависит от размерности [1]. Легко проверить связность кубической кривой на проективной плоскости.

В этой работе предложен алгоритм полиномиального времени для проверки связности гиперповерхности, заданной кубической формой, вещественный ранг которой на единицу превосходит число переменных. Такой ранг типичен для кубических форм, применяемых для моделирования сложных кривых и поверхностей [2].

Рассмотрим  $n$ -мерное вещественное проективное пространство  $\mathbb{RP}^n$  с системой однородных координат  $(x_0 : \dots : x_n)$ . Гиперплоскость  $x_0 = 0$  будем называть бесконечно удалённой. Гиперповерхность определена кубической формой над полем вещественных чисел. Точки с координатами  $\pm 1$  отождествим с вершинами фиксированного  $n$ -мерного куба, называемого  $\pm 1$ -кубом.

Обозначим через  $h = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + x_n$  линейную форму, все коэффициенты которой отличны от нуля, и связанную с ней кубическую форму через  $g = \alpha_0 x_0^3 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}^3 - (\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1})^3$ . Следующие теоремы получаются из ранее опубликованных результатов [3].

**Теорема 1.** *Аффинная гиперплоскость  $h = 0$  инцидентна некоторой вершине  $\pm 1$ -куба тогда и только тогда, когда существует особая точка у проективной гиперповерхности в  $\mathbb{RP}^{n-1}$ , которая определена кубической формой  $g$ . Если же таких вершин нет и все коэффициенты  $\alpha_k$  отличны от нуля, то эта гиперповерхность гладкая.*

**Теорема 2.** *Число компонент связности вещественной проективной гиперповерхности  $g = 0$  зависит от взаимного расположения гиперплоскости  $h = 0$ , бесконечно удалённой гиперплоскости и вершин  $\pm 1$ -куба.*

В свою очередь проверка того, одинаково ли расположены две гиперплоскости  $h_1 = 0$  и  $h_2 = 0$ , сводится к задаче булева линейного программирования, решение которой может быть найдено за псевдополиномиальное время [4, 5]. Таким образом, можно не только проверить связность, но и доказать гомеоморфность двух гиперповерхностей рассматриваемого вида. С другой стороны, полученные результаты позволяют эффективно порождать непрерывно зависимые от параметров семейства попарно гомеоморфных гиперповерхностей.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18–29–13037.

1. *Safey El Din M., Schost É.* A nearly optimal algorithm for deciding connectivity queries in smooth and bounded real algebraic sets // Journal of the ACM. 2017. Vol. 63. No. 6. Article 48. 37 p.
2. *Polo-Blanco I., Top J.* A remark on parameterizing nonsingular cubic surfaces // Computer Aided Geometric Design. 2009. Vol. 26. No. 8. P. 842–849. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2009.06.001>
3. *Селиверстов А.В.* О некоторых вещественных кубических гиперповерхностях // Алгебра и теория алгоритмов, Сборник материалов Всероссийской конференции, посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета, Иваново, 21–24 марта 2018, Иваново: Ивановский государственный университет, 2018. С. 179–181.
4. *Koiliaris K., Xu C.* Faster pseudopolynomial time algorithms for subset sum // ACM Transactions on Algorithms. 2019. Vol. 15. No. 3. Article 40. 20 p. DOI: <https://doi.org/10.1145/3329863>
5. *Селиверстов А.В.* О двоичных решениях систем уравнений // Прикладная дискретная математика. 2019. № 45. С. 26–32. DOI: <https://doi.org/10.17223/20710410/45/3>

## Условия сходимости последовательности

**К. Н. Цигвинцева**

*Ижевск, Удмуртский государственный университет*

e-mail: [tsigvintsevkn@ya.ru](mailto:tsigvintsevkn@ya.ru)

Пространства, рассматриваемые в работе, предполагаются  $T_1$ -пространствами. Под последовательностью понимается бесконечная последовательность, все члены которой попарно различны.

