На правах рукописи

Лукьянов Владимир Викторович

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Удмуртский государственный университет» на кафедре дифференциальных уравнений.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Дерр Василий Яковлевич,
	доктор физико-математических наук, профессор Тонков Евгений Леонидович
Официальные оппоненты:	Финогенко Иван Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Института динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, г. Иркутск
	Кумков Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Защита состоится «15» апреля 2015 г. в 15:30 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИММ УрО РАН: http://wwwrus.imm.uran.ru/C16/Diss/.

Автореферат разослан «____» марта 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Е. К. Костоусова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задачи быстродействия для линейных систем (линейные задачи быстродействия) являются одним из изучаемых разделов теории оптимальных процессов. Разработанная в середине XX века Л. С. Понтрягиным, Р. В. Гамкрелидзе, В. Г. Болтянским и Е. Ф. Мищенко математическая теория оптимального управления, в основе которой лежит принцип максимума, дала новый общий подход к решению подобного рода задач. Основным предметом исследований в этой области являются вопросы структуры оптимальных управлений, структуры множества управляемости и тесно связанная с ними проблема синтеза оптимальных управлений. Наиболее полно изучена линейная задача быстродействия для стационарных систем в то время как для нестационарных систем полученных результатов общего характера значительно меньше.

Е. Л. Тонков[1] рассматривал линейную нестационарную оптимальную по быстродействию управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad |u| \leqslant 1, \tag{1}$$

где $(n \times n)$-матрица $A(t)$ и n-мерный вектор $b(t)$ являются непрерывными функциями времени. Е. Л. Тонков ввел понятие *неосцилляции* сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$ относительно гиперплоскости $\gamma(t) = \{\psi \in \mathbb{R}^{n*} : \psi b(t) = 0\}$ и доказал ряд утверждений о структуре оптимальных управлений, структуре границы множества управляемости системы (1) и изучил вопрос построения синтезирующей функции. При исследовании этих вопросов автор использовал методы из теории чебышевских систем[2]. В более поздних работах систему (1), у которой соответствующая сопряженная система $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ неосциллирует на невырожденном полуинтервале $I = [t_0,\, t_0 + \sigma)$ относительно гиперплоскости $\gamma(t)$, стали называть *докритической*[3] в точке t_0.

Впоследствии исследования Е. Л. Тонкова продолжили С. Ф. Ни-

---

[1] *Тонков Е. Л.* Неосцилляция и число переключений в линейной нестационарной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 12. С. 2180–2185; *Тонков Е. Л.* К теории линейных управляемых систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1983. 267 с.

[2] *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. С. 50

[3] *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 107–115.

колаев[4] и Н. В. Милич[5]. С. Ф. Николаев изучал структуру множества управляемости докритической системы (1), дифференцируемость функции быстродействия, численные оценки интервала докритичности, а также вопросы связанные с существованием и построением позиционного управления для нелинейной системы близкой к докритической. Н. В. Милич получил результаты о структуре границы множества управляемости докритической системы (1) на большом промежутке времени.

Приведенные выше результаты Е. Л. Тонкова при более сильных ограничениях позже были переоткрыты рядом других авторов[6].

Цель работы. Основной целью данной работы является построение оптимального по быстродействию управления для линейной нестационарной системы с векторным управлением и исследование структуры ее множества управляемости.

Методы исследования. В работе использовались методы математической теории оптимального управления и свойства двухпараметрических Т-систем (ТА-систем) непрерывных функций.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и снабжены полными доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит в основном теоретический характер. Все результаты диссертации могут быть использованы для дальнейших исследований в теории линейных управляемых систем. Теория ТА-систем, основы которой заложены в дис-

---

[4] *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1996. Вып. 2 (8). С. 47–68; *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Позиционное управление нелинейной системой близкой к докритической // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1998. Вып. 2 (13). С. 3–26; *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 107–115; *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Дифференцируемость вектора быстродействия и позиционное управление линейной докритической системой // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 1. С. 76–84.

[5] *Милич Н. В.* Длина промежутка чебышевскости и множество управляемости линейной нестационарной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск, 2000. Вып. 1. С. 109–130; *Милич Н. В.* О структуре границы множества управляемости линейной докритической системы на большом промежутке времени // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1998. Вып. 2 (13). С. 27–52.

[6] *Chukwu E. N., Hajek O.* Disconjugacy and optimal control // Journal of Optimization Theory and Applications. 1979. Vol. 27, № 3. P. 333–356; *Hajek O.* Terminal manifolds and switching locus // Mathematical Systems Theory. 1973. Vol. 6. P. 289–301.

