ЗАДАЧИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Ижевск 2017

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

Кафедра дифференциальных уравнений

ЗАДАЧИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Ижевск

2017

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174я73-4
З 153

Рекомендовано к изданию УМС УдГУ

Рецензент: д. ф.-м. н., профессор Бельтюков А. П.

Авторы-составители — **к.ф.-м.н., А. С. Банников**
к.ф.-м.н., Л. С. Чиркова

З 153 Задачи по дискретной математике.
Ижевск: ИЦ «Удмуртский университет» 2017 – 56 с.

Пособие содержит задачи с примерами решений и краткие сведения о теории множеств, комбинаторике, теории кодирования, математической логике, теории игр и других разделах дискретной математики. Адресовано студентам нематематических специальностей, а также всем, кто интересуется математикой.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174я73-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Бурное развитие информационных технологий, необходимость создания средств обработки и передачи информации и, кроме того, необходимость представления различных моделей на компьютере привели к тому, что в учебные планы различных направлений подготовки включены новые разделы математики, в частности, дискретная математика.

Теоретические разделы дискретной математики достаточно полно представлены в учебной литературе. Однако, имеется некоторый недостаток таких задач, которые были бы полезны для студентов, не являющихся математиками. Учебное пособие нацелено на начальное изучение наиболее простых разделов дискретной математики.

Первый параграф посвящен графам [9]. Во втором параграфе кратко изложена информация о логических символах, аксиомах и равносильностях логики высказываний и логики предикатов.

Третий параграф содежрит основные понятия теории множеств [17]: мощность множества, подмножества и операции над ними. В четвертом параграфе определены сочетания, соответствия, отображения и отношения, их связь с комбинаторикой. Пятый параграф рассказывает о том, как посчитать количество сочетаний и размещений.

В шестом параграфе рассмотрены три правила комбинаторики и задачи [7], в седьмом — способы расчета количества информации [41], в восьмом — элементы теории кодирования [19], в девятом — позиционные игры и игры ним [26]. Более подробно с теорией игр можно познакомиться в [1–6, 8, 10–16, 18, 20–40].

Пособие предназначено для студентов нематематических специальностей. Освоить изложенный материал может любой интересующийся математикой человек. Подходит для углубленного изучения математики в школе.

Авторы выражают благодарность Петрову Николаю Никандровичу и Маркову Ивану Константиновичу за внимание и помощь в работе.

§ 1. Графы

Графом называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются вершинами графа, а соединяющие линии — ребрами. Каждое ребро соединяет ровно две вершины. Примерами графов могут служить: любая карта дорог, схема метро, электросхема, чертеж прямоугольника.

Графы могут быть связными, например, граф на рисунке 1 – связный, или несвязными, например, граф на рисунке 2 – несвязный. Граф на рисунке 2 имеет две компоненты связности.

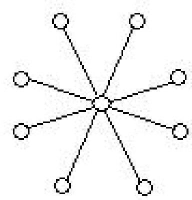

Рис. 1. Связный граф

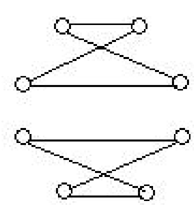

Рис. 2. Несвязный граф

Графы могут иметь изолированные вершины, например, граф, изображенный на рисунке 3, несвязный, имеет две изолированные вершины – N и M .

Степенью (или *порядком*) вершины называется количество ребер, исходящих из этой вершины. Вершина называется *четной,* если из нее выходит четное число ребер, и *нечетной,* если из нее выходит нечетное число ребер.

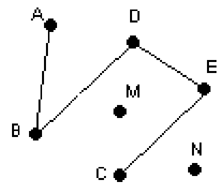

Рис. 3. M и N – изолированные вершины

В графе, изображенном на рисунке 3, вершина A имеет степень 1, вершина B – степень 2. Вершина B – четная, A – нечетная. В графе, изображенном на рисунке 1, все вершины кроме одной имеют степень 1, а вершина в центре имеет степень 6.

Пример 1. В деревне девять домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор — Диме и Никите, Евгений — сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Петр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Решение. Выпишем имена жителей и соединим соседей линиями:

Сергей — Максим — Иван — Петр — Антон

Дима — Виктор — Никита — Евгений

Из схемы-рисунка видно, что никакой путь не ведет от Петра к Никите. Граф получился несвязный. Имеет две компоненты связности. Петр и Никита находятся в разных компонентах связности.

Ответ: нет, не может.

Пример 2. В компании всего 50 компьютеров, некоторые пары соединены сетевыми шнурками. От каждого компьютера должно отходить по восемь шнурков. Сколько понадобиться сетевых шнурков?

Решение: умножаем число вершин (компьютеры) на число ребер (сетевые шнурки) и делим пополам, так как одно ребро соединяет две вершины $50 * 8/2 = 200$.

Ответ: 200 сетевых шнурков.

Граф называется *двудольным,* если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы ребра соединяли только пары вершин разного цвета.

Например, квадрат является примером двудольного графа: его вершины можно покрасить в два цвета через одну. А вот как ни крась вершины пятиугольника, обязательно найдутся две соседние вершины одного цвета.

Пример 3. На день системного администратора каждая из 10 сотрудниц компании подарила по сетевому шнурку восьми сотрудникам (так как их всегда не хватает). Известно, что каждый администратор получил по пять шнурков. Сколько всего администраторов в компании?

Решение: Подсчитаем количество «ребер»: каждая из 10 сотрудниц подарила по 8 шнурков, поэтому всего было подарено 80 шнурков. Поскольку каждый администратор получил по 5 шнурков, то всего было 16 администраторов.

Ответ: 16 администраторов.

Если в двудольном графе n белых вершин, и все они имеют степень s, то всего в графе ns ребер.

Число ребер равно сумме степеней всех белых вершин (а также равно сумме степеней всех черных вершин).

Лемма о рукопожатиях. *Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер.*

Доказательство. Подсчитаем количество концов всех ребер. Оно равно сумме степеней всех вершин. Поскольку у каждого ребра два конца, то количество ребер вдвое меньше, чем количество их концов.

Название теоремы произошло от такой задачи. В компании некоторые люди пожали руки друг другу. Докажите, что количество людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

Лемма о рукопожатиях остается верной, даже если мы разрешаем ребра, соединяющие вершину с самой собой, или ребра, соединяющие уже соединенные ребером вершины. Да ведь и пара знакомых совершает обычно много рукопожатий!

Следствие. *Число нечетных вершин графа всегда четно.*

Доказательство. Сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству ребер, то есть должна быть четной. Следовательно, в ней должно быть четное число нечетных слагаемых.

Путем в графе от вершины A до вершины B назовем такую последовательность ребер графа, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза, A — начало пути, B — конец.

Циклом называется путь, у которого начало и конец совпадают.

Граф, у которого каждая вершина соединена ребром с любой другой вершиной, называется *полным* графом.

Пример 4. Сколько ребер в полном графе: с пятью вершинами; с шестью вершинами; с n вершинами?

Решение: Любая из пяти (из шести) вершин связана со всеми остальными, то есть с четырьмя (или пятью). Каждое ребро считается дважды, так как у него есть начало и конец. Получаем общее число ребер $5 * (5 - 1)/2 = 10$ ($6 * (6 - 1)/2 = 15$).

В общем случае $n * (n - 1)/2$.

Граф называется *связным,* если для любой его вершины найдется путь, связывающий ее с любой друой вершиной этого графа.

На рисунке 1 связный граф, на рисунках 2 и 3 — несвязные графы. На рисунке 2 несвязный граф с циклом (два цикла).

Несвязный граф состоит из нескольких частей, несвязанных между собой. Эти части называют *компонентами связности.*

Пример 5. В тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, а из города Дальний — одна, а из всех остальных — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно с пересадками).

Решение: Рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Нужно доказать, что она содержит и город Дальний. Докажем от противного. Пусть в компоненте связности города Дальнего нет. Тогда в ней из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин — по 20 ребер. Таким образом, в этом графе ровно одна нечетная вершина, что противоречит теореме о количестве нечетных вершни графа.

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро один раз, называется *эйлеровым*. Пример эйлерова графа приведен на рисунке 4, пример нейэлерова графа — на рисунке 5:

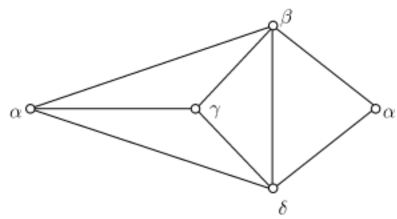

Рис. 4. Эйлеров граф

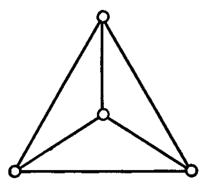

Рис. 5. Неэйлеров граф

Пример 6. Можно ли нарисовать граф, изображенный а) на рисунке 4; б) на рисунке 5, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

Решение: Разделим все вершины на три типа: начальная, конечная и промежуточные.

Поскольку из каждой промежуточной вершины мы выходим столько же раз, сколько входим, степень промежуточной вершины должна быть четной. В графе на рисунке 5 все вершины имеют нечетную степень 3, поэтому его нельзя нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

В графе на рисунке 4 есть две вершины нечетной степени. Несложно придумать, как нарисовать его, не отрывая карандаша от бумаги, если начинать и заканчивать в нечетной вершине.

Из решения задачи следует, что *эйлеров граф должен иметь не более двух нечетных вершин.* При этом граф не может иметь ровно одну нечетную вершину, поскольку количество нечетных вершин должно быть четным. Следовательно, эйлеров граф может иметь либо две нечетные вершины, либо не иметь их вовсе. Верно и обратное утверждение: *любой такой связный граф является эйлеровым.*

Связный граф без циклов называется *деревом.* На рисунке 6 приведен пример дерева.

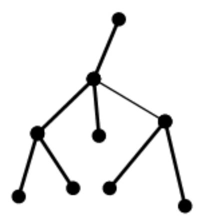

Рис. 6. Дерево

Таким образом, в дереве невозможно, передвигаясь по ребрам и не проходя по одному ребру два или более раз, вернуться в исходную вершину.

