А. С. Банников, Н. Н. Петров,
Л. С. Чиркова

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Министерство образования и науки
Российской Федерации

ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»

**А. С. БАННИКОВ, Н. Н. ПЕТРОВ,
Л. С. ЧИРКОВА**

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Учебное пособие

Ижевск 2013

УДК 519.8(075)
ББК 22.183.2я 7
Б 232

Рецензент: д. ф.-м. н. Родина Л. И.

Банников А. С., Петров Н. Н., Чиркова Л. С.
Б 232. Введение в дифференциальные игры: учебное пособие.
Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет». — 2013, 48 с.

Пособие посвящено основным понятиям теории дифференциальных игр и предназначено для студентов магистрантов программы «Математическая кибернетика» направления «Математика и компьютерные науки».

УДК 519.8(075)
ББК 22.162

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

В работе используются следующие обозначения:
R^n — стандартное евклидово пространство размерности n;
(x, y) — скалярное произведение векторов $x, y \in R^k$;
$\|x\|$ — норма вектора x;
$D_r(z) = \{x : \|x - z\| \leqslant r\}$; — замкнутый шар радиуса r с центром в точке z;
$\mathrm{Int}A$ — внутренность множества A;
$\mathrm{co}A$ — выпуклая оболочка множества A;
$c(A, \varphi)$ — опорная функция множества A.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие посвящено задачам преследования—уклонения с участием одного убегающего и одного или нескольких преследователей Данный класс задач относится к задачам принятия решения в условиях конликтного взаимодействия.

Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями и оптимизировать заданные функционалы качества процесса. Динамические процессы могут описываться дифференциальными, интегральными, разностными, гибридными и другими уравнениями. Конфликтно управляемые процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют дифференциальными играми ([1]), термин был введен Р.Айзексом — одним из основоположников теории дифференциальных игр.

Становление теории дифференциальных игр относится к началу 60-х годов XX века и связано с именами советских и зарубежных математиков Н. Н. Красовского, Л. С. Понтрягина, Л. А. Петросяна, Б. Н. Пшеничного, Р. Айзекса, У. Флеминга.

Основная часть пособия посвящена задачам простого преследования. Простым движением называется движение участников, которые имеют возможность в каждый момент времени выбирать скорость своего движения. Задачи с простым движением изобилуют интересными результатами, которые стали основой в построении современной теории дифференциальных игр. Существенную роль в изучении задач простого преследования играют геометрические конструкции. Умение решать задачи простого преследования позволяют успешно перейти к решению более сложных игровых задач.

§ 1. Простое движение на плоскости

В данном параграфе рассматривается наиболее простые модели задач преследования — дифференциальные игры на плоскости с двумя участниками: преследователем P и убегающим E. Местоположение преследователя в момент t будем обозначать $x(t)$, а местоположение убегающего в момент t через $y(t)$. При этом будем считать местоположение участников геометрическими точками. Предполагается, что закон движения преследователя P имеет вид

$$\dot{x} = u, \ \|u\| \leqslant \alpha. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v, \ \|v\| \leqslant \beta. \tag{1.2}$$

Здесь $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in R^2$, $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Из законов движения следует, что игроки движутся с ограниченной по величине скоростью, при этом направление движения может меняться произвольным образом. Числа α, β показывают максимальные скорости игроков. Такие движения игроков называют **простым движением**.

Точки $y(t)$ при $t \in [0, T]$ описывают некоторую кривую, которую называют траекторией убегающего E на отрезке $[0, T]$. Аналогично, геометрическое место точек $x(t)$ для всех $t \in [0, T]$ называют траекторией преследователя P на отрезке $[0, T]$. При простом движении траектории $x(t), y(t)$ удовлетворяют условиям

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leqslant \alpha(t_2 - t_1),$$
$$\|y(t_2) - y(t_1)\| \leqslant \beta(t_2 - t_1)$$

для всех $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$.

Если преследователь P выбирает некоторую вектор-функцию $u(t), t \in [0, T]$ (функцию u называют управлением преследователя), то положение P в момент t определяется следующим образом

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t u(s)ds.$$

Аналогично, если убегающий E выбирает некоторую вектор-функцию $v(t), t \in [0, T]$ (функцию $v(t)$ называют управлением убегающего), то положение игрока E в момент t будет определяться следующим образом

$$y(t) = y(0) + \int\limits_0^t v(s)ds,$$

где $x(0), y(0)$ — положения игроков в начальный момент времени.

П р и м е р 1.1. Пусть $x(0) = x_0 = (0, 1)$, $u(s) = (1, 1)$. Тогда

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \\ 1 + t \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Траектория игрока P.

Таким образом, игрок P движется по прямой (рис. 1).

П р и м е р 1.2. Пусть $y(0) = y_0 = (1, 0)$,

$$v(s) = \begin{cases} (-1, 0), \text{ если } s \in [0, 1], \\ (0, 1), \text{ если } s \in (1, \infty). \end{cases}$$

Тогда для $t \in [0, 1]$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 0 \end{pmatrix}$$

и в момент $t = 1$ убегающий E будет находиться в начале координат. Для $t > 1$ будем иметь

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int\limits_1^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

Получаем следующую траекторию игрока E (для $t > 1$) (рис. 2)

Рис. 2. Трактория игрока E.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Пусть $x(0) = (0, 1)$,

$$u(s) = \begin{cases} (-1, 1), & \text{если } t \in [0, 1], \\ (1, -1), & \text{если } t \in [1, 3], \\ (1, 1), & \text{если } t \in [3, \infty) \end{cases}$$

Найти

а) закон движения преследователя P;

б) изобразить на плоскости траекторию движения игрока P.

1.2. Пусть $x(0) = (0, 2)$, $y(0) = (-2, 0)$, $u(s) = (-1, -1)$, $v(s) = (1, 1)$ для всех $s \geqslant 0$. Найти $\|x(t) - y(t)\|$.

1.3. Пусть $x(0) = (0, 2)$, $y(0) = (-2, 0)$, $v(s) = (1, 1)$ для всех $s \geqslant 0$, $u = (u_1, u_2)$ для всех $s \geqslant 0$, где (u_1, u_2) — постоянный вектор, такой что $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4$ ($\alpha = 2$).

Найти

а) $\|x(t) - y(t)\|$ для всех $t \geqslant 0$;

б) все постоянные векторы u, для каждого из которых найдется момент $T > 0$, такой что $x(T) = y(T)$.

1.4. Пусть $x(0) = (1, 1)$, $\alpha = 1$. Привести пример управления $u(s)$ такого, что траекторией движения игрока P, отвечающей данному управлению $u(s)$ будет

а) квадрат с вершинами $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$;

б) окружность $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$.

§ 2. Стратегия параллельного сближения

Пусть преследователь P и убегающий E перемещаются на плоскости в соответствии с простым движением с линейными скоростями α и β, причем $\alpha \geqslant \beta$. Будем предполагать, что игроки движутся по ломаным с максимальными скоростями, причем на любом конечном отрезке времени они могут менять направление движения конечное число раз.

Предположим, кроме того, что в любой момент времени t преследователь P знает свое местоположение $x(t)$, местоположение убегающего $y(t)$ и направление движения убегающего в этот момент t.

О п р е д е л е н и е 2.1. Стратегией параллельного сближения называется следующий способ преследования. Пока убегающий движется по лучу $y(0)A$, преследователь перемещается по лучу $x(0)B$, причем для всех t выполнены соотношения

а) отрезок $x(t)y(t)$ параллелен отрезку $x(0)y(0)$;

б) $\|x(t_2) - y(t_2)\| \leqslant \|x(t_1) - y(t_1)\|$ для всех $t_2 \geqslant t_1$.

Пусть $\alpha > \beta$. Тогда преследователь P перемещается по лучу $x(0)B(0)$, где $B(0)$ — точка, определяемая условиями

1) $B(0)$ лежит на луче $y(0)A$;

2) $\frac{\|x(0)-B(0)\|}{\alpha} = \frac{\|y(0)-B(0)\|}{\beta}$.