сертации, имеет самостоятельный интерес и может оказаться полезной в других областях математики. В прикладных задачах полученные результаты могут найти применение в проблеме построения позиционного управления в линейных нестационарных задачах быстродействия.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались автором на Ижевском городском математическом семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (Ижевск, 2006–2008), на научной конференции-семинаре «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2006), на Международной конференции «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2007), на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского (Москва, 2011), на Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическая теория управления и математическое моделирование», посвященной 60-летию ИжГТУ и 90-летию со дня рождения профессора Н. В. Азбелева (Ижевск, 2012).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, шести параграфов и списка литературы. Объем диссертации — 110 страниц. Библиографический список содержит 50 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** дана общая постановка исследуемой задачи, приведен обзор предшествующих исследований по близкой проблематике, а также изложено краткое содержание диссертации по параграфам с формулировками всех основных результатов.

В **первом параграфе** введено понятие двухпараметрической Т-системы функций на невырожденном промежутке и изучены ее свойства, которые позже используются в процессе изучения линейной нестационарной управляемой системы.

Пусть функции $\xi_i^j\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$ (n и r — некоторые фиксированные константы) определены и непрерывны на некотором невырожденном промежутке I.

Определение 1.1. Будем говорить, что двухпараметрическое семейство непрерывных функций $\left\{\xi_i^j(\cdot)\right\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует *двухпараметрическую Т-систему* (или короче *ТА-систему*) на промежутке I, если для любого ненулевого вектора $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ общее количество геометрически различных (то есть без учета кратностей) нулей на I всех линейных комбинаций $\xi^j(t; c) = c_1\xi_1^j(t) + \ldots + c_n\xi_n^j(t)$, $j = 1, \ldots, r$ не больше $n - 1$.

Сформулирован и доказан ряд простейших свойств ТА-систем, которые часто используются в последующих рассуждениях. Изолированный нуль непрерывной функции $\xi(t)$, лежащий во внутренности промежутка I, называется *узлом*[7], если при переходе через этот нуль функция $\xi(t)$ меняет знак, и *пучностью*[8], если эта функция знака не меняет (если нулем функции $\xi(t)$ является принадлежащая промежутку I граничная точка, то такой нуль считается узлом).

Теорема 1.1. *Пусть семейство непрерывных функций* $\left\{\xi_i^j\right\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ *образует ТА-систему на промежутке* I, $c \in \mathbb{R}^n$ — *произвольный ненулевой вектор,* k — *общее количество пучностей на* I *всех линейных комбинаций* $\xi^j(t; c)$, $j = 1, \ldots, r$, *а* l — *их общее количество узлов на* I. *Тогда* $2k + l \leqslant n - 1$.

В дальнейшем изложении первого и второго параграфов предполагается, что выполнено следующее условие.

Условие 1.1. Семейство непрерывных функций $\left\{\xi_i^j : I \to \mathbb{R}\right\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на фиксированном непустом интервале I.

Введем множество

$$\mathfrak{I} = \{\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathbb{Z}_+^r : \mathfrak{i}_1 + \ldots + \mathfrak{i}_r \leqslant n - 1\}$$

и определим отображения

$$\boldsymbol{\delta} \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \{-1, 1\}^r, \quad \mathbf{i}^- : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathfrak{I},$$

сопоставляющие ненулевому вектору $c \in \mathbb{R}^n$ соответственно *вектор знаков* $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r) \in \{-1, 1\}^r$ и *вектор индексов* $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, где δ_j — это знак линейной комбинации $\xi^j(t; c)$ в правой окрестности левого конца интервала I, а $\mathfrak{i}_j$ — количество узлов на интервале I линейной комбинации $\xi^j(t; c)$ (пучности мы не учитываем). Определим многозначное отображение $\boldsymbol{\Lambda}^- : \mathfrak{I} \to \{-1, 1\}^r$ с помощью равенства

$$\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}) = \bigcup_{\substack{c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \mathbf{i}^-(c) = \mathfrak{i}}} \{\boldsymbol{\delta}(c)\}. \qquad (2)$$

[7] *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. С. 53.

[8] Там же. С. 53.

Основные результаты первого параграфа представлены в лемме 1.1, теоремах 1.2 и 1.3 и утверждении 1.4.