Теорема 1. *В любом дереве (в котором более одной вершины) есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину и пойдем по любому выходящему из нее ребру в другую вершину. Если из новой вершины больше ребер не выходит, то останемся в ней, в противном случае идем по любому другому ребру дальше. В этом путешествии мы никогда не сможем попасть в вершину, в которой уже были, так как это бы означало наличие цикла. Поскольку у графа конечное число вершин, то наше путешествие обязательно закончится. И закончиться оно может только в висячей вершине.

Далее будем использовать следующие обозначения: V – количество вершин графа, E – количество ребер.

Теорема 2. *В дереве количество вершин на 1 больше количества ребер* $V = E + 1$.

Доказательство. Рассмотрим дерево, содержащее E ребер. По теореме 1 в нем есть висячая вершина. Удалим ее вместе с выходящим из нее ребром. Оставшийся граф — тоже дерево, и у него тоже есть висячая вершина. Удалим и ее вместе с исходящим ребром. Повторим эту операцию E раз и получим граф, состоящий из одной вершины (ведь полученный граф уже не содержит ребер и при этом является связным). Следовательно, количество вершин изначально было равно $E + 1$.

Теорема 3. *Из любого связного графа можно удалить часть ребер (не удаляя вершин) так, чтобы осталось дерево.*

Его называют *остовным деревом графа* или *каркасом графа.*

Доказательство. Рассмотрим связный граф, не являющийся деревом. Тогда в нем есть цикл. Если из цикла удалить любое ребро, то граф останется связным. Будем удалять ребра из циклов, пока циклы есть. В итоге получим связный граф без циклов — дерево.

Итак, граф — это пара (V, E), где V – множество вершин графа, E – множество пар (u, v), где u, $v \in V$.

Два графа (V_1, E_1) и (V_2, E_2) называются *изоморфными,* если существует биекция $f : V_1 \longrightarrow V_2$, такая, что $(u, v) \in E_1$, тогда и только тогда, когда $(f(u), f(v)) \in E_2$.

Путь — это последовательность вершин и ребер v_1, e_1, v_2, e_2, $\ldots$, e_{n-1}, v_n, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Вообще говоря, вершины и ребра могут повторяться, а пути, в которых каждая вершина встречается лишь один раз, называют *простыми.* Но часто, используя термин *путь,* подразумевают простой путь.

Цикл — это путь, в котором последняя вершина совпадает с первой. Аналогично простому пути можно ввести понятие *про-*

стого цикла.

На рисунке 7 приведен пример изоморфных графов:

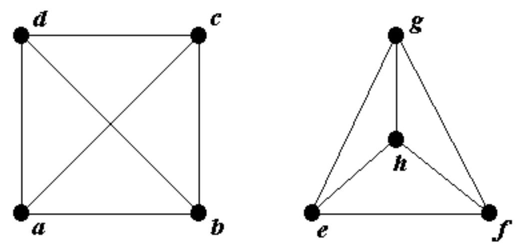

Рис. 7. Изоморфные графы

§ 2. Логика предикатов и логика высказываний

Логика высказываний изучает символы, построенные из них формулы, правила записи и преобразований формул и другие математические объекты, получающиеся абстрагированием повествовательных предложений (высказываний) естественного языка, которые подчиняются двум законам — «закону исключенного третьего» и «закону противоречия».

Закон противоречия. Высказывание и его отрицание одновременно истинными быть не могут.

Закон исключенного третьего. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, и третьей возможности не существует.

Символы — обычно это буквы латинского алфавита (могут быть с индексами), которые являются абстрактными образами высказываний, называют *высказывательными символами* или, если нет опасности недоразумений, также *высказываниями.*

Часть логики, изучающая правильность записи и преобразования формул, называется *синтаксисом.*

Часть логики, изучающая истинность высказываний, называется *семантикой.*

Часть логики, изучающая функции, область определения и область значений которых двуэлементны (обычно это множество $\{0,1\}$), называют *алгеброй логики высказываний.*

Логические символы:

$\wedge$ – логическое И, конъюнкция;

$\vee$ – логическое ИЛИ, дизъюнкция;

$\neg$ – логическое НЕ, отрицание;

$\Rightarrow$ – «следует», «влечет», импликация;

$\Leftrightarrow$ – «тогда и только тогда», эквиваленция.

Формулы логики высказываний – это последовательности высказывательных символов, логических символов и дополнительных символов «открывающая скобка» (и «закрывающая скобка»), определяемые рекурсивно:

1. каждый высказывательный символ есть формула;
2. если A, B две формулы, то формулами будут также $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $\neg A$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$;
3. других формул, кроме построенных с помощью 1,2, нет.

Логические символы по приоритету располагаются в следующем порядке $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

$(A \wedge B) \vee C = A \wedge B \vee C$;

$A \vee (B \wedge C) = A \vee B \wedge C$;

$(A \wedge B) \Rightarrow C = A \wedge B \Rightarrow C$;

$A \Rightarrow (B \wedge C) = A \Rightarrow B \wedge C$;

$(A \vee B) \Leftrightarrow C = A \vee B \Leftrightarrow C$;

$A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C) = A \Leftrightarrow B \Rightarrow C$.

Аксиомами в исчислении высказываний называют формулы

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$;
4. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$;
5. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$;
6. $A \Rightarrow (A \vee B)$;
7. $B \Rightarrow (A \vee B)$;
8. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C))$;
9. $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$;

10. $\neg\neg A \Rightarrow A$.

Если высказывание p истинно, то пишут $p = 1$, а если ложно, то $p = 0$. Процесс придания истинностного значения высказывательным символам и формулам называется *интерпретацией.*

Таблица, в которой выписаны истинностные значения формулы в зависимости от истинностных значений входящих в нее высказывательных символов, называется таблицей истинности формулы. Таблицы истинности простейших формул:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	$\neg p$
1	0
0	1

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Две формулы, имеющие одинаковые таблицы истинности, называются *равносильными.*

Перестановочный закон: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$; закон исключенного третьего: $\neg\neg a = a$; закон поглощения: $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$.

Законы де-Моргана: $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$; $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

Импликация через конъюнкцию и отрицание: $a \Rightarrow b = \neg a \vee b$. Эквиваленцию можно записать через импликацию и конъюнкцию: $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$.

Заметим, что можно провести некоторые параллели между операцией над множествами $\cup$ — объединением множеств, и логической операцией ИЛИ $\vee$, а также между операцией над множествами $\cap$ — пересечением множеств, и логической операцией И $\wedge$.

Предикатными символами называют символы, являющиеся абстракциями повествовательных предложений, которые могут касаться неизвестных предметов — предикатов.

Если предикат касается n неизвестных предметов, то его называют n-местным или n-арным. Высказывание является 0-местным предикатом. Предикатными символами обычно являются буквы латинскго алфавита, после которых в скобках стоят неизвестные, которых касается этот предикатный символ, к примеру, $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P(x)$.

Кроме логических символов $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, используемых при построении формул логики высказываний, в логике предикатов используют также *кванторы:* $\forall$ — «для всех», $\exists$ — «существует».

Две формулы исчисления предикатов называются равносильными, если они принимают одно и то же истинностное значение при любой интерпретации. Равносильности:

$\neg\forall x F(x) = \exists x \neg F(x)$,

$\neg\exists x F(x) = \forall x \neg F(x)$,

$\forall x (F(x) \wedge G(x)) = \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$,

$\exists x (F(x) \vee G(x)) = \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$,

$H \wedge \exists x F(x) = \exists x (H \wedge F(x))$,

$H \vee \forall x F(x) = \forall x (H \vee F(x))$,

$H \Rightarrow \exists x F(x) = \exists x (H \Rightarrow F(x))$,

$H \Rightarrow \forall x F(x) = \forall x (H \Rightarrow F(x))$,

$\exists x F(x) \Rightarrow H = \forall x (F(x) \Rightarrow H)$,

$\forall x F(x) \Rightarrow H = \exists x (F(x) \Rightarrow H)$,

$\forall x \forall y F(x, y) = \forall y \forall x F(x, y)$,

$\exists x \exists y F(x, y) = \exists y \exists x F(x, y)$,

где H — высказывание или предикат, который не имеет свободной переменной x.

Задача. В семье есть Иван Сидорович, Сидор Иванович, Сидор Петрович, Петр Сидорович, Петр Петрович. Один из них сейчас смотрит телевизор, его отец дремлет, брат читает газету, а дети ушли гулять. Как зовут того, кто смотрит телевизор?

Решение. Сидор Иванович — отец Ивана Сидоровича и Петра

Сидоровича. У Петра Сидоровича — два сына: Сидор Петрович и Петр Петрович, а значит, Петр Сидорович смотрит телевизор!

§ 3. Множества и операции над ними

Множество представляют как мыслимое объединение объектов в одну совокупность, которую можно именовать, производить над ней какие-то действия. Несмотря на то, что совокупность и множество являются синонимами, они различаются сферами упортебления. В математике принято использовать слово «множество». При начальном изучении множеств пользуются интуитивным представлением о них, представлением, которое создается примерами: множество целых чисел, множество вещественных чисел, множество студентов группы, множество таблиц, множество языков программирования.

То, из чего состоит множество, называют *элементами множества.* Утверждение, что a является элементом множества A, можно записать символьно: $a \in A$. Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Символьно условие равенства множеств A, B записывается следующим образом: $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Множества задают перечнем элементов, заключенным в фигурные скобки: $A = \{1, 2, 3\}$. Иногда удобно множество A определить как часть другого множества B, состоящую из тех элементов из B, которые удовлетворяют какому-то определенному условию. Множество $2\mathbb{Z}$ четных чисел можно задать формулой $2\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается специальным символом: $\varnothing$. Множество, содержащее все те элементы, которые встречаются в контексте проводимых рассуждений, называют универсальным и обычно обозначают U.

