На правах рукописи

НСолоф

Соловьева Надежда Александровна

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

01.01.02 —дифференциальные уравнения,
динамическое управление и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель:	Петров Николай Никандрович, доктор физико-математических наук, профессор, Удмуртский государственный университет, директор Института математики, информационных технологий и физики.
Официальные оппоненты:	Серков Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, заведующий сектором отдела динамических систем.
	Громова Екатерина Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, доцент кафедры математической теории игр и статистических решений.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет».

Защита диссертации состоится «7» декабря 2016 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИММ УрО РАН: http://wwwrus.imm.uran.ru/C16/Diss/ .

Автореферат разослан “___”__________ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Костоусова Елена Кирилловна

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Диссертационная работа посвящена изучению задач конфликтного управления при наличии двух или более сторон, движения которых описываются дифференциальными уравнениями. Практические задачи из области экономики, экологии, биологии, управления механическими системами, а также военного дела являются лишь некоторыми приложениями теории дифференциальных игр.

Одной из первых работ в этой области следует считать работу Г. Штейнгауза[1], опубликованную в 1925 году, в которой он сформулировал задачу преследования.

Теория дифференциальных игр начала развиваться в начале 50–х годов XX века. Термин «дифференциальная игра» ввел американский математик Р. Айзекс[2] — один из основоположников данной теории.

В нашей стране динамические задачи конфликтного управления рассматриваются с начала 60–х годов прошлого века и связаны с именами советских математиков Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Л.А. Петросяна, Б.Н. Пшеничного.

Среди работ зарубежных авторов конца 60-х – начала 70-х годов прошлого века отметим работы L.D. Berkovitz, A. Blaqui‘ere, J.V. Breakwell, W.H. Fleming, A. Friedman, G. Leitmann, A.W. Merz. В них рассматривались теоремы существования функции цены в подходящем классе стратегий, и развивался метод Р. Айзекса решения дифференциальных игр при помощи построения сингулярных поверхностей.

Н.Н. Красовским и представителями его научной школы создана теория позиционных дифференциальных игр, в основе которой лежит понятие стабильного моста и правило экстремального прицеливания на него[3,4,5]. Для широкого класса задач доказаны теоремы об альтернативе. Были также развиты методы синтеза позиционных стратегий, изучены проблемы устойчивости и стабилизации процедур управления, развита теория обобщенных решений уравнений Айзекса–Беллмана.

В работах Л.С. Понтрягина[6,7] разработана схема нахождения решения линейной дифференциальной игры преследования на основе альтернированного

[1] Steinhaus, H. Definitions for a theory of games and pursuit/H. Steinhaus//Mysl. Academicka. — 1925. — Vol. 1, № 1. — P. 13–14.

[2] Айзекс, Р. Дифференциальные игры/Р. Айзекс. — М.: Мир, 1967. — 480 с.

[3] Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры/Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Наука, 1974. — 456 с.

[4] Субботин А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления/А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. — М.: Наука, 1981. — 288 с.

[5] Красовский, Н.Н. Управление динамической системой/Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1985. — 516 с.

[6] Понтрягин, Л.С. О линейных дифференциальных играх I/Л.С. Понтрягин//ДАН СССР. — 1967. — Т. 174, № 6. — С. 1278–1280.

[7] Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх II/Л.С. Понтрягин//ДАН СССР. — 1967. — Т. 175, № 4. — С. 764–766.

интегрирования выпуклых множеств. Эти два прямых метода получили название первого и второго методов Л.С. Понтрягина. Б.Н. Пшеничным были предложены операторные конструкции для определения множества в пространстве позиций, на которых разрешима задача преследования в нелинейных дифференциальных играх.

Одним из важнейших разделов теории дифференциальных игр являются задачи преследования–убегания с участием группы преследователей и одного или нескольких убегающих. При этом ситуация может быть осложнена наличием дополнительных ограничений на состояния участников. В этом направлении следует отметить работы Н.Л. Григоренко, Б.Н. Пшеничного, А.И. Чикрия, И.С. Раппопорта, Н. Сатимова, М.Ш. Маматова, П.Б. Гусятникова, Б.Б. Рихсиева, А.А. Азамова, М.С. Габриэляна, Ф.Л. Черноусько, В.Л. Зака, В.С. Пацко, Р.П. Иванова.

