На правах рукописи

Родина Людмила Ивановна

ИНВАРИАНТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Владимир — 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа Удмуртского государственного университета.

Научный консультант : доктор физико-математических наук,
профессор Тонков Евгений Леонидович

Официальные оппоненты : доктор физико-математических наук,
профессор Давыдов Алексей Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор Обуховский Валерий Владимирович

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Ушаков Владимир Николаевич

Ведущая организация : Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск.

Защита состоится "....".............. 2012 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.024.02 при Владимирском государственном университете по адресу: 600000, г. Владимир, ул. М. Горького 87, ауд. ....

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Владимирского государственного университета.

Автореферат разослан "....".............. 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета ДМ 212.024.02 при ВлГУ
кандидат физико-математических наук,
доцент Наумова С. Б.

Актуальность темы. Одной из важных задач теории управляемых процессов является задача исследования инвариантности множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений. Данной тематике посвящены работы Х. Г. Гусейнова, Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ж. П. Обена, Ю. Л. Сачкова, А. И. Субботина, Е. Л. Тонкова, В. Н. Ушакова, Т. Ф. Филипповой, П. Хартмана и многих других авторов.

Приведем определения инвариантного и слабо инвариантного множества относительно дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}. \tag{1}$$

Пусть $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ — замкнутое множество, $M(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in M\}$.

Определение 0.1. Множество $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется инвариантным (сильно инвариантным) относительно дифференциального включения (1), если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ и любого решения $x(t)$ включения (1), удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0$, для всех $t \geqslant t_0$ выполнено условие $x(t) \in M(t)$.

Далее, множество $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется слабо инвариантным относительно включения (1), если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ существует решение $x(t)$ данного включения, которое удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$ и при всех $t \geqslant t_0$ включению $x(t) \in M(t)$. Траектория такого решения называется выживающей, а множество M также называется множеством выживаемости для дифференциального включения (1).

Исследования слабо инвариантных множеств тесно связаны с теорией управления и теорией дифференциальных игр. По-видимому, первый результат в этой области опубликован в работе М. Нагумо[1] в 1942 году, в которой были получены необходимые и достаточные условия слабой инвариантности заданного множества относительно дифференциального уравнения.

Приведем примеры некоторых задач, связанных с существованием инвариантных множеств. Одной из них является задача о приведении управляемой системы на целевое множество, описанная в монографии Н. Н. Красовского и А. И. Субботина[2]. Здесь исследуется слабо инвариантное множество $W(t, t_1, X_1)$ в момент времени t с целевым множеством X_1 и конечным моментом времени t_1, которое оказывается максимальным среди всех

[1] Nagumo M. Über die Laga der integralkurven gewöhnlicher differential Gleichungen // Proc. Phys. Math. Japan. — 1942. — T.24. — C. 399–414.

[2] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.

множеством, обладающих свойством u-стабильности и поэтому называется максимальным стабильным мостом. Свойство u-стабильности множества здесь означает его слабую инвариантность относительно любого дифференциального включения из некоторого семейства. Слабо инвариантные множества дают возможность решать различные задачи верификации. Например, при заданном начальном множестве фазовых переменных X_0 необходимо узнать, можно ли перевести таекторию из X_0 в заданное целевое множество X_1 в фиксированный момент времени t_1. В терминах слабо инвариантных множеств данная задача имеет следующее решение: траекторию можно перевести из X_0 в X_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда $X_0 \cap W(t_0, t_1, X_1) \neq \varnothing$ (А. Б. Куржанский, П. А. Точилин [3]). Отметим также, что понятие слабой инвариантности является ключевым понятием теории минимаксных решений (А. И. Субботин, Н. Н. Субботина, J. P. Aubin, M. G. Crandall, G. Haddad, R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets и др.).

Основным объектом исследования в данной работе является управляемая система (точнее, семейство управляемых систем)

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \tag{2}$$

в качестве вспомогательного объекта рассматривается соответствующее системе (2) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

правая часть которого параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ, h^t). Здесь Σ — полное метрическое пространство, h^t — поток на Σ. Такая параметризация позволяет, во-первых, включить в рассмотрение ряд задач, связанных с асимптотическим поведением решений управляемых систем; во-вторых, получить ряд общих утверждений (поскольку с помощью динамической системы сдвигов удается описать все семейство управляемых систем). Мы также рассматриваем управляемую систему (2) и включение (3), порожденные метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$; это означает, что на сигма-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств пространства Σ задана вероятностная мера ν, инвариантная относительно потока h^t. В этом случае функция $t \to F(h^t\sigma, x)$ является стационарным в узком смысле случайным процессом и тем самым мы имеем дифференциальное включение со случайными параметрами. Следовательно, для таких включений появляется возможность исследовать свойства решений, которые выполнены с вероятностью единица.

[3]Куржанский А. Б., Точилин П. А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т.44, № 11. — С. 1523–1533.

Применение теории, связанной с динамической системой сдвигов для задач управления линейными нестационарными системами, по-видимому, впервые было предложено Е. Л. Тонковым [4]. Это привело к возникновению таких понятий в математической теории управления, как равномерная полная управляемость, равномерная локальная и глобальная управляемость, равномерная стабилизируемость. Управляемые системы, коэффициенты которых являются стационарными случайными процессами, наряду с Е. Л. Тонковым исследовали О. В. Баранова, И. Я. Кац, А. М. Куриленко, Г. Н. Мильштейн, Ю. М. Репин, Р. Ришел, Р. З. Хасьминский, E. K. Boukas, F. Colonius, D. P. De Farias, S. Ibrir, R. Jonson, W. H. Fleming, H. M. Soner.

В различных областях математической теории управления при идеализации реальных систем с большими управляющими воздействиями возникают модели управляемых систем и дифференциальных включений с неограниченным множеством скоростей, которые исследовались в работах Б. Д. Гельмана, В. И. Гурмана, В. В. Обуховского, Ю. Л. Сачкова. В диссертации я изучаю дифференциальное включение (3), правая часть которого имеет выпуклые замкнутые, но не обязательно компактные в $\mathbb{R}^n$ образы. В случае, когда правая часть включения (3) имеет компактные образы, обычно применяется пространство $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из непустых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа, что позволяет ввести в рассмотрение содержательные определения полунепрерывности сверху и снизу функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ со значениями в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что вопросам существования решения данных включений и свойствам множества решений посвящено большое количество исследований, среди которых работы Ю. Г. Борисовича, А. Н. Витюка, Б. Д. Гельмана, Дж. Дэви, В. Г. Задорожнего, С. Зарембы, М. И. Каменского, Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, А. Маршо, А. Д. Мышкиса, Ж. П. Обена, В. В. Обуховского, Ю. С. Осипова, Н. С. Папагеоргиу, В. А. Плотникова, А. В. Плотникова, А. И. Субботина, А. А. Толстоногова, В. Н. Ушакова, А. Ф. Филиппова, И. А. Финогенко, А. Г. Ченцова. Подробную библиографию и обзор различных направлений исследований можно найти в монографии Ю. Г. Борисовича, Б. Д. Гельмана, А. Д. Мышкиса, В. В. Обуховского[5].