Два множества называются *равномощными*, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел и множество

$\mathbb{N} \cup \{0\}$ равномощны, так как между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие: $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $\ldots$ $n \mapsto n+1$, $\ldots$

Пустое множество и n-элементное множество называются *конечными.* Все остальные множества называются *бесконечными.*

Множество M является бесконечным тогда и только тогда, когда в нем существует собственное подмножество A, $A \subset M$, такое, что между элементами A и M можно установить взаимно однозначное соответствие.

Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называют *счетными.* Счетные множества бесконечны. Множества, равномощные интервалу $(0,1)$ вещественных чисел, называют *континуальными.* Если множество A континуально, то говорят, что оно имеет мощность *континуума.* Множество точек на прямой, множество точек на плоскости, множество точек в трехмерном пространстве континуальны.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A является подмножеством множества B и пишут $A \subseteq B$. Если при этом в B есть элементы, не лежащие в A, то говорят, что A является собственным подмножеством множества B, и пишут $A \subset B$.

Множество натуральных чисел является собственным подмножеством множества целых чисел, которое, в свою очередь, является собственным подмножеством множества рациональных чисел. Каждое множество A является подмножеством самого себя, и в каждом множестве A есть пустое подмножество: $A \subseteq A$, $\varnothing \subseteq A$.

Объединением (рис. 8) множеств A и B называется множество $A \cup B = \{x \in A \text{ или } x \in B\}$.

В объединении множеств лежат те элементы, которые лежат хотя бы в одном из рассматриваемых множеств. Объединением множеств $\{1,2,3\}$ и $\{3,4,5,6\}$ будет множество $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Пересечением (рис. 9) множеств A и B называется множество $A \cap B = \{x \in A \text{ и } x \in B\}$. В пересечении множеств лежат общие для этих множеств элементы. Пересечением множеств $\{1,2,3,4\}$

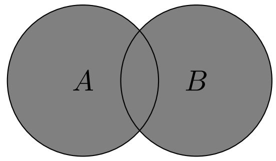

Рис. 8. Объединение множеств A и B

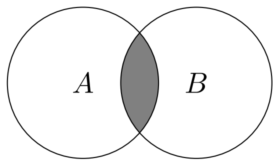

Рис. 9. Пересечение множеств A и B

и $\{3, 4, 5, 6\}$ будет множество $\{3, 4\}$.

Разностью (рис. 10) двух множеств A, B называется множество $A \backslash B = \{x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Разность двух множеств состоит из тех элементов, которые лежат в первом множестве, но не лежат во втором. Например, $\{1, 2, 3, 4\} \backslash \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2\}$.

Разность $U \backslash A$ для заданного множества A называют *дополнением* множества A (рис. 11)

Если рассуждения касались целых чисел, то универсальным множеством будет множество всех целых чисел, и дополнением множества нечетных чисел будет множество четных чисел. Дополнение множества A обозначают $\overline{A}$.

Симметрической разностью (рис. 12) множеств A, B называется множество $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Симметрическая разность двух множеств состоит из элементов этих множеств, которые лежат только в одном из них, например, $\{1, 2, 3, 4\} \triangle \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$.

Рассмотрим диаграммы Эйлера-Венна для трех множеств.

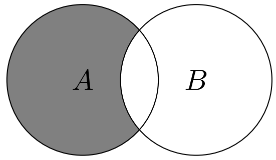

Рис. 10. Разность множеств A и B

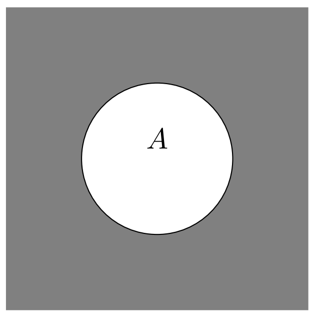

Рис. 11. Дополнение множества A

Для произвольных множеств A, B, C выполняются следующие равенства:

$$
\begin{array}{ccc}
A \cup A = A; & A \cup U = U; & A \cup \varnothing = A; \\
A \cap A = A; & A \cup B = B \cup A; & A \cap U = A; \\
A \cap \varnothing = \varnothing; & A \backslash A = \varnothing; & A \backslash \varnothing = A; \\
\varnothing \backslash A = \varnothing; & A \backslash U = \varnothing; & \overline{\varnothing} = U; \\
\overline{U} = \varnothing; & A \triangle \varnothing = A; & A \cap B = B \cap A;
\end{array}
$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

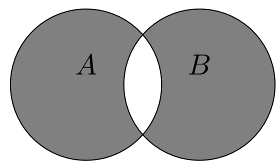

Рис. 12. Симметрическая разность множеств A и B

Задача. По изображенной на рисунке 13 диаграмме Эйлера–Венна опишите множество, заданное штриховкой.

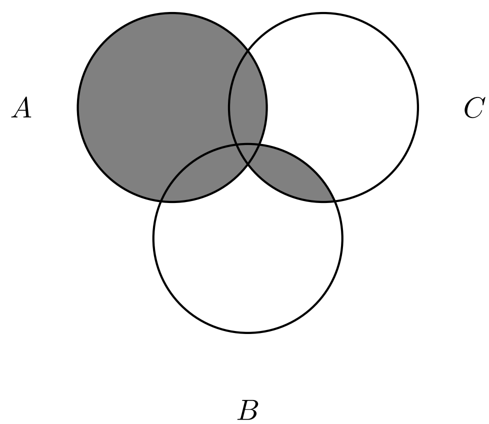

Рис. 13. Диаграмма Эйлера–Венна (пример)

Ответ: Заданное штриховкой множество можно описать следующим образом $A \cup (B \cap C)$.

Аналогичное задание для самостоятельного решения: по изображенной на рисунке 14 диаграмме опишите множество, заданное штриховкой.

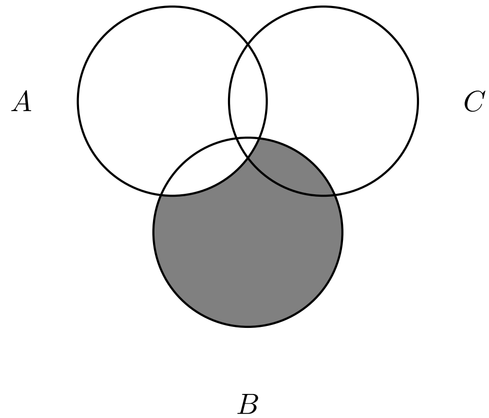

Рис. 14. Диаграмма Эйлера–Венна (задача)

§ 4. Отображения

Взяв два элемента $a \in A$, $b \in B$, A, B — произвольные множества, мы получаем пару (a, b). Совокупность всех таких пар образует множество, которое называют прямым произведением множеств A и B и обозначают $A \times B$. Таким образом, $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Если $A = \{1, 2, 3\}$, и $B = \{x, y\}$, то $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$.

Подмножества $C \subseteq A \times B$ называют соответствиями (между элементами A и B). Таким образом, установить соответствие между элементами множеств A и B означает образовать какие-то пары, первый элемент в которых берется из A, а второй — из множества B.

Соответствие называют взаимно однозначным, если выполняются два условия: для каждого элемента из A существует и притом единственный элемент из B, находящийся с ним в заданном соответствии; для каждого элемента из B существует и притом единственный элемент из A, находящийся с ним в заданном соответствии.

Соответствие $f \subseteq A \times B$ между элементами множеств A и

B называют отображением (из A в B), если для каждого $a \in A$ существует и притом единственный элемент $b \in B$ такой, что $(a, b) \in f$. То, что f является отображением из A в B, символьно записывается так: $f : A \longrightarrow B$, а то, что $(a, b) \in f$, можно передать одной из записей $b = f(a)$, $a \overset{f}{\mapsto} b$.

Отображение из числового множества в числовое называют *функцией;* отображение из множества векторов во множество векторов называют оператором; отображение из множества векторов в числовое множество называют функционалом.

Отображение $f : A \longrightarrow B$ называют *инъективным* (или отображением «в»), если для любых x, $y \in A$ из $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$. Отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 2^x$ является инъективным, а отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto f(x) = \sin x$ не является инъективным.

Отображение $f : A \longrightarrow B$ называется *сюръективным* (или отображением «на»), если для любого $y \in B$ найдется элемент $x \in A$ такой, что $f(x) = y$.

Отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 2^x$ не является сюръективным, а отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto f(x) = \sin x$ является сюръективным.

Отображение, которое одновременно является и инъективным, и сюръективным называется *биективным.* Отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 2x + 3$ является биективным.

Для двух отображений $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ определено отображение $h : A \longrightarrow C$, $x \mapsto h(x) = g(f(x))$. Это отображение называют *композицией* (или *суперпозицией*) отображений g и f и обозначают $h = g \circ f$. Для заданных отображений $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x + 1$, $x \mapsto g(x) = x^2$ композиция $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$, $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$.

На каждом множестве M определено *тождественное* (или единичное) отображение $\mathrm{id_M : M \longrightarrow M,\ id_M(x) = x}$.

Если для двух отображений $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ выполняются два условия: $f \circ g = \mathrm{id_B}$, $g \circ f = \mathrm{id_A}$, то отображения f, g обратимы, отображение f является обратным к отображению

g, а отображение g является обратным к отображению f.

Соответствие между элементами одного и того же множества называют *отношением.* Примеры: меньше или равно $\leqslant$; больше или равно $\geqslant$; строго меньше $<$; строго больше $>$; равно $=$; эквивалентно $\sim$.

Основные свойства отношения порядка $\leqslant$ (меньше или равно) на множестве M :

1) рефлексивность: $a \leqslant a$ для любого $a \in M$;

2) антисимметричность: из $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ следует $a = b$ для любых $a,\ b \in M$;

3) транзитивность: из $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$ следует $a \leqslant c$ для любых $a,\ b,\ c \in M$.

Будем считать, что на множестве M задано отношение $\leqslant$ (меньше или равно). Элемент $a \in M$ называется верхней (соответственно, нижней) гранью для подмножества $A \subseteq M$, если для любого $x \in M$ можно написать $x \leqslant a$ (соответственно, $a \leqslant x$).

Элемент $a \in M$ называется точной верхней (соответственно, точной нижней) гранью для подмножества $A \subseteq M$, если он является верхней гранью (соответственно, нижней гранью) этого подмножества, и для любой другой верхней грани (соответсвенно, нижней грани) $b \in M$ можно написать $a \leqslant b$ (соответственно, $b \leqslant a$).