Одной из первых работ, посвященных задаче группового преследования, была работа Л.А. Петросяна[8], где было введено понятие стратегии параллельного преследования.

В работе Б.Н. Пшеничного[9] рассматривалась задача простого преследования группой преследователей одного убегающего, при условии, что скорости убегающего и преследователей по норме не превосходят единицы. Были получены необходимые и достаточные условия поимки: поимка происходит тогда и только тогда, когда начальная позиция убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей.

Р.П. Иванов[10] рассмотрел задачу простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий не покидает пределы выпуклого компакта с непустой внутренностью. Было доказано, что если число преследователей меньше размерности множества, то будет уклонение, иначе — поимка и получена оценка времени поимки. Работа Н.Н. Петрова[11] обобщает результат Р.П. Иванова на случай, когда убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью.

Н. Сатимов и М.Ш. Маматов[12] рассмотрели задачу преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что преследователи обладают простым движением с единичной по норме максимальной скоростью и убегающие, кроме того, используют одно и то же управление (жестко скоординированные убегающие). Цель группы преследователей — поймать хотя бы одного убегающего. Были приведены достаточные условия поимки. Работы Д.А. Ваги-

[8]Петросян, Л.А. Об одном классе игр преследования: автореферат диссертации на соиск. степени канд. физ.–мат. наук/Петросян Леон Аганесович. — Вильнюс, 1965.

[9]Пшеничный, Б.Н. Простое преследование несколькими объектами/Б.Н. Пшеничный//Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.

[10]Иванов, Р.П. Простое преследование на компакте/Р.П. Иванов//ДАН СССР. — 1978. — Т. 254, № 6. — С. 1318–1321.

[11]Петров, Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров//Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 5. — С. 22–26.

[12]Сатимов, Н. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих/Н. Сатимов, М.Ш. Маматов //ДАН УзбССР. — 1983. — №4. — С. 3–6.

на и Н.Н. Петрова[13,14] дополняют предыдущую работу.

Н.Н. Петров и В.А. Прокопенко[15] рассматривали задачу простого преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что скорости всех участников по норме не превосходят единице, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а убегающие в начальный момент времени выбирают свое управление на интервале $[0;\infty)$. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

Б.К. Хайдаров[16] рассмотрел задачу позиционной l–поимки одного убегающего группой преследователей при условии, что каждый из игроков обладает простым движением. Н.Л. Григоренко[17] получил необходимые и достаточные условия r–поимки одного убегающего группой преследователей при условии, что все игроки обладают простым движением с максимальной по норме скоростью, равной единице. А.А. Чикрием[18] были получены достаточные условия многократной поимки в конфликтно–управляемых процессах. А.И. Благодатских[19] приводит достаточные условия многократной, нестрогой одновременной и одновременной многократной поимок; в частности, для задачи простого группового преследования с равными возможностями получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки. В своей работе он ввел понятие и получил необходимые и достаточные условия многократной и одновременной многократной поимок в задаче простого группового преследования с равными возможностями при наличии третьей группы участников — защитников убегающих[20].

Обобщением задачи простого преследования является пример Л.С. Понтрягина[21]. Н.Н. Петров[22] рассмотрел задачу преследования группой преследователей одного убегающего в примере Л.С. Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями игроков. Были получены достаточные усло-

[13]Вагин, Д.А. Задача преследования групп жестко скоординированных убегающих/Д.А. Вагин, Н.Н. Петров//Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 5. — С. 75–79.

[14]Петров, Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих/Н.Н. Петров//Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 12. — С. 89 – 95.

[15]Петров, Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих/Н.Н. Петров, В.А. Прокопенко//Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 724 – 726.

[16]Хайдаров, Б.К. Позиционная l–поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей/Б.К. Хайдаров//Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48, вып. 4. — С. 574–579.

[17]Григоренко, Н.Л. Задача преследования несколькими объектами/Н.Л. Григоренко//Труды математического института АН СССР. — 1984. — Т.166. — С. 61–75.

[18]Чикрий, А.А. Конфликтно управляемые процессы/А.А. Чикрий. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.

[19]Благодатских, А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе/А.И. Благодатских//Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77, вып. 3. — С. 433–440.

[20]Благодатских, А.И. Задача группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего/А.И. Благодатских//Математическая теория игр и ее приложения. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 32–41.