Для дифференциальных включений вида (3), ориентированных на при-

---

[4] Тонков Е. Л. Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости линейной системы // Докл. АН СССР. — 1981. — Т.256, № 2. — С. 290–294.

Тонков Е. Л. Динамическая система сдвигов и вопросы глобальной управляемости линейной почти периодической системы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т.36, № 4(220). — С. 226.

[5] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: URSS, 2011. — 224 с.

менение к управляемым системам, требование компактности образов F может оказаться обременительным. Поэтому возникает необходимость рассматривать пространство, состоящее из непустых выпуклых замкнутых (не обязательно ограниченных) подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, которое будем обозначать $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. В пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ вводится метрика Dist, которую мы называем метрикой Хаусдорфа–Бебутова, и тогда это пространство становится полным пространством с топологией сходимости, равномерной на компактах. В диссертации исследуются основные свойства полуотклонений $D(F,G)$, $D(G,F)$ и расстояния $\operatorname{Dist}(F,G)$ между выпуклыми замкнутыми множествами F и G, введено и исследовано понятие полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа–Бебутова. Получены аналоги известных теорем существования решения задачи Коши для дифференциального включения с фазовыми ограничениями

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t\sigma),$$

относительно которого предполагается, что функция $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Вопрос о существовании инвариантных множеств имеет важное значение во многих прикладных задачах управления, в частности, в задачах, возникающих в экономике. Основное требование к управлению экономическими системами состоит в том, чтобы не нарушать заданных ограничений на множество допустимых управлений. Но если по ряду причин такие нарушения все-таки происходят и всякая траектория движения уходит из множества, обусловленного ограничениями, то надо научиться управлять таким образом, чтобы относительная частота попадания траектории в данное множество равнялась единице. Одна из возможных математических постановок этой задачи состоит в том, чтобы научиться вычислять относительную частоту пребывания множества достижимости управляемой системы в заранее заданном множестве M. Если эта частота равна единице, то множество M будем называть статистически инвариантным. Не менее важно научиться строить для каждой начальной точки множества M такое управление, что решение управляемой системы при заданном управлении статистически инвариантно. В этом случае множество M будем называть статистически слабо инвариантным относительно управляемой системы. Таким образом, мы расширяем понятие инвариантности, рассматривая статистически инвариантные множества.

Для определения статистически инвариантного множества относительно управляемой системы (2) введем следующую характеристику. Пусть

$M = \Sigma \times M(\sigma)$ — заданое подмножество пространства $\Omega \doteq \Sigma \times \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $A(t, \sigma, X)$ — множество достижимости системы (2) в момент времени t из начального множества X. В предположении, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество $A(t, \sigma, X)$ существует при всех $t \geqslant 0$, относительной частотой поглощения множества достижимости системы (2) множеством M назовем следующий предел

$$\mathrm{freq}(\sigma, X) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t \sigma)\}}{\vartheta}.$$

Подобные характеристики рассматривались в работах В. В. Немыцкого и В. В. Степанова[6], В. В. Степанова[7], H. Hilmy[8] в связи с задачами существования минимального центра притяжения движения и свойством возвращаемости областей, а также в эргодической теории при исследовании различных свойств возвращения, таких как рекуррентность орбиты, топологическая транзитивность, минимальность и топологическое перемешивание (см., например, работы А. М. Вершика, А. Б. Катка, И. П. Корнфельда, В. А. Рохлина, Я. Г. Синая, А. М. Степина, С. В. Фомина, Б. Хасселблата).

Определение 0.2. Множество M будем называть статистически инвариантным относительно управляемой системы (2), если для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство

$$\mathrm{freq}\big(\sigma, M(\sigma)\big) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : A\big(t, \sigma, M(\sigma)\big) \subseteq M(h^t \sigma)\big\}}{\vartheta} = 1.$$

Определение 0.3. Множество M будем называть статистически слабо инвариантным относительно управляемой системы (2), если для любой точки $(\sigma, x) \in M$ найдется решение $\varphi(t, \sigma, x)$ данной системы, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$ и равенству

$$\mathrm{freq}^*(\varphi) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t, \sigma, x) \in M(h^t \sigma)\}}{\vartheta} = 1.$$

Характеристику $\mathrm{freq}^*(\varphi)$ мы называем верхней относительной частотой попадания решения $\varphi(t, \sigma, x)$ в множество M.

---

[6]Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.

[7]Stepanoff W. Sur une extension du theoreme ergodique // Comp. Math. — 1936. — № 3. — С. 68–85.

[8]Hilmy H. Sur les centres d'attraction minimaux dans les systemes dynamiques // Comp. Math. — 1936. — Т.3, № 2. — С. 187–204.

В диссертации исследуются условия существования статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств, дополняющие результаты работ [16–22], [25]. Основные утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа–Бебутова, функций А. М. Ляпунова и производной Ф. Кларка данных функций.

Следующий круг изучаемых вопросов связан с задачами существования инвариантных множеств для систем со случайными параметрами. Приведем определение статистически инвариантного с вероятностью единица множества управляемой системы (2), параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$.

Определение 0.4. Множество M будем называть статистически инвариантным с вероятностью единица относительно управляемой системы (2), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\operatorname{freq}\big(\sigma, M(\sigma)\big) = 1$.

В частности, в работе рассматриваются статистически инвариантные множества для линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{4}$$

и билинейной управляемой системы

$$\dot{x} = \big(A(h^t\sigma) + uB(h^t\sigma)\big)x, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{5}$$

Показано, что данные системы можно отождествить со стационарным в узком смысле случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$; при этом для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ является кусочно-постоянной и принимает значения в заданном множестве $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ — конечном множестве матричных пар, которые будем называть состояниями управляемой системы. Смена состояний системы происходит в случайные моменты времени, которые назовем моментами переключения данной системы или моментами переключения случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$. Отметим, что подобные системы со случайными параметрами исследовались многими авторами в связи с задачами полной управляемости, равномерной локальной, равномерной глобальной управляемости, устойчивости и стабилизации.

Задача о построении слабо инвариантных множеств для линейной системы (4) тесно связана с задачей построения неупреждающего управления для данной системы. Термин «неупреждающее управление», по-видимому, введен свердловской школой по теории управления (см., например, работы

Н. Н. Красовского [9], Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [10], А. И. Субботина и А. Г. Ченцова [11]), задача построения управления данного типа для детерминированных систем исследовалась также в работах С. Ф. Николаева и Е. Л. Тонкова [12]. Управление $u(t,x)$ называется неупреждающим, если для его построения в момент времени $t=\tau$ может быть использована информация о поведении системы только при $t \leqslant \tau$.

Одна из особенностей построения неупреждающего управления для системы со случайными параметрами (4) состоит в том, что нам неизвестны моменты переключения и состояния данной системы, которые появляются при $t > \tau$. Поэтому возникает следующая задача: нужно научиться строить такое управление, чтобы траектория управляемой системы оставалась как угодно долго в некотором (слабо инвариантном) множестве до появления нужного состояния этой системы. В диссертации, на основании результатов работ [6-13] и [15] получены новые достаточные условия существования неупреждающего управления для системы (4), а также оценка снизу вероятности того, что данная система локально управляема на фиксированном отрезке времени.