Лемма 1.1. *Пусть выполнено условие* 1.1, *а вектор индексов* $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$ *удовлетворяет условию* $\mathfrak{i}_1 + \ldots + \mathfrak{i}_r = n - 1$. *Тогда множество* $\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ *состоит из двух противоположных элементов.*

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие* 1.1. *Тогда для любых векторов* $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ *и любого семейства точек* $\{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j}^{j=1,\ldots,r}$, *удовлетворяющих условиям*

а) $\tau_i^j \in I$ *при всех* $i = 1, \ldots, \mathfrak{i}_j$, $j = 1, \ldots, r$;

б) *точки* $\tau_1^j, \ldots, \tau_{\mathfrak{i}_j}^j$ *попарно различны при каждом* $j = 1, \ldots, r$, *существует такой ненулевой вектор* c, *что*

1) $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$;

2) *каждая линейная комбинация* $\xi^j(t; c)$ $(j = 1, \ldots, r)$ *имеет узлы в точках* $\tau_1^j, \ldots, \tau_{\mathfrak{i}_j}^j$ *и не имеет других узлов на интервале* I.

Теорема 1.3. *Пусть выполнено условие* 1.1, $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \{-1, 1\}^r$ — *произвольные векторы. Для того чтобы* $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали векторы* $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$ *и* $\delta' \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $\mathfrak{i}'_1 + \ldots + \mathfrak{i}'_r = n - 1$;

2) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$;

3) $\delta_j = \delta'_j$ *при тех* $j \in \{1, \ldots, r\}$, *при которых* $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}'_j$.

Утверждение 1.4. *Пусть выполнено условие* 1.1. *Тогда множество* $\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ *непусто при любом* $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, *причем* $\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}) \subseteq \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *если* $\mathfrak{i} \geqslant \mathfrak{i}'$.

В заключительной части первого параграфа описан простой и эффективный способ построения множества $\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ при любом $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$. В нем используется определение отображения $\boldsymbol{\Lambda}^-$ (равенство (2)), лемма 1.1 и теорема 1.3. В конце первого параграфа приведены примеры.

Во **втором параграфе** продолжено изучение свойств двухпараметрических Т-систем на некотором фиксированном интервале.

Определим отображение $\mathbf{i}^+ \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathfrak{I}$, сопоставляющее ненулевому вектору $c \in \mathbb{R}^n$ *расширенный вектор индексов* $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, где $\mathfrak{i}_j = 2k_j + l_j$, а k_j и l_j $(j = 1, \ldots, r)$ — количества пучностей и узлов соответственно на I линейной комбинации $\xi^j(t; c)$. По аналогии с отображением $\boldsymbol{\Lambda}^-$ (равенство (2)) определим многозначное отображение $\boldsymbol{\Lambda}^+ \colon \mathfrak{I} \to \{-1, 1\}^r$ равенством

$$\boldsymbol{\Lambda}^+(\mathfrak{i}) = \bigcup_{\substack{c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \mathbf{i}^+(c) = \mathfrak{i}}} \{\boldsymbol{\delta}(c)\}.$$

Основные результаты второго параграфа представлены ниже в теоремах 2.1 и 2.3.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* 1.1. *Тогда для любых векторов* $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \mathbf{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$ *и любых семейств точек* $\tau = \{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, $\tau' = \{\tau_i'^j\}_{i=1,\ldots,n'_j}^{j=1,\ldots,r}$, *удовлетворяющих условиям*

а) $\tau_i^j \in I$ *при всех* $i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, r$;

б) $\tau_i'^j \in I$ *при всех* $i = 1, \ldots, n'_j$, $j = 1, \ldots, r$;

в) *точки* $\tau_1^j, \ldots, \tau_{n_j}^j, \tau_1'^j, \ldots, \tau_{n'_j}'^j$ $(j = 1, \ldots, r)$ *попарно различны;*

г) $2n_j + n'_j = \mathfrak{i}_j$ $(j = 1, \ldots, r)$,

существует такой ненулевой вектор c, *что*

1) $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$;

2) *каждая линейная комбинация* $\xi^j(t; c)$ $(j = 1, \ldots, r)$ *имеет пучности в точках* $\tau_1^j, \ldots, \tau_{n_j}^j$, *узлы в точках* $\tau_1'^j, \ldots, \tau_{n'_j}'^j$ *и не имеет других нулей на интервале* I.

Теорема 2.3. $\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}) = \mathbf{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$ *для любого* $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$.