[21]Понтрягин, Л.С. Избранные научные труды : в 3-х т. Т. 2. Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры/Л.С. Понтрягин; отв. ред. Р.В.Гамкрелидзе. — М.: Наука, 1988. — 575 с.

[22]Петров, Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров//Математика. Изв. вузов. — 1994. — № 4(383). — С. 24–29.

вия поимки. Кроме того, он рассмотрел задачу о многократной поимке одного убегающего группой преследователей в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями[23]. В задаче преследования жестко скоординированных убегающих группой преследователей в примере Л.С. Понтрягина при равных динамических и инерционных возможностях участников получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего[24]. В своей работе Н.Н. Петров[25] рассмотрел задачу преследования группой преследователей группы убегающих в примере Л.С. Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями игроков при условии, что каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а убегающие в начальный момент времени выбирают свое управление на интервале $[0; \infty)$ и не покидают пределы множества D.

Б.Т. Саматов[26,27] рассмотрел задачу преследования–убегания для случая, когда на класс управлений преследователя налагается интегральное ограничение, допускающее линейное изменение с течением времени, которое является обобщением как интегральных, так и геометрических ограничений, а на класс управлений убегающего только геометрическое. При этом задача оптимального преследования решается посредством обобщенной стратегии параллельного преследования, а в задаче убегания устанавливаются нижние оценки для расстояния между преследователем и убегающим.

В своих работах С.А. Ганебный, С.С. Кумков, С. Ле Менек, В.С. Пацко[28,29,30] рассмотрели дифференциальную игру с двумя догоняющими и одним убегающим. Динамика каждого из объектов описана линейной стационарной системой общего вида со скалярным управляющим воздействием. Платой является минимум из двух одномерных промахов между первым преследователем и убегающим и между вторым преследователем и убегающим. Промахи подсчитываются в фиксированные заранее моменты времени. Описывается способ построения множеств уровня функции цены (множеств разрешимости игровой задачи) для различных вариантов параметров задачи. Для случая “сильных” преследователей даются способы построения оптимальных стратегий.

[23]Петров, Н.Н. Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров//Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61, вып. 5. — С. 747–754.

[24]Вагин, Д.А. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями/Д.А. Вагин, Н.Н. Петров//Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66, вып. 2. — С. 234–241.

[25]Петров, Н.Н. Об одной задаче группового преследования/Н.Н. Петров//Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 6. — С. 48–54.

[26]Саматов, Б.Т. О задаче преследования–убегания при линейном изменении ресурса преследователя/Б.Т. Саматов//Математические труды. — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 159—171.

[27]Саматов, Б.Т. Задача преследования–убегания при интегрально–геометрических ограничениях на управления преследователя/Б.Т. Саматов//Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 7. — С. 17–28.

[28]Ганебный, С.А. Игровая задача преследования двумя догоняющими одного убегающего: зависимость решения от параметров/С.А. Ганебный, С.С. Кумков, С. Ле Менек, В.С. Пацко//Известия Института математики и информатики УдГУ. — 2012. — Вып. 1(39). — С. 32–37.

[29]Кумков, С.С. Два слабых преследователя в игре против одного убегающего/С.С. Кумков, С. Ле Менек, В.С. Пацко//Автоматика и телемеханика. — 2014.— № 10. — С. 73–96.

[30]Кумков, С.С. Множества разрешимости в задаче преследования с двумя догоняющими и одним убегающим/С.С. Кумков, С. Ле Менек, В.С. Пацко//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 148–165.

Цель и задачи исследования. Цель данной работы состоит в получении условий разрешимости новых классов игровых задач группового преследования при дополнительных, типа «фазовых», ограничениях на состояние убегающего. В диссертации исследуются следующие задачи: задача преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в линейных нестационарных дифференциальных играх при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову; задача группового преследования одного убегающего в нестационарном примере Л.С. Понтрягина при условии, что некоторые функции, определяемые начальными условиями и параметрами игры, являются рекуррентными по Зубову.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования задач группового преследования.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных игр, оптимального управления, выпуклого анализа.

Положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие результаты.

1. Достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в линейных нестационарных дифференциальных играх в предположении, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову.

2. Достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего для линейной нестационарной задачи преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией, а все убегающие используют одно и то же управление.

3. Достаточные условия поимки заданного числа убегающих для линейной нестационарной задачи преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией и каждый преследователь может поймать не более одного убегающего.