Другой важной задачей, связанной с задачей существования слабо инвариантных множеств, является задача об исследовании полной управляемости для линейной системы S :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Определение 0.5. (Р. Калман [13], Н. Н. Красовский [14]) Система S называется вполне управляемой на отрезке $I \doteq [t_0, t_1]$, если для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m$ такое, что решение $x(\cdot)$

[9] Красовский Н. Н. Стохастический программный синтез для детерминированной позиционной дифференциальной игры // Прикл. матем. и механика. — 1982. — Т.46, № 6. — С. 885–892.

Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

[10] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.

[11] Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 286 с.

[12] Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Дифференцируемость вектора быстродействия и позиционное управление линейной докритической системой // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т.36, № 1. — С. 76–84.

Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. О некоторых задачах, связанных с существованием и построением неупреждающего управления для нестационарных управляемых систем // Вестник Удмуртского ун-та. Серия матем. Ижевск. — 2000. — № 1. — С. 11–32.

[13] Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. — 1960. — T.5, № 1. — C. 102–119.

[14] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

удовлетворяет равенству $x(t_1) = 0$. Далее, система S называется вполне управляемой, если для каждого момента времени $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется значение $t_1 > t_0$ такое, что система S вполне управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

Если система S стационарна, то есть матрицы A и B не зависят от времени, то для полной управляемости данной системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{rank}\bigl\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\bigr\} = n.$$

Этот результат был получен для системы с одним входом (то есть при $m = 1$) в работе Р. Калмана[15] и в общем случае — в работе J. P. La Salle[16].

Н. Н. Красовским[17] получено достаточное условие полной управляемости системы S в предположении, что элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка. Рассматривается матрица

$$K(t, S) = \bigl\{K_0(t, S), \ldots, K_{n-1}(t, S)\bigr\}, \tag{6}$$

$$K_0(t, S) = B(t), \ldots, K_i(t) = A(t)K_{i-1}(t, S) - \dot{K}_{i-1}(t, S), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Утверждается, что *если на отрезке $I = [t_0, t_1]$ найдется точка t^* такая, что $\operatorname{rank} K(t^*, S) = n$, то система S вполне управляема на I*. Известно, что данное условие не является необходимым и существуют примеры вполне управляемых систем, для которых $\operatorname{rank} K(t, S) \leqslant n - 1$ при всех $t \in I$ (А. А. Леваков[18], С. А. Минюк[19]). В работе А. Чанга[20] показано, что если функция $t \to S(t)$ аналитическая на некотором открытом интервале, содержащем отрезок I, то условие $\operatorname{rank} K(t^*, S) = n$ не только достаточно, но и необходимо для полной управляемости системы S.

В связи с этими результатами Н. Н. Красовского и А. Чанга возникает следующая задача: если $\operatorname{rank} K(t, S) \leqslant n - 1$ при всех $t \in I$ и функция

---

[15] Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды I Международного конгресса ИФАК. Изд-во АН СССР. — 1961. — Т.2. — С. 521–547.

[16] La Salle J. P. Time optimal control systems // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1959. — T.1, №45. — С. 4–13.

[17] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

[18] Леваков А. А. К управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т.23, № 5. — С. 798–806.

[19] Минюк С. А. К теории полной управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т.26, № 3. — С. 414–420.

[20] Chang A. An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Autom. Control. — 1965. — T.10, № 1. — С. 112–114.

$t \to S(t)$ не является аналитической (но имеет достаточное число производных), то при каких дополнительных условиях система S вполне управляема на отрезке I либо не обладает этим свойством? Такие условия получены в работах Л. Е. Забелло[21], А. А. Левакова[22], С. А. Минюка[23], а также в работах [1], [2], [5], результаты которых представлены в диссертации.

В заключение отметим, что свойства сильной и слабой инвариантности множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений при различных предположениях исследуются многими авторами. Например, в работах Х. Г. Гусейнова, А. И. Субботина и В. Н. Ушакова[24], Х. Г. Гусейнова и В. Н. Ушакова[25] получены условия инвариантности множеств на базе конструкций, развитых в теории дифференциальных игр при изучении стабильных мостов. В работах Е. А. Панасенко и Е. Л. Тонкова[26] исследуются свойства положительной инвариантности и равномерной устойчивости по Ляпунову (в сильном и слабом смысле) относительно дифференциального включения, которое имеет замкнутые, но не обязательно компактные образы. В работе А. Б. Куржанского и П. А. Точилина[27] вводится понятие и исследуется структура слабо инвариантных множеств для так называемых гибридных систем. Ю. Л. Сачков[28] изучает условия, при которых существуют инвариантные ортанты билинейной системы. Кроме того, он исследует свойство управляемости билинейной си-

[21] Забелло Л. Е. Об управляемости линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 8. — С. 13–19.

[22] Леваков А. А. К управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т.23, № 5. — С. 798–806.

[23] Минюк С. А. К теории полной управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т.26, № 3. — С. 414–420.

[24] Guseinov H. G., Subbotin A. I., Ushakov V. N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game theoretical problems of control // Probl. Contr. Inform. Theory. — 1985. — Т. 14, № 3. — С. 155–167.

[25] Гусейнов Х. Г., Ушаков В. Н. Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения, их производные и применение к задачам управления // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 11. — С. 1888–1894.

[26] Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 859–860.

Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2008. — Т. 262. — С. 202–221.

[27] Куржанский А. Б., Точилин П. А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т.44, № 11. — С. 1523–1533.

[28] Сачков Ю. Л. Инвариантные области трехмерных билинейных систем // Вестник МГУ, сер. мат., мех. — 1991. — № 4. — С. 23–26.

Сачков Ю. Л. Инвариантные ортанты билинейных систем // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 6. — С. 1094–1095.

стемы в положительном ортанте при помощи кусочно-постоянного неограниченного управления. В работах В. Н. Ушакова[29] и его учеников исследуется свойство инвариантности множеств относительно дифференциального включения. В этих работах введено и исследовано понятие дефекта инвариантности для множеств, не обладающих свойством инвариантности.

Различные классы задач управления для систем со случайными параметрами рассматривались в работах Дж. Адомиана, Н. И. Андреева, Ю. М. Астапова, И. И. Гихмана, М. Ф. Диментберга, Б. Г. Доступова, Л. Г. Евланова, И. Е. Казакова, В. М. Константинова, А. А. Красовского, В. С. Медведева, Ж. П. Обена, В. С. Пугачева, Р. Ришела, А. В. Скорохода, У. Флеминга, Р. З. Хасьминского и ряда других авторов.

Цель работы. Целью диссертации является исследование инвариантных и статистически инвариантных множеств управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

правая часть которой параметризована с помощью топологической или метрической динамической системы; исследование свойств пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, состоящего из непустых выпуклых замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$; изучение задач о полной управляемости и построении неупреждающего управления.

Методы исследования. Работа опирается на методы качественной теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, теории случайных процессов и теории динамических систем.