Обозначим  $cs(\xi)$  — множество предельных точек последовательности  $\xi$ .

Если последовательность  $\xi$  имеет предел, то для любой ее подпоследовательности  $\xi'$   $cs(\xi') \neq \emptyset$ . Однако если для любой подпоследовательности  $\xi' \subseteq \xi$   $cs(\xi') \neq \emptyset$ , то отсюда не следует, что у  $\xi$  есть предел. Примером служит последовательность натуральных чисел  $N$  в пространстве  $\beta N$  — расширение Чеха–Стоуна  $N$ . Возникает вопрос: какие условия нужно наложить на множества предельных точек подпоследовательностей, чтобы предел существовал? Ответ содержится в следующих теоремах.

**Теорема 1.** Если  $X$  — регулярное пространство и для последовательности  $\xi$  из  $X$  выполнено условие (\*): для любых двух подпоследовательностей  $\xi', \xi'' \subseteq \xi$   $cs(\xi') \cap cs(\xi'') \neq \emptyset$ , тогда последовательность  $\xi$  имеет предел.

Отсюда следует, что условие (\*) обеспечивает сходимость последовательности в компактном  $T_2$ -пространстве. Однако для компактных  $T_1$ -пространств условие (\*) не обеспечивает существование предела последовательности.

**Пример.** Обозначим  $M_0(0, 0), M_1(1, 0), M_2(2, 0)$ .

Пусть пространство  $X = \xi$  есть объединение  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$ , где

$$\xi_0 = \left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{M_0\}$$

$$\xi_1 = \left\{ \left( 1, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{M_1\}$$

$$\xi_2 = \left\{ \left( 2, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{M_2\}.$$

$X$  — компактное  $T_1$ -пространство.

Определим базисные окрестности точек  $M_0, M_1, M_2$  следующим образом:

$$OM_0 = \{M_0\} \cup \left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=k_0}^{\infty} \cup \left\{ \left( 1, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=k_0}^{\infty}$$

$$OM_1 = \{M_1\} \cup \left\{ \left( 1, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=k_0}^{\infty} \cup \left\{ \left( 2, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=k_0}^{\infty}$$

$$OM_2 = \{M_2\} \cup \left\{ \left( 2, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=k_0}^{\infty} \cup \left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=k_0}^{\infty}$$

Все остальные точки пространства изолированные.

Однако справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Если  $X$  — компактное  $T_1$ -пространство и для последовательности  $\xi$  из  $X$  выполнено условие, что семейство

$$\alpha = \{cs(\xi') : \xi' \subseteq \xi\}$$

центрировано, то  $\xi$  имеет предел.

# Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств

А. Г. Ченцов

*Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН*

*им. Н. Н. Красовского*

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается широко понимаемое измеримое пространство (ИП)  $(E, \mathcal{L})$  в виде непустого множества  $E$  и  $\pi$ -системы  $\mathcal{L}$  его подмножеств с “нулем” и “единицей”. Рассматриваются ультрафильтры (у/ф) и максимальные сцепленные системы (МСС)  $\pi$ -системы  $\mathcal{L}$ . Непустые множества у/ф и МСС на ИП  $(E, \mathcal{L})$  оснащаются каждое парой сравнимых топологий, отвечающих содержательно схемам Волмэна и Стоуна; в результате реализуются два битопологических пространства (БТП), первое из которых может рассматриваться как подпространство второго, причем топологическое пространство (ТП) с точками в виде МСС при оснащении топологией волмэновского типа оказывается суперкомпактным  $T_1$ -пространством. Указаны условия, при которых ТП с точками в виде у/ф и “волмэновским” оснащением также является суперкомпактным.

