На правах рукописи

Банников Александр Сергеевич

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2012

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Н. Н. Петров
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Захаров В. В., Санкт-Петербургский государственный университет
	доктор физико-математических наук, профессор Клеймёнов А. Ф., Институт математики и механики УрО РАН
Ведущая организация:	Челябинский государственный университет

Защита состоится «___» ________ 2012 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.01. в Институте математики и механики УрО РАН по адресу:
620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан «___» ________ 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями. Динамические процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми.

Развитие теории дифференциальных игр стимулировалось наличием реальных прикладных задач, имеющих значение для механики, экономики, военного дела, радиоэлектроники, биологии и других областей.

Становление этой теории связано с исследованиями Р. Айзекса, А. Брайсона, Б. Н. Пшеничного, У. Флеминга, Л. А. Петросяна.

В Советском Союзе активная разработка теории дифференциальных игр началась после фундаментальных работ академиков Н. Н. Красовского и Л. С. Понтрягина. Существенный вклад в эту разработку внесли В. Д. Батухтин, Р. В. Гамкрелидзе, Н. Л. Григоренко, П. Б. Гусятников, В. И. Жуковский, В. В. Захаров, М. И. Зеликин, А. Ф. Клейменов, А. В. Кряжимский, А. Б. Куржанский, В. Н. Лагунов, А. А. Меликян, Е. Ф. Мищенко, М. С. Никольский, Ю. С. Осипов, Н. Н. Петров, Е. С. Половинкин, Н. Ю. Сатимов, А. И. Субботин, Н. Н. Субботина, В. Е. Третьяков, Н. Т. Тынянский, В. И. Ухоботов, В. Н. Ушаков, А. Г. Ченцов, Ф. Л. Черноусько, А. А. Чикрий и многие другие авторы.

Из зарубежных авторов можно в первую очередь отметить работы Л. Берковича, Д. Брейквелла, А. Фридмана, Р. Эллиота, Дж. Лейтмана, Р. П. Иванова и других авторов.

Одним из важнейших разделов теории дифференциальных игр являются задачи преследования–убегания с участием группы управляемых объектов, хотя бы с одной из противоборствующих сторон. При этом ситуация может быть осложнена наличием ограничений на состояния объектов.

Одна из первых задач, линейная глобальная задача уклонения, была поставлена Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко[1].

В этом направлении следует отметить также работы А. Азамова, М. С. Габриэляна, В. Л. Зака, А. В. Мезенцева, В. В. Остапенко, И. С. Раппопорта, В. С. Пацко, Б. Б. Рихсеева, С. И. Тарлинского и других авторов.

Наибольшую трудность для исследований представляет задача уклонения с участием нескольких лиц с терминальным множеством сложной

[1]Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого // ДАН СССР, 1969, Т. 189, № 4, с. 721–723

структуры[2][3][4]. Специфика этих задач требует создания новых методов их исследования. Весьма актуальной представляются проблемы выяснения возможности уклонения группы убегающих от многих преследователей и переноса критериев разрешимости задач преследования–убегания на нестационарный случай. Решению этих вопросов и посвящена настоящая диссертация.

Цель работы. Работа посвящена изучению задач преследования–убегания с участием групп управляемых объектов, хотя бы с одной из противоборствующих сторон, и нахождение условий разрешимости в этих задачах.

Основной метод исследования. В диссертации используются методы теории дифференциальных игр и выпуклого анализа, развитые в работах отечественных и зарубежных математиков.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и снабжены полными доказательствами:

1. Получены достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения группы убегающих от группы преследователей в линейной нестационарной задаче.

2. Приведены достаточные условия разрешимости глобальной задачи уклонения группы убегающих от группы преследователей в случае, когда движение описывается скалярными матрицами.

3. Получена двусторонняя оценка числа убегающих, достаточного для разрешимости задачи уклонения из любой начальной позиции при фиксированном числе преследователей в играх с простой матрицей.

4. Предложена позиционная процедура управления с поводырём, гарантирующая попадание преследователей в сколь угодно малую окрестность терминального множества в дифференциальной игре с простыми движениями при условии, убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества.

5. Получены достаточные условия уклонения одного убегающего от группы преследователей в дифференциальных играх второго порядка.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы для

[2] Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: наук. думка, 1992.

[3] Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки–разбойники» // Дифференциальные уравнения, 1983, Т. 19, № 8. С. 1366–1374.

[4] Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: МГУ, 1990.