Научная новизна. Все полученные в работе результаты являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

1. Рассматривается пространство $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из непустых выпуклых замкнутых (не обязательно ограниченных) подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, в котором вводится метрика Хаусдорфа–Бебутова Dist. Исследуются основные свойства полуотклонений $D(F, G)$, $D(G, F)$ и расстояния $\operatorname{Dist}(F, G)$ между выпуклыми замкнутыми множествами F и G, введено и исследовано понятие полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist.

[29] Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 178–194.

Ушаков В. Н., Зимовец А. А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — № 2. — С. 98–111.

2. Получены аналоги известных теорем существования решения задачи Коши для дифференциального включения с фазовыми ограничениями, относительно которого предполагается, что правая часть принимает значения в пространстве $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

3. Введены понятия и исследованы свойства статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств относительно управляемой системы. Получены достаточные условия существования инвариантных (в указанном смысле) множеств, сформулированные в терминах метрики Хаусдорфа–Бебутова, функций А. М. Ляпунова и производной Ф. Кларка данных функций.

4. Для управляемой системы со случайными параметрами введены понятия статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств с вероятностью единица. Получены достаточные условия существования таких множеств.

5. Получены необходимые и достаточные условия полной управляемости нестационарной линейной системы в предположении, что ранг матрицы Н. Н. Красовского не превосходит размерности фазового пространства.

6. Получены достаточные условия существования неупреждающего управления для линейной системы со случайными параметрами, а также оценка снизу вероятности того, что данная система неупреждающе локально управляема на фиксированном отрезке времени.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и примененные методы могут быть использованы при проведении исследований по математической теории управления в Институте математики и механики УрО РАН, в Институте динамики систем и теории управления СО РАН, в Институтах математики НАН Беларуси и НАН Украины, в Московском, Владимирском, Воронежском, Ярославском и Удмуртском государственных университетах, а также при чтении спецкурсов на математическом факультете Удмуртского госуниверситета.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на заседаниях Ижевского городского семинара по дифференциальным уравнениям и теории управления в 2002 — 2011 годах, на всероссийской конференции «Теория управления и математическое моделирование», посвященной 75-летию Удмуртского государственного университета в Ижевске в 2006 году, на международной конференции «Моделирование и устойчивость динамических систем» в Киеве в 2007 году, на международной конференции «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения» в Тамбове в 2007 и 2009 годах, на международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология», посвященной 100-летию Л. С. Понтрягина в

МГУ в 2008 году, на международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего в МГУ в 2009 году, на международном математическом конгрессе ИФАК в Финляндии в 2009 году, на украинском математическом конгрессе, посвященном 100-летию со дня рождения Н. Н. Боголюбова в Киеве в 2009 году, на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в Суздале в 2010 году, на заседании семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ в 2011 году, на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И. Г. Петровского в МГУ в 2011 году, на международной конференции по математической теории управления и механике в Суздале в 2011 году, на заседании семинара по теории управления отдела динамических систем Института математики и механики УрО РАН в Екатеринбурге в 2011 году и др.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–28].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, 27 параграфов (нумерация параграфов сквозная), 20 рисунков, заключения и списка литературы. Объём диссертации 246 страниц. Библиографический список содержит 228 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, дается общая характеристика рассматриваемого в диссертации круга вопросов, определяется цель работы, приводятся ссылки на основные работы и дается краткий обзор основных направлений, к которым примыкает диссертация. Кратко характеризуется основное содержание работы, описываются подходы к решению задач.

В первой главе введено и исследовано пространство непустых замкнутых выпуклых (но не обязательно компактных) подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова, которое обозначается $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

В первом параграфе вводится расстояние $\mathrm{Dist}(F, G)$ между множествами F и G пространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Для определения этого расстояния обозначим через f_0 и g_0 ближайшие к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ точки множеств F и G соответственно, а через $O_r(f_0)$ и $O_r(g_0)$ обозначим замкнутые шары радиуса r с центрами в точках f_0 и g_0 из $\mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение компактные при каждом $r \in [0, \infty)$ множества

$$F_r = F \bigcap O_r(f_0), \quad G_r = G \bigcap O_r(g_0)$$

и полуотклонения $d(F_r,G_r)$, $d(G_r,F_r)$, где

$$d(F_r,G_r)=\max_{f\in F_r}\varrho(f,G_r),\quad d(G_r,F_r)=\max_{g\in G_r}\varrho(g,F_r).$$

Далее, определим полуотклонения

$$D(F,G)=\sup_{r>0}\min\bigl\{d(F_r,G_r),\,1/r\bigr\},\ \ D(G,F)=\sup_{r>0}\min\bigl\{d(G_r,F_r),\,1/r\bigr\} \quad (7)$$

и расстояние

$$\mathrm{Dist}(F,G)=\max\bigl\{D(F,G),\,D(G,F)\bigr\}, \quad (8)$$

которое будем называть метрикой Хаусдорфа–Бебутова. Получены основные свойства расстояния $\mathrm{Dist}(F,G)$, в частности, показано, что это расстояние принимает конечные значения для любых, как ограниченных, так и неограниченных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Во втором параграфе исследованы основные свойства пространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 2.1. Будем говорить, что последовательность множеств $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, где $F^i\in\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, сходится к множеству $F\in\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ в метрике Хаусдорфа–Бебутова, если для любого $\varepsilon>0$, всех $r\in[0,1/\varepsilon]$ и всех, достаточно больших индексов i, имеет место неравенство $\mathrm{dist}(F_r^i,F_r)\leqslant\varepsilon$.

Такую сходимость будем называть также сходимостью, равномерной на компактах в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.1. *Пусть последовательность множеств* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *такова, что* $F^i\in\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $i\in\mathbb{N}$. *Тогда равенство* $\lim\limits_{i\to\infty}\mathrm{Dist}(F^i,F)=0$ *эквивалентно равномерной на компактах в* $\mathbb{R}^n$ *сходимости последовательности* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *к множеству* $F\in\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.2. *Пространство* $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *является полным в метрике Хаусдорфа–Бебутова, определенной равенствами* (7), (8).

В третьем параграфе для функции $F(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ введено и исследовано понятие полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа–Бебутова.

Определение 3.1. Функцию $F(\sigma,x)$ будем называть полунепрерывной сверху в точке (σ_0,x_0), если для всякого $r\geqslant 0$ выполнено следующее свойство: для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех точек (σ,x) из замкнутой окрестности $O_\delta(\sigma_0,x_0)$ полуотклонение Хаусдорфа

$$d\bigl(F_r(\sigma,x),F_r(\sigma_0,x_0)\bigr)\leqslant\varepsilon,$$

где $F_r(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \bigcap O_r\big(f_0(\sigma, x)\big)$, $f_0(\sigma, x)$ — точка множества $F(\sigma, x)$, ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$.

Получены свойства полунепрерывной сверху функции $F(\sigma, x)$, связанные с замкнутостью ее графика. Рассматривается функция $(\sigma, x) \to f_0(\sigma, x)$, где $f_0(\sigma, x)$ — точка множества $F(\sigma, x)$, ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.1. *Функция* $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху в точке* (σ_0, x_0) *в метрике Хаусдорфа–Бебутова тогда и только тогда, когда для некоторой замкнутой окрестности* $O_\delta(\sigma_0, x_0)$ *график данной функции является замкнутым множеством и функция* $(\sigma, x) \to f_0(\sigma, x)$ *непрерывна в точке* (σ_0, x_0).