Элемент $a \in M$ называется максимальным (соответственно, минимальным) во множестве M, если для любого $b \in M$ можно написать, что из $a \leqslant b$ следует $a = b$ (соответственно, из $b \leqslant a$ следует $a = b$).

Наибольший (соответственно, наименьший) элемент a во множестве M обладает свойством $x \leqslant a$ (соответственно, $a \leqslant x$) для любого $x \in M$.

§ 5. Количество сочетаний и размещений

Если множество имеет $n \geqslant 0$ элементов, то количество его r-элементных подмножеств, $r \geqslant 0$, обозначается через C_n^r (также называемое количеством сочетаний из n элементов по r элементов). В контексте вычислений слова «подмножество» и «сочетание» являются синонимами. Можно сказать, что $\{1,2,3,4\}$ и $\{4,1,2,3\}$ — это одно и то же сочетание.

Поскольку каждое множество имеет пустое подмножество, и пустое подмножество единственно, то $C_n^0=1$ для любого $n\geqslant 0$. Количество элементов во множестве и количество одноэлементных подмножеств совпадают — между элементами и одноэлементными подмножествами можно установить взаимно однозначное соответствие, образовав пары $(a,\{a\})$ для каждого элемента этого множества. Поэтому $C_n^1=n$.

Если $r>n$, то r-элементных подмножеств в n-элементном подмножестве нет, то есть количество таких подмножеств равно нулю: $C_n^r=0$ для любых $0\leqslant n\leqslant r$. В произвольном n-элементном множестве A ($n\geqslant 0$) существует единственное подмножество, содержащее все n элементов: $C_n^n=1$. В общем виде

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Задача 1. Докажите равенство:

$$C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}.$$

Доказательство:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}=\frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}=C_n^k.$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ и произвольных чисел a, b имеет место равенство $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ \dots\ +C_n^ra^{n-r}b^r+\ \dots\ +C_n^nb^n$. Эту формулу называют «бином Ньютона», числа C_n^r — биномиальными коэффициентами. При $n=1,2,3$ $a+b=C_1^0a^1+C_1^1b^1$,
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$,
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+b^3$.

Для биномиальных коэффициентов имеет место соотношение $C_n^r=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^r$, n, $r\geqslant 1$. Для небольших n, r количество сочетаний из n по r можно сосчитать при помощи так называемого *треугольника Паскаля:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
C_n^0 & C_n^1 & & \dots & & \dots & & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}$$

В треугольнике Паскаля каждый крайний элемент равен единице, а каждый не крайний элемент является суммой своих двух верхних соседей. Первые пять строк треугольника Паскаля имеют вид

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Задача 2. Найти члены, не содержащие x, в биномиальном разложении $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^{18}$.

Решение: В заданном биномиальном разложении x нет только при одинаковых степенях x^3 и $\frac{1}{x^3}$, то есть при таких коэффициентах, что $n - r = r$. Поэтому ответ C_{18}^9 : $C_{18}^9 = \frac{18!}{9!9!} = 48620$.

Пусть задано множество M. Последовательная запись нескольких элементов из M, в которой каждый элемент из M может встретиться лишь один раз, и порядок записи элементов считается существенным, называют *упорядоченным подмножеством* в M. Примером упорядоченного подмножества есть совокупность из трех спортсменов, которые выступали на соревнованиях и заняли первое, второе и третье места.

Количество r-элементных упорядоченных подмножеств в n-элментном множестве обозначается через A_n^r и называется *количеством размещений из n элементов по r*. Когда речь идет о подсчете количеств, слово «размещение» понимается как синоним словосочетания «упорядоченное подмножество». Пример:

$\{a, b, c\}$, $\{a, e, f\}$, $\{b, c, a\}$, $\{e, a, f\}$. Все четыре выписанных размещения разные. Первое и второе различаются составом элементов, первое и третье — порядком расположения элементов.

Порядок элементов в пустом множестве не обсуждается, а поскольку пустое множество одно, то $A_n^0 = 1$ при любом $n \geqslant 0$. Считается $A_n^r = 0$ при $r > n$. Учитывая, что одноэлементных подмножеств во множестве M, $M \neq \varnothing$, столько же, сколько и элементов, получаем $A_n^1 = n$ при произвольном $n = 1, 2, \ldots$ В общем виде

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Задача 3. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Решение: В этом случае надо найти число размещений (без повторений) из 25 элементов по 4. Ведь здесь играет роль и то, кто будет выбран в руководство общества, и то, какие посты займут выбранные (выбор: президент Иванов, вице-президент Татаринов, ученый секретарь Тимошенко, казначей Алексеев, отличается от выбора: президент Алексеев, вице-президент Тимошенко, ученый секретарь Татаринов, казначей Иванов).

Поэтому ответ $A_{25}^4 = 25 * 24 * 23 * 22 = 303600$.

§ 6. Три правила комбинаторики

Логическую основу комбинаторики составляют три правила — правило суммы, правило произведения и правило равенства.

Правило равенства. Когда между двумя множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то эти множества имеют одно и то же количество элементов.

Правило суммы. Пусть конечное множество A является объединением непересекающихся множеств B, C. Тогда количество элементов во множестве A является суммой количеств элементов во множествах B и C. Символьно правило суммы можно записать следующим образом: $A \cup B = \varnothing \Rightarrow |A \cap B| = |A| + |B|$.

Если на блюде лежат три апельсина, то взять один апельсин можно тремя способами (взять один из трех апельсинов). Если на другом блюде лежат два манго, то выбрать одно манго можно двумя способами (взять одно из двух манго). А выбрать один фрукт можно пятью способами.

Правило произведения. Пусть A, B, C — множества, причем множество A состоит из всех пар (x, y), где $x \in B$, $y \in C$. Тогда $|A| = |B| * |C|$.

Сколько слов, содержащих 6 букв, можно составитть из 33 букв русского алфавита при условии, что любые две стоящие рядом буквы различны (например, слово «корова» допускается, а слово «колосс» нет)? При этом учитываются не только слова, имеющие смысл, но и такие бессмысленные, как «трнаук». В этом случае на первое место у нас 33 кандидата. Но после того как первая буква будет выбрана, вторую можно выбрать лишь 32 способами — ведь повторять первую букву нельзя. На третье место тоже 32 кандидата — первую букву уже можно употребить, а вторую — нельзя. Так же убеждаемся, что на все места, кроме первого, имеется 32 кандидата. А так как число этих мест равно 5, то получаем ответ $33 * 32^5 = 1107296256$.

Имеется бланк, в котором k мест. Все места вакантны. Их надо заполнить элементами. На каждое место можно разместить элемент одного из n видов (элементов каждого вида достаточное количество, поэтому элементы могут повторяться). Два способа считаются различными, если хотя бы на одном месте в них стоят разные элементы. Сколько существует способов заполнить такой бланк?

Каждый способ заполения дает нам так называемое *размещение с повторениями из n элементов по k*. Число таких размещений обозначают $\overline{A}_n^k$. Из правила произведения вытекает $\overline{A}_n^k = n^k$ — производится последовательный выбор k элементов, каждый можно выбрать n способами (ведь элементы могут повторяться), поэтому число способов выбрать размещение равно произведению

k сомножителей, каждый из которых равен n.

Для запирания сейфов и автоматических камер хранения багажа применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано некоторое «тайное слово» или тайный набор цифр. Это слово набирают с помощью одного или нескольких дисков, на которых нанесены буквы или цифры.

Пусть число букв на каждом диске равно 12, а число дисков равно 5. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова и подбирающим его наудачу?

Из условия задачи видно, что порядок набираемых букв существенен. Поэтому можно применить формулу подсчета размещений с повторениями. Так как по условию буква на каждом диске может быть набрана 12 способами, а дисков 5, то получаем, что число комбинаций равно $12^5 = 248832$. Значит, неудачных попыток может быть 248831.

В десятичной системе счисления число раскладывается по степеням числа 10, то есть $\overline{abc} = a * 10^2 + b * 10^1 + c * 10^0$ (черта сверху обозначает, что это число, записанное цифрами a, b, c, а не произведение abc), при этом используются 10 цифр. В n-ичной системе счисления число раскладывается по степеням числа n, то есть $\overline{abc} = a * n^2 + b * n^1 + c * n^0$, при этом используются n цифр. Например, программистам удобно пользоваться шестнадцатиричной системой счисления, в ней 16 «цифр»: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$, $E = 14$, $F = 15$.

Если допустить записи, начинающиеся с нуля, то каждое k-значное число в n-ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из k цифр, причем цифры бывают n видов. Получаем, что количество чисел, имеющих такую запись, равно n^k. Но для натуральных чисел не применяют записей, начинающихся с нуля. Поэтому из n^k надо вычесть количество чисел, n-ичная запись которых начинается с нуля. Если отбросить у этих чисел первую цифру - нуль, то получим $(k-1)$-значное число (может быть, также начинающееся с нуля). Таких чисел по той же самой формуле будет n^{k-1}. Значит, общее количество k-значных чисел в n-ичной системе счисления равно $n^k - n^{k-1} = n^{k-1}(n-1)$.

Предположим, что тайный набор цифр к замку из задачи, изложенной выше, хотят передать в виде сообщения из k знаков, каждое одного из двух видов: 0 или 1. Каково наименьшее нужное для этого число знаков?

Мы уже знаем, что из k таких знаков можно составить 2^k различных комбинаций, каждая — некоторое двоичное k-значное число. Каждому возможному набору цифр замка должно соответствовать свое k-значное число, поэтому минимальное число знаков, с помощью которых можно передать требуемую информацию, должно быть таким, чтобы выполнялось неравенство $2^k \geqslant 248832$. Это будет при $k \geqslant 18$. Итак, для передачи такого «пароля» с помощью знаков двух видов надо использовать не менее 18 знаков.