Таким образом, $B(0)$ — точка на луче $y(0)A$, в которой преследователь P и убегающий E оказываются в один и тот же момент времени t (рис. 3).

Рис. 3

Предположим, что в момент τ убегающий E меняет направление своего движения и в течении некоторого времени перемещается по лучу $y(\tau)A_1$. Тогда преследователь P движется по лучу

$x(\tau)B_1$, где точка B_1 — точка перехвата на луче $X(\tau)A_1$ такая, что

$$\frac{\|x(\tau) - B_1\|}{\alpha} = \frac{\|y(\tau) - B_1\|}{\beta}$$

и так далее (рис. 4.)

Рис. 4

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Пусть $x(0) = (0,2)$ $y(0) = (0,0)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$,

$$v(t) = \begin{cases} (-1,0), & t \in [0,1], \\ (0,1), & t \in (1,\infty) \end{cases}$$

Найти

1) Траекторию движения убегающего E;

2) Траекторию движения преследователя P, если P использует стратегию параллельного сближения.

2.2. Пусть $x(0) = (0,20)$ $y(0) = (0,0)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$,

$$v(t) = \begin{cases} (0,1), & t \in [0,1], \\ (-1,0), & t \in (1,2], \\ (0,-1), & t \in (2,3], \\ (1,0), & t > 3 \end{cases}$$

Найти

1) Траекторию движения убегающего E;

2) Траекторию движения преследователя P, если P использует стратегию параллельного сближения.

2.3. Пусть $x(0) = (0, 2)$ $y(0) = (0, 0)$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$,

$$v(t) = \begin{cases} (0,1), & t \in [0,1], \\ (-1,0), & t \in (1,2], \\ (0,-1), & t \in (2,3], \\ (1,0), & t > 3 \end{cases}$$

Найти

1) Траекторию движения убегающего E;

2) Траекторию движения преследователя P, если P использует стратегию параллельного сближения.

2.4. Пусть $x(0) = (0, 2)$, $y(0) = (-2, -2)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. $v(t) = (1, 0)$ для всех $t \geqslant 0$. Найти

1) Траекторию движения преследователя P, если P использует стратегию параллельного сближения.

2) Момент встречи игроков P и E.

2.5. Пусть $x(0) = (0, 2)$, $y(0) = (-2, -2)$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. $v(t) = (1, 0)$ для всех $t \geqslant 0$. Найти

1) Траекторию движения преследователя P, если P использует стратегию параллельного сближения.

2) Момент встречи игроков P и E.

§ 3. Игры с простым движением в евклидовом пространстве

Рассматривается игра двух лиц, в которой участвуют преследователь P и убегающий E. Закон движения преследователя P имеет вид

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \ \|u\| \leqslant \alpha. \tag{3.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v,\ y(0) = y_0,\ \|v\| \leqslant \beta. \tag{3.2}$$

Здесь $x, y, u, v \in R^k$. Пусть $\alpha > \beta$, это означает, что преследователь P имеет преимущество в скорости. Возникают следующие вопросы: сможет ли преследователь P догнать убегающего E, то есть в некоторый момент T добиться выполнения соотношения $x(T) = y(T)$ и, если сможет, то как он при этом должен действовать.

Рассмотрим несколько вариантов поведения преследователя.

1. Введем новую переменную $z = x - y$. Тогда из систем $(3.1), (3.2)$ получим систему

$$\dot{z} = u - v,\ z(0) = z_0 = x_0 - y_0. \tag{3.3}$$

Условие поимки в этом случае будет иметь вид $z(T) = 0$.

Исследуем поведение функции

$$f(t) = \|z(t)\|^2 = z_1^2(t) + \cdots + z_n^2(t).$$

Имеем

$$\dot{f}(t) = 2z_1(t)\dot{z}_1(t) + \cdots + 2z_n(t)\dot{z}_n(t) =$$
$$= 2(z(t), \dot{z}(t)) = 2(z(t), u(t) - v(t)) = 2\big[(z(t), u(t)) - (z(t), v(t))\big].$$

Если преследователь P возьмет в качестве функции $u(t) = -\alpha \frac{z(t)}{\|z(t)\|}$, то получим

$$\dot{f}(t) = 2\big[-\alpha\|z(t)\| - (z(t), v(t))\big].$$

Так как

$$(z(t), v(t)) \geqslant -\|z(t)\| \cdot \|v(t)\| \geqslant -\beta\|z(t)\|,$$

то

$$\dot f(t) \leqslant 2(\beta\|z(t)\| - \alpha\|z(t)\|) = 2(\beta-\alpha)\|z(t)\| = 2(\alpha-\beta)\sqrt{f(t)}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\frac{\dot f(t)}{2\sqrt{f(t)}} \leqslant \beta-\alpha.$$

Интегрируя последнее неравенство по отрезку $[0,t]$, получим

$$\sqrt{f(t)}-\sqrt{f(0)} \leqslant (\alpha-\beta)t, \text{ или } \|z(t)\|-\|z(0)\| \leqslant (\beta-\alpha)t,$$

которое равносильно неравенству

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(0)\| - (\alpha-\beta)t.$$

Следовательно, $z(t)$ обратится в нуль не позднее момента $T(z_0) = \frac{\|z\|}{\alpha-\beta}$.

Получаем, что при любых действиях убегающего E преследователь P осуществит поимку не позднее момента $T(z_0)$. С другой стороны, если убегающий использует свое управление $v(t)$ вида $v(t) = -\beta\frac{z(t)}{\|z(t\|}$, то

$$\dot f(t) = 2(\beta-\alpha)\sqrt{f(t)}$$

и поэтому

$$\|z(t)\| = \|z_0\| - (\alpha-\beta)t.$$

Следовательно, поимка убегающего произойдет не раньше момента $T(z_0)$.

Отметим, что для достижения поставленной цели преследователь P использовал информацию о значении вектора z в каждый момент времени t.

2. Предположим теперь, что в момент t убегающий E выбирает свой вектор $v(t)$ и сообщает о своем выборе преследователю

P, который выбирает свое управление $u(t)$ на основе информации о $v(t)$.

Предпишем преследователю P выбирать свое управление в виде $u = \hat{u} + v$, где $\|\hat{u}\| \leqslant \alpha - \beta$. Тогда

$$\|u\| \leqslant \|\hat{u}\| + \|v\| \leqslant \alpha - \beta + \beta = \alpha$$

и поэтому такой выбор для игрока P допустим.

В качестве $\hat{u}$ возьмем вектор $\hat{u} = -(\alpha - \beta)\frac{z_0}{\|z_0\|}$. Тогда из системы (3.3) получаем

$$\dot{z}(t) = u(t) - v(t) = -(\alpha - \beta)\frac{z_0}{\|z_0\|}$$

и поэтому

$$z(t) = z_0 - (\alpha - \beta)t\frac{z_0}{\|z_0\|} = \frac{z_0}{\|z_0\|}\big(\|z_0\| - (\alpha - \beta)t\big).$$

В момент $T(z_0)$ будем иметь $z(T(z_0)) = 0$, что означает, что происходит поимка.

Отметим, что при данном способе преследования поимка происходит в один и тот же момент времени $T(z_0)$, хотя в ряде случаем поимка могла произойти раньше из-за нерационального поведения убегающего.

П р и м е р 3.1. Пусть $z_0 = (1, 0)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Тогда $T(z_0) = 1$. Если убегающий выбирает управление $v(t) = (-1, 0)$, а преследователь свое управление $u(t) = (2, 0)$, то

$$z(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

и поэтому поимка происходит в момент $\hat{T} = \frac{1}{3} < T(z_0)$.

3. Рассмотрим еще один способ преследования. Предположим, что убегающий E в процессе всей игры использует постоянное управление v, $\|v\| \leqslant \beta$. Попытаемся найти для преследователя

P такое постоянное управление $u, \|u\| \leqslant \alpha,$ при котором поимка произойдет за минимальное время.