Теорема 2.1 обобщает теорему 1.2, а теорема 2.3 позволяет легко построить множество $\mathbf{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$ при любом $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$. Учитывая утверждение теоремы 2.3, мы не будем в дальнейшем указывать верхний индекс у отображения $\mathbf{\Lambda} \colon \mathfrak{I} \to \{-1, 1\}^r$, положим $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^- = \mathbf{\Lambda}^+$.

В конце второго параграфа кратко рассмотрен случай ТА-системы на произвольном фиксированном невырожденном промежутке I (до этого предполагалось, что I — интервал). Указаны те утверждения, которые остаются справедливыми при таком обобщении (разумеется с некоторыми уточнениями), и те, которые заведомо теряют силу. Рассуждения снабжены поясняющими примерами.

В **третьем параграфе** определены функции $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$, $\boldsymbol{\sigma}'(\cdot)$ и изучены их простейшие свойства.

Пусть функции $\xi_i^j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$ определены и непрерывны на всем множестве вещественных чисел.

Для каждого $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $\boldsymbol{\sigma}(t)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на интервале $I_t = (t,\, t + \sigma)$ семейство функций $\{\xi_i^j(\cdot)\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему (определение 1.1). Если эти функции не образуют ТА-систему ни на каком интервале I_t, то положим $\boldsymbol{\sigma}(t) = 0$. Так определена функция $\boldsymbol{\sigma} \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Функция $\boldsymbol{\sigma}' \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ определяется аналогично: ее определение отличается от определения функции $\boldsymbol{\sigma}$ тем, что вместо интервалов $I_t = (t,\, t + \sigma)$ рассматриваются полуинтервалы $[t,\, t + \sigma)$.

Для однопараметрического семейства функций $\{\xi_i(\cdot)\}_{i=1}^{n}$ функция $\boldsymbol{\sigma}'$ определялась и использовалась ранее в работах С. Ф. Николаева[9] (в них она обозначалась σ). Однако для наших исследований более удобной оказалась именно функция $\boldsymbol{\sigma}$.

Доказаны некоторые свойства функций $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}'$.

Отображение $\boldsymbol{\Lambda}$, определенное для некоторой фиксированной ТА-системы функций $\left\{\xi_i^j(\cdot)\right\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,r}$ на произвольном интервале I, вообще говоря, зависит от интервала I. В дальнейшем мы будем подчеркивать это, указывая рассматриваемый интервал в качестве нижнего индекса для отображения $\boldsymbol{\Lambda}_I$.

Доказано следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Пусть семейство непрерывных всюду на* $\mathbb{R}$ *функций* $\left\{\xi_i^j(\cdot)\right\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,r}$ *образует ТА-систему на интервалах* I_1 *и* I_2, *причем* $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$. *Тогда для любого вектора индексов* $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$ *имеет место равенство* $\boldsymbol{\Lambda}_{I_1}(\mathfrak{i}) = \boldsymbol{\Lambda}_{I_2}(\mathfrak{i})$.

Утверждение 3.1 позволяет в индексе отображения $\boldsymbol{\Lambda}$ вместо интервала I указывать только его левый конец.

В **четвертом параграфе** приведена постановка линейной нестационарной задачи быстродействия. Также введены необходимые понятия, сделан ряд построений и доказано несколько утверждений.

Рассмотрим линейную нестационарную задачу быстродействия в нуль с закрепленным левым концом

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + T) = 0, \quad T \to \min, \tag{4}$$

где $(n \times n)$-матрица $A(t)$ и $(n \times r)$-матрица $B(t)$ предполагаются непрерывными функциями времени. Множеством допустимых управлений $\mathcal{U}$ будем считать совокупность всевозможных измеримых функций $u\colon \mathbb{R} \to U = [-1, 1]^r$. Решение системы (3), выходящее в момент времени t_0 из точки x_0 под действием фиксированного управления $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$, обозначим $\hat{x}(t) = x(t; t_0, x_0, \hat{u}(\cdot))$.

Если $\hat{u}(\cdot)$ — оптимальное управление в задаче (3)–(4), переводящее точку x_0 в нуль за минимальное время T, то справедлив принцип максимума Понтрягина:

$$\max_{u \in U} \psi(t)B(t)u = \psi(t)B(t)\hat{u}(t) \quad \text{почти всюду на } [t_0,\, t_0 + T], \tag{5}$$

[9] *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 107–115.