Подобная оценка важна, когда передача информации сопряжена с большими техническими трудностями (например, при передаче фотографического снимка с космического корабля) и каждый знак идет «на вес золота». Тогда приходится рассматривать различные возможности такой передачи и выбирать наиболее экономные. Эти вопросы изучаются в разделе математики, называемом *теорией передачи информации.*

§ 7. Количество информации

В 1928 году американский инженер Р. Хартли предложил научный подход к оценке сообщений. Предложенная им формула имела следующий вид: $I = \log_2 K$, где K — количество равновероятных событий; I — количество бит в сообщении, такое, что любое из K событий произошло.

Иногда формулу Хартли записывают следующим образом: $I = \log_2 K = \log_2(\frac{1}{p}) = -\log_2 p$, так как каждое из K событий имеет равновероятный исход $p = \frac{1}{K}$.

Задача 1. Шарик находится в одной из трех урн: A, B или

C. Определить, сколько бит информации содержит сообщение о том, что он находится в урне B.

Решение. Такое сообщение содержит $I = \log_2 3 = 1,585$ бита информации. На практике округляем до 2 бит.

Но не все ситуации имеют одинаковые вероятности реализации. Например, если бросают несимметричную монету.

В 1948 году американский инженер и математик К. Шеннон предложил формулу для вычисления количества информации для событий с различными вероятностями. Если I — количество информации, K — количество возможных событий, p_i — вероятности отдельных событий, то количество информации для событий с различными вероятностями можно определить по формуле: $I = -\sum_{i=1}^{K} p_i \log_2 p_i$.

Формулу Хартли теперь можно рассматривать как частный случай формулы Шеннона — при равновероятных событиях получаемое количество информации максимально.

Задача 2. Сколько различных чисел можно закодировать с помощью 8 бит?

Решение. $I = 8$ бит, $K = 2^I = 2^8 = 256$ различных чисел.

При передаче и хранении информации с помощью различных технических устройств информацию следует рассматривать как последовательность знаков (цифр, букв, кодов цветов точек изображения), не рассматривая ее содержание.

Считая, что алфавит (набор символов знаковой системы) - это событие, то появление одного из символов в сообщении можно рассматривать как одно из состояний события. Если появление символов равновероятно, то можно рассчитать, сколько бит информации несет каждый символ. Информационная емкость знаков определяется их количеством в алфавите. Чем из большего количества символов состоит алфавит, тем большее количество информации несет один знак. Полное число символов алфавита принято называть мощностью алфавита.

Молекулы ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты) состоят из четырех различных составляющих (нуклеотидов), которые образуют генетический алфавит. Информационная емкость знака этого алфавита составляет: $4 = 2^I$, то есть $I = 2$ бит.

Каждая буква русского алфавита (если считать, что е и ё - один и тот же символ) несет информацию 5 бит, так как $32 = 2^I$.

§ 8. Элементы теории кодирования

В теории передачи информации чрезвычайно важным является решение проблемы кодирования и декодирования, обеспечивающее надежную передачу по каналам связи с «шумом».

Передача информации сводится к передаче по некоторому каналу связи символов некоторого алфавита. Однако в реальных ситуациях сигналы при передаче практически всегда могут искажаться, и переданный символ будет восприниматься неправильно. Например, одна из вычислительных машин может быть связана с другой через спутник. Канал связи в этом случае физически реализуется электромагнитным полем между поверхностью Земли и спутником. Электромагнитные сигналы, накладываясь на внешнее поле, могут исказиться и ослабиться. Для обеспечения надежности передачи информации в таких системах разработаны эффективные методы, использующие коды различных типов.

Рассмотрим одну из таких моделей, связанную с *групповыми кодами.*

Алфавит, в котором записываются сообщения, считаем состоящим из двух символов $\{0, 1\}$. Он называется двоичным алфавитом. Тогда сообщение есть конечная последовательность символов этого алфавита. Сообщение, подлежащее передаче, кодируется по определенной схеме более длинной последовательностью символов в алфавите $\{0, 1\}$. Эта последовательность называется *кодом* или *кодовым словом.*

При приеме можно исправлять или распознавать ошибки, возникшие при передаче по каналу связи, анализируя информацию, содержащуюся в дополнительных символах. Принятая последовательность символов декодируется по определенной схеме в сообщение, с большой вероятностью совпадающее с переданным.

Блочный двоичный (m,n)-код определяется двумя функциями $E:\{0,1\}^m \longrightarrow \{0,1\}^n$ и $D:\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^m$, где $m \leqslant n$ и $\{0,1\}^n$ — множество всех двоичных последовательностей длины n. Функция E определяет схему кодирования, а функция D — схему декодирования. Математическую модель системы связи можно представить в виде схемы 15

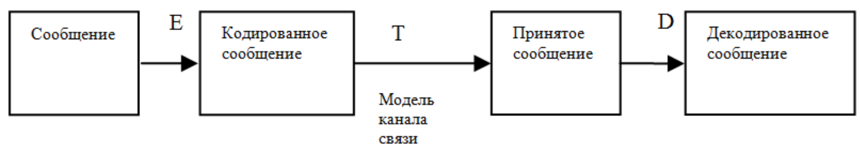

Рис. 15. Математическая модель системы связи

Здесь T — «функция ошибок»; E и D выбираются таким образом, чтобы композиция $D \circ T \circ E$ была функцией, с большой вероятностью близкой к тождественной. Двоичный (m,n)-код содержит 2^m кодовых слов.

Коды делятся на два больших класса: коды с обнаружением ошибок, которые с большой вероятностью определяют наличие ошибки в принятом сообщении, и коды с исправлением ошибок, которые с большой вероятностью могут восстановить посланное сообщение.

Пример 1. Код с проверкой четности. Это пример простого кода, с большой вероятностью указывающий на наличие ошибки.

Пусть $a = a_1 \ \dots \ a_m$ — сообщение длины m. Схема кодирования определяется таким образом: $E(a) = b = b_1 \ \dots \ b_{m+1}$, где $b_i = a_i$ при $i = 1, \ \dots, m$; $b_{m+1} = 0$, если $\sum_{i=1}^m b_i$ — четное число; $b_{m+1} = 1$, если $\sum_{i=1}^m b_i$ — нечетное число.

Схема декодирования: $D(b) = c = c_1 \ \dots \ c_m$, где $c_i = b_i$ при $i = 1, \ \dots \ m$. Например, при $m = 2$ $E(00) = 000$, $E(01) = 011$, $E(10) = 101$, $E(11) = 110$. Очевидно, подразрядная сумма любой кодированной последовательности $\sum_{i=1}^{m+1} b_i$ должна быть четной, то есть $b_1 + \ \dots \ + b_{m+1} \equiv 0 (\mod 2)$. Если $\sum_{i=1}^{m+1} b_i$ нечетная, то это означает, что при передаче сообщения произошла ошибка. Однако, если $\sum_{i=1}^{m+1} b_i$ четная, то это еще не означает, что ошибки не было. Подразрядная сумма остается четной при двух ошибках и вообще любом четном их числе.

Пример 2. Код с тройным повторением. Это пример весьма неэкономного кода с исправлением ошибок.

Схема кодирования, то есть функция E, определяется таким образом: каждое сообщение разбивается на блоки длины m и каждый блок передается трижды.

Схема декодирования, то есть функция D, определяется следующим образом: принятое сообщение разбивается на блоки длины $3m$, и в каждом блоке из трех символов b_i, b_{i+m}, b_{i+2m}, принимающих значение 0 или 1, выбирается тот, который встретился большее число раз (два или три раза). Этот символ считается i-м символом в декодированном сообщении.

Более подробно рассмотреть избыточность помогут следующие примеры. Рассказывают, что однажды редактор провинциальной газеты поместил такое сообщение о коронации Николая II: «Митрополит возложил на голову Его Императорского Величества ворону». На другой день было дано исправление опечатки: вместо «ворону» читать «корову». Однако, и так понятно, что было возложено на голову.

В современных терминах об этой ситуации можно сказать так. При передаче информации от корреспондента газеты читателям в тексте возникли искажения. Но *избыточность* языка позволяет выявить ошибку и однозначно восстановить правильный ответ.

Избыточность означает, что ту же самую информацию можно передать, затратив меньше символов. Довольно часто избыточность стараются устранить, так как это позволяет экономичнее передавать и сохранять информацию (в компьютере, в памяти мобильного телефона и в других устройствах). Файл меньшего объема может быть получен быстрее и займет меньше места на носителе.

Существует специальный класс компьютерных программ, называемых *архиваторами,* задача которых — уменьшить объем информации, не искажая ее.

Архиватор должен сжать файл, но так, чтобы можно было произвести и обратное преобразование, то есть по сжатому файлу восстановить исходный. Для этих программ разработан ряд математических алгоритмов, позволяющих решить данную задачу. Основная сложность задачи заключается в том, что для разных видов информации оптимальны разные алгоритмы сжатия, учитывающие особенности данного типа информации. Программа должна проанализировать содержимое файла и подобрать оптимальные параметры алгоритма для его сжатия. Комбинаторика играет в данных алгоритмах важную роль.

Помимо архиваторов общего назначения, которые могут сжать любой файл (не всегда эффективно), существует ряд специализированных алгоритмов. Они применяются для сжатия мультимедийной информации (изображения, музыка, видео), отличающейся тем, что она передает множество мелких деталей (типа отдельных точек на изображении высокого разрешения), каждая из которых по отдельности не воспринимается. Соответствующие алгоритмы осуществляют сжатие *с потерями информации,* при котором малосущественные детали пропадают. Обычно при этом можно выбрать степень сжатия, соблюдая разумный баланс между качеством и объемом информации.

Например, сжатие фотографий алгоритмом JPEG основано на том, что цвета соседних точек, как правило, близки. Искажения проявляются на резких границах цветовых зон, которые становятся более размытыми. Алгоритм сжатия музыки MP3 основан на том, что человеческое ухо воспринимает колебания только в определенном диапазоне частот. Колебания вне этого диапазона мы все равно не слышим, так что их можно убрать.

Также можно немного загрубить те колебания, которые мы слышим. Для того, чтобы заметить разницу, нужно иметь хороший музыкальный слух. Зато это позволяет сжать музыкальный файл в 10 раз по сравнению с тем, как он хранится на аудио компакт-дисках.