Из системы (3.3) при фиксированных u, v имеем

$$z(t) = z_0 + t(u - v).$$

Приравняв $z(t)$ к нулю, получим

$$z_0 + t(u - v) = 0. \tag{3.4}$$

Отсюда $z_0 - tv = -tu, \|u\| \leqslant \alpha$ и это уравнение разрешимо, если $\|z_0 - tv\| \leqslant \alpha t.$ Возводя последнее неравенство в квадрат, получим неравенство

$$\|z_0 - tv\|^2 \leqslant \alpha^2 t^2.$$

Так как $\|b\|^2 = (b, b),$ то получаем неравенство

$$(z_0 - tv, z_0 - tv) \leqslant \alpha^2 t^2 \text{ или}$$

$$(\alpha^2 - \|v\|^2)t^2 + 2t(z_0, v) - \|z_0\|^2 \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Так как $(\alpha^2 - \|v\|^2) > 0$ и корнями квадратного трехчлена в (3.5) являются

$$t_{1,2} = \frac{-(z_0, v) \pm \sqrt{(z_0, v)^2 + \|z_0\|^2(\alpha^2 - \|v\|^2)}}{\alpha^2 - \|v\|^2},$$

то неравенство (3.5) справедливо при любом

$$t \geqslant T(z_0, v) = \frac{-(z_0, v) + \sqrt{(z_0, v)^2 + \|z_0\|^2(\alpha^2 - \|v\|^2)}}{\alpha^2 - \|v\|^2}.$$

Найдем максимальное значение величины $T(z_0, v).$ Если зафиксировать $\|v\|,$ то наибольшего значения $T(z_0, v)$ достигает при $v = -\|v\|\frac{z_0}{\|z_0\|}.$ Тогда

$$T(z_0, v) = \frac{\|z_0\|\|v\| + \sqrt{\|z_0\|^2\|v\|^2 + \|z_0\|^2(\alpha^2 - \|v\|^2)}}{\alpha^2 - \|v\|^2} =$$
$$= \frac{\|z_0\|\|v\| + \|z_0\|\alpha}{\alpha^2 - \|v\|^2} = \frac{\|z_0\|(\alpha + \|v\|)}{\alpha^2 - \|v\|^2} = \frac{\|z_0\|}{\alpha - \|v\|}.$$

Так как $\|v\| \leqslant \beta$, то

$$T(z_0, v) \leqslant \frac{\|z_0\|}{\alpha - \beta} = T(z_0). \tag{3.6}$$

Таким образом, из (3.4) получаем

$$z_0 + T(z_0, v)(u - v) = 0, \text{ или } u = v - \frac{z_0}{T(z_0, v)}.$$

Пусть теперь убегающий выбирает произвольное управление $v(t)$ в каждый момент времени t и сообщает о своем выборе преследователю P, который выбирает свое управление в виде

$$u(t) = v(t) - \frac{z_0}{T(z_0, v(t))}.$$

Подставляя u, v в систему (3.3) получаем

$$\dot{z} = -\frac{z_0}{T(z_0, v(t))},$$

откуда

$$z(t) = z_0 - \int\limits_0^t \frac{z_0}{T(z_0, v(s))} ds = z_0 \Big(1 - \int\limits_0^t \frac{ds}{T(z_0, v(s))}\Big).$$

Используя неравенство (3.6) имеем

$$\int\limits_0^t \frac{ds}{T(z_0, v(s))} \geqslant \int\limits_0^t \frac{ds}{T(z_0)} = \frac{t}{T(z_0)}$$

и поэтому $z(t)$ обратится в нуль не позднее, чем в момент $T(z_0)$.

Отметим, что знание преследователем P управления убегающего E позволяет ему (преследователю P) при неудачном управлении убегающего E завершить поимку раньше момента $T(z_0)$.

4. Будем далее рассматривать дифференциальную игру, в которой законы движения соответственно преследователя P и убегающего E имеют вид

$$\dot{x} = u,\ x(0) = x_0,\ u \in U,$$
$$\dot{y} = v,\ y(0) = y_0,\ v \in V,$$

где U, V — выпуклые компакты R^k. Кроме того, целью преследователя P является выбор такого управления $u(t)$ по управлению $v(t)$ убегающего E, чтобы выполнялось включение $z(T) \in M$ при некотором $T \geqslant 0$, где M — выпуклое замкнутое множество.

Рассмотрим уравнение

$$z_0 + t(u - v) = m,\ u \in U,\ m \in M. \tag{3.7}$$

Если для фиксированного v оно разрешимо относительно u, m, t, то полагаем

$$T(z_0, v) = \inf_{t,u,m} \bigl\{ t \geqslant 0 \bigm| z_0 + t(u - v) = m,\ m \in M,\ u \in U \bigr\}.$$

Если уравнение (3.7) не разрешимо, то полагаем $T(z_0, v) = +\infty$.

Т е о р е м а 3.1. Пусть существует момент T_0 такой, что $T(z_0, v) \leqslant T_0$ для всех $v \in V$. Тогда преследователь P осуществляет поимку за время

$$T(z_0) = \sup_{v \in V} T(z_0, v).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(t), v(t) \in V$ — произвольная измеримая функция. Уравнение

$$z_0 + T(z_0, v(t))(u(t) - v(t)) = m(t),$$
$$u(t) \in U,\ m(t) \in M$$

по условию разрешимо относительно $u(t), m(t)$. Отметим, что функции $u(t), m(t), T(z_0, v(t))$ измеримы ([34]).

Если $T(z_0,v)=0$, то $z_0=m\in M$ и преследователь P осуществляет поимку.

Пусть $T(z_0,v(t))>0$. Подставляя $u(t),v(t)$ в уравнение (3.3), получаем

$$\dot z=\frac{m(t)-z_0}{T(z_0,v(t))}.$$

Интегрируя последнее уравнение, будем иметь

$$z(t)=\Big(1-\int\limits_0^t\frac{ds}{T(z_0,v(s))}\Big)z_0+\int\limits_0^t\frac{m(s)ds}{T(z_0,v(s))}.$$

Так как $T(z_0,v(t))\leqslant T(z_0)$ для всех t, то

$$\int\limits_0^t\frac{ds}{T(z_0,v(s))}\geqslant\int\limits_0^t\frac{ds}{T(z_0)}=\frac{t}{T(z_0)}.$$

Поэтому существует момент T_0, для которого

$$\int\limits_0^{T_0}\frac{ds}{T(z_0,v(s))}=1.$$

Тогда

$$z(T_0)=\int\limits_0^{T_0}\frac{m(s)ds}{T(z_0,v(s))}\in M,$$

то есть преследователь P осуществил поимку. Последнее включение следует из свойств выпуклых множеств ([4]). Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.2. Пусть $T(z_0,v_0)>T_0, z_0\notin M$. Тогда при $v(t)=v_0$ справедливо включение $z(t)\notin M$ для всех $t\in(0,T_0)$ и любого допустимого управления $u(t)$ преследователя P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(t)$ —произвольное управление преследователя P. Обозначим $\hat{u}(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(s)ds$. Тогда $\int\limits_0^t u(s)ds = t\hat{u}(t)$ и по свойству выпуклых замкнутых множеств $\hat{u}(t)\in U$. Поэтому

$$z(t)=z_0+\int\limits_0^t (u(s)-v_0)ds = z_0+t(\hat{u}(t)-v_0)\notin M,$$

так как уравнение (3.7) не разрешимо для $t<T(z_0,v_0)$. Теорема доказана.