Основным объектом исследования во второй главе являются управляемая система, дифференциальное включение и так называемая динамическая система сдвигов. Здесь приводятся основные сведения из теории динамических систем и описывается процесс построения динамической системы сдвигов по заданной управляемой системе и отвечающему ей дифференциальному включению.

В четвертом параграфе приведены определения и некоторые свойства топологической и метрической динамических систем. Здесь также описано, как по заданной управляемой системе (2) построить динамическую систему, которая является расширением исходной топологической или метрической динамической системы. В §5 построена динамическая система сдвигов, отвечающая системе (2) или управляемой системе

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad x \in N(t), \quad u \in U(t, x), \quad t \in \mathbb{R},$$

где функции N и U принимают значение в пространствах $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^m)$ соответственно.

В шестом параграфе получены аналоги известных теорем существования решения задачи Коши для дифференциального включения с фазовыми ограничениями

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t\sigma), \tag{9}$$

относительно которого предполагается, что функция $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, а функция $\sigma \to M(\sigma)$ принимает значения в пространстве $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ непустых замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $T_xM(\sigma)$ опорный конус к множеству M в точке x. Функции $F(\sigma, x)$ и $M(\sigma)$ назовем согласованными, если функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна и выполнено условие

$$Q(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \cap T_xM(\sigma) \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad (\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma).$$

Теорема 6.1. *Пусть функции $F(\sigma,x)$ и $M(\sigma)$ являются согласованными и функция $(\sigma,x)\to F(\sigma,x)\in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова. Тогда для каждой точки (σ,x_0), $x_0\in M(\sigma)$, найдется такой интервал (t_*,t^*) числовой прямой, что решение задачи Коши (9) существует при всех $t\in(t_*,t^*)$ и при всех $t\in[0,t^*)$ удовлетворяет включению $x(t)\in M(h^t\sigma)$.*

В этом параграфе также получены условия, при которых векторное поле, порожденное задачей (9), обладает свойством слабой полноты. Это означает, что для любой начальной точки (σ,x_0) множества $\Sigma\times M(\sigma)$ существует по крайней мере одно решение $\varphi(t)$ задачи Коши (9), определенное и удовлетворяющее включению $\varphi(t)\in M(h^t\sigma)$ при всех $t\in\mathbb{R}_+\doteq[0,+\infty)$.

В третьей главе получены основные результаты диссертации, относящиеся к исследованию статистически инвариантных множеств управляемой системы (2), параметризованной топологической динамической системой (Σ,h^t). Предполагается, что выполнены следующие условия:
1) Для каждой точки (t,σ) функция $(x,u)\to f(h^t\sigma,x,u)$ непрерывна;
2) для каждой точки (σ,x,u) функция $t\to f(h^t\sigma,x,u)$ кусочно-непрерывна;
3) функция $(\sigma,x)\to U(\sigma,x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова.

В седьмом параграфе введены и исследованы такие характеристики, как относительная частота, верхняя и нижняя относительная частота поглощения множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ системы (2) заданным множеством $M=\Sigma\times M(\sigma)$. Рассмотрим множество

$$\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)\doteq\big\{t\in[\vartheta_0,\vartheta]:A(t,\omega)\subseteq M(h^t\sigma)\big\},$$

где $\omega=(\sigma,X)$. В предположении, что для каждого $\sigma\in\Sigma$ множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ существует при всех $t\geqslant 0$, относительной частотой поглощения множества достижимости системы (2) множеством M назовем следующий предел

$$\operatorname{freq}(\omega)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}= =\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:A(t,\sigma,X)\subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}. \quad (10)$$

Далее, если предел (10) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta},\quad \operatorname{freq}_*(\omega)\doteq\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}$$

будем называть, соответственно, верхней и нижней относительной частотой поглощения множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (2) множеством M.

В восьмом параграфе доказано обобщение теоремы С. А. Чаплыгина[30] о дифференциальных неравенствах и получены условия существования верхнего решения скалярной задачи Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{11}$$

в предположении, что выполнены следующие условия:
1) для каждого $\sigma \in \Sigma$ существует последовательность изолированных точек числовой оси $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, такая, что функция $(t,z) \to w(h^t\sigma, z)$ непрерывна в каждой из областей $G_i \doteq \{(t,z):\ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i),\ z \in \mathbb{R}\}$ и имеет предел слева при $t \to \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$;
2) для каждой точки $(t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ выполнено неравенство

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty\,.$$

В девятом параграфе введены определения функции А. М. Ляпунова, производной Кларка, а также нижней и верхней производной в силу дифференциального включения (3). Обозначим через $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ замкнутую окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$, через $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ — внешнюю r-окрестность границы множества $M(\sigma)$.

Определение 9.1. (Е. А. Панасенко, Е. Л. Тонков[31]) Скалярную функцию $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ будем называть функцией Ляпунова (относительно заданного множества $M \subseteq \Omega$), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:
1) $V(\sigma,x) \leqslant 0$ при всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times M(\sigma)$;
2) $V(\sigma,x) > 0$ для всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$.

Управляемой системе (2) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot x \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma,x) = \mathrm{co} H(\sigma,x), \tag{12}$$

где через $H(\sigma,x)$ обозначено множество всех предельных значений функции $f\big(\sigma, x, U(\sigma,x)\big)$ при $(\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x)$, $\mathrm{co}\, H(\sigma,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma,x)$.

[30] Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. М.: Наука, 1976. — С. 307–362.

[31] Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 185–201.

О п р е д е л е н и е 9.3. (Ф. Кларк [32]) Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ обобщенной производной в точке $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q\in\mathbb{R}^n$ называется следующий верхний предел

$$V^o(\sigma,x;q)\doteq\limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)}\frac{V(h^\varepsilon\vartheta,y+\varepsilon q)-V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(\sigma,x)\doteq\inf\limits_{q\in F(\sigma,x)}V^o(\sigma,x;q)$, $V^o_{\max}(\sigma,x)\doteq\sup\limits_{q\in F(\sigma,x)}V^o(\sigma,x;q)$ называются нижней и верхней производной функции V в силу дифференциального включения (12).

Исследованы необходимые для дальнейшего свойства функции Ляпунова $V(\sigma,x)$ и функции $V\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big)$, где $\varphi(t,\sigma,x)$ — некоторое решение включения (12) (леммы 9.1 – 9.3). В десятом параграфе получены условия существования решения дифференциального включения (12), продолжаемого на полуось $\mathbb{R}_+$ (обобщение теоремы Ла-Салля [33]), а также условия, при которых все решения включения (12) продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$.

Т е о р е м а 10.1. *Если для каждого $\sigma\in\Sigma$ существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что функция $V(\sigma,x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова и при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times Q_\varrho$, где $Q_\varrho\doteq\{x\in\mathbb{R}^n : |x|>\varrho\}$, выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big),\tag{13}$$

то при каждом $\sigma\in\Sigma$ для каждой точки $x_0\in\mathbb{R}^n$ существует решение дифференциального включения (12), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x_0)=x_0$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$.