Исследуются обобщенные варианты сцепленности ( $n$ -сцепленность, где  $n \in \mathbb{N}$ ) и суперкомпактности ( $n$ -суперкомпактность). Устанавливаются условия, при которых обобщенная МСС не является у/ф  $\pi$ -системы, а также условия, при которых  $\pi$ -система  $\mathcal{L}$  такова, что все (обобщенные в смысле кратной сцепленности) МСС исчерпываются у/ф. Показано, что у/ф и только они являются  $n$ -МСС (обобщенными МСС с параметром сцепленности  $n$ ) при любом  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Более того, показано, что  $n$ -МСС, не являющиеся у/ф, оказываются “короткоживущими” при изменении параметра сцепленности (точнее, при его изменении на единицу), а именно: “теряют” сцепленность более высокого порядка.

На пространстве  $n$ -МСС, где  $n \geq 2$ , введены две характерные топологии, а именно: топологии волмэновского и стоуновского типов, которые оказываются сравнимыми, что позволяет ввести БТП с точками в виде  $n$ -МСС. Показано, что БТП с точками в виде у/ф может рассматриваться как подпространство вышеупомянутого БТП с точками в виде  $n$ -МСС, что обобщает аналогичное свойство для случая “обычной” сцепленности. Установлены некоторые условия невырожденности последнего БТП, то есть условия того, что топологии, его определяющие, различны.

Введено понятие  $n$ -суперкомпактности произвольного ТП. Показано, что при  $n \geq 2$  ТП с точками в виде  $n$ -МСС оказывается при “волмэновском” оснащении  $n$ -суперкомпактным  $T_1$ -пространством. Установлено также, что ТП на множестве  $n$ -МСС со стоуновским оснащением есть нульмерное  $T_2$ -пространство.

Излагаемые в докладе конструкции [1–6] имеют своим источником работы [7–9].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18–01–00410.

1. *Ченцов А.Г.* Суперрасширение как битопологическое пространство // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 49. С. 55–79.
2. *Ченцов А.Г.* Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365–388.
3. *Ченцов А.Г.* Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257–272.
4. *Ченцов А.Г.* Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 240–257.
5. *Ченцов А.Г.* To a question on the supercompactness of ultrafilter spaces // Ural Math. J. 2019. Vol. 5. No. 1. Pp. 31–47
6. *Ченцов А.Г.* О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 74–101.
7. *de Groot J.* Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis. 1969. Pp. 89–90.
8. *van Mill J.* Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
9. *Strok M., Szymański A.* Compact metric spaces have binary bases // Fund. Math. 1975. Vol. 89. No. 1. Pp. 81–91.

## Список авторов

- Абденова Г. А., 232  
Абиров Р. А., 234  
Адилов Ф. Ф., 234  
Аканова К. М., 232  
Алдашев С. А., 24, 26  
Андреев А. Ф., 28  
Андреева И. А., 28  
Андреева И. Ю., 151  
Анкилов А. В., 58, 236  
Антоновская О. Г., 238  
Анфалов Е. Д., 175  
Аронов П. С., 240  
Асхатов Р. М., 241  
Атамась Е. И., 74  
Аунг Зо, 270  
Бадриев И. Б., 243, 245  
Базикова К. М., 232  
Байков А. Е., 31  
Баландин А. С., 33  
Бандеров В. В., 243  
Банщикова И. Н., 35  
Барабанов Е. А., 37  
Баранов В. Н., 39  
Бастрыков Е. С., 247  
Бедин Д. А., 249  
Бедин Д. А., 251  
Беляев Ю. Н., 41  
Беляева Н. А., 253  
Бенараб С., 43  
Беспалов М. С., 255  
Благодатских А. И., 152  
Богданова С. Б., 266  
Бойков И. В., 256  
Бортаковский А. С., 154  
Бравый Е. И., 44  
Буланов С. Г., 258  
Буркин И. М., 46  
Быков В. В., 37  
Быкова Т. С., 48  
Бычков Е. В., 83  
Васёв П. А., 260  
Васильев В. Б., 50, 52  
Васильева Е. В., 297  
Васючкова К. В., 262  
Ватолкин М. Ю., 54, 56  
Вельмисов П. А., 58, 236  
Ветохин А. Н., 60  
Вечтомов Е. М., 355  
Гаврилова О. В., 264  
Галанин М. П., 240  
Ганебный С. А., 251  
Гладков С. О., 266, 270  
Головастов Р. А., 357  
Гомоюнов М. И., 156  
Горохова И. В., 159  
Гусев М. И., 161  
Данилин А. Р., 162  
Данилов Л. И., 163  
Данченко В. И., 271  
Данченко Д. Я., 271  
Деменчук А. К., 166  
Дигас Б. В., 62  
Долгий Ю. Ф., 62  
Егорова А. В., 64  
Ерохин В. И., 274, 338  
Жуковская Т. В., 66  
Жуковский Е. С., 66  
Журавлева М. А., 168  
Загребина С. А., 122, 275  
Зайцев В. А., 168, 169, 171, 180