5. В дальнейшем мы будем использовать не функцию $T(z_0,v)$, а функцию $\lambda(z_0,v)$ которую определим следующим образом

$$\lambda(z_0,v)=\sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 \bigm| -\lambda(z_0-M)\cap(U-v)\neq\varnothing\bigr\}.$$

Определим также число

$$\delta(z_0)=\min_{v\in V}\lambda(z_0,v).$$

Т е о р е м а 3.3. Если $\delta(z_0)>0$, то преследователь P осуществляет поимку за некоторое время $T(z_0)\leqslant\frac{1}{\delta(z_0)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предпишем преследователю P выбирать функции $u(t)\in U, m(t)\in M$ как лексикографический минимум решений уравнения

$$u(t)-v(t)=-\lambda(z_0,v(t))(z_0-m(t)). \tag{3.8}$$

Для решения уравнения (3.3) в силу (3.8) справедливо представление

$$z(t)=z_0-\int\limits_0^t \lambda(z_0,v(s))(z_0-m(s))ds=$$

$$z_0\bigl(1-\int\limits_0^t \lambda(z_0,v(s))ds\bigr)+\int\limits_0^t \lambda(z_0,v(s))m(s)ds.$$

Так как $\lambda(z_0, v(s)) \geqslant \delta(z_0)$ для всех s, то

$$\int\limits_0^t \lambda(z_0, v(s))ds \geqslant \int\limits_0^t \delta(s)ds = \delta(z_0)t.$$

Поэтому не позднее момент $T(z_0) = \frac{1}{\delta(z_0)}$ разность

$$1 - \int\limits_0^t \lambda(z_0, v(s))ds$$

обратится в нуль. Обозначим этот момент через τ. Тогда

$$z(\tau) = \int\limits_0^\tau \lambda(z_0, v(s))m(s)ds \in M$$

по свойству выпуклого замкнутого множества. Тем самым доказано, что преследователь P осуществляет поимку.

Будем говорить, что убегающий E *уклоняется* от преследователя P, если существует функция $\hat{v}(t)$, построенная по z_0, V, M такая, что $z(t) \notin M$ для всех $t \geqslant 0$, для любой измеримой функции $u(t), u(t) \in U$, где $z(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{z} = u(t) - \hat{v}(t),\ z(0) = z_0.$$

Т е о р е м а 3.4. Пусть $\delta(z_0) = 0$. Тогда убегающий E уклоняется от преследователя P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вектор $v_0 \in V$ такой, что $\delta(z_0) = \lambda(z_0, v_0)$. Полагаем $\hat{v}(t) = v_0$. Условие $\lambda(z_0, v_0) = 0$ означает, что

$$(U - v_0) \cap \big\{-\lambda(z_0 - M), \lambda \geqslant 0\big\} = \{0\}. \tag{3.9}$$

Пусть $u(t)$ — произвольное управление преследователя P. Имеем

$$z(t) = z_0 + \int\limits_0^t (u(s) - v_0) ds = z_0 + t\hat{u}(t) - tv_0 \in z_0 + tU - tv_0,$$

где $\hat{u}(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t u(s) ds$. Из (3.9) следует, что

$$\big\{t(U - v_0)\big\} \cap \big\{-\lambda t(z_0 - M),\ \lambda \geqslant 0\big\} = \{0\}$$

и поэтому

$$\big\{z_0 + t(U - v_0)\big\} \cap \big\{z_0 - \lambda t(z_0 - M),\ \lambda \geqslant 0\big\} = \{z_0\}.$$

Так как

$$M \subset \big\{z_0 - \lambda t(z_0 - M),\ \lambda \geqslant 0,\ t \geqslant 0\big\}$$

и $z_0 \notin M$, то $z(t) \notin M$ для всех $t \geqslant 0$. Теорема доказана.

Обсудим далее вопрос о вычислении $\lambda(z_0, v)$. На рисунке 5 иллюстрируется определение функции $\lambda(z_0, v)$.

$\lambda(z^0, v)(M - z^0)$

Рис. 5.

П р и м е р 3.2. Пусть $V=U=D_1(0)$, $M=\{m\}$, $m\neq z_0$. Тогда

$$\lambda(z_0,v)=\sup\bigl\{\lambda\geqslant 0\;\big|\;-\lambda(z_0-m)\in U-v\bigr\}= \\ \sup\{\lambda\geqslant 0\;\big|\;v-\lambda(z_0-m)\in U\bigr\}$$

и поэтому $\lambda(z_0,v)$ – максимальный корень уравнения

$$\|v-\lambda(z_0-m)\|=1,$$

откуда

$$\lambda(z_0,v)=\frac{(v,z_0-m)+\sqrt{(v,z_0-m)^2+\|z_0-m\|^2(1-\|v\|^2)}}{\|z_0-m\|^2}.$$

Отметим, что если $\|v\|=1$, то

$$\lambda(z_0,v)=\frac{(v,z_0-m)+|(v,z_0-m)|}{\|z_0-m\|^2}= \\ =\begin{cases}\frac{2(v,z_0-m)}{\|z_0-m\|^2}, & \text{если } (v,z_0-m)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } (v,z_0-m)<0.\end{cases}$$

П р и м е р 3.3. Пусть U,V,M — выпуклые компакты, причем $V\subset U$, $z_0\notin M$. Условие $\lambda(M-z_0)\cap(U-v)\neq\varnothing$ равносильно условию

$$c(\lambda(M-z_0),-\varphi)+c(U-v,\varphi)\geqslant 0 \text{ для всех } \varphi.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$c(U,\varphi)-(v,\varphi)\geqslant -\lambda\bigl[(z_0,\varphi)+c(M,-\varphi)\bigr]. \tag{3.10}$$

Так как $V\subset U$, то $c(U,\varphi)\geqslant(v,\varphi)$ для всех $v\in V$ и всех $\varphi\in R^k$. Поэтому, если $(z_0,\varphi)+c(M,-\varphi)\geqslant 0$, то неравенство (3.10) справедливо для любого $\lambda\geqslant 0$.

Пусть выполнено неравенство $(z_0, \varphi) + c(M, -\varphi) < 0$. Взяв φ такое, что $(z_0, \varphi) + c(M, -\varphi) = -1$, получим

$$c(U, \varphi) - (v, \varphi) \geqslant \lambda.$$

Поэтому

$$\lambda(z_0, v) = \inf_{\varphi \in M(\varphi)} \bigl[c(U, \varphi) - (v, \varphi)\bigr], \text{ где}$$
$$M(\varphi) = \bigl\{\varphi \bigm| (z_0, \varphi) + c(M, -\varphi) = -1\bigr\}.$$

Если $M = \{0\}$, то

$$\lambda(z_0, \varphi) = \inf_{\varphi \in M(\varphi)} \bigl[c(U, \varphi) - (v, \varphi)\bigr], \text{ где}$$
$$M(\varphi) = \bigl\{\varphi \bigm| (z_0, \varphi) = -1\bigr\}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Пусть $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $x_0 = (0, 0)$, $y_0 = (4, 4)$. Убегающий E перемещается по часовой стрелке с максимальной скоростью по границе квадрата с вершинами $(4, 4)$, $(-4, 4)$, $(-4, -4)$, $(4, -4)$. Вычислить время поимки.

3.2. Пусть $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $x_0 = (0, 0)$, $y_0 = (2, 0)$, $v(t) = (\cos t, \sin t)$. Вычислить время поимки.

3.3. Пусть $U = V$ — непустые выпуклые компакты с непустой внутренностью, M — выпуклый компакт, $z_0 \notin M$, $\lambda(z_0, v) = 0$. Верно ли, что $v \in \partial V$?

3.4. Пусть $U = V$ — непустые выпуклые компакты с непустой внутренностью, M — выпуклое замкнутое множество, $z_0 \notin M$, $\lambda(z_0, v) = 0$. Верно ли, что $v \in \partial V$?

3.5. Пусть $U = V = \mathrm{co}\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$. $M = \{0\}$, $z_0 = (1, 1)$. Показать, что

$$\lambda(z_0, v) = \begin{cases} 1 - v_2, \text{ если } v_2 \geqslant v_1, \\ 1 - v_1, \text{ если } v_2 \leqslant v_1. \end{cases}$$

3.6. Пусть $U = V = \mathrm{co}\{(0, 1), (0, -1), (-1, 0), (1, 0)\}$. $M = \{0\}$, $z_0 = (1, 1)$. Вычислить $\lambda(z_0, v)$.