Естесственные языки обладают значительной избыточностью. Избыточность различных естественных языков практически одинакова и достигает 75-80 процентов.

Избыточность естественного языка совершенно необходима, чтобы люди могли общаться, несмотря на окружающие шумы и особенности индивидуальной дикции, она естественным образом поддерживается в ходе эволюции языков, и выполняет определенную функцию по защите от помех. А поскольку эти звуковые помехи не сильно различаются в разных местностях, то это и является причиной того, что величины избыточности разных языков оказываются близки.

Во многих языках необходимо вводить избыточность искусственным образом для защиты важных данных от ошибок и искажений. Так, в финансовых документах основные денежные суммы часто пишут дважды: один раз цифрами, а второй раз — прописью(словами). Такое дублирование в определенной степени защищает важную информацию в документах от ошибок, как случайных, так и преднамеренных.

Существует область математики, которая изучает использование избыточности в подобных целях, она была создана американским математиком Клодом Шенноном и называется *теория передачи информации.* В ней рассматривается ситуация, когда сообщения передаются по каналу связи с помехами (*шумами*), искажающими сообщение. Умелое добавление избыточности позволяет при определенных условиях (если ошибок не слишком много) обнаруживать ошибки и исправлять их.

Обычно при передаче информации используется двоичный канал. Шум проявляет себя тем, что иногда меняет ноль на единицу или наоборот. Простейший метод обнаружения ошибок (и один из первых) называется *контроль по четности.* Передаваемая последовательность делится на блоки одинаковой длины. К каждому блоку добавляется в конце один двоичный символ так, чтобы общее количество единиц в каждом блоке было четным. Например, если разделить сообщение 0010000100010000000100000001000010000 на блоки длины 7, то сообщение превратится в следующее 00100001 10001000 00001001 ...

Первые семь символов в каждом блоке называются *информационными,* так как они в точности содержат передаваемую информацию.

Добавляемые последние символы называются *проверочными.* Они не содержат никакой новой информации, так как однозначно определяются по информационным символам, зато явным образом вносят в сообщение избыточность — если при передаче произойдет одна ошибка в одном блоке, то количество единиц станет нечетным, и получатель это обнаружит. Правда, определить точное место ошибки и исправить ее не сможет. А если в одном блоке произойдет две ошибки, то этот факт даже не будет обнаружен. Говорят, что контроль по четности *обнаруживает одну ошибку.*

Возникает вопрос: нельзя ли так организовать передачу сообщения, чтобы при возникновении сбоя можно было бы обнаружить не только факт сбоя, но и место ошибки и исправить ее? Такие методы существуют. Рассмотрим один класс *кодов, исправляющих ошибки,* который предложил американский математик Ричард Хемминг. Чтобы понять принцип кода Хемминга, рассмотрим контроль по четности с позиции комбинаторики.

Назовем *расстоянием* между двумя словами количество позиций, на которых символы в этих словах различаются. Например, 11110000 отстоит от 11110001 на расстояние один, а от 01110001 на расстояние два.

Каждая ошибка, произошедшая в слове при передаче, увеличивает расстояние между переданным и принятым словами на 1.

Когда мы используем для передачи информации некоторый *код,* то это означает, что мы выбираем среди всех возможных слов некоторый набор допустимых, которые называются *кодовыми словами,* и используем для передачи только их. Так, в приведенном выше примере код состоит из всех последовательностей длины восемь, в которых число единиц четно. Расстояние между двумя различными такими словами не меньше двух. Поэтому одна ошибка обязательно переводит допустимое слово в недопустимое, что и позволяет ее обнаружить.

А чтобы одну ошибку можно было не только заметить, но и исправить, надо, чтобы расстояние между двумя допустимыми словами было не меньше трех. Тогда любая одиночная ошибка приведет к тому, что будет получено недопустимое слово, отстоящее на 1 от передаваемого. При этом от любого другого кодового слова оно будет отстоять на расстояние 2 или больше. Это позволяет однозначно восстановить передаваемое слово, то есть исправить ошибку.

В коде Хемминга мы делим исходную последовательность на блоки, содержащие по четыре информационных символа, и добавляем к каждому такому блоку три проверочных символа. Первый проверочный символ дополняет по четности символы с номерами 2, 3 и 4, второй — 1,3 и 4, третий — 1, 2 и 4. Например, желая передать блок 1011, мы добавляем к нему проверочные символы 010 и посылаем блок 1011010. Иными словами, мы тратим семь двоичных символов для того, чтобы передать лишь четыре. Говорят, что мы передаем информацию со скоростью 4/7.

Проверим, что расстояние между любой парой кодовых слов не меньше трех. Проверки по четности формируются так, чтобы выполнялось два условия. Во-первых, любой информационный символ должен входить как минимум в две проверки. Во-вторых, для любой пары информационных символов должна существовать проверка, в которой проверяется только один из них.

Тогда, если мы изменим один информационный символ, то в силу первого условия изменятся не менее двух проверочных, и блоки окажутся друг от друга на расстоянии 3 (или больше).

Если изменятся два информационных символа, то в силу второго условия будет также изменен хотя бы один проверочный, и мы приходим к тому же выводу.

Если же изменятся три или более информационных символа, то соответствующие кодовые слова уже окажутся на расстоянии не менее трех.

Разумееется, использование кодов, исправляющих ошибки, происходит не бесплатно — запас допустимых слов оказывается меньше, чем запас всех слов заданной длины n (как и в естественных языках — не любая совокупность знаков имеет смысл). Для оценки эффективности данного кода надо знать, каким вообще может быть *объем* $M(n,r)$ кода, использующего кодовые слова длины n из цифр 0 и 1, отличающиеся друг от друга по крайней мере в $2r+1$ координате.

Мы рассматриваем случай $n=7$, $r=1$ — кодовые слова из семи знаков, расстояние между ними 3. Всего слов длины 7 будет 2^7. К каждому допустимому примыкают C_7^1 слов, находящихся от него на расстоянии 1 — они получаются изменением одного из семи знаков. Всего получаем пачку из восьми слов на одно допустимое. Значит, допустимых слов не больше, чем $2^7:8=16$. Таким образом, построенный код Хемминга оптимален.

Итак, на множестве двоичных слов длины m расстоянием $d(a,b)$ между словами a и b называют число несовпадающих позиций этих слов. Определенное таким образом понятие называется *расстоянием Хемминга.* Оно удовлетворяет следующим *аксиомам расстояний:*

1) $d(a,b)\geqslant 0$ и $d(a,b)=0$ тогда и только тогда, когда $a=b$;
2) $d(a,b)=d(b,a)$;
3) $d(a,b)+d(b,c)\geqslant d(a,c)$ неравенство треугольника.

Весом $\omega(a)$ слова a называют число единиц среди его координат. Тогда расстояние между словами a и b есть вес их суммы $a+b:$ $d(a,b)=\omega(a+b)$, где символом $+$ обозначена операция покоординатного сложения по модулю 2.

Интуитивно понятно, что код тем лучше приспособлен к обнаружению и исправлению ошибок, чем больше различаются кодовые слова. Понятия расстояния Хемминга позволяет это уточнить. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Для того, чтобы код позволял обнаруживать ошибки в k (или менее) позициях, необходимо и достаточно, чтобы наименьшее расстояние между кодовыми словами было не меньше $k+1$.

Теорема 2. Для того, чтобы код позволял исправлять все ошибки в k (или менее) позициях, необходимо и достаточно, чтобы наименьшее расстояние между кодовыми словами было не меньше $2k+1$.

§ 9. Игры

Теория игр – это раздел математики, изучающий методы анализа и оценки конфликтных ситуаций. Ситуация называется конфликтной, если в ней участвуют стороны, интересы которых полностью или частично противоположны.

Если имеется несколько конфликтующих сторон (лиц), каждая из которых принимает некоторое решение, определяемое заданным набором правил, и каждой из сторон известно возможное конечное состояние конфликтной ситуации с заранее определенными для каждой из сторон платежами, то говорят, что имеет место игра.

Игра – это действительный или формальный конфликт, в котором имеется по крайней мере два участника (игрока), каждый из которых стремится к достижению собственных целей.

Задача теории игр состоит в выборе такой линии поведения игрока, отклонение от которой может лишь уменьшить его выигрыш. Допустимые действия каждого из игроков, направленные на достижение некоторой цели, называются правилами игры.

Ходом называется выбор одного из предложенных правилами игры действий и его осуществление.

Однозначное описание выбора игрока в каждой из возможных ситуаций, при которой он должен сделать личный ход, называется стратегией игрока.

Стратегия игрока называется оптимальной, если при многократном повторении игры она обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш).

В каждой партии игрок выбирает некоторую свою стратегию, в результате чего складывается набор стратегий, называемый ситуацией.

Рассмотрим следующую задачу. На столе лежат k кучек камней. Двое играющих по очереди берут произвольное количество камней из одной какой-либо кучки (но не менее одного). Выигрывает тот, кто сделав очередной ход, заберет последний камень. Эту задачу называют *игрой ним.*

Положим, что кучках с номерами 1,2,3, $\ldots$, k находится S_1, S_2, $\ldots$, S_k камней. Представим S_1, S_2, $\ldots$, S_k в двоичной системе исчисления, причем добьемся того, чтобы общее количество цифр в двоичном представлении чисел S_1, S_2, $\ldots$, S_k было одно и то же. Для этого допишем в каждом представлении такое количество нулей впереди, какое необходимо. Например, если $2 = \overline{10}$, $5 = \overline{101}$, то представим 2 в виде $\overline{010}$.

Пусть в двоичном представлении чисел S_1, S_2, $\ldots$, S_k по n цифр $S_1 = \overline{a_n^1 a_{n-1}^1 \ldots a_1^1}$, $\ldots$, $S_k = \overline{a_n^k a_{n-1}^k \ldots a_1^k}$, $a_i^j \in \{0, 1\}$. Вычислим сумму $A_j = a_j^1 + a_j^2 + \cdots + a_j^k$ для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Теорема 1. Если A_j — четны для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, то выигрывает второй игрок, в противном случае выигрывает первый игрок.