где $\psi(t)$ — некоторое нетривиальное решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi A(t). \tag{6}$$

Пусть $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ — некоторая фундаментальная система решений сопряженной системы (6). Определим семейство функций

$$\xi_i^j(t) = \psi_i(t) b^{(j)}(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{7}$$

где $b^{(j)}(t)$ — столбец матрицы $B(t)$ с номером j. Для семейства функций (7) строим функцию $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$, $\boldsymbol{\sigma}(t; A, B) = \boldsymbol{\sigma}(t)$. Если в некоторой точке t_0 выполнено неравенство $\boldsymbol{\sigma}(t_0) > 0$, то семейство функций $\big\{\xi_i^j(\cdot)\big\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на интервале $I = \big(t_0,\, t_0 + \boldsymbol{\sigma}(t_0)\big)$ и для этой точки t_0 можно определить отображение $\boldsymbol{\Lambda}_{t_0} = \boldsymbol{\Lambda}_I$.

Показано, что определенные таким образом функция $\boldsymbol{\sigma}$ и отображение $\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}$ не зависят от того, какая конкретно фундаментальная система решений $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ сопряженной системы (6) была выбрана. Для стационарной системы (3) доказано, что функция $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t)$ является постоянной, то есть $\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma$ для любого $t \in \mathbb{R}$, и если при этом $\sigma > 0$ (в том числе $\sigma = +\infty$), то отображение $\boldsymbol{\Lambda}_t$ определено при любом t и не зависит от t, то есть $\boldsymbol{\Lambda}_t = \boldsymbol{\Lambda} \colon \mathfrak{I} \to \{-1, 1\}^r$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 4.1. Систему (3) будем называть *докритической* в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, если $\boldsymbol{\sigma}(t_0; A, B) > 0$.

В теореме 4.1 сформулировано достаточное условие докритичности системы (3). Предполагая функции $t \mapsto A(t)$ и $t \mapsto B(t)$ достаточно гладкими, построим семейство матриц следуя Н. Н. Красовскому[10]:

$$L_0(t) = B(t), \quad L_i(t) = -A(t) L_{i-1}(t) + \frac{dL_{i-1}(t)}{dt}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Символом $l_i^{(j)}$ мы будем обозначать столбец матрицы L_i с номером j.

Теорема 4.1. *Пусть в некоторой окрестности точки t_0 функция $t \mapsto A(t)$ имеет непрерывную производную порядка $n-2$, а функция $t \mapsto B(t)$ имеет непрерывную производную порядка $n-1$. Если для любого набора целых неотрицательных чисел $n_1, \ldots, n_r$ таких, что $n_1 + \ldots + n_r = n$, семейство векторов*

$$l_0^{(1)}(t_0), \ldots, l_{n_1-1}^{(1)}(t_0), \ldots, l_0^{(r)}(t_0), \ldots, l_{n_r-1}^{(r)}(t_0)$$

линейно независимо, то система (3) докритическая в точке t_0.

[10] *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. § 20.

Приведено необходимое условие докритичности стационарной системы (3) (системы с постоянными матрицами A и B). Доказано, что стационарная линейная докритическая система вполне управляема.

Множество точек t_0, в которых система (3) является докритической, обозначим $\Sigma = \Sigma(A,B) = \{t \in \mathbb{R} : \boldsymbol{\sigma}(t; A, B) > 0\}$.

Для любого момента времени $t_0 \in \mathbb{R}$ и любого неотрицательного θ определим *множество управляемости* $D(t_0, \theta)$ *на отрезке* $[t_0,\, t_0 + \theta]$:

$$D(t_0,\theta) = \bigcup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_0+\theta} X(t_0,s)B(s)u(s)\,ds.$$

Если $\theta = \boldsymbol{\sigma}(t_0)$, то множество $D(t_0, \boldsymbol{\sigma}(t_0))$ мы будем называть *докритическим множеством управляемости.* На расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ системы (3) определим *функцию быстродействия* в нуль

$$(t_0,x_0) \mapsto \Theta(t_0,x_0) = \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \{T \geqslant 0 : x(t_0+T; t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\}.$$

Для тех точек $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$, для которых не существует допустимого управления, переводящего точку x_0 в нуль за конечное время, положим $\Theta(t_0, x_0) = +\infty$.