Т е о р е м а 10.2. *Пусть для каждого $\sigma\in\Sigma$ существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что $V(\sigma,x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова и при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times Q_\varrho$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big).\tag{14}$$

Тогда при каждом $\sigma\in\Sigma$ для каждой точки $x_0\in\mathbb{R}^n$ все решения дифференциального включения (12), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,\sigma,x_0)=x_0$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$.

---

[32] Clarke F. H. Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — T. 205, № 2. — C. 247–262.

[33] Демидович. Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

В §11 в предположении, что верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (11) существует для всех $t \geqslant 0$, введена и исследована характеристика

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}\,.$$

Если указанный предел существует, то $\varkappa(\sigma)$ является относительной частотой пребывания верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши в множестве $(-\infty,0]$. Если предел не существует, рассматриваются характеристики

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \overline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}\,,$$

$$\varkappa_*(\sigma) \doteq \underline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}\,.$$

В следующей теореме получены условия статистической инвариантности заданного множества $M = \Sigma \times M(\sigma)$ в предположении, что все решения включения (12), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x \in M(\sigma)$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$.

Теорема 11.1. *Пусть для каждого $\sigma \in \Sigma$ существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M, при всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство* (14) *и при всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство $\varkappa(\sigma) = 1$. Тогда множество M статистически инвариантно относительно системы* (2).

Показано, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ для любого множества $X \subseteq M(\sigma)$ верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ множеством M удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \geqslant \varkappa^*(\sigma), \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \geqslant \varkappa_*(\sigma).$$

В заключение параграфа исследовано свойство положительной инвариантности множества M относительно решений включения (12).

Следствие 11.2. *Пусть для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество $M(\sigma)$ компактно, существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и при всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство* (14).

Если для некоторого $\sigma \in \Sigma$ для всех $t \geqslant 0$ верхнее решение задачи Коши (11) *удовлетворяет неравенству $z^*(t,\sigma) \leqslant 0$, то любое решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения* (12) *с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x \in X \subseteq M(\sigma)$ продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$ и множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ поглощается множеством M при каждом $t \geqslant 0$.*

В §12 результаты предыдущих параграфов применяются для исследования статистической инвариантности заданного множества M относительно линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

которая параметризована топологической динамической системой (Σ, h^t).

В четвертой главе получены основные результаты диссертации, касающиеся вопроса существования слабо инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств управляемой системы (2).

Определение 13.2. Множество M называется слабо инвариантным относительно управляемой системы (2), если для любой точки $(\sigma, x) \in M$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t, \sigma, x)$ данной системы с начальным условием $\varphi(0, \sigma, x) = x$, определенное и удовлетворяющее включению

$$\varphi(t, \sigma, x) \in M(h^t\sigma) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0.$$

В §13 получены достаточные условия статистически слабой инвариантности заданного множества M в предположении, что множество достижимости $A(t, \sigma, X)$ управляемой системы (2) существует для всех $\sigma \in \Sigma$ и всех $t \geqslant 0$.

Теорема 13.1. *Пусть для каждого $\sigma \in \Sigma$ существуют функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ такие, что $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M, при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство* (13) *и имеет место равенство $\varkappa^*(\sigma) = 1$. Тогда множество M статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы* (2).

Следствие 13.1. *Пусть для каждого $\sigma \in \Sigma$ существуют функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи* (11) *при всех $t \geqslant 0$ определено и удовлетворяет неравенству $z^*(t, \sigma) \leqslant 0$;*

2) *функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство* (13).

Тогда множество M является слабо инвариантным относительно управляемой системы (2).

В четырнадцатом параграфе получены условия существования предела $\varkappa(\sigma)$ и равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ для линейной задачи Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{15}$$

Предполагается, что σ является периодической точкой потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$, допускающей период T и функции $a(\sigma)$, $b(\sigma)$ непрерывны на множестве Σ.

В §15 рассматривается задача Коши (15) в предположении, что при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ почти периодические в смысле Бора. Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 15.1. *Предположим, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство*

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : b(h^t\sigma) = 0\}}{\vartheta} = 0,$$

функция $t \to a(h^t\sigma)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, функция $t \to b(h^t\sigma)$ почти периодическая в смысле Бора и удовлетворяет условию Липшица. Если для решения $z(t,\sigma)$ задачи (15) выполнены неравенства

$$\varlimsup_{t\to\infty} z(t,\sigma) \leqslant 0, \quad \varliminf_{t\to\infty} z(t,\sigma) < 0,$$

то предел $\varkappa(\sigma)$ существует и равен единице.

В последнем параграфе главы введены понятия неблуждающего множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (2) и минимального центра притяжения движения $t \to g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t,\omega)\big)$ (определения 16.2 и 16.3). Получены условия (теоремы 16.1 – 16.3) неблуждаемости множества достижимости управляемой системы и условия существования минимального центра притяжения, дополняющие результаты работ [34].

Основным объектом исследования **пятой главы** являются статистически инвариантные и статистически слабо инвариантные с вероятностью единица множества управляемой системы со случайными параметрами

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \tag{16}$$

порожденной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. В частности, здесь изучаются инвариантные множества управляемых систем (4) и (5).

В §17 построена метрическая динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая параметризует управляемые системы (4) и (5) и поэтому их можно отождествить со стационарным в узком смысле случайным процессом

$$\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big),$$

реализации которого являются кусочно-постоянными функциями. В этом параграфе также введены ключевые понятия данной главы.

[34] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.

Каток. А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. — 767 с.

Определение 17.1. Множество M будем называть статистически инвариантным с вероятностью единица относительно управляемой системы (16), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\operatorname{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1$.

Определение 17.2. Множество M называется положительно инвариантным с вероятностью единица относительно системы (16), если для любого $t \geqslant 0$ имеет место равенство $\nu\big\{\sigma \in \Sigma : \, A\big(t, \sigma, M(\sigma)\big) \subseteq M(h^t\sigma)\big\} = 1$.

В следующем параграфе на основании результатов §11 и §13 получены достаточные условия статистической инвариантности и статистически слабой инвариантности с вероятностью единица заданного множества M относительно управляемой системы (16) (теоремы 18.2 и 18.3).

Определение 18.1. Множество M будем называть статистически слабо инвариантным с вероятностью единица относительно системы (16), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ для любой точки $x \in M(\sigma)$ найдется решение $\varphi(t, \sigma, x)$ системы (16) с начальным условием $\varphi(0, \sigma, x) = x$, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$, такое, что для этого решения верхняя относительная частота попадания в множество M равна единице:

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : \, \varphi(t, \sigma, x) \in M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta} = 1.$$

Далее, множество M называется слабо инвариантным с вероятностью единица относительно управляемой системы (16), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ для некоторого решения $\varphi(t, \sigma, x)$ с начальным условием $\varphi(0, \sigma, x) = x \in M(\sigma)$ включение $\varphi(t, \sigma, x) \in M(h^t\sigma)$ выполнено при всех $t \geqslant 0$.