- Замышляева А. А., 277  
Запов А. С., 68  
Зарубин А. Н., 70  
Захаров В. К., 279  
Заяц Г. М., 282  
Зыков И. В., 173  
Иванов А. Г., 251  
Иванов В. Н., 284  
Иванов Д. Ю., 72  
Измestъев И. В., 175, 177  
Ильин А. В., 74  
Исмаилов А. И., 93  
Кадиев Р. И., 75  
Кадочников А. П., 274  
Кадыров И. Р., 286  
Казез Е., 24  
Калинин А. И., 178  
Калита К. Д., 184  
Канашьянова З. Н., 26  
Кандаков А. А., 77  
Караваев А. С., 288, 295, 323  
Караева М. Э., 340  
Карпов А. И., 346  
Карпук М. В., 37  
Кашапов Н. Ф., 241  
Кашапов Р. Н., 241  
Ким И. Г., 171, 180  
Китаева О. Г., 290  
Клейменов А. Ф., 182  
Клочков М. А., 292  
Ковалева А. М., 79  
Козлов А. А., 184  
Колпаков И. Ю., 81  
Комаров А. Ф., 282  
Конкина А. С., 275  
Копысов С. П., 286, 288, 295, 319, 323  
Коржавина М. С., 186  
Корнилов А. Я., 297  
Королев С. А., 298  
Коструб И. Д., 98  
Котлованов К. Ю., 83  
Крахотко В. В., 188  
Кривулин Н. П., 256  
Крупенников Е. А., 209  
Кудрявцев К. Н., 300  
Кузнецова О. И., 46  
Кузьмин И. М., 302  
Куликов А. Н., 85  
Куликов Д. А., 85  
Култышев С. Ю., 304  
Култышева Л. М., 304  
Кумков С. И., 306  
Кумков С. С., 335  
Кушцов М. И., 314  
Лавринович Л. И., 178  
Лавров О. С., 351  
Ламоткин А. Е., 316, 318  
Ласунский А. В., 87  
Лебедев П. Д., 215  
Литвинов В. Л., 308  
Лубягина Е. Н., 355  
Лукоянов Н. Ю., 190  
Лукьянов В. В., 191  
Майков Д. В., 298  
Макаров Е. К., 89  
Макаров М. В., 243, 245  
Малкова М. К., 255  
Малыгина В. В., 91  
Манакова Н. А., 262, 264  
Мартыненко С. И., 310, 312  
Мастерков Ю. В., 193  
Матвийчук А. Р., 194  
Матвийчук О. Г., 194  
Мачтакова А. И., 196  
Мегралиев Я. Т., 93  
Мерчела В., 94  
Метельский А. В., 197  
Минаев В. А., 314  
Мисюра Н. Е., 316, 318