§ 4. Первый метод Понтрягина. Эвристический подход

В данном параграфе будем рассматривать дифференциальную игру между преследователем P и убегющим E, описываемую системой вида

$$\dot{z} = Az - u + v, \ z(0) = z_0, \ u \in U, \ v \in V,$$

где A — постоянная квадратная матрица порядка n, $z \in R^n$, U, V — выпуклые компакты R^n. Кроме того, задана матрица π порядка $m \times n$.

Дифференциальная игра происходит следующим образом. В каждый момент времени t убегающий E, зная параметры игры (A, U, V, z_0, π) и используя любую другую информацию выбирает вектор $v(t) \in V$ и сообщает о своем выборе преследователю P. Преследователь P, зная $v(t)$ и параметры игры, выбирает вектор $u(t) \in U$. При этом требуется, чтобы на любом отрезке $[0, t]$ векторы $v(t), u(t)$ определяли измеримую функцию. Далее по $u(t), v(t)$ находится решение задачи Коши

$$\dot{z} = Az - u(t) + v(t), \ z(0) = z_0. \tag{4.1}$$

Если существует момент времени $T > 0$ такой, что преследователь P при любых действиях убегающего E добивается выполнения условия $\pi z(\tau) = 0$ при некотором $\tau \in [0, T]$, то говорят, что в игре происходит поимка.

О п р е д е л е н и е 4.1. Разностью по Минковскому множеств A и B называется множество C такое, что $B + C \subset A$.

Разность множеств A и B будем обозначать $A \overset{*}{-} B$. Подробное изложение свойств разности по Минковскому можно найти в ([20]).

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Для всех $t > 0$ $W(t) = \pi e^{At} U \overset{*}{-} \pi e^{At} V \neq \varnothing$;

2. Существует момент T_0 такой, что $\pi e^{AT_0} z_0 \in \int\limits_0^{T_0} W(T_0 - s)ds.$

Приведем некоторые основные рассуждения показывающие, что при выполнении данных условий в игре происходит поимка. Формальное доказательство данного факта требует серьезного математического аппарата и опубликовано, в частности, в ([15]).

Если $u(t), v(t)$ — некоторые измеримые функции, то решение задачи Коши (4.1) представимо в виде

$$z(t) = e^{At} z_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(-u(s) + v(s))ds.$$

Поэтому

$$\pi z(t) = \pi e^{At} z_0 + \int\limits_0^t \pi e^{A(t-s)}(-u(s) + v(s))ds. \qquad (4.2)$$

В силу условия 2 существует $\hat{w}(T_0, s) \in W(T_0 - s)$ такой, что $\pi e^{AT_0} z_0 = \int\limits_0^{T_0} \hat{w}(T_0, s)ds.$

Предпишем преследователю P выбирать свое управление $\hat{u}(s)$ как решение уравнения

$$\pi e^{A(T_0 - s)} u - \pi e^{A(T_0 - s)} v(s) = \hat{w}(T_0, s). \qquad (4.3)$$

Отметим, что решение $\hat{u}(s)$ существует для всех s в силу условия 1. Подставляя $\hat{u}(s)$ в (4.2) и учитывая (4.3), получаем

$$\pi z(T_0) = \pi e^{AT_0} z_0 - \int\limits_0^{T_0} \hat{w}(T_0, s)ds = 0.$$

Это и означает, что в игре происходит поимка.

Из предыдущих рассуждений следует, что для ответа на вопрос — возможна ли поимка по первому методу Понтрягина, можно предложить следующую методику решения.

Этап 1. Найти множество $W(t) = \pi e^{At} U \overset{*}{-} \pi e^{At} V$.

Этап 2. Найти множества $\Omega(t) = \int\limits_0^t W(s) ds$.

Этап 3. Найти T_0, для которого $\pi e^{AT_0} z_0 \in \Omega(T_0)$.

Этап 4. Найти функцию $\hat{w}(t) \in W(t)$ такую, что

$$\pi e^{AT_0} z_0 = \int\limits_0^{T_0} \hat{w}(s) ds.$$

Этап 5. Найти функцию $u(t)$ как решение уравнения

$$\pi e^{A(T_0-s)} u - \pi e^{A(T_0-s)} v(s) = \hat{w}(T_0 - s),$$

при заданной функции $v(t) \in V$.

Этап 6. Найти решение задачи Коши

$$\dot{z} = Az - u(t) + v(t),\ z(0) = z_0,\ t \in [0, T_0].$$

§ 5. Простое групповое преследование

В пространстве $R^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i,\ x_i(0) = x_i^0,\ u_i \in U_i. \tag{5.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v,\ y(0) = y^0,\ v \in V. \tag{5.2}$$

Здесь $x_i, y, u_i, v \in R^k$, U_i, V — выпуклые компакты R^k, $i = 1, \ldots, n$.

Будем предполагать, что убегающий E в каждый момент t выбирает значение своей функции $v(t)$ и сообщает о своем выборе каждому из преследователей. Каждый преследователь в момент t знает начальные позиции всех игроков, параметры игры и значение $v(t)$.

О п р е д е л е н и е 5.1. Стратегией преследователя P_i называется отображение G_i, ставящее в соответствие каждому моменту t, начальным позициям $x_1^0, \dots x_n^0, y^0$ и значению $v(t)$ измеримую функцию $u_i(t) = G_i(t, x_i^0, y^0, v(t))$ со значенями в U_i.

О п р е д е л е н и е 5.2. В игре происходит поимка, если существуют момент $T > 0$ и стратегии $G_1, \dots, G_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(t), v(t) \in V$ найдутся номер l и момент $\tau \in [0, T]$ для которых $x_l(\tau) = y(\tau)$.

Введем новые переменные $z_i = x_i - y$. Тогда вместо систем $(5.1), (5.2)$ получим систему

$$\dot{z}_i = u_i - v, \ z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{5.3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено

Предположение. Для всех i и $v \in V$

$$\left\{-\lambda z_i^0, \ \lambda \geqslant 0\right\} \cap \left(U_i - v\right) \neq \varnothing.$$

Введем функции λ_i вида

$$\lambda_i(z_i^0, v) = \sup\left\{\lambda \geqslant 0 \ \middle| \ -\lambda z_i^0 \in -v + U_i\right\}$$

и число

$$\delta(z^0) = \min_{v \in V} \max_i \lambda_i(z_i^0, v).$$

Т е о р е м а 5.1. (Пшеничного). Пусть $\delta(z^0) > 0$. Тогда в игре происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задаем стратегии преследователей P_i, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(z_i^0, v(t)) z_i^0.$$

В силу определения $\lambda(z_i^0, v)$ значения $u_i(t) \in U_i$ для всех t, i. Подставляя u_i в (5.3), получаем

$$\dot{z}_i = -\lambda_i(z_i^0, v(t))z_i^0.$$

Интегрируя получившееся уравнение, будем иметь

$$z_i(t) = z_i^0 - \int\limits_0^t \lambda_i(z_i^0, v(s))z_i^0 ds = z_i^0\bigl(1 - \int\limits_0^t \lambda_i(z_i^0, v(s))ds\bigr).$$

Рассмотрим функции $h_i(t) = 1 - \int\limits_0^t \lambda_i(z_i^0, v(s))ds$. Отметим, что $h_i(0) = 1$ и h_i — непрерывные функции. Кроме того

$$\sum_{i=1}^n h_i(t) = n - \int\limits_0^t \sum_{i=1}^n \lambda_i(z_i^0, v(s))ds. \tag{5.4}$$

Так как

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(z_i^0, v(s)) \geqslant \max_i \lambda_i(z_i^0, v(s)) \geqslant \delta(z^0) > 0$$

то из (5.4) получаем

$$\sum_{i=1}^n h_i(t) \leqslant n - \int\limits_0^t \delta(z^0)ds = n - \delta(z^0)t.$$

Так как правая часть стремится к $-\infty$ при $t \to +\infty$, то полагая $T = \frac{n}{\delta(z^0)}$, получим, что существуют момент $\tau \in [0, T]$ и номер l, для которых $z_l(\tau) = 0$. Это и означает. что в игре происходит поимка. Теорема доказана.