Доказательство. Предположим, что существует j, такой что A_j нечетно. Покажем, что в этом случае выигрывает первый игрок. Доказательство проведем индукцией по k.

При $k = 1$ утверждение очевидно. В этом случае первый игрок выигрывает, забирая сразу все камни. Итак, пусть $k = l > 1$. Пусть j – такой номер, что A_j нечетно, и для всех $i > j$ A_i четно. Так как A_j нечетно, то найдется кучка с номером p такая, что $a_j^p = 1$.

Пусть далее $r_1 < r_2 < \cdots < r_m = j$ таковы, что A_{r_i} нечетны и $a_{r_i}^p = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

И пусть $q_1 < q_2 < \cdots < q_t$ таковы, что A_{q_i} нечетны, и $a_{q_i}^p = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$.

Возьмем из кучки с номером p количество камней, равное S, где $S = 2^{r_1-1} + 2^{r_2-1} + \dots + 2^{r_m-1} - (2^{q_1-1} + 2^{q_2-1} + \dots + 2^{q_t-1})$.

Отметим, что $S > 0$ и, кроме того, после данного хода первого игрока получим такое распределение камней по кучкам, при котором все A_j будут четными.

Если все $A_j = 0$, то первый игрок уже выиграл. В противном случае после хода второго игрока опять получим такое распределение по кучкам, при котором хотя бы одна из сумм A_j будет нечетной. Поэтому, на каждом шаге первый игрок может добиться того, чтобы после его хода все A_j были четными.

Так как общее количество камней конечно, то за конечное число ходов получим, что в какой-то кучке число камней будет равно нулю и поэтому, в силу индукционного предположения первая часть теоремы доказана.

Если же все A_j четны, то после каждого хода первого игрока, второй игрок делает ход таким образом, чтобы все A_j были четными, и, поэтому, по ранее доказанному в данном случае выигрывает второй игрок. Теорема доказана.

Пример. Пусть имеются три кучки ($k = 3$). В первой кучке 5, во второй 3 и в третьей кучке 8 камней. Представим 5, 3 и 8 в двоичной системе. Получим $5 = S_1 = \overline{0101}$, $3 = S_2 = \overline{0011}$, $8 = S_3 = \overline{1000}$. Вычислим $A_1 = 1 + 1 = 2$, $A_2 = 1$, $A_3 = 1$, $A_4 = 1$. Так как $A_4 = 1$ – нечетно, и $a_4^3 = 1$, то $p = 3$ (это означает, что первый игрок своим первым ходом берет камни из третьей кучки). В этом случае $r_1 = 4$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$ и поэтому первый игрок должен взять из третьей кучки количество камней, равное $2^{r_1-1} - 2^{q_2-1} - 2^{q_3-1} = 2$. После первого хода первого игрока в кучках останется соответственно 5, 3, 6 камней.

Обобщенный ним. На столе лежат k кучек камней. Двое играющих по очереди берут из одной какой-нибудь кучки число камней, не превосходящее m (но не менее одного). Выигрывает тот, кто своим последним ходом заберет последний камень.

Пусть в кучках с номерами 1, 2, ..., k лежит S_1, S_2, ..., S_k камней. И пусть m_1, m_2, ..., m_k остатки от деления соответственно S_1, S_2, ..., S_k на $m+1$, и A_j — суммы, вычисляемые как в игре ним по отношению к числам m_1, m_2, $\ldots$, m_k.

Теорема 2. Если все A_j четны, $j = 1, \ldots, k$, то в обобщенной игре ним выигрывает второй игрок, в противном случае выигрывает первый игрок.

Игра Мура. Имеется k кучек камней. Двое играющих по очереди берут не менее одного камня из любого количества кучек, не превосходящего l. Выигрывает тот, кто своим очередным ходом забирает последний камень. Пусть A_j — суммы, вычисляемые как в игре ним. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если все суммы A_j делятся на $l+1$ без остатка, то выигрывает второй игрок, в противном случае выигрывает первый игрок.

Следующая задача относится к другому классу игровых задач, а именно: позиционные игры.

Задача. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 2, а во второй — 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или утраивает число камней в какой-то куче, или добавляет 4 камня в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда общее число камней в двух кучах становится не менее 30. Если в момент завершения игры общее число камней в двух кучах не менее 41, то выиграл Петя, в противном случае — Ваня. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

Решение. Стартовая позиция игры — пара чисел 2 и 3. В одной куче 2 камня, в другой — 3. Запишем эту пару как (2,3).

Первый ход делает Петя. Он может либо утроить число камней в какой-либо куче, либо добавить к какой-нибудь куче 4 камня. Все возможные комбинации (2, 9), (2, 7), (6,3).

Второй ход игры делает Ваня, а для Вани это первый ход. Можно перебрать все варианты хода Вани, и выбрать среди пар выигрышные ходы. Получается, что Ване надо будет ответить на

	1 ход	2 ход	3 ход	4 ход
Старт позиция	**Петя все варианты хода**	**Ваня выигрышные ходы**	**Петя все варианты хода, кроме непосредственно проигрышных**	**Ваня выигрышные ходы**
2, 3	2,9	**6,9**	18, 9	**22, 9**
				18, 13
			10, 9	**30, 9**
				10, 27
			6, 13	**18, 13**
	2, 7	**6, 7**	18, 7	**18, 21**
			6, 21	**18, 21**
				6, 25
			10, 7	**30, 7**
				10, 21
			6, 11	**6, 33**
	6, 3	**6, 9**	Те же варианты 3-4 хода	
		6, 7		

(2,9) ходом (6,9), на ход (2,7) — (6,7), на ход (6,3) любым из этих.

Снова ходит Петя. Это третий ход игры, второй ход Пети. Петя может ответить Ване на (6,9) только ходами (18,9), (10,9), (6,13), а на ход Вани (6,7) — (18,7), (6,21), (10,7), (6,11). Остальные ходы Пети будут заведомом проигрышные.

На 4 ходу игры, своим вторым ходом Ваня может ответить на ход (18,9) – ходом (22,9), на ход (10,9) – ходом (10,27), на ход (6,13) – ходом (18,13), на ходы (18,7) и (6,21) ходом (18,21), на ход (10,7) — (10,21), а на ход (6, 11) — (6,33).

Мы перебрали все варианты хода Пети, получается, выигрывает Ваня. На своем первом ходу он должен сходить либо (6,9), либо (6,7).

Часто решение подобных задач записывают в виде дерева игры, либо таблицы, которая содержит неполное дерево игры.

ЗАДАНИЯ

1. По изображенным на рисунках 16 - 21 диаграммам Эйлера–Венна опишите множество, заданное штриховкой.

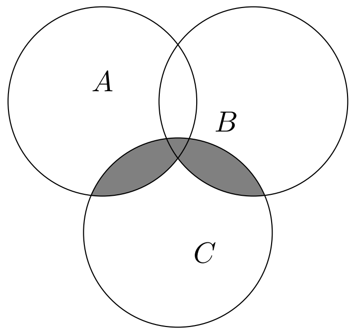

Рис. 16. Диаграмма Эйлера–Венна (задача 1, а)

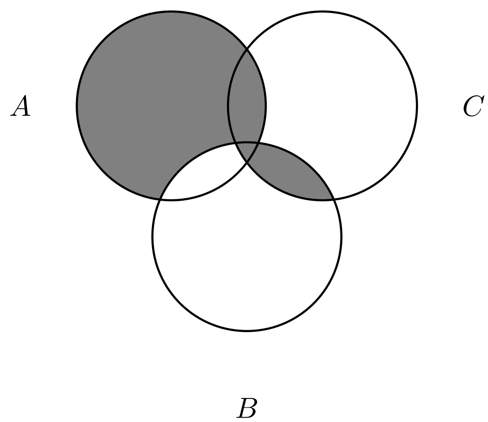

Рис. 17. Диаграмма Эйлера–Венна (задача 1, б)

2. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон

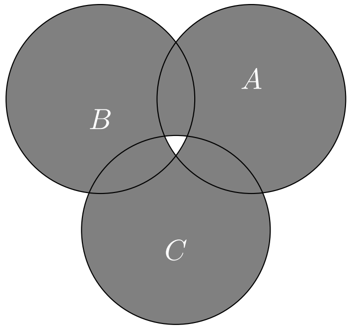

Рис. 18. Диаграмма Эйлера–Венна (задача 1, в)

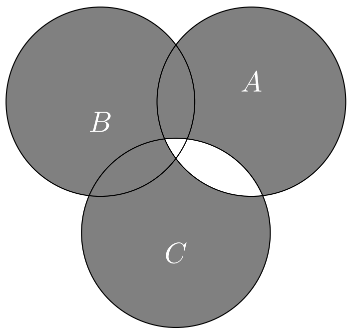

Рис. 19. Диаграмма Эйлера–Венна (задача 1, г)

— Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс — Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

3. В фирме пятьдесят компьютеров, некоторые пары компьютеров должны быть соединены кабелями. От каждого компьютера должно отходить по восемь кабелей. Сколько всего понадобиться кабелей?

4. В графе сорок вершин, каждая степени семь. Сколько ребер в графе?

5. В стране пятнадцать городов, каждый из которых соединен дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из лю-

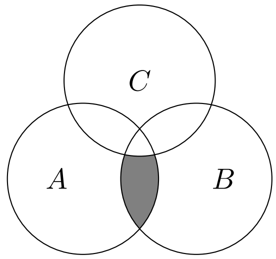

Рис. 20. Диаграмма Эйлера–Венна (задача 1, д)

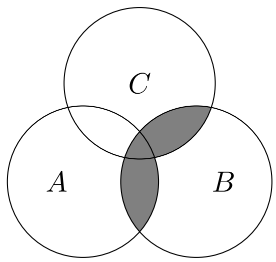

Рис. 21. Диаграмма Эйлера–Венна (задача 1, е)

бого города можно добраться в любой другой город, возможно, проезжая через другие города.

6. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там, на заколдованном озере имеются семь островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

7. В графе с восьмью вершинами степень каждой вершины равна двум. Нарисуйте все такие графы. Не забывайте, что графы могут быть несвязными.

8. Нарисуйте все деревья с пятью вершинами. Объясните, почему других деревьев нет.

9. Можно ли 2007 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый был соединен ровно с 2005?

10. Иванов, Петров и Сидоров — разного возраста. Их зовут Иван, Петр и Сидор, их отцов звали так же. Определите, как пол-

ностью зовут каждого и кто кого старше, если известно что: никого не зовут так, как его отца; Иван младше Петровича, Петров младше Сидоровича, а Сидоров младше Сидора.

11. Докажите равенство $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$.

12. Докажите равенство $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - \cdots = 0$.

13. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[6]{16} - \sqrt[4]{8})^{24}$ являются целыми числами?

14. В биномиальном разложении $\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y^2}{x^3}\right)^{36}$ найти члены разложения, не содержащие x.

15. Из двух спортивных сообществ, насчитывающих по сто фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

16. Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C — три. Сколько путей, проходящих через B, ведут из A в C?

17. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

18. Из трех типов ручек, семи типов карандашей и семи типов ластиков надо выбрать ручку, карандаш и ластик. Сколькими способами это можно сделать?

19. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что все студенты экзамен сдали (получив отметку 3, 4 или 5)?

20. Надо срочно доставить шесть пакетов разным адресатам. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров, и каждое письмо можно дать любому из курьеров? Курьер сам решает, в каком порядке доставлять данные ему письма.

21. Вероятность перового события составляет 0,5, а второго и третьего 0,25. Какое количество информации мы получим после реализации одного из них?

22. Даны числа 1, 2, ..., 100. Найдите наименьшее число m,

обладающее таким свойством: какие бы m из данных чисел ни выбрать, среди них найдутся два, из которых одно делится на другое.

23. Девять человек разбиваются на три тройки четыре дня подряд различными способами. Докажите, что их можно разбивать так, чтобы никакие два человека не попали дважды в одну тройку.

24. Какое количество информации будет получено при игре в рулетку с 32-мя секторами?

25. Имеется шоколадка размером m на n, причем одна долька шоколадки отмечена. Игра состоит в том, что двое игроков по очереди разламывают шоколадку по какой-нибудь прямой, делящей ее на дольки, и съедают ту половину, которая не содержит отмеченной дольки. Проигрывает тот, кто не может сделать хода, то есть ему остается лишь отмеченная долька.

26. Два игрока играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. Игроки ходят по очереди. В начале игры фишка находится в точке с координатами (4,3). Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами (x, y) в одну из трех точек: или в точку с координатами $(x+3, y)$, или в точку с координатами $(x, y+2)$, или в точку с координатами $(x, y+4)$. Выигрывает игрок, после хода которого расстояние по прямой от фишки до точки с координатами (0,0) больше 14 единиц. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Ответ обоснуйте.

27. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй 5 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок увеличивает или в 2 раза, или в 3 раза число камней в какой-то куче. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 48 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делаю-

щий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

28. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 2, а во второй 5 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок увеличивает или в 2 раза, или в 3 раза число камней в какой-то куче. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 40. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

29. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй 4 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 4 камня в какую-то кучу. Игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится больше 25, проигрывает. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

30. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 4, а во второй — 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или утраивает число камней в какой-то куче, или добавляет 2 камня в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в одной из куч становится не менее 21. Если в момент завершения игры общее число камней в двух кучах не менее 40, то выиграл Петя, в противном случае — Ваня. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

31. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 4, а во второй 5 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 1 камень в какую-то кучу. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 18 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

32. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 6, во второй 8 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 4 камня в какую-то кучу. Игрок, после хода которого в одной из куч становится больше 18 камней, проигрывает. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

33. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 2, а во второй — 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или утраивает число камней в какой-то куче, или добавляет 4 камня в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в одной из куч становится не менее 30. Если в момент завершения игры общее число камней в двух кучах не менее 34, то выиграл Ваня, в противном случае — Петя. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры/ Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967. – 479 с.

2. *Банников А. С.* Введение в дифференциальные игры/ А. С. Банников, Н.Н. Петров, Л.С. Чиркова. – Ижевск, 2013 – 48 с.

3. *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц/ К. Берж. – М.: ФМЛ, 1961. – 127 с.

4. *Благодатских А.И.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов/ А.И. Благодатских, Н.Н. Петров. – Ижевск.: Изд-во Удмуртс. ун-та, 2009. – 266 с.

5. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление / В.И. Благодатских. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

6. *Вайсборд Э.М.* Введение в дифференицальные игры нескольких лиц и их приложения/ Э.М. Вайсборд, В.И. Жуковский. – М.: Сов. радио, 1980. – 304 с.

7. *Виленкин А.Н.* Комбинаторика/ А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2013. – 400 с.

8. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами/ Н.Л. Григоренко. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. – 197 с.

9. *Гуровиц В.М.* Графы/ В.М. Гуровиц, В.В. Ховрина. – М.: МЦНМО, 2012. – 32 с.

10. *Жуковский В.И.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры/ В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. – Киев.: Наук. думка, 1994. – 320 с.

11. *Зак В.Л.* Задача уклонения от многих преследователей/ В. Л. Зак// ДАН СССР. 1982. Т. 265. N 5. С. 1051-1053.

12. *Иванов Р.П.* Простое преследование на компакте/Р.П. Иванов// ДАН СССР. – 1980. - Т. 254. - N 6. – С. 1318-1321.

13. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встречи движений/ Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.

14. *Красовский Н.Н.* Альтернатива для игровой задачи сближения/ Н.Н. Красовский, А.И. Субботин// Прикладная математика и механика. – 1970. - Т. 34. - Вып. 6. – С. 1005-1022.

15. *Красовский Н.Н.* Позиционные дифференциальные игры/ Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука. 1974. – 456 с.

16. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой: задача о минимуме гарантированного результата/ Н.Н. Красовский. М.: Наука, 1985. – 518 с.

17. *Куринной Г.Ч.* Математика: Справочник/ Г.Ч. Куринной. Харьков: Фолио; Ростов н/Д: Феникс, 1997. – 463 с.

18. *Мезенцев А.В.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями/ А.В. Мезенцев. – М.: МГУ, 1988. – 135 с.

19. *Нефедов В.Н.* Курс дискретной математики: учебное пособие/ В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. – М.: МАИ, 1992. – 264 с.

20. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С.Понтрягина в дифференциальных играх/ М.С. Никольский. – М.: МГУ, 1984. – 64 с.

21. *Оуэн Г.* Теория игр/ Г. Оуэн. – М.: Мир, 1971. – 230 с.

22. *Партхасаратхи Т.* Некоторые вопросы теории игр двух лиц/ Т. Партхасаратхи, Т. Рагхаван. – М.: Мир. 1974. – 259 с.

23. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем/ Н. Н. Петров //Дифференциальные уравнения. – 1968. - Т. 4. - N 4. – С. 606–617.

24. *Петров Н.Н.* Теория игр/Н.Н. Петров. – Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1997. – 195 с.

25. *Петров Н.Н.* Введение в выпуклый анализ /Н.Н. Петров. – Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2009. – 163 с.

26. *Петров Н.Н.* Математические игры: Игры-шутки. Симметрия. Игры «Ним». Игра «Цзяньшицзы». Игры с многочленами. Игры и теория чисел. Анализ с конца. Выигрышные стратегии. /Н.Н. Петров. – М: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 192 с.

27. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования/Л.А. Петросян. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 222 с.

28. *Петросян Л.А.* Теория игр/Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.

29. *Петросян Л.А.* Геометрия простого преследования/Л.А. Петросян, Г.В. Томский. – Новосибирск: Наука, 1983. – 140 с.

30. *Петросян Л.А.* Игры поиска/ Л.А. Петросян, А.Ю. Гарнаев. СПб.: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 1992. – 217 с.

31. *Петросян Л.А.* Преследование на плоскости/ Л.А. Петросян, Б. Б. Рихсиев. – М.: Наука, 1991. – 96 с.

32. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. В 3 т. Т.2/ Л. С. Понтрягин. – М.:Наука, 1988. – 342 с.

33. *Пшеничный Б.Н.* Дифференциальные игры/Б.Н. Пшеничный, В.В. Остапенко. – Киев.: Наукова думка, 1992. – 262 с.

34. *Рихсиев Б.Б.* Дифференциальные игры с простым движением/ Б.Б. Рихсиев. – Ташкент.: Фан, 1989. – 187 с.

35. *Сатимов Н. Ю.* Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления/Н.Ю. Сатимов, Б. Б. Рихсиев. – Ташкент.: Фан, 2000. – 176 с.

36. *Субботин А.И.* Оптимизация гарантии в задачах управления/ А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. – М.: Наука, 1981. – 288 с.

37. *Ухоботов В.И.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями общего вида/ В.И. Ухоботов. – Челябинск. Изд-во Челябин. ун-та, 1998. – 78 с.

38. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования/А. Ф. Филиппов //Вестник МГУ. Серия Математика. механика. – 1959. - N 2. – С. 25-32.

39. *Черноусько Ф.Л.* Игровые задачи управления и поиска/ Ф. Л. Черноусько, А.А. Меликян. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

40. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы/А.А. Чикрий. – Киев.: Наукова думка, 1992. – 380 с.

41. *Ильина О.В.* Количество информации. Формулы Хартли и Шеннона [Электронный ресурс] URL: http://marknet.narod.ru/spr/list5.htm (дата обращения: 25.10.2016)

42. *Волгина О.А.* Линейное программирование / О.А. Волгина, Н.Ю. Голодная [Электронный ресурс] URL: http://abc.vvsu.ru (дата обращения: 25.10.2016)

Учебное издание

Авторы-составители:
Банников Александр Сергеевич
Чиркова Любовь Сергеевна

ЗАДАЧИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебно пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 01.12.16. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,53. Усл. п. л. 3,26.
Тираж 300 экз. Заказ № 1746

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207.
Тел/факс: +7(3412)500-295, e-mail: editorial@udsu.ru