Митюшов Е. А., 316, 318  
 Мулюков М. В., 96  
 Недожогин Н. С., 319  
 Несмелова О. В., 138  
 Никитина С. А., 217  
 Новиков А. К., 319, 323  
 Овчинников М. М., 306  
 Ощепкова Н. В., 325  
 Пацко В. С., 199  
 Переварюха А. Ю., 327  
 Перов А. И., 98  
 Петров Н. Н., 201  
 Петросян Г. Г., 101  
 Плаксин А. Р., 203  
 Плаксина В. П., 103  
 Плаксина И. М., 104  
 Попова С. Н., 89  
 Пятко С. Г., 306  
 Равчеев А. В., 107  
 Ражабов Э. О., 358  
 Размыслович Г. П., 188  
 Рахимова М. А., 109  
 Родин А. С., 205, 240  
 Родина Л. И., 110  
 Родионов В. И., 39  
 Руденко Е. А., 207  
 Румянцев А. Н., 112  
 Рыбаков К. А., 329, 331  
 Сабатулина Т. Л., 114  
 Свиридюк Г. А., 122, 262, 264, 290  
 Седова Н. О., 116  
 Селиверстов А. В., 360  
 Сергеев И. Н., 118  
 Сесекин А. Н., 151  
 Сидорова А. А., 333  
 Симонов П. М., 120  
 Смирнова Е. В., 245  
 Соловьёва Н. А., 201  
 Соловьёва Н. Н., 122  
 Сотников С. В., 338  
 Спиридонов А. А., 335  
 Стабулит И. С., 336  
 Субботина Н. Н., 209  
 Сугак В. П., 274, 338  
 Сумин В. И., 124, 159  
 Сумин М. И., 211  
 Сурков П. Г., 213  
 Таташев А. Г., 340, 351  
 Тененев В. А., 342  
 Тинюкова Т. С., 126  
 Тонков Л. Е., 302, 333  
 Усков В. И., 128  
 Успенский А. А., 215  
 Ухоботов В. И., 177, 217  
 Ушаков А. В., 175  
 Федотов А. А., 199, 260  
 Федюков А. А., 219, 220  
 Хазияхметов Р. Т., 344  
 Хаммади А. Х., 110  
 Хартовский В. Е., 197, 222  
 Хубиев К. У., 130  
 Цигвинцева К. Н., 362  
 Цыпленкова О. Н., 277  
 Чебакова В. Ю., 241  
 Ченцов А. Г., 364  
 Чернов А. В., 132  
 Чубурин Ю. П., 126  
 Чудинов К. М., 134  
 Чуйко С. М., 136, 138  
 Шабуров А. А., 162  
 Шагалова Л. Г., 140  
 Шаклеин А. А., 346  
 Шамолин М. В., 141  
 Шарипов Х. Ф., 358  
 Шаура А. С., 342  
 Шаура Д. С., 342  
 Шафранов Д. Е., 290  
 Шевченко Р. И., 224  
 Шимановский В. А., 284  
 Шушкевич Г. Ч., 347



Щелчков К. А., 226  
Эгамов А. И., 227  
Ющенко А. А., 331  
Яшин В. Б., 349  
Яшина М. В., 340, 351  
Abdushukurova G. M., 353  
Alalykin S. S., 229  
Czornik A., 145  
Ivanov A. V., 147  
Khaziyakhmetov R. T., 231  
Kim A. V., 147  
Lapin A. V., 15, 19  
Levinskaya K. O., 15  
Makarov E. K., 145  
Maksimov V. I., 149  
Miller B. M., 17  
Narmanov A. Ya., 353  
Niezabitowski M., 145  
Popova S. N., 145  
Romanenko A. D., 19  
Vetchanin E. V., 21, 229  
Yuldashev T. K., 23  
Zaitsev V. A., 145

Научное издание

# ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Материалы Всероссийской конференции  
с международным участием  
«Теория управления и математическое моделирование»,  
посвященной памяти  
профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова

Ответственный за выпуск А. С. Банников

*Авторская редакция*

Подписано в печать ??.??..2020. Формат 60×84/16

Печать офсетная. Усл. печ. л. ???

Тираж 200 экз. Заказ №???

Издательский центр «Удмуртский университет»  
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207  
Тел./факс: +7 3412 500–295 E-mail: editorial@udsu.ru