дальнейших исследований по теории дифференциальных игр со многими участниками.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались на международных (39-й, 41-й и 42-й всероссийских) молодёжных школах-конференциях (г. Екатеринбург, 2008, 2010, 2011), международной научной конференции «Актуальные проблемы теории устойчивости и управления» (г. Екатеринбург, 2009), конференции «Регулярная и хаотическая динамика» (г. Ижевск, 2010), конференции «Динамические системы, управление и наномеханика» (г. Ижевск, 2009), Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теория управления, конференции «Лобачевские чтения 2006» (Казань, 2006) и других.

Публикации. Основные результаты опубликованы в четырнадцати работах, список которых приведён в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, шести параграфов, двух рисунков и списка литературы. Объём диссертации составляет 101 страницу и содержит 123 библиографические ссылки.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работа состоит из двух глав и шести параграфов. В первой главе рассматриваются задачи конфликтного взаимодействия групп преследователей и убегающих. Цель преследователей — переловить всех убегающих, цель убегающих — хотя бы одному избежать поимки. Для однотипных линейных систем даны условия взаимного расположения преследователей и убегающих, достаточные для убегания на бесконечном полуинтервале. В случае простых матриц рассмотрен вопрос о соотношении числа преследователей и убегающих, при котором разрешима глобальная задача уклонения. Все дифференциальные игры рассматриваются в пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$.

Первый параграф носит вспомогательный характер и содержит описание некоторых свойств границы множества управляемости, связанных с условиями максимума и трансверсальности.

Во втором параграфе рассматривается дифференциальная игра Γ n преследователей и m убегающих. Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1, \ldots, n$, имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + u_i(t),\ u_i \in U. \tag{1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид:

$$\dot{y}_j(t) = A(t)y_j(t) + v_j(t),\ v_j \in U. \tag{2}$$

В момент времени $t = t_0$ заданы начальные условия $x_i(t_0) = x_i^0$, $y_j(t_0) = y_j^0$, причём $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j. Здесь $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт, $A(t)$ — действительная квадратная матрица порядка k, измеримая на всей оси t, норма $||A(t)||$ интегрируема на любом компактном подмножестве оси t. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i(t)$, $v_j(t)$, принимающие при $t \geqslant t_0$ значения из множества U.

Определение 1 Будем говорить, что в дифференциальной игре Γ из начального состояния $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ *разрешима* на полубесконечном интервале $[t_0, +\infty)$ *локальная задача уклонения*, если существуют такие управления $v_1(t), \ldots, v_m(t)$ убегающих, что при любых управлениях $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ преследователей найдется номер $s \in \{1, \ldots, m\}$, такой, что $y_s(t) \neq x_i(t)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ при всех $t \geqslant t_0$.

Пусть G — некоторое непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^k$. Полагаем $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))$ и определим множества индексов

$$I(x(t), G) = \{i |\ i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i(t) \in G\},$$
$$J(y(t), G) = \{j |\ j \in \{1, \ldots, m\},\ y_j(t) \in G\},$$

причем, если существуют индексы $j_l \in J(y(t), \partial G)$, $l = 1, \ldots, s$, $s > 1$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$, такие, что $y_{j_1}(t) = y_{j_2}(t) = \cdots = y_{j_s}(t)$, то считаем, что $j_l \notin J(y(t), \partial G)$ для $l = 2, \ldots, s$. Обозначим через $|I|$ количество элементов конечного множества I.

Предположим, что G — выпуклый компакт. Обозначим через $\psi_j(t)$ решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t), \tag{3}$$

соответствующее начальному условию $\psi_j(t_0) = p_j$, где p_j — единичный опорный вектор к множеству G в граничной точке y_j^0, $j \in J(y(t_0), \partial G)$.

Теорема 1 *Пусть существует выпуклый компакт G, что*

$$|J(y(t_0), \partial G)| > |I(x(t_0), \mathbb{R}^k \backslash G)|,$$

и для любого $j \in J(y(t_0), \partial G)$ опорная функция $C(U; \psi_j)$ дифференцируема по ψ_j вдоль траектории $\psi_j(t)$ системы (3) для почти всех $t \geqslant t_0$, тогда в дифференциальной игре Γ из начального состояния z_0 разрешима локальная задача уклонения.