Л е м м а 5.1. Пусть $U_i = V = D_1(0)$ для всех i. Тогда $\delta(z^0) > 0$ тогда и только тогда, когда

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}. \tag{5.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta(z^0) > 0$. Предположим, что условие (5.5) не выполнено. Тогда $\{0\}$ и $\mathrm{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$ отделимы. Поэтому существует вектор $v_0, \|v_0\| = 1$ такой, что $(z_i^0, v_0) \leqslant 0$ для всех i. Значит $\lambda_i(z_i^0, v_0) = 0$ для всех i. Следовательно, $\delta(z^0) = 0$. Получили противоречие.

Пусть $\delta(z^0) = 0$. Тогда существует $v_0 \in D_1(0)$ такой, что $\lambda_i(z_i^0, v_0) = 0$ для всех i. Следовательно, $\|v_0\| = 1$ и $(z_i^0, v_0) \leqslant 0$ для всех i. Пусть $x \in \{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. Тогда

$$x = \alpha_1 z_1^0 + \cdots + \alpha_n z_n^0, \text{ где } \alpha_i \geqslant 0, \ \sum_i \alpha_i = 1.$$

Поэтому $(x, v_0) = \sum\limits_i \alpha_i (z_i^0, v_0) \leqslant 0$. Получили, что гиперплоскость $H = \{x \mid (x, v_0) = 0\}$ отделяет $\{0\}$ и $\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. Следовательно, $0 \notin \mathrm{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 5.3. Векторы $a_1, \ldots a_s$ образуют положительный базис R^k, если для любого $x \in R^k$ существуют положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s.$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 5.2. ([18]) Векторы $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис R^k тогда и только тогда, когда

$$0 \in \mathrm{Intco}\{a_1, \ldots a_s\}.$$

§ 6. Простое групповое преследование с фазовыми ограничениями

В пространстве R^k $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1. \tag{6.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{6.2}$$

При $t = 0$ заданы начальные позиции преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и убегающего y^0, причем $z_i^0 = y^0 - x_i^0 \neq 0 \ (i = 1, \ldots, n)$.

Будем предполагать, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы множества

$$D = \{z \mid z \in R^n, \ (p_j, z) \leqslant \mu_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r\}, \tag{6.3}$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа такие, что $\mathrm{Int} D \neq \varnothing$.

Пусть $T > 0$ — произвольное число и σ — некоторое конечное разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s < t_{s+1} = T$ отрезка $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 6.1. Кусочно - программной стратегией V убегающего E, заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений b^l, $l = 0, 1, \ldots, s$ ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l)) \tag{6.4}$$

измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$, и такую, что $\|v_l(t)\| \leqslant 1, y(t) \in D, t \in [t_l, t_{l+1})$.

О п р е д е л е н и е 6.2. Кусочно-программной контрстратегией U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений $c_i^l, l = 0, 1, \ldots, s$ ставящих в соответствие величинам (6.4) и управлению $v_l(t)$ измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $\|u_l^i(t)\| \leqslant 1, t \in [t_l, t_{l+1})$.

Пусть $z^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0)$. Обозначим данную игру $\Gamma = \Gamma(n, z^0, D)$.

О п р е д е л е н и е 6.3. В игре Γ происходит уклонение от встречи, если для любого $T > 0$ существует разбиение σ интервала $[0,T]$, стратегия V убегающего E ,соответствующая разбиению σ, такие, что для любых траекторий игроков P_i имеет место

$$x_i(t) \neq y(t),\ t \in [0,T],\ i = 1, \dots, n,$$

где $y(t)$ – реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E .

О п р е д е л е н и е 6.4. В игре Γ происходит поимка, если существует $T > 0$ и для любого разбиения σ интервала $[0,T]$, любой траектории $y(t)$ игрока E существуют кусочно-программные контрстратегии U_i игроков P_i , соответствующие разбиению σ , существуют момент $\tau \in [0,T]$ и номер $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что

$$x_m(\tau) = y(\tau),$$

где $x_m(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория преследователя P_m .

Введем функции λ_i следующим образом:

$$\lambda_i(v) = \sup\{\lambda | \lambda \geqslant 0,\ -\lambda z_i^0 \in v - V\},$$
$$\lambda_{n+j}(v) = (p_j, v), \quad j = 1, \dots, r.$$

Здесь V — выпуклый компакт пространства R^k.

Л е м м а 6.1. Пусть $V = D_1(0)$. Тогда

$$\delta = \min_{v \in D_1(0)} \max_j \lambda_j(v) > 0$$

тогда и только тогда, когда

$$0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0, \dots, z_n, p_1, \dots, p_r\}. \tag{6.5}$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 5.1.

Вместо систем $(6.1), (6.2)$ будем рассматривать систему

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{6.6}$$

Т е о р е м а 6.1. Пусть $n \geqslant k$. Тогда для того, чтобы в игре Γ происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условие (6.5) выполнено. Докажем, что в игре Γ происходит поимка. Доказательство проведем следующим образом:

1. $r = 0$. Теорема следует из соответствующей теоремы предыдущего параграфа.

2. $r = 1$. Пусть V – произвольная стратегия убегающего E, соответствующая некоторому разбиению σ некоторого интервала $[0, T]$.

Задаем констратегии U_i преследователей P_i следующим образом:

$$u_l^i(t) = v_l(t) - \lambda_i(v(t)) z_i^0, \quad t \in [t_l, t_{l+1}),$$

где $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{s+1} = T\}$. Стратегии U_i допустимы. Так как стратегия V убегающего E допустима, то для всех $t \in [0, T]$ справедливо неравенство $(p_1, y(t)) \leqslant \mu_1$. Это означает, что

$$\int\limits_0^t (p_1, v(\tau)) d\tau \leqslant \mu_0, \quad \mu_0 = \mu_1 - (p_1, y^0), \quad t \in [0, T].$$

В силу леммы 6.1 $\delta > 0$, где $\delta = \min\limits_{v \in D_1(0)} \max\limits_j \lambda_j(v)$. Пусть $T_1(t),\ T_2(t)$ два подмножества интервала $[0, t]$ такие, что

$$T_1(t) = \{\tau | \tau \in [0, t],\ (p_1, v(\tau)) < \delta\},$$

$$T_2(t) = \{\tau | \tau \in [0, t],\ (p_1, v(\tau)) \geqslant \delta\}.$$

Тогда

$$\mu_0 \geqslant \int\limits_0^t (p_1, v(\tau))d\tau =$$

$$= \int\limits_{T_1(t)} (p_1, v(\tau))d\tau + \int\limits_{T_2(t)} (p_1, v(\tau))d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \delta\mu(T_2(t)) - \mu(T_1(t)).$$

С другой стороны $\mu(T_2(t)) + \mu(T_1(t)) = t$ (Здесь μ – мера Лебега).

Из последних двух соотношений следует, что

$$\mu(T_1(t)) \geqslant \frac{t\delta - \mu_0}{1+\delta}.$$

Из определения контрстратегий U_i и системы (6.6) имеем

$$z_i(t) = z_i^0\big(1 - \int\limits_0^t \lambda_i(v(\tau))d\tau\big).$$

Рассмотрим функции h_i вида

$$h_i(t) = 1 - \int\limits_0^t \lambda_i(v(\tau))d\tau.$$

h_i – непрерывные функции, $h_i(0) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^n h_i(t) = n - \int\limits_0^t \sum_{i=1}^n \lambda_i(v(\tau))d\tau \leqslant n - \int\limits_0^t \max_i \lambda_i(v(\tau))d\tau,$$

$$\int\limits_0^t \max_i \lambda_i(v(\tau))d\tau \geqslant \int\limits_{T_1(t)} \max_i \lambda_i(v(\tau))d\tau \geqslant \delta\mu(T_1(t)) \geqslant \delta\frac{t\delta - \mu_0}{1+\delta}.$$

Отсюда
$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \leqslant n - \frac{\delta^2 t - \delta\mu_0}{1+\delta}.$$
Из последнего неравенства следует, что существует момент T_0
$$T_0 \leqslant t_0 = \frac{n(1+\delta)+\delta\mu_0}{\delta^2}$$
такой, что одна из функций h_i обратится в 0 в момент T_0. Поэтому в момент T_0 будем иметь $z_i(T_0) = 0$. Это и означает, что в игре Γ происходит поимка.