4. Достаточные условия разрешимости задачи преследования в обобщенном нестационарном примере Л.С. Понтрягина со многими участниками при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков в предположении рекуррентности по Зубову некоторых функций.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации приведены в виде строгих математических утверждений. Все результаты диссертации строго доказаны. Достоверность и обоснованность полученных результатов обусловлена математической строгостью методов исследования, корректным использованием математического аппарата, публикацией работ в открытой печати в ведущих рецензируемых изданиях и апробацией результатов диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на международных и всероссийских конференциях: Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2012» (Ташкент, 2012 г.), Конференция «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященная 90–летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко (Москва, 2012 г.), Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2013 г.), Международная конференция «Динамика систем и процессы управления», посвященная 90–летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 2014 г.), II Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби», посвященный 70–летию со дня рождения академика А.И. Субботина (Екатеринбург, 2015 г.), Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015 г.). Тезисы докладов опубликованы в [9–14]. Результаты обсуждались также на семинаре отдела динамических систем Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (руководители — член-корреспондент РАН В.Н. Ушаков, профессор А.М. Тарасьев; Екатеринбург, 2016 г.) и на Ижевском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (руководители — профессор Е.Л. Тонков, профессор Н.Н. Петров; Ижевск, 2014–2016 гг.).

Основные материалы диссертации опубликованы в 14 работах [1–14], из них семь публикаций [1–7] опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях: российских из Перечня ВАК [1–5, 7] и зарубежных [6], входящих в международную реферативную базу данных Scopus. Все основные результаты диссертации автор получила лично. В совместных статьях с научным руководителем [2, 3, 5–8] Н.Н. Петрову принадлежат постановки задач и общее руководство проводимыми исследованиями. Из результатов работы [3] в диссертацию включена лемма 3, принадлежащая автору.

Основное содержание работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Объем работы 97 страниц. Список литературы включает 132 наименований.

Работа посвящена дифференциальным играм преследования с участием группы преследователей и одного или нескольких убегающих в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$.

Первая глава диссертации состоит из трех параграфов и посвящена линейным рекуррентным дифференциальным играм. В первом параграфе рассматривается линейная нестационарная задача преследования группой преследователей $P_1, \ldots, P_n$ одного убегающего E с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v,\ v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k,\ i \in I = \{1, 2, \ldots, n\},\ A(t)$ – непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка $k,\ V$ — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ y(t_0) = y^0, \tag{1.3}$$

причем $x_i^0 \neq y^0$ для всех i.

Вместо систем (1.1) — (1.3) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v,\ u_i, v \in V,\ z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{1.4}$$

Отметим, что $z_i^0 \neq 0$.

Назовем предысторией управления $v(t)$ убегающего E в момент времени $t,\ t \in [t_0, \infty)$ множество $v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [t_0, t], v -$ измеримая функция.$\}$

Определение 1.1 *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

Обозначим данную игру через Γ_1.

Определение 1.2 *В игре Γ_1 происходит поимка, если существует момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot),\ v(t) \in V,\ t \in [t_0, T_0]$ найдутся номер $q \in \{1, \ldots, n\}$ и момент $\tau \leqslant T_0$ такие, что $z_q(\tau) = 0$.*

Определение 1.3[31] *Функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову (далее — рекуррентной), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t,\ a \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство*

$$\|F(t + \tau(t)) - F(t)\| < \varepsilon.$$

Определение 1.4 *Функция $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову (далее — рекуррентной) на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная*

[31]Зубов, В.И. К теории рекуррентных функций/В.И. Зубов//Сибирский математический журнал. — 1962. — Т. III, № 4. — С. 532–560.

функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ *такая, что* $f(t) = F(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$.

Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

где $\Phi(t_0) \equiv E$, E — единичная матрица.

Теорема 1.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица* $\Phi(t)$ *рекуррентна на* $[t_0, \infty)$, *а ее первая производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$;

2. $0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.

Тогда в игре Γ_1 *происходит поимка.*

Второй параграф посвящен линейной задаче преследования группы скоординированных убегающих $E_1, \ldots E_m$. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в предположении, что убегающие используют одно и то же управление и фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентой.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \ u_i \in V. \tag{1.5}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v, \ v \in V. \tag{1.6}$$

Здесь и далее $j \in \{1, \ldots, m\}$.