Для каждого вектора $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r) \in \mathfrak{I}$ и любого положительного θ определим многообразия без края $\Delta^{\mathfrak{n}}$, $\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$ и многообразие с краем $\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)$, вложенные в пространство $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1}$:

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathfrak{n}} = \bigl\{\bigl(\tau_1^1, \ldots, \tau_{\mathfrak{n}_1}^1, \ldots, \tau_1^r, \ldots, \tau_{\mathfrak{n}_r}^r, \tau_n\bigr) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1} :\\ 0 < \tau_1^j < \ldots < \tau_{\mathfrak{n}_j}^j < \tau_n \quad \text{при каждом } j = 1, \ldots, r\bigr\},\end{aligned}$$

$$\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta) = \{(\bar\tau, \tau_n) \in \Delta^{\mathfrak{n}} : \tau_n < \theta\}, \qquad \overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta) = \{(\bar\tau, \tau_n) \in \Delta^{\mathfrak{n}} : \tau_n \leqslant \theta\}.$$

Введем множество $\Upsilon = \bigcup\limits_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}} \bigl(\{\mathfrak{n}\} \times \Delta^{\mathfrak{n}}\bigr)$ и определим отображение $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R} \times \Upsilon \times \{-1,1\}^r \to \mathcal{U}$, сопоставив каждой точке

$$(t_0, \mathfrak{n}, \bar\tau, \tau_n, \delta) = \bigl(t_0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r, \tau_1^1, \ldots, \tau_{\mathfrak{n}_1}^1, \ldots, \tau_1^r, \ldots, \tau_{\mathfrak{n}_r}^r, \tau_n, \delta_1, \ldots, \delta_r\bigr)$$

пространства $\mathbb{R} \times \Upsilon \times \{-1,1\}^r$ допустимое управление $\boldsymbol{u}(t_0, \mathfrak{n}, \bar\tau, \tau_n, \delta)$, определенное равенством $\boldsymbol{u}(t_0, \mathfrak{n}, \bar\tau, \tau_n, \delta) = u(\cdot) = \bigl(u_1(\cdot), \ldots, u_r(\cdot)\bigr)$, где

$$u_j(t) = \begin{cases} \delta_j(-1)^{i+1}, & \text{если } t \in \bigl[t_0 + \tau_{i-1}^j,\, t_0 + \tau_i^j\bigr) \\ & \qquad (i = 1, \ldots, \mathfrak{n}_j + 1;\ \tau_0^j = 0,\ \tau_{\mathfrak{n}_j+1}^j = \tau_n); \\ 0, & \text{если } t \notin [t_0,\, t_0 + \tau_n). \end{cases}$$

Теперь для каждого момента времени $t_0 \in \mathbb{R}$, каждого положительного θ, каждого вектора $\mathfrak{n} \in \mathfrak{I}$ и каждого вектора $\delta \in \{-1,1\}^r$ определим многообразия $M^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ и $\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ следующим образом (черта в обозначениях $\overline{\Delta}$, $\overline{M}$ и в последующих аналогичных обозначениях является частью обозначения, а не операцией замыкания):

$$M^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta) = \bigcup_{(\bar{\tau},\tau_n)\in\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)} \{\boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\bar{\tau},\tau_n,\delta)\},$$

$$\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta) = \bigcup_{(\bar{\tau},\tau_n)\in\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)} \{\boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\bar{\tau},\tau_n,\delta)\}.$$

Край многообразия $\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ обозначим $\partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$.

Для любой точки $t_0 \in \Sigma(A,B)$ и любого неотрицательного θ определим множество $\overline{M}(t_0,\theta)$ следующим образом: $\overline{M}(t_0,0) = \{\mathbf{0}\}$ (управление тождественно равное нулю на всем множестве вещественных чисел), а для положительных θ множество $\overline{M}(t_0,\theta)$ определяется равенством

$$\overline{M}(t_0,\theta) = \{\mathbf{0}\} \bigcup \left(\bigcup_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}} \; \bigcup_{\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})} \overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta) \right).$$

Определим также множество $M(t_0) = \bigcup\limits_{\theta\geqslant 0} \overline{M}(t_0,\theta)$, которое мы превратим в метрическое пространство, введя на нем метрику

$$\rho\bigl(u^1,u^2\bigr) = \max_{1\leqslant j\leqslant r} \int_{t_0}^{+\infty} \bigl|u^1_j(s) - u^2_j(s)\bigr|\, ds$$

для произвольных элементов u^1, $u^2 \in M(t_0)$. Отметим, что множества $\overline{M}(t_0,\theta)$ и $M(t_0)$ определены только в точках докритичности системы (3), потому что только в этих точках определено отображение $\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}$.