В §19 показано, что для проверки инвариантности заданного множества M относительно управляемой системы (4) или (5) необходимо исследовать поведение решения $z(t, \sigma)$ задачи Коши (15) в предположении, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ кусочно-постоянные и имеют точки разрыва, совпадающие с точками разрыва функции $t \to \xi(h^t\sigma)$. В леммах 19.2 и 19.3 получены условия равенства

$$\varkappa(\sigma) = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \, z(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1$$

для задачи Коши (15), выполненные с вероятностью единица и связанные со сходимостью соответствующей последовательности случайных величин с вероятностью единица. Основные результаты главы доказаны при условии, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ моменты переключения случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ изолированы и число этих моментов бесконечно.

В §20 на основании результатов предыдущего параграфа получены достаточные условия существования предела $\varkappa(\sigma)$ и равенства $\varkappa(\sigma) = 1$, выполненные с вероятностью единица. Относительно метрической динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ здесь предполагается, что фазовое пространство $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, где Σ_1 — пространство числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$, положительные случайные величины $\theta_1, \theta_2, \dots$ независимы и $\theta_2, \theta_3, \dots$ имеют функцию распределения $F(t)$. Далее, пространство

$$\Sigma_2 = \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_k, \dots), \varphi_k \in \Psi\}, \quad \text{где} \quad \Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_\ell\},$$

и если система

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R} \tag{17}$$

находится в состоянии $\psi_i = (a_i, b_i)$, то эта система совпадает с линейным уравнением

$$\dot{z} = a_i z + b_i, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Предполагаем также, что из любого состояния $\psi_1, \dots, \psi_\ell$ система (17) переходит в состояние ψ_i с вероятностью $p_i > 0$, $p_1 + \ldots + p_\ell = 1$ и задано начальное распределение $\pi = (p_1, \dots, p_\ell)$.

Теорема 20.1. *Пусть $a_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, \ell$, $\ell \geqslant 2$ и найдется такое $j \in \{1, \dots, \ell\}$, что $a_j > 0$. Если имеют место неравенства*

$$\min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} \geqslant \max_{\{i:\, a_i>0\}} \frac{b_i}{a_i}, \qquad \min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{2a_i t} dF(t)\Big) < 1,$$

то для задачи Коши (15) *равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ имеет место с вероятностью единица.*

Далее, если $a_i < 0$ для всех $i = 1, \dots, \ell$ и $\min\limits_{\{i=1,\dots,\ell\}} \dfrac{b_i}{a_i} > 0$, то равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено для всех $\sigma \in \Sigma$.

В шестой главе исследуются условия полной управляемости на отрезке $I = [t_0, t_1]$ линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

которая отождествляется с функцией $t \to S(t) \doteq \big(A(t), B(t)\big) \in M(n, n+m)$, ее задающей и называется системой S. Рассматривается так называемый критический случай, то есть предполагается, что ранг матрицы Н. Н. Красовского $K(t,S)$, определенной равенством (6), не превосходит $n-1$ для всех $t \in I$.

В §22 приведены некоторые известные результаты о полной управляемости системы S и получены утверждения о структуре пространства управляемости $L(S,I)$ данной системы на отрезке I (леммы 22.2 и 22.3). В следующем параграфе на основании результатов §22 получены утверждения о размерности и структуре пространства управляемости $L(S,I)$, выраженные в терминах матрицы Красовского $K(t,S)$. В теореме 23.2 показано, что размерность пространства управляемости $\dim L(S,I) \geqslant \operatorname{rank} K(t,S)$ для всех $t \in I$. Далее получены условия, при которых $\dim L(S,I) = \operatorname{rank} K(t,S)$.

Теорема 23.3. *Пусть целые числа m и r удовлетворяют неравенствам $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $m \leqslant rm \leqslant n-m$ и для всех $t \in I$ имеют место равенства*

$$\operatorname{rank} K(t,S) = \operatorname{rank} \big(K_0(t,S), \ldots, K_{r-1}(t,S)\big) = rm.$$

Тогда $\dim L(S,I) = rm$ и, следовательно, система S не является вполне управляемой на отрезке I.

Теорема 23.4. *Пусть $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r$ для всех $t \in I = [t_0, t_1]$. Тогда пространство управляемости системы S на отрезке I удовлетворяет следующим равенствам $L(S,I) = K(t_0,S)\,\mathbb{R}^{nm}$ и $\dim L(S,I) = r$.*

В последнем параграфе главы получены необходимые и достаточные условия полной управляемости линейной системы S в критическом случае. В лемме 24.1 показано, что если $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r$ для всех $t \in \mathfrak{I} \doteq (t_0, t_1)$, то матрица $K(t,S)$ имеет r столбцов $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$, линейно независимых в $\mathbb{R}^n$ для каждого $t \in \mathfrak{I}$, за возможным исключением счетного числа точек $\{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$. По векторам $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$ с помощью процесса ортогонализации построим ортонормированные векторы $\ell_1(t), \ldots, \ell_r(t)$ и рассмотрим следующие пределы: $\ell_i(\tau - 0) \doteq \lim\limits_{t \to \tau - 0} \ell_i(t)$, $\ell_i(\tau + 0) \doteq \lim\limits_{t \to \tau + 0} \ell_i(t)$.

Теорема 24.1. *Предположим, что $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_1$ при всех $t \in (t_0, \tau)$ и $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_2$ при всех $t \in (\tau, t_1)$. Если пределы*

$$\ell_1(\tau-0), \ldots, \ell_{r_1}(\tau-0), \ell_1(\tau+0), \ldots, \ell_{r_2}(\tau+0)$$

существуют, то условие

$$\operatorname{Lin}\big(\ell_1(\tau-0), \ldots, \ell_{r_1}(\tau-0), \ell_1(\tau+0), \ldots, \ell_{r_2}(\tau+0)\big) = \mathbb{R}^n$$

является необходимым и достаточным условием полной управляемости системы S на отрезке $I = [t_0, t_1]$.

Основным предметом исследования седьмой главы является задача о существовании неупреждающего управления для линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times U, \tag{18}$$

параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, построенной в §17 (предполагаем, что множество $U \subset \mathbb{R}^m$ выпукло, компактно и содержит нуль в своей внутренности относительно $\mathbb{R}^m$).

Систему (18) будем отождествлять со стационарным в узком смысле случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$ и называть системой ξ. Предполагается, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ переменного t кусочно-постоянная и принимает значения в множестве $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ — конечном множестве матричных пар $\psi_i \doteq (A_i, B_i)$, которые называются состояниями данной системы. Таким образом, если система ξ находится в состоянии ψ_i на промежутке времени $[t_0, t_1)$, то эта система на данном промежутке совпадает с детерминированной системой

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times U.$$

Также известно, что для системы ξ вероятности нахождения в состояниях $\psi_1, \ldots, \psi_\ell$ задаются вектором $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_\ell)$, а условные вероятности p_{ij} перехода из состояния ψ_i в состояние ψ_j образуют матрицу $P = (p_{ij})_{i,j=1\ldots\ell}$, которая является матрицей переходных вероятностей некоторой однородной цепи Маркова. Основные результаты главы получены в предположении, что существуют постоянные α и β, $0 < \alpha < \beta < \infty$, такие, что длины интевалов $\theta_2, \theta_3, \ldots$ между переключениями случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ удовлетворяют неравенствам $\alpha \leqslant \theta_k \leqslant \beta$, $k = 2, 3\ldots$

В §25 показано, что для построения неупреждающего управления для системы ξ должно существовать слово $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\varphi_i \in \Psi$, обладающее следующими свойствами. Для слова w можно построить множества $D_1, \ldots, D_k$ такие, что любую начальную точку x_1 системы ξ из множества D_1 (которое является некоторой окрестностью начала координат) при помощи программного управления можно перевести в точку x_2 множества D_2 за время α; точку x_2 можно перевести в точку $x_3 \in D_3$ за время α, и т. д., точку x_k множества D_k перевести в нуль также за время α. Кроме того, чтобы для системы ξ существовало неупреждающее управление, для множеств $D_1, \ldots, D_k$ должны существовать позиционные управления, которые удерживают траекторию решения системы, выходящую из точек $D_1, \ldots, D_k$ в этом же множестве до следующего момента переключения системы, в каком бы состоянии из множества Ψ не находилась данная система.