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0, \ y_j(t_0) = y_j^0, \tag{1.7}$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Вместо систем (1.5) — (1.7) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v, \ u_i, v \in V, \ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.8}$$

Отметим, что $z_{ij}^0 \neq 0$.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих E_j выбирают одно и то же управление v.

Определение 1.5 *Будем говорить, что задана квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ *преследователя* P_i, *если определено отображение* $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, *ставящее в соответствие начальному состоянию* $z^0 = (z_{11}^0, \ldots, z_{nm}^0)$, *моменту* t *и произвольной предыстории управления* $v_t(\cdot)$ *убегающих* $E_1, \ldots, E_m$ *измеримую функцию* $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ *со значениями в* V.

Обозначим данную игру через Γ_2.

Определение 1.6 *В игре* Γ_2 *происходит поимка, если существует момент* $T_0 = T(z^0)$, *квазистратегии* $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ *преследователей* $P_1, \ldots, P_n$, *та-*

кие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0]$ найдутся номера $q \in \{1, \ldots, n\}, p \in \{1, \ldots, m\}$ и момент $\tau \leqslant T_0$ такие, что $z_{qp}(\tau) = 0$.

Теорема 1.2 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица $\Phi(t)$ рекуррентна на $[t_0, \infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$;*

2. $\operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\} \cap \operatorname{co}\{y_1^0, \ldots, y_m^0\} \neq \emptyset$.

Тогда в игре Γ_2 происходит поимка.

Третий параграф посвящен поимке заданного числа убегающих. Рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \ u_i \in V. \tag{1.14}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v_j, \ v_j \in V. \tag{1.15}$$

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0, \ y_j(t_0) = y_j^0, \tag{1.16}$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Цель группы преследователей — поймать не менее чем q $(1 \leqslant q \leqslant m)$ убегающих, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[t_0, \infty)$, а затем преследователи выбирают свои управления, причем каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant q$.

Вместо систем (1.14) — (1.16) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v, \ u_i, v_j \in V, \ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.17}$$

Отметим, что $z_{ij}^0 \neq 0$.

Обозначим данную игру через Γ_3.

Определение 1.8 *В игре Γ_3 происходит поимка q убегающих, если существует момент $T_0 = T(z^0)$ такой, что для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$ убегающих E_j, $t \in [t_0, T_0]$ найдутся допустимые управления преследователей $P_1, \ldots, P_n$*

$$u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [t_0, T_0]),$$

такие, что существуют множества $N \subset I$, $M \subset J$, $|N| = |M| = q$ и для каждого номера $\beta \in M$ найдутся номер $\alpha = \alpha(\beta) \in N$ и момент $\tau_{\alpha\beta} \in [t_0, T_0]$, для которых выполнено $z_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$ и при этом $\alpha(\beta_1) \neq \alpha(\beta_2)$ для любых $\beta_1 \neq \beta_2$.

Теорема 1.3 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица* $\Phi(t)$ *рекуррентна на* $[t_0,\infty)$, *а ее первая производная равномерно ограничена на* $[t_0,\infty)$;

2. *Для каждого* $s \in \{0,1,\dots,q-1\}$ *верно следующее: для любого множества* $N \subset I$, $|N| = n-s$ *найдется такое множество* $M \subset J$, $|M| = q-s$, *что для всех* $\beta \in M$ *выполнено* $0 \in \operatorname{Intco}\{z^0_{\alpha\beta}, \alpha \in N\}$.

Тогда в игре Γ_3 *происходит поимка не менее* q *убегающих.*

Вторая глава посвящена обобщенному примеру Л. С. Понтрягина. В первом параграфе рассматривается нестационарная дифференциальная игра с n преследователями и одним убегающим при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)x_i = u_i,\ u_i \in V. \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + \dots + a_l(t)y = v,\ v \in V. \tag{2.2}$$

Здесь и далее $a_1(t),\dots,a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции.

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 \neq y^0 \quad \text{для всех} \quad i. \tag{2.3}$$

Здесь и далее $q = 0,1,\dots,l-1$.

Обозначим данную игру через Γ_4.

Вместо систем (2.1) — (2.3) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v,\ u_i, v \in V. \tag{2.4}$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q. \tag{2.5}$$

Преследователи используют квазистратегии.

