АКАДЕМИЯ НАУК СССР

УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

УДК 517.977.I

ТОНКОВ Евгений Леонидович

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

(0I.0I.02-дифференциальные уравнения и математическая физика)

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Свердловск - 1983

ЕТонков

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория линейных управляемых систем, развитие которой во многом обязано трудам Н.Н.Красовского [40], [41], [42], Р.Калмана [34], [35], Р.В.Гамкрелидзе [18], [19], А.Б.Куржанского [47], [48], Р.Конти [93], [94], [95] и ряду других исследователей (см. обзоры [16], [17]) представляет важный раздел общей теории управляемых процессов. За последние 25 лет в линейной теории получен ряд фундаментальных результатов общего характера, связанных в первую очередь с задачами полной управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости уравнения

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{0.I}$$

структурой оптимальных управлений и структурой множества управляемости. Стационарное уравнение

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{0.2}$$

($A_0, B_0 = const$) изучено наиболее полно и большинство фактов, относящихся к уравнению (0.2), выражено в эффективных терминах. Значительно меньше изучено уравнение (0.I), в теории которого оформился ряд задач, не поддающихся решению в течение длительного периода времени. К числу таких задач относится задача о глобальной управляемости уравнения (0.I). Остановимся на этой задаче более подробно.

Пусть задано множество U, расположенное в $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathcal{D}(\sigma,\mathcal{U})$ — множество управляемости в нуль уравнения (0.I) на $[0,\sigma]$ ($x_0\in \mathcal{D}(\sigma,\mathcal{U})$ в том и только в том случае, если существует измеримое управление $u_0:[0,\sigma]\to\mathcal{U}$, такое, что уравнение (0.I) при $u=u_0(t)$ имеет решение, удовлетворяющее условиям $x(0)=x_0$, $x(\sigma)=0$). Уравнение (0.I) называется глобально управляемым, если множество $\mathcal{D}(\mathcal{U})\doteq\bigcup\limits_{\sigma\geq 0}\mathcal{D}(\sigma,\mathcal{U})$ совпадает с $\mathbb{R}^n$.

Хорошо известно (см., например, [52], стр.I02) следующее утверждение, относящееся к стационарному уравнению (0.2): пусть

$$\mathcal{U}\text{ — компакт в } \mathbb{R}^m \text{ и } 0\in \operatorname{int}(\operatorname{conv}\mathcal{U}); \tag{0.3}$$

тогда уравнение (0.2) глобально управляемо в том и только в том случае, если

$$\operatorname{rank}(B_0, A_0B_0,\dots, A_0^{n-1}B_0)=n, \tag{0.4}$$

$$\operatorname{Re}\nu_i(A_0)\leq 0,\ i=1,\dots,n, \tag{0.5}$$

где $\nu_i(A_0)$ — собственные значения оператора A_0. Это утверждение в работе А.К.Керимова [36] обобщено на уравнение (0.I) с ω-периодическими $A_0(t), B_0(t)$: пусть уравнение (0.I) ω-периодично и множество $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию (0.3); тогда уравнение (0.I) глобально управляемо, если дополнительно выполнены следующие условия:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)\doteq\bigcup_{\sigma\geq 0}\mathcal{D}(\sigma,\mathbb{R}^m)=\mathbb{R}^n, \tag{0.6}$$

$$\lambda_i(A_0)\leq 0,\ i=1,\dots,n, \tag{0.7}$$

где $\lambda_i(A_0)$ - показатели А.М.Ляпунова ([II], глава I) уравнение

$$\dot{x} = A_0(t)x. \qquad (0.8)$$

В случае уравнения (0.2) условие (0.6) эквивалентно условию (0.4), а условие (0.5) - условию (0.7).

Отметим, что отказ от периодичности уравнения (0.I) (с сохранением условий (0.3),(0.6) и (0.7)) уже не обеспечивает глобальную управляемость уравнения (0.I). Более того, из условий (0.3), (0.6) и (0.7) не следует глобальная управляемость уравнения (0.I) даже в том случае, когда уравнение (0.I) условно-периодическое с двумерным базисом частот, а уравнение(0.8) - правильное (соответствующий пример приведён в § I0 главы II).