В параграфах 26 и 27 получены достаточные условия существования неупреждающего управления и оценка снизу вероятности того, что система ξ неупреждающе локально управляема на заданном отрезке $[0,T]$. В §26 рассмотрен случай, когда множество Ψ содержит произвольное конечное число состояний. Для слова $w=(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$ построена детерминированная линейная система S, которая рассматривается на отрезке $[0,k\alpha]$, причем на промежутке $[0,\alpha)$ система S совпадает с системой φ_1, на $[\alpha,2\alpha)$ совпадает с φ_2, и так далее, на $[(k-1)\alpha,k\alpha]$ совпадает с φ_k. В теореме 26.1 получены условия существования неупреждающего управления для системы ξ в предположении, что соответствующая ей система S локально управляема на отрезке $[0,k\alpha]$. В §27 рассмотрен случай, когда множество Ψ содержит два сообщающихся состояния ψ_1,ψ_2.

Автор выражает искреннюю признательность научному консультанту профессору Е. Л. Тонкову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа поддержана грантом Правительства РФ по государственной поддержке научных исследований (№11.G34.31.0039) и грантами РФФИ (грант 03-01-00014, грант 06-01-00258).

Основные публикации по теме диссертации

(* обозначены публикации, входящие в перечень ВАК).

1. Rodina L. I. Conditions of Total Controllability of Linear Nonstationary Systems in the Critical Case // The International Conference on Applied Mathematics Dedicated to the 65-th Anniversary of B.N. Pshenichnyi (1937-2000). Abstracts. — Kyiv, Ukraine, 2002. — P. 72.

2. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Критерий полной управляемости линейной нестационарной системы в критическом случае // Известия Ин-та матем. и информ. Ижевск.— 2002. — № 2(25).— С. 81 – 86.

3*. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Достаточные и необходимые условия устойчивой управляемости нелинейной нестационарной системы на плоскости в критическом случае // Дифференц. уравнения.— 2003. — Т. 39, № 2. — С. 259 – 267.

4*. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Достаточные условия устойчивой управляемости нестационарной системы в критическом случае // Дифференц. уравнения.— 2004. — Т. 40, № 1.— С. 68 – 75.

5. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Условия полной управляемости нестационарной линейной системы в критическом случае // Кибернетика и системный анализ.— 2004. — № 3.— С. 87 – 100.

6. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. О построении неупреждающего управления для систем со случайными параметрами // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем.— 2005. — № 1.— С. 101 – 114.

7. Родина Л. И. О локальной управляемости систем со случайными параметрами // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тезисы докладов. Минск. 2005. — С. 116 – 117.

8. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Условия локальной управляемости систем со случайными параметрами // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем.— 2006. — № 1.— С. 81 – 94.

9. Родина Л. И. О существовании неупреждающего управления для систем со случайными параметрами // Известия Ин-та матем. и информ. Ижевск.— 2006. — № 2(36).— С. 95 – 98.

10. Родина Л. И. Условия существования неупреждающего управления для систем со случайными параметрами // Известия Ин-та матем. и информ. Ижевск.— 2006. — № 3(37).— С. 131 – 132.

11*. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Управляемость линейной динамической системы со случайными параметрами // Дифференц. уравнения.— 2007. — Т. 43, № 4.— С. 457 – 464.

12*. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Функции Ляпунова управляемых систем со случайными параметрами // Дифференц. уравнения.— 2007. — Т. 43, № 6.— С. 858 – 859.

13. Masterkov Yu. V., Rodina L. I. The Sufficient Conditions of Local Controllability for Linear Systems with Random Parameters // Nonlin. Dynam. and Syst. Theory.— 2007. — № 7(3).— P. 303 – 314.

14. Родина Л. И. Об асимптотической устойчивости с вероятностью единица инвариантных множеств дифференциальных включений со случайными параметрами // Вестник Тамбовского Университета.— 2007. — Т. 12, № 4.— С. 520 – 521.

15*. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Достаточные условия локальной управляемости систем со случайными параметрами для произвольного числа состояний системы // Известия вузов. Математика.— 2008. — № 3(550). — С. 38 – 49.

16*. Панасенко Е. А., Родина Л. И., Тонков Е. Л. Поглощаемость, неблуждаемость и рекуррентность множества достижимости управляемой системы // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.— 2008. — № 2.— С. 97 – 104.

17*. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика.— 2009. — Т. 5, № 2.— С. 265 – 288.

18. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистически инвариантные множества управляемой системы // Вестник Тамбовского Университета.— 2009. — Т. 14, № 4.— С. 788 – 790.

19. Rodina L. I., Tonkov E. L. The Statistical Invariant Sets of Controllable Systems // Preprints of IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation. University of Jyvaskyla.— Finland, 6-8 May 2009.

20. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Международная конференция, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего. Тезисы докладов. Москва. МГУ. 2009. — С. 333 – 334.

21*. Панасенко Е. А., Родина Л. И., Тонков Е. Л. Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Труды Ин-та матем. и механ. УрО РАН.— 2010. — Т. 16, № 5.— С. 135 – 142.

22. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистически инвариантные множества управляемой системы, параметризованной динамической системой // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль. 2010. — С. 161–162.

23*. Панасенко Е. А., Родина Л. И., Тонков Е. Л. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа — Бебутова и дифференциальные включения // Труды Ин-та матем. и механ. УрО РАН.— 2011. — Т. 17, № 1.— С. 162 – 177.

24*. Родина Л. И. Статистически инвариантные с вероятностью единица множества управляемых систем со случайными параметрами // Дифференц. уравнения.— 2011. — Т. 47, № 6.— С. 903 – 905.

25*. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.— 2011. — № 1.— С. 67 – 86.

26*. Родина Л. И. Статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.— 2011. — № 2.— С. 68 – 87.

27. Родина Л. И. Функции Ляпунова и статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти И. Г. Петровского. Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ, 2011. — С. 320 – 321.

28. Родина Л. И., Тонков Е. Л. О существовании статистически инвариантных множеств управляемых систем со случайными параметрами // Международная конференция по математической теории управления и механике. Тезисы докладов. Суздаль. 2011. — С. 174–177.