Теорема 2 *Пусть U — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Если существуют выпуклые компакты G_1, G_2, такие, что $x_i^0 \in G_1 \cup G_2$ для любого $i \in \{1, \ldots, \nu\}$, и*

$$|I(x(t_0), G_1 \backslash G_2)| < |J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2))| + |J(y(t_0), \partial G_2)|, \tag{4}$$

то в дифференциальной игре Γ *из начального состояния* z^0 *разрешима локальная задача уклонения.*

В третьем параграфе рассматривается дифференциальная игра Γ, описываемая (1), (2), в которой $A(t) = -a(t)E_k$, где $a(t)$ — действительная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t, а U — строго выпуклый компакт.

Обозначим

$$f_+(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds},\ g(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_+(s)\,ds,\ \lambda_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{g(t)}.$$

Пусть σ некоторое разбиение $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots <$ промежутка $[t_0,+\infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

Определение 2 *Кусочно-программной стратегией* V_j убегающего E_j, отвечающей разбиению σ, называется семейство отображений $\{b_j^l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие величинам

$$(\tau_l,x_1(\tau_l),\ldots,x_n(\tau_l),y_1(\tau_l),\ldots,y_m(\tau_l),$$
$$\min_{i=1..n}\min_{\tau\in[\tau_0,\tau_l]}\|x_i(\tau)-y_1(\tau)\|,\ldots,\min_{i=1..n}\min_{\tau\in[\tau_0,\tau_l]}\|x_i(\tau)-y_m(\tau)\|)$$

измеримую функцию $v_j^l(t)$, определенную на $[\tau_l,\tau_{l+1})$ и такую что
$v_j^l(t) \in U$ для всех $t \in [\tau_l,\tau_{l+1})$.

Определение 3 В дифференциальной игре $\Gamma(n,m,z^0)$ *разрешима глобальная задача уклонения*, если из любого начального состояния z^0 разрешима локальная задача уклонения.

Получены достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения и оценки для числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

Лемма 1 *Пусть в игре* $\Gamma(n,m,z^0)$ $\lambda_0 = 0$, *существуют гиперплоскости* $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_{2l}$, *множества* $I_1,\ I_2,\ldots,\ I_l,\ J_1,\ J_2,\ldots,\ J_l$, *такие, что выполнены следующие условия:*

1. $H_1 \parallel H_2 \parallel \cdots \parallel H_{2l},\ H_j^+ \subset H_{j-1}^+, j = 2,\ldots,2l$, p — *единичный вектор нормали гиперплоскости* H_1, *направленный в* H_1^+,

2. $I_s \subset \{1,\ldots,n\},\ J_q \subset \{1,\ldots,m\},\ s,q = 1,\ldots,l,$
$I_s \cap I_q = \emptyset,\ s \neq q,\ J_s \cap J_q = \emptyset,\ s \neq q,$

3. $x_i^0 \in \overline{H_1{}^-},\ i \notin \bigcup\limits_{s=1}^{l} I_s,$

4. $x_i^0 \in \overline{H_{2s}^+} \cap \overline{H_{2s+1}^-}$, $i \in I_s$, $s = 1,\dots,l-1$,
   $x_i^0 \in \overline{H_{2l}^+}$, $i \in I_l$,

5. $y_j^0 \in H_{2s-1}^+ \bigcap H_{2s}^-$, $j \in J_s$, $s = 1,\dots,l$,

6. $|J_1| + [|J_2| - |I_1|]^+ + \dots + [|J_l| - (|I_1| + |I_2| + \dots + |I_{l-1}|)]^+ \geqslant$
   $\geqslant |I_1| + |I_2| + \dots + |I_l|$, *где* $a^+ = \max(a,0)$,

7. *для любой пары индексов* i, $j \in \bigcup\limits_{s=1}^{l} J_s$, $i \neq j$, *выполнено*

$$y_i^0 - y_j^0 \nparallel v(p) - v(-p).$$

Тогда в игре $\Gamma(n,m,z^0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

Доказана

Теорема 3 *Пусть* $\lambda_0 = 0$, U *— строго выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда для любых натуральных* p, m, *таких, что* $m \geqslant p2^p + 2$ *в игре* $\Gamma(2^p + 1,m,z_0)$ *разрешима глобальная задача уклонения.*

Определим функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом:
$f(n) = \min\{m|$ в $\Gamma(n,m,z_0)$ происходит уклонение от встречи для любого z_0 $\}$.

Теорема 4 *Существуют константы* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ *такие, что для всех натуральных* $n \geqslant 2$ *справедливы следующие неравенства*

$$C_1 n \lg n \leqslant f(n) \leqslant C_2 n \lg n.$$

Вторая глава состоит из трёх параграфов, в ней рассматриваются задачи группового преследования одного убегающего.