Основные результаты четвертого параграфа представлены ниже в леммах 4.1 и 4.2. Они используются в пятом параграфе для решения задачи (3)–(4) для всех начальных точек x_0, лежащих в докритическом множестве управляемости $D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$.

Лемма 4.1. *Пусть система* (3) *докритическая в точке* t_0. *Тогда при любом* $0 < \theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$ *верны следующие утверждения:*

1) *любое управление* $u(\cdot) \in \overline{M}(t_0,\theta)$ *удовлетворяет принципу максимума* (5) *на отрезке* $[t_0,\, t_0+\vartheta]$ $(u(\cdot) \in \partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\vartheta) \subseteq \overline{M}(t_0,\theta))$;

2) *для любого допустимого управления* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, *удовлетворяющего принципу максимума* (5) *на некотором невырожденном промежутке* $[t_0,\, t_0+\vartheta] \subseteq [t_0,\, t_0+\theta]$, *существует такое управление* $u'(\cdot) \in \partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\vartheta) \subseteq \overline{M}(t_0,\theta)$, *что* $u(t) = u'(t)$ *при почти всех* $t \in [t_0,\, t_0+\vartheta]$.

Лемма 4.2. *Если система* (3) *докритическая в точке* t_0, *то для любого* $\theta \geqslant 0$ *множество* $\overline{M}(t_0,\theta)$ *компактно.*

В **пятом параграфе** доказано несколько утверждений, касающихся изучаемой нами задачи быстродействия. Теорема 5.1 дает решение задачи (3)–(4) для всех начальных точек x_0, лежащих в докритическом множестве управляемости $D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$. Теорема 5.2 описывает структуру множества управляемости $D(t_0,\theta)$ и структуру границы множества управляемости $\partial D(t_0,\theta)$ при условии $\theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$. Леммы 5.1 и 5.2 могут быть использованы для дальнейшего исследования свойств докритических систем (например исследования дифференцируемости функции быстродействия).

Для каждой точки $t_0 \in \mathbb{R}$ определим отображение $F_{t_0}\colon M(t_0) \to \mathbb{R}^n$ с помощью равенства

$$F_{t_0}(u) = -\int_{t_0}^{+\infty} X(t_0,s)B(s)u(s)\,ds. \tag{8}$$

Все функции, содержащиеся в множестве $M(t_0)$, являются финитными, поэтому интеграл в равенстве (8) всегда существует и конечен.

Лемма 5.1. *Пусть линейная управляемая система* (3) *докритическая в точке* t_0. *Тогда при любом* $0 < \theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$ *отображение* $F_{t_0}\colon \overline{M}(t_0,\theta) \to D(t_0,\theta)$ *является гомеоморфизмом.*

Обозначим

$$N^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta) = F_{t_0}\big(M^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\big), \quad \overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta) = F_{t_0}\big(\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\big),$$
$$\partial\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta) = F_{t_0}\big(\partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\big)$$
$$\big(t_0 \in \Sigma, \quad 0 < \theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0), \quad \mathfrak{n} \in \mathfrak{I}, \quad \delta \in \boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})\big).$$

Лемма 5.2. *Пусть система* (3) *докритическая в точке* t_0. *Тогда при любых векторах* $\mathfrak{n} \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})$ *и любом* $0 < \theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$

1) *отображение* $F_{t_0}\colon M^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta) \to N^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ *непрерывно дифференцируемо и в каждой точке области своего определения имеет максимально возможный ранг* $\mathfrak{n}_1 + \ldots + \mathfrak{n}_r + 1$;

2) *отображение* $F_{t_0}\colon \partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta) \to \partial\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ *непрерывно дифференцируемо и в каждой точке области своего определения имеет максимально возможный ранг* $\mathfrak{n}_1 + \ldots + \mathfrak{n}_r$.

Теорема 5.1. *Если система* (3) *докритическая в точке* t_0, *то для любой точки* $x_0 \in D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ *управление* $\hat{u}(\cdot) = F_{t_0}^{-1}(x_0)$ *является решением задачи* (3)–(4) *и переводит точку* x_0 *в нуль за время* $\Theta(t_0,x_0)$.