Определение 2.2 *В игре* Γ_4 *происходит поимка, если существует момент* $T_0 = T(z^0)$ *и квазистратегии* $\mathcal{U}_1(t,z^0,v_t(\cdot)),\dots,\mathcal{U}_n(t,z^0,v_t(\cdot))$ *преследователей* $P_1,\dots,P_n$ *такие, что для любой измеримой функции* $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0,T(z^0)]$ *найдутся номер* $\alpha \in \{1,\dots,n\}$ *и момент* $\tau \in [t_0,T(z^0)]$ *такие, что* $z_\alpha(\tau) = 0$.

Обозначим через $\varphi_q(t,s)$, $q = 0,\dots,l-1$, $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ решения уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + \dots + a_l(t)\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega^{(j)}(s) = 0, \quad j = 0,\dots,q-1,q+1\dots,l-1, \quad \omega^{(q)}(s) = 1.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t,t_0)z_i^0 + \varphi_1(t,t_0)z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t,t_0)z_i^{l-1}.$$

$$\eta(t) = \varphi_0(t,t_0)y^0 + \varphi_1(t,t_0)y^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t,t_0)y^{l-1}.$$

Обозначим $H_i = \{\xi_i(t),\ t \in [t_0,\infty)\}$.

Определим функции:

$$\rho(t,s) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s) \geqslant 0, \\ -1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s) < 0 \end{cases} \quad (t_0 \leqslant s \leqslant t),$$

$$\lambda(v,\rho,h_i) = \sup\{\lambda:\ \lambda \geqslant 0,\ v - \lambda\rho h_i \in V\},$$

$$G(t,h_i) = \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,\lambda(v(s),\rho(t,s),h_i)\,ds.$$

Полагаем далее

$$h = (h_1,h_2,\ldots,h_n),\ D = D_\varepsilon(h_1^0)\times\ D_\varepsilon(h_2^0)\times\cdots\times\ D_\varepsilon(h_n^0),$$

где $D_r(a) = \{z : \|z-a\| \leqslant r\}$.

Лемма 2.2 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции $\xi_i(t)$ рекуррентны на $[t_0,\infty)$;*
2. $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds = +\infty$;
3. *Для всех $i \in I = \{1,2,\ldots,n\}$ существуют $h_i^0 \in H_i,\ h_i^0 \neq 0$ такие, что* $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}$.

Тогда существует момент T_1 такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ и для любого $h \in D$ существует $\alpha \in I$ такое, что $G(T_1,h_\alpha) \geqslant 1$.

Пусть

$$T(z^0) = \min\{t \geqslant t_0\ :\ \inf_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\ \max_{i\in I}\ G(t,h_i) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2.2 выполнено неравенство $T(z^0) < \infty$.

В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Теорема 2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции $\xi_i(t)$ рекуррентны на $[t_0,\infty)$;*
2. *Существуют $h_i^0 \in H_i,\ h_i^0 \neq 0$ такие, что $0 \in \operatorname{Intco}\{h_1^0,h_2^0,\ldots,h_n^0\}$;*
3. *Существуют моменты $\tau_i \geqslant T(z^0)$ такие, что*
   (a) $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(h_i^0)$;
   (b) $\inf\limits_{v(\cdot)}\max\limits_{i} G(\tau_i,\xi_i(\tau_i)) \geqslant 1$.

Тогда в игре Γ_4 происходит поимка.

Следствие 2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции $\xi_i(t)$ рекуррентны на $[t_0,\infty)$;*
2. $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0,\ldots,z_n^0\}$.

Тогда в игре Γ_4 происходит поимка.

Во втором параграфе рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего при равных динамических и инерционных возможностях игроков. Предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества, терминальные множества — начало координат.

Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{2.6}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2 y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y = v, \quad v \in V. \tag{2.7}$$

В момент $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 - y^0 \notin M_i \quad \text{для всех} \quad i, \tag{2.8}$$

где M_i — заданные выпуклые компакты.

Дополнительно предполагается, что убегающий не покидает пределы выпуклого множества

$$B = \{y : y \in \mathbb{R}^k, (p_c, y) \leqslant \mu_c, c = 1, 2, \ldots, r\},$$

с непустой внутренностью, где (a, b) — скалярное произведение векторов a и b, $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа.

Вместо систем (2.6) — (2.8) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)z_i = u_i - v, \tag{2.9}$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q. \tag{2.10}$$

Считаем, что $\xi_i(t) \notin M_i$ для всех $i, t \geqslant t_0$.