3. r – произвольно, $r > 1$. В силу условия теоремы векторы $z_1^0, \ldots, z_n^0, p_1, \ldots, p_r$ образуют положительный базис, при этом можно считать, что $z_1^0, \ldots, z_k^0$ образуют базис пространтства R^k. Из определения положительного базиса следует. что существуют положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_r$ такие, что
$$0 = \alpha_1 z_1^0 + \cdots + \alpha_n z_n^0 + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_r p_r.$$
Пусть $x \in R^k$. Тогда существуют $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ такие, что
$$x = \gamma_1 z_1^0 + \cdots + \gamma_k z_k^0.$$
Из последних двух соотношений следует, что для любого d справедливо равенство
$$x = \gamma_1 z_1^0 + \cdots + \gamma_k z_k^0 + d\big(\alpha_1 z_1^0 + \cdots + \alpha_n z_n^0 + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_r p_r\big).$$
Взяв $d > 0$ и достаточно большим, получим, что
$$x = \alpha_1^0 z_1^0 + \cdots + \alpha_n^0 z_n^0 + \beta_1^0 p_1 + \cdots + \beta_r^0 p_r$$
и все коэффициенты α_j^0, β_s^0 положительны. Рассмотрим вектор $p_0 = \beta_1^0 p_1 + \cdots + \beta_r^0 p_r$ и множество
$$D_1 = \{x \mid x \in R^k, \ \ (p_0, x) \leqslant \mu_0\},$$

где $\mu_0 = \sum\limits_{l=1}^{r} \beta_l^0 p_l$. Тогда $D \subset D_1$ и векторы $z_1^0, \ldots, z_n^0, p_0$ образуют положительный базис. В силу пункта 2 данной теоремы в игре Γ_1 с фазовым ограничением в виде множества D_1 происходит поимка. Отметим, что если $p_0 = 0$, то $D_1 = R^k$. Поэтому поимка произойдет и в игре Γ .

Пусть теперь условие (6.5) не выполняется. Тогда, в силу леммы 6.1, существует $v_0 \in D_1(0)$, $\|v_0\| = 1$ и такой, что $(z_i^0, v_0) \leqslant 0$, $(p_j, v_0) \leqslant 0$.

Задаем стратегию убегающего E, полагая, $v(t) = v_0$ для всех t. Тогда $y(t) = y^0 + v_0 t$ и

$$(y(t), p_j) = (y^0, p_j) + t(p_j, v_0) \leqslant (y^0, p_j) \leqslant \mu_j$$

и поэтому $y(t) \in D$ для всех $t \geqslant 0$, то есть убегающий E не покидает пределы множества D.

Пусть $u_i(t)$ — произвольные управления преследователей P_i. Тогда из системы (6.6) имеем

$$z_i(t) = z_i^0 - v_0 t + \int\limits_0^t u_i(s) ds = z_i^0 - v_0 t - t\hat{u}_i(t), \tag{6.7}$$

где $\hat{u}_i(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t u_i(s) ds$. Так как $u_i(t) \in D_1(0)$ для всех t, то $\hat{u}_1(t) \in D_1(0)$. Поэтому из (6.7) получаем используя неравенство треугольника

$$\|z_i(t)\| \geqslant \|z_i^0 - v_0 t| - \|t\hat{u}_i(t)\| \geqslant \|z_i^0 - v_0 t\| - t =$$
$$\sqrt{\|z_i^0\|^2 - 2(z_i, v_0)t + t^2} - t > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что $z_i(t) \neq 0$ для всех i и всех $t \geqslant 0$.

§ 7. Простое преследование на компакте

В пространстве R^k $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1. \tag{7.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{7.2}$$

При $t = 0$ заданы начальные позиции преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и убегающего y^0, причем $z_i^0 = y^0 - x_i^0 \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Будем предполагать, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого компакта D с непустой внутренностью.

Считаем, что убегающий использует кусочно-программные стратегии, определение которых дано в предыдущем параграфе.

Т е о р е м а 7.1. Пусть $n \leqslant k-1$. Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $y^0 \neq x_i^0$ для всех i, то можно считать, что $y^0 \in \mathrm{Int} D$. Пусть $D_r(z)$ шар радиуса r с центром в точке z такой, что $D_r(z) \subset D$ и $y^0 \in \mathrm{Int} D_r(z)$. Пусть ε – расстояние от y^0 до границы шара $D_r(z)$. Зададим стратегию V убегающего E следующим образом: $\sigma = \{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, $t_1 = 0$,

$$t_{j+1} = t_j + \frac{\varepsilon}{j+1}, j \in N,$$
$$(v_j, y(t_j) - x_i(t_j)) = 0,\ i = 1, \ldots, n,$$
$$(v_j, z - y(t_j)) \geqslant 0,\ \|v_j\| = 1.$$

$v(t) = v_j$, $t \in [t_1, t_{j+1})$. Указанные соотношения означают, что на $[t_j, t_{j+1})$ убегающий E выбирает единичный вектор v_j, ортогональный к гиперплоскости, содержащей $y(t_j)$, $x_1(t_j), \ldots, x_n(t_j)$ и направленный в сторону полупространства, содержащего центр z шара $D_r(z)$.

Так как $n \leqslant k-1$, то такой вектор существует. Покажем, что указанная стратегия V гарантирует убегающему E уклонение от встречи.

Из определения стратегии V следует, что для всех $t \in [t_j,\ t_{j+1})$ имеет место

$$y(t) = y(t_j) + v_j(t-t_j),\ x_i(t) \in x_i(t_j) + D_{(t-t_j)}(0).$$

Тогда для $t \in [t_j, t_{j+1})$

$$\begin{gathered}\|y(t)-x_i(t)\| \geqslant \|y(t)-x_i(t_j)\| - (t-t_j) = \\ = \|y(t_j)+v_j(t-t_j)-x_i(t_j)\| - (t-t_j) = \\ = \sqrt{||y(t_j)-x_i(t_j)||^2 + (t-t_j)^2} - (t-t_j) > 0.\end{gathered}$$

Поэтому, если поимка не произошла до момента t_j, то она не произойдет и на на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$.

Так как $y^0 - x_i^0 = y(t_1) - x_i(t_1) \neq 0$ для всех i, то доказано, что $y(t) \neq x_i(t)$ для всех i и всех $t \geqslant 0$.

Покажем, что $y(t) \in D$ для всех $t \geqslant 0$. Рассмотрим отрезок $[t_1, t_2] = [0, \varepsilon/2]$. $\|y^0 - z\| \leqslant r - \varepsilon/2$. Тогда для $t \in [t_1, t_2]$

$$\begin{gathered}\|y(t)-z\| = \|y^0 + v_1(t-t_1) - z\| = \\ = \sqrt{(y^0-z, y^0-z) + (t-t_1)^2 + 2v_1(t-t_1)(v_1, y^0-z)} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\|y^0-z\|^2 + (t-t_1)^2} \leqslant \sqrt{\|y^0-z\|^2 + (t_2-t_1)^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(r-\varepsilon/2)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}} \leqslant r - \frac{\varepsilon}{3}.\end{gathered}$$

Значит $y(t) \in D$, $t \in [t_1, t_2]$.