Теорема 5.2. *Пусть система* (3) *докритическая в точке* t_0. *Тогда для любого* $0 < \theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Множество управляемости* $D(t_0, \theta)$ *системы* (3) *является строго выпуклым компактным телом в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *и может быть представлено в виде*

$$D(t_0, \theta) = \{0\} \bigcup \left(\bigcup_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{I}} \ \bigcup_{\delta \in \boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})} \overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0, \theta) \right),$$

где $\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0, \theta)$ — *попарно непересекающиеся многообразия с краем и с гладкой внутренностью* $N^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0, \theta)$, *имеющие размерность* $\mathfrak{n}_1 + \ldots + \mathfrak{n}_r + 1$. *Для любой точки* $x_0 \in \overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0, \theta)$ *существует оптимальное кусочно-постоянное управление* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, *переводящее точку* x_0 *в нуль за минимальное время* $0 < \vartheta \leqslant \theta$; *каждая координатная управляющая функция* $u_j(\cdot)$ *на промежутке* $(t_0,\, t_0 + \vartheta)$ *принимает значения* $+1$ *или* -1 *и имеет ровно* $\mathfrak{n}_j$ *переключений, а* $\delta_j \in \{-1, 1\}$ — *значение функции* $u_j(\cdot)$ *от момента начала движения* t_0 *до первого переключения* (*до конца движения, если переключений нет*).

2. *Граница* $\partial D(t_0, \theta)$ *множества управляемости системы* (3) *может быть представлена в виде*

$$\partial D(t_0, \theta) = \bigcup_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{I}} \ \bigcup_{\delta \in \boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})} \partial \overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0, \theta),$$

где $\partial \overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0, \theta)$ — *это попарно непересекающиеся гладкие многообразия без края, имеющие размерность* $\mathfrak{n}_1 + \ldots + \mathfrak{n}_r$. *Для любой точки* $x_0 \in \partial \overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0, \theta)$ *существует оптимальное кусочно-постоянное управление* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, *переводящее точку* x_0 *в нуль за минимальное время* θ; *каждая координатная управляющая функция* $u_j(\cdot)$ *на промежутке* $(t_0,\, t_0 + \theta)$ *принимает значения* $+1$ *или* -1 *и имеет ровно* $\mathfrak{n}_j$ *переключений, а* $\delta_j \in \{-1, 1\}$ — *значение функции* $u_j(\cdot)$ *от момента начала движения* t_0 *до первого переключения* (*до конца движения, если переключений нет*).

В **шестом параграфе** рассмотрены примеры линейных управляемых систем, на которых проиллюстрировано применение основных результатов диссертации.

Основные результаты

1. Введено понятие двухпараметрической Т-системы (ТА-системы) непрерывных функций на фиксированном промежутке и подробно изучены ее свойства. Понятие ТА-системы обобщает известное понятие чебышевской системы для однопараметрического семейства непрерывных функций и позволяет распространить понятие докритичности, известное для линейных нестационарных систем со скалярным управлением, на линейные нестационарные системы с векторным управлением. Для таких систем получены достаточные условия докритичности и установлена связь между свойствами докритичности и полной управляемости.

2. Для линейных нестационарных докритических систем выяснена структура оптимальных по быстродействию управлений. Это позволило построить оптимальное управление в линейной нестационарной задаче быстродействия в нуль с закрепленным левым концом при условии, что начальная фазовая точки принадлежит докритическому множеству управляемости системы.

3. Изучена структура множества управляемости и структура границы множества управляемости линейной нестационарной докритической системы. Для такой системы доказано, что ее множество управляемости на отрезке, не превышающем промежутка докритичности системы, является строго выпуклым компактным телом в фазовом пространстве системы и может быть представлено в виде объединения гладких многообразий различной размерности, не превышающей размерности фазового пространства. Доказано также, что граница такого множества управляемости может быть представлена в виде объединения гладких многообразий различной размерности. Показана возможность параметрического представления этих многообразий.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Лукьянов В. В. Двухпараметрические Т-системы функций и их применение для исследования оптимальных по быстродействию линейных нестационарных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 101–130.

2. Лукьянов В. В. Необходимые и достаточные условия докритичности линейных управляемых систем // Вестник Удмуртского уни-

верситета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 100–108.

Публикации в других изданиях

3. Лукьянов В. В. Структура множества управляемости линейной нестационарной системы // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2007. Т. 12, вып. 4. С. 479–481.

4. Лукьянов В. В. Решение задачи быстродействия для линейной нестационарной управляемой докритической системы с многомерным управлением // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная 110-ой годовщине И. Г. Петровского: тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 262–263.

5. Лукьянов В. В. Структура границы множества управляемости линейной докритической системы с векторным управлением // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2012. Вып. 1 (39). С. 84–85.