В первом параграфе рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1,\dots,P_n$ и убегающего E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad x_i(t_0) = x^0, \quad u_i \in Q. \tag{5}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y}(t) = a(t)v(t), \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in Q, \tag{6}$$

причем $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$, $i = 1,\dots,n$, M_i— заданные выпуклые компакты; $a(t)$— измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t, $\int_{t_0}^{+\infty} |a(s)| = +\infty$; Q— выпуклый строго выпуклый компакт с гладкой границей, $0 \in Q$.

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы множества D вида

$$D = \left\{ y | y \in \mathbb{R}^k \quad (p_j,y) \leqslant \mu_j, \quad j = 1,\ldots,r \right\}, \tag{7}$$

где $p_1,\ldots,p_r$ — единичные векторы, $\mu_1,\ldots,\mu_l$ — вещественные числа такие, что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$.

Пусть $T > t_0$ — произвольное число и σ — некоторое конечное разбиение отрезка $[t_0,T]$: $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_s < \tau_{s+1} = T$.

Определение 4 *Кусочно-программной стратегией* V убегающего E, заданной на $[t_0,T]$, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений b^l, $l = 0,1,\ldots,s$, ставящих в соответствие величинам

$$(\tau_l,x_1(\tau_l),\ldots,x_n(\tau_l),y(\tau_l)) \tag{8}$$

измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [\tau_l,\tau_{l+1})$, и такую, что $v_l(t) \in Q$, $y(t) \in D$, $t \in [\tau_l,\tau_{l+1})$.

Определение 5 *Кусочно-программной контрстратегией* U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений c^l, $l = 0,1,\ldots,s$, ставящих в соответствие величинам (8) и управлению $v_l(t)$ измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [\tau_l,\tau_{l+1})$ и такую, что $u_l^i(t) \in Q$, $t \in [\tau_l,\tau_{l+1})$.

Пусть $z^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0,y^0)$. Обозначим данную игру $\Gamma = \Gamma(n,z^0,D)$.

Определение 6 В игре Γ возможно *уклонение от встречи,* если для любого числа $T > t_0$ существует разбиение σ интервала $[t_0,T]$, стратегия V убегающего E, соответствующая разбиению σ, такие, что для любых траекторий игроков P_i имеет место

$$x_i(t) - y(t) \notin M_i, \quad t \in [t_0,T], \quad i = 1,\ldots,n,$$

где $y(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E.

Определение 7 В игре Γ *происходит поимка*, если существует момент времени $T > t_0$ и для любого разбиения σ интервала $[t_0,T]$, любой траектории $y(t)$ игрока E существуют кусочно-программные контрстратегии U_i игроков P_i, соответствующие разбиению σ, существует момент $\tau \in [t_0,T]$ и номер $m \in \{1,2,\ldots,n\}$ такие, что

$$x_m(\tau) - y(\tau) \in M_m,$$

где $x_m(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория преследователя P_m.

Вместо систем (5) и (6) будем рассматривать систему

$$\dot{z}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{9}$$

Введем функции λ_i следующим образом:

$$\lambda_i(v,m_i) = \max\{\lambda \,|\, v - \lambda(z_i^0 - m_i) \in Q,\, v \in Q\},$$
$$\lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v,m_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\lambda_i^-(w,m_i) = \max\{\lambda \,|\, w - \lambda(z_i^0 - m_i) \in -Q,\, w \in -Q\},$$
$$\lambda_i^-(w) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(w,m_i),\, i = 1, \ldots, n.$$

Так как Q — выпуклый строго выпуклый компакт с гладкой границей, то функции λ_i непрерывны на Q, λ_i^- непрерывны на $-Q$, и существуют

$$\delta(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v), \quad \delta^-(z^0) = \min_{w \in -Q} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i^-(w),$$

причем

$$\delta(z^0) = 0 \Longleftrightarrow 0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{n} (z_i^0 - M_i), \delta(z^0) = 0 \Longleftrightarrow \delta^-(z^0) = 0.$$

Теорема 5 *Пусть $D = \mathbb{R}^k$. В игре $\Gamma(n,z^0,D)$ происходит поимка тогда и только тогда, когда $\delta(z^0) > 0$.*

Предполагая , что убегающий E в процессе игры не покидает пределы множества D вида (7), Q — шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат, получаем необходимые и достаточные условия поимки.