Предположим, доказано, что $\|y(t_j) - z\| \leqslant r - \dfrac{\varepsilon}{j}$. Докажем, что

$$\|y(t)-z\| \leqslant r - \frac{\varepsilon}{j+1},\quad t \in (t_j, t_{j+1}].$$

$$\|y(t)-z\| = \|y(t_j)-z+v_j(t-t_j)\| =$$
$$= \sqrt{\|y(t_j)-z\|^2+(t-t_j)^2+2(t-t_j)(v_j, y(t_j)-z)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\|y(t_j)-z\|^2+(t-t_j)^2} \leqslant \sqrt{\|y(t_j)-z\|^2+(t_{j+1}-t_j)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(r-\frac{\varepsilon}{j})^2+\Big(\frac{\varepsilon}{j+1}\Big)^2} \leqslant r-\frac{\varepsilon}{j+1}.$$

При доказательстве было использовано, что $(v_j, y(t_j)-z) \leqslant 0$. Тем самым доказано, что $y(t) \in D$ для всех $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Так как $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = \infty$, получаем, что в игре Γ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана.

ЧАСТЬ VII
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ЗАДАНИЕ 1

В R^2 рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Закон движения P имеет вид

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad u \in U = \big\{(u_1, u_2) : |u_1| + |u_2| \leqslant \alpha\big\}.$$

Движение E описывается уравнением вида

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad v \in V = \big\{(v_1, v_2) : |v_1| + |v_2| \leqslant \beta\big\}.$$

Игрок E выбирает программное управление $v(t)$ вида

$$v(t) = \begin{cases} v_0, & \text{если} \ \ t \in [0, \tau_1], \\ v_1, & \text{если} \ \ t \in (\tau_1, \tau_2], \\ v_2, & \text{если} \ \ t \in (\tau_2, \infty), \end{cases}$$

и в момент $t = 0$ сообщает P о выборе v_0, τ_1, в момент τ_1 — о выборе v_1, τ_2, в момент τ_2 — о выборе v_2 (если к соответствующему моменту τ_j встреча еще не произошла).

Игрок P использует стратегию параллельного сближения, двигаясь с максимальной по норме скоростью. Найти траекторию P и наименьший момент встречи (момент встречи — момент T такой, что $x(T) = y(T)$).

Пусть $\alpha = 4, \quad \beta = 2, \quad x_0 = (0, 0)$.

вар.	v_0	τ_1	v_1	τ_2	v_2	y_0
1	$(-2,0)$	1	$(0,2)$	2	$(1,1)$	$(0,10)$
2	$(-2,0)$	2	$(1,1)$	4	$(0,2)$	$(0,-10)$
3	$(0,2)$	2	$(-1,1)$	4	$(0,-2)$	$(11,12)$
4	$(0,2)$	2	$(-1,-1)$	4	$(0,-2)$	$(11,-12)$
5	$(0,2)$	2	$(1,-1)$	4	$(0,0)$	$(11,12)$
6	$(1,1)$	2	$(-2,0)$	4	$(2,0)$	$(12,13)$
7	$(-1,-1)$	2	$(2,0)$	4	$(-2,0)$	$(12,13)$
8	$(-1,1)$	2	$(-2,0)$	4	$(1,-1)$	$(12,13)$
9	$(1,-1)$	2	$(0,2)$	4	$(1,-1)$	$(12,13)$
10	$(-2,0)$	2	$(0,2)$	5	$(1,1)$	$(-12,-13)$

ЗАДАНИЕ 2

Вычислить $\delta(z^0)$ в игре двух лиц в R^2, если

$$U = V = \mathrm{co}\big\{(-2,-2),(-2,2),(2,c),(3,d)\big\},\ z_0 = (a,b).$$

вар.	a	b	c	d
1	-2	-5	-3	-5
2	1	-4	3	-4
3	2	-4	4	-4
4	6	-2	-4	-6
5	7	-2	1	-4
6	1	-3	-4	5
7	-1	-7	2	-4
8	-1	8	-2	9
9	1	-7	5	-4
10	3	-5	3	-5

ЗАДАНИЕ 3

Вычислить $\delta(z^0)$ в игре пяти лиц в R^3, если

$$U_1 = U_2 = U_3 = V = D_1(0),\ y^0 = (1,-a,b),$$

$$x_1^0 = (1,-1,a), x_2^0 = (a,b,c), x_3^0 = (c,2,d), x_4^0 = (-c,b,-d),$$

где a,b,c,d из соответствующего варианта задания 2.

ЗАДАНИЕ 4

Решить задачу преследования первым методом Понтрягина. Система уравнений имеет вид

$$\dot{z}_1 = z_2 - z_3,$$
$$\dot{z}_2 = -\alpha z_2 - u,$$
$$\dot{z}_3 = -\beta z_3 + v,$$

где $z_1, z_2, z_3 \in R^2$, $U = D_\rho(0)$, $V = D_\sigma(0)$, условие поимки — $z_1 = 0$.

вар.	z_1^0	z_2^0	z_3^0	ρ	σ	α	β
1	$(3,0)$	$(-1,1)$	$(0,2)$	30	16	3	4
2	$(2,2)$	$(0,2)$	$(-1,-1)$	30	12	2	3
3	$(0,-2)$	$(2,0)$	$(-1,1)$	42	24	4	3
4	$(0,2)$	$(-2,0)$	$(-1,-1)$	42	16	2	4
5	$(-1,2)$	$(-2,1)$	$(1,-1)$	42	30	4	3
6	$(1,1)$	$(-2,0)$	$(-2,0)$	42	24	3	1
7	$(-1,-1)$	$(-2,-1)$	$(2,1)$	36	24	1	4
8	$(-1,1)$	$(-3,2)$	$(-2,0)$	24	4	3	6
9	$(1,-1)$	$(2,-4)$	$(0,-2)$	24	8	2	4
10	$(-2,0)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	15	6	2	4

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967.
2. *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц. М.: ИФМЛ. 1961.
3. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск.: Изд-во Удмуртс. ун-та., 2009.
4. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа. 2001.
5. *Вайсборд Э.М., Жуковский В.И.* Введение в дифференицальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Сов. радио. 1980.
6. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Московского ун-та. 1990.
7. *Жуковский В.И., Чикрий А.А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев.: Наук. думка. 1994.
8. *Зак В.Л.* Задача уклонения от многих преследователей// ДАН СССР. 1982. Т. 265. N 5. С. 1051-1053.
9. *Иванов Р.П.* Простое преследование на компакте// ДАН СССР. 1980. Т. 254. N 6. С. 1318-1321.
10. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встречи движений. М.: Наука. 1970.
11. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для игровой задачи сближения// Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. Вып. 6. С. 1005-1022.
12. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

13. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой: задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука. 1985.

14. *Мезенцев А.В.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями. М.: МГУ. 1988.

15. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С.Понтрягина в дифференциальных играх. М.: МГУ. 1984.

16. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир. 1971.

17. *Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.* Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир. 1974.

18. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем //Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. N 4. С. 606–617.

19. *Петров Н.Н.* Теория игр. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1997.

20. *Петров Н.Н.* Введение в выпуклый анализ. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2009.

21. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ. 1977

22. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высшая школа. 1998.

23. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Геометрия простого преследования. Новосибирск.: Наука. 1983.

24. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Динамические игры и их приложения. Л.: Изд-во ЛГУ. 1982.

25. *Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю.* Игры поиска. СПб.: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та. 1992.

26. *Петросян Л.А., Рихсиев Б. Б.* Преследование на плоскости. М.: Наука. 1991.

27. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т.2. М.:Наука. 1988.

28. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев.: Наукова думка. 1992.

29. *Рихсиев Б.Б.* Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент.: Фан. 1989.

30. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973.

31. *Сатимов Н., Рихсиев Б. Б.* Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент.: Фан. 2000.

32. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981.

33. *Ухоботов В.И.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями общего вида. Челябинск. Изд-во Челябин. ун-та. 1998.

34. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования//Вестник МГУ. Серия Математика. механика. 1959. N 2. С. 25-32.

35. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука. 1978.

36. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев.: Наукова думка. 1992.

Банников Александр Сергеевич
Петров Николай Никандрович
Чиркова Любовь Сергеевна

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Авторская редакция

Подписано в печать 01.11.13. Формат $60 \times 84\ {}^1/_{16}$.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,03. Усл. п. л. 2,79.
Тираж 20 экз. Заказ

Издательство «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.
Тел/факс: +7(3412)500-295, e-mail: editorial@udsu.ru