Определение 2.4 *В игре $\Gamma(n, B)$ происходит поимка, если существует момент $T(z^0)$, квазистратегии $U_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, U_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $y(t) \in B, t \in [t_0, T(z^0)]$ существуют момент $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ и номер $\alpha \in I$, что $z_\alpha(\tau) \in M_\alpha$.*

Пусть

$$\rho(t, s) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t, s) \geqslant 0, \\ -1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t, s) < 0 \end{cases} \quad (t_0 \leqslant s \leqslant t),$$

$$\lambda(v, \mu, b_i) = \sup\{\lambda \mid -\lambda\mu(b_i - M_i) \cap (V - v) \neq \emptyset\},$$

$$G(t, v(\cdot), b_i) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \lambda(v(s), \rho(t,s), b_i) ds,$$

$$F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| ds.$$

Предположение 2.1
1. *Функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными на* $[t_0, \infty)$;
2. *Функция* $\eta(t)$ *ограничена на* $[t_0, \infty)$;
3. $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \infty$;

Предположение 2.2 *Существуют моменты* $\tau_i^0 \geqslant t_0$, *положительные числа* ε, δ *такие, что*
1. *Для всех* i *и для всех* $h_i \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *выполнено* $h_i \notin M_i$;
2. *Для всех* $h_i \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *справедливы неравенства*

$$\min_v \max\bigl\{\max_i \lambda(v, +1, h_i), \max_j (p_j, v)\bigr\} \geqslant \delta,$$
$$\min_v \max\bigl\{\max_i \lambda(v, -1, h_i), \max_j (-p_j, v)\bigr\} \geqslant \delta.$$

Определим число T_0 :

$$T_0 = \min\{t \geqslant t_0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{h\in D} \max_{i\in I} G(t, v(\cdot), h_i) \geqslant 1\}.$$

Предположение 2.3 *Существуют моменты* $\tau_i \geqslant T_0$ *такие, что*
1. $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* i;
2. $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_i G(\tau_i, v(\cdot), \xi_i(\tau_i)) \geqslant 1$.

Теорема 2.2 *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2, 2.3, $r = 1$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Предположение 2.4 *Существуют* $\tau_i^0 \geqslant t_0$ *такие, что*

$$0 \in \operatorname{Intco}\bigl\{\xi_i(\tau_i^0) - M_i, i \in I, p_1, \ldots, p_r\bigr\}$$

Рассмотрим множество

$$B_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^k, (p, x) \leqslant \mu\},$$

где $\mu = \beta_1\mu_1 + \cdots + \beta_r\mu_r$.

Предположение 2.5 *Для любого* $h \in D$ *в множестве* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (h_i - M_i)$ *существует* k *линейно независимых векторов.*

Теорема 2.4 *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.4, 2.5 *и существуют* $\tau_i \geqslant T_0$ *такие, что*

1. $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$;

2. $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_i G(\tau_i, v(\cdot), \xi_i(\tau_i)) \geqslant 1$ *в игре* $\Gamma(n, B_1)$.

Тогда в игре $\Gamma(n, B_1)$ *происходит поимка.*

Третий параграф посвящен многократной поимке в рекуррентном примера Л.С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков и фазовыми ограничениями на состояния убегающего.

Определение 2.6 *В игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка (при* $m = 1$ *поимка), если существуют момент* $T(z^0)$*, квазистратегии* $U_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, U_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ *преследователей* $P_1, \ldots, P_n$ *такие, что для любой измеримой функции* $v(\cdot), v(t) \in V$, $y(t) \in B$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ *существуют моменты* $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [t_0, T(z^0)]$*, попарно различные индексы* $i_1, \ldots, i_m \in I$*, что* $z_{i_s}(\tau_s) = 0, s = 1, \ldots, m$.

Пусть $\Omega(p) = \{(i_1, \ldots, i_p) | i_1, \ldots, i_p \in I$ и попарно различны$\}$

Предположение 2.6 1. $n \geqslant m + k - 1$;

2. *Функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными на* $[t_0, \infty)$;

3. *Функция* $\eta(t)$ *ограничена на* $[t_0, \infty)$;

4. $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = \infty$;

5. $V = D_1(0)$, где $D_r(a) = \{z : \|z - a\| \leqslant r\}$.