Пусть

$$\lambda_{n+j}(v) = \langle v, p_j \rangle, \quad j = 1..r$$
$$\delta_1(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{s=1,\ldots,n+r} \lambda_s(v), \quad \delta_1^-(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{s=1,\ldots,n+r} \lambda_s(-v).$$

Величина $\delta_1(z^0) = 0$ в том и только том случае,

$$0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Учитывая, что по определению $\delta_1(z^0) \geqslant 0$, получаем, что

$$\delta_1(z^0) > 0 \Longleftrightarrow 0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}$$
$$\delta_1(z^0) > 0 \Longleftrightarrow \delta_1^-(z^0) > 0.$$

Теорема 6 *Пусть число элементов множества $\bigcup_{i=1}^{n} (z_i^0 - M_i)$ не меньше k. Тогда для того, чтобы в игре Γ происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\delta_1(z^0) > 0$.*

Во втором параграфе рассматривается задача позиционной поимки одного убегающего. Показывается, что если преследование может быть завершено за конечное время в классе позиционных контрстратегий, то при информированности преследователей только о позиции игры, оно может быть закончено за то же самое время в сколь угодно малой окрестности терминального множества.

Для каждой из систем (9) рассмотрим систему–поводыря

$$\dot{w}_i(t) = a(t)\big(u_i(t) - v(t)\big), \quad w_i(t_0) = w_i^0, \quad u_i,v \in Q, \quad i \in N_n. \tag{10}$$

Определение 8 Будем говорить, что в игре Γ *происходит поимка* из заданной начальной позиции $z^0 = z(t_0)$, если существуют момент времени $T_0 = T(z^0)$, позиционные стратегии управления с поводырём $\mathcal{U}_i = (U_i,\psi_i,\chi_i)$ преследователей P_i, $i \in N_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in Q$, $t \in [t_0,T_0]$ существуют момент времени $\tau \in [t_0,T_0]$ и номер $s \in N_n$ такие, что имеет место включение $z_s(\tau) \in M_s$.

Здесь U_i — функция, которая будет формировать управление преследователя P_i в исходной системе (9)

$$U_i \colon [t_0,T_0] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to Q,$$

функция ψ_i есть переходная функция i-го поводыря

$$\psi_i \colon T_+^2 \times \mathbb{R}^{nk} \times \mathbb{R}^{nk} \to \mathbb{R}^k \quad \left(T_+^2 = \left\{ (t_1,t_2) \in [t_0,T_0]^2 \,\middle|\, t_1 \leqslant t_2 \right\}\right).$$

Значение переходной функции $\psi_i(t_1,t_2,z,w)$ есть положение $w_i = w_i(t_2)$, в котором i-й поводырь окажется в заданный момент времени t_2 при условии, что в момент $t = t_1$ управляемая система и поводыри находились в точках $z = z(t_1)$ и $w = w(t_1)$ соответственно.

Третья функция χ_i ставит в соответствие позиции (t,z) положение поводыря $\chi_i(t,z) = w_i = w_i(t)$.

Введём функции λ_i следующим образом:

$$\lambda_i(v,m_i) = \max\{\lambda | v - \lambda(w_i^0 - m_i) \in Q,\ v \in Q\},\ \lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v,m_i),$$

$$\lambda_i^-(v,m_i) = \max\{\lambda | v - \lambda(w_i^0 - m_i) {\in} {-Q},\ v {\in} {-Q}\}, \lambda_i^-(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(v,m_i)$$

$$w^0 = (w_1^0, \ldots ,w_n^0), \quad w_i^0 \notin M_i, \quad i \in N_n.$$

Так как Q — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то существуют

$$\delta(w^0) = \min_{v \in Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i(v) \geqslant 0, \quad \delta^-(w^0) = \min_{v \in -Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i^-(v) \geqslant 0,$$

причём $(\delta(w^0))^2 + (\delta^-(w^0))^2 > 0 \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv} \bigcup\limits_{i \in N_n} (w_i^0 - M_i)$.

Введём обозначения:

$$A^+(t) = \{\tau \in [t_0,t] | a(\tau) > 0\}, \quad A^-(t) = \{\tau \in [t_0,t] | a(\tau) < 0\},$$

$C'(Q;h)$ — градиент опорной функции, B^k — единичный шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в начале координат.

Теорема 7 *Пусть начальная позиция z^0 и функция $a(\cdot)$ таковы, что*

$$\widehat{T} = \widehat{T}(z^0) = \min\left\{t \geqslant t_0 \mid \delta(z^0)\int_{A^+(t)} a(s)\,ds + \delta^-(z^0)\int_{A^-(t)} |a(s)|\,ds = n\right\} < +\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в игре Γ происходит поимка с терминальными множествами $M_i^\varepsilon = M_i + \varepsilon B^k$.

В третьем параграфе рассматривается задача уклонения убегающего от группы преследователей в случае, когда игроки распоряжаются ускорениями (инерционные объекты).

Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1,\ldots,n$, имеет вид:

$$\ddot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad u_i \in U.$$

Закон движения убегающего E имеет вид:

$$\ddot{y}(t) = a(t)v(t), \quad v \in U,$$

причем, в начальный момент $x_i(t_0) = x_i^0$, $\dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_i^0$,

$$y(t_0) = y^0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}^0, \quad x_i^0 \neq y^0, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Здесь $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт, $0 \in \operatorname{Int} U$; $a(t)$ — ограниченная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t, $a(t) \neq 0$ почти всюду на $[t_0, +\infty)$. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i(t)$, $v(t)$, принимающие при $t \geqslant t_0$ значения из множества U.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n,z(t_0))$, где

$$z(t) = (z_1(t),\dot{z}_1(t),\ldots,z_n(t),\dot{z}_n(t)), \quad z_i(t) = x_i(t) - y(t), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Определение 9 *Позиционной контрстратегией* V убегающего E назовем измеримое отображение

$$[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^{2nk} \times U^n \to U.$$

Тогда при заданных управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i, $i = 1,\ldots,n$ стратегия V определяет управление $v(t) = V(t,z(t),u_1(t),\ldots,u_n(t))$, которое будет измеримой функцией. Считаем, что управления преследователей формируются на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры.

Теорема 8 *Если* $0 \notin \operatorname{co}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \dot z_i^0\right\}$, *тогда в игре* $\Gamma(n,z(t_0))$ *из начального состояния* $z(t_0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ

1. Банников А. С. Нестационарная задача группового преследования // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 4. — С. 29–34.

2. Банников А. С. Нестационарная задача группового преследования // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 5. — С. 3–12.

3. Банников А. С. Об одной задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. — Вып. 3. — С. 3–11.

4. Банников А. С., Петров Н. Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 40–51.

5. Банников А. С. Уклонение от группы нестационарных инерционных объектов // Вестник Удмуртского университета. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 1. — С. 3–10.

6. Банников А. С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — Вып. 1. — С. 3–7.

Публикации в других изданиях и сборниках материалов конференций

7. Bannikov A., Petrov N. About Some Non-Stationary Problem of Group Pursuit with the Simple Matrix // Contributions to game theory and management = Успехи теории игр и менеджмента: collected papers presented on the Fourth International Conference Game Theory and Management. — SPb, 2011. — Vol. IV. — P. 47–62.

8. Банников А. С. Нестационарная задача группового преследования // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. - Казань: Изд-во Казан. математ. о-во, 2006. Т. 34. С. 26–28.

9. Банников А. С. Нестационарная задача группового преследования // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 39-й Всерос. молодеж. конф., 28 янв. - 1 фев. 2008 г. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. С. 221–223.

10. Банников А. С. Нестационарная задача группового преследования // Итоговая студенческая научная конференция (36; Апрель, 2008) XXXVI итоговая студенческая научная конференция, посвященная 450-летию добровольного вхождения Удмуртии в состав Российского государства: материалы конф., Ижевск, апр. 2008 г. / Удмурт. гос. ун-т ; отв. ред. Н. И. Леонов. - Ижевск, 2008. - С. 4–5.

11. Банников А. С., Петров Н. Н., Сахаров Д. В. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов // Актуальные проблемы теории устойчивости и управления: тез. докл. междунар. конф., 21-26 сент. 2009 г., Екатеринбург

12. Банников А. С. Об одной задаче группового преследования // Динамические системы, управление и наномеханика: тез. докл. Всерос. конф., г. Ижевск, 24-28 июня 2009 г. / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Ин-т математики и механики УрО Рос. акад. наук, Междунар. науч. журн. «Регуляр. и хаот. динамика». - Ижевск: РХД, 2009. с. 31.

13. Банников А. С. Групповое преследование одного убегающего с фазовыми ограничениями // Проблемы теоретической и прикладной математики: тез. 41-й Всерос. молодеж. конф., 31 янв. - 5 февр. 2010 г.

14. Банников А. С. К задаче позиционной поимки убегающего группой преследователей // Современные проблемы математики: тез. 42-й Всерос. молодеж. шк.-конф., 30 янв. - 6 февр. 2011 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. — С. 6–7.