Предположение 2.7 *Существуют моменты* $\tau_i^0 \in [t_0, \infty)$ *такие, что для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$ *выполнено включение* $0 \in \operatorname{Intco}\{\xi_j(\tau_j^0), j \in \Lambda, p_1, \ldots, p_r\}$.

Определим число

$$T_0 = \min\{t \geqslant t_0 \mid \min_{v(\cdot)} \min_{h \in D} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} G(t, v(\cdot), h_j) \geqslant 1\}.$$

Предположение 2.8 *Существуют моменты* $\tau_i \geqslant T_0$ *такие, что*

1. $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* i;

2. $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_{\Lambda \in \Omega(m)} \min\limits_{j \in \Lambda} G(\tau_j, v(\cdot), \xi_j(\tau_j)) \geqslant 1$.

Теорема 2.5 *Пусть выполнены предположения* 2.6, 2.7, 2.8, $r = 1$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

В конце параграфов приведены примеры, иллюстрирующие соответствующие теоремы.

Заключение

В диссертационной работе рассмотрены задачи преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих. Методами теории дифференциальных игр, оптимального управления и выпуклого анализа получены геометрические достаточные условия поимки: для линейной нестационарной задачи преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией, а все убегающие используют одно и то же управление; заданного числа убегающих для линейной нестационарной задачи преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией и каждый преследователь может поймать не более одного убегающего; в обобщенном нестационарном примере Л.С. Понтрягина со многими участниками в предположении рекуррентности по Зубову некоторых функций; многократной поимки в примере Л.С. Понтрягина в предположении рекуррентности по Зубову некоторых функций.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях, например, для получения достаточных условий «мягкой» поимки группой преследователей одного или нескольких убегающих в примере Л.С. Понтрягина; многократной поимки заданного числа убегающих.

Публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Соловьева, Н.А. Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх/Н.А. Соловьева//Математическая теория игр и ее приложения. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 81–90.

2. Петров, Н.Н. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Известия РАН. Теория и системы управления. — 2012. — № 6. — С. 29–37.

3. Виноградова, М.Н. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх/М.Н. Виноградова, Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 1. — С. 41–48.

4. Соловьева, Н.А. Групповое преследование в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина/Н.А. Соловьева//Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьтерные науки. — 2014. — № 3.— С. 83 – 89.

5. Петров, Н.Н. Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 2. — С. 178–186.

6. Petrov, N. N. Group pursuit with phase constraints in recurrent Pontryagin‘s example/N.N. Petrov, N.A. Solov‘eva//International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2015. — V. 100, № 2. — P. 263–278.

7. Петров, Н.Н. Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 5. — С. 128–135.

Другие публикации:

8. Петров, Н.Н. Групповое преследование в рекуррентных дифференциальных играх/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Известия Института математики и информатики. — 2012. — Вып. 1. — С. 99–100.

9. Петров, Н.Н., Соловьева Н.А. О некоторых линейных нестационарных задачах группового преследования/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: тезисы докладов—М.:Мат. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, 2012. — С.101–103.

10. Петров, Н.Н. Задача группового преследования в рекуррентных дифференциальных играх/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - аль-Хорезми 2012: тез. междунар. науч. конф. — Ташкент, 2012. — С. 89–90.

11. Виноградова, М. Н. К нестационарным задачам группового преследования/ М.Н. Виноградова, Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Международная конференция по математической теории управления и механике : тез. докл./Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Владимир. гос. ун-т им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. — Суздаль, 2013. — С. 67-69.

12. Петров, Н.Н. О некоторых нестационарных задачах группового преследования/Н.Н. Петров, М.Н. Виноградова, Н.А. Соловьева//Динамика систем и процессы управления : тез. докл. Междунар. конф. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УРФУ, 2014. — С. 141–142.

13. Петров, Н.Н. О задаче преследования с фазовыми ограничениями в рекуррентных дифференциальных играх/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби : тезисы докладов II Междунар. семинара. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УРФУ, 2015. — С. 102–104.

14. Соловьева, Н.А. О некоторых задачах преследования в рекуррентных дифференциальных играх/Н.А. Соловьева, Н.Н.Петров//Теория управления и математическое моделирование: тезисы докладов Всерос. конф. с междунар. участием. — Ижевск : Удмуртский университет, 2015. — С. 205 – 206.