Решение задачи о глобальной управляемости уравнения (0.I) потребовало привлечения математического аппарата, ранее не привлекавшегося в теории управляемых систем: уравнению (0.I) ставится в соответствие так называемая динамическая система сдвигов, исследование Ω - предельного множества которой приводит к ответу на вопрос о глобальной управляемости уравнения (0.I). Динамическая система сдвигов описана в монографии В.В. Немыцкого и В.В.Степанова ([6I], гл.6, § 9) и активно применялась В.М.Миллионщиковым [58] для исследования свойств показателей А.М.Ляпунова. Использование динамической системы сдвигов при исследовании уравнения (0.I) привело также к возникновению ряда понятий (названых в данной работе равномерной полной управляемостью, равномерной локальной управляемостью, равномерной глобальной управляемостью и равномерной стабилизируемостью), представляющих, как мне кажется, определённый интерес в задачах управления в условиях неопределённости [48],[68] и в игровых задачах [43],[44],т.е. в тех случаях, когда возникает необходимость в позиционном управлении объектом.

Ещё одно обстоятельство следует отметить особо. Среди уравнений вида (0.I) существуют уравнения со следующими свойствами (§ II, глава III):

(А) уравнение (0.I) с фиксированным множеством $\mathcal{U}$, удовлетворяющим условию (0.3), глобально управляемо;

(Б) для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $t_0 \geq 0$ найдётся такое $\tau = \tau(t_0, x_0) > t_0$, что время быстродействия $T(\tau, x_0)$ из точки $x(\tau) = x_0$ в нуль удовлетворяет неравенству $T(\tau, x_0) \leq |x_0|$;

(В) для всякого $\sigma > 1$ найдутся такие $\tau = \tau(\sigma) > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$, что $|x_0| = 1$ и при этом время быстродействия $T(\tau, x_0) > \sigma$.

Причины существования уравнений со свойствами (А) - (В) удалось объяснить в терминах вероятностных мер, определённых на Ω -предельном множестве соответствующей динамической системы, а это в свою очередь привело к некоторым новым задачам, связанным с вероятностными характеристиками множества управляемости.

Другая задача, которой в данной работе уделено достаточное внимание, состоит в изучении границы $\partial D(\sigma, \mathcal{U})$ множества управляемости $D(\sigma, \mathcal{U})$ уравнения (0.I) при малых σ (точнее при σ, не превосходящих некоторого критического значения σ_0, которое может быть и достаточно большим). Вопрос о структуре $\partial D(\sigma, \mathcal{U})$ тесно связан с задачей построения синтезирующей функции. При исследовании этих вопросов (которые достаточно изучены для стационарного уравнения (0.2)) в работе привлекаются классические методы, связанные с теорией чебышевских систем и теорией неосцилляции в смысле Ш.Валле-Пуссена. Правда,понятие неосцилляции в смысле Ш.Валле-Пуссена относится только к уравнению

$$\xi^{(n)}(t)+\tau_n(t)\xi^{(n-1)}(t)+\ldots+\tau_1(t)\xi(t)=0,$$

что оказалось недостаточным для наших целей. Поэтому один из параграфов данной работы посвящён обобщению теории неосцилляции на линейные уравнения вида (0.8). При этом получились результаты, представляющие самостоятельный интерес.

* *

*

Диссертация состоит из введения, пяти глав, двадцати параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы.

В первом параграфе вводится динамическая система сдвигов, отвечающая уравнению (0.I) и доказан ряд вспомогательных утверждений. Уравнение (0.I) отождествляется с функцией $t \to \varphi_0(t) \doteq (A_0(t), B_0(t)) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ и строится множество $\mathcal{R}(\varphi_0) \doteq cl\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi_\tau(t)=\varphi_0(\tau+t)$, а cl означает замыкание множества $\{\varphi_\tau : \tau\in\mathbb{R}\}$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Динамическая система сдвигов, отвечающая уравнению (0.I) - это пара $(\mathcal{R}(\varphi_0), g^\tau)$, где g^τ- однопараметрическая группа движений в фазовом пространстве $\mathcal{R}(\varphi_0)$, определённая равенством $g^\tau(\varphi)=\varphi(\tau+t)$, $\varphi\in\mathcal{R}(\varphi_0)$, $\tau\in\mathbb{R}$. Наряду с $\mathcal{R}(\varphi_0)$ рассматриваются пространства $\mathcal{R}^+(\varphi_0)=cl\{\varphi_\tau : \tau\geq 0\}$, $\mathcal{R}(A_0)$, $\mathcal{R}^+(A_0)$ (последние два пространства отвечают уравнению (0.8),которое отждествляется с функцией $t\to A_0(t)\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$). Всюду далее предполагается, что функция $t \to \varphi_0(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. В этом случае пространства $\mathcal{R}(\varphi_0)$, $\mathcal{R}^+(\varphi_0)$, $\mathcal{R}(A_0)$, $\mathcal{R}^+(A_0)$ компактны.

Омега-предельное множество системы $(\mathcal{R}(\varphi_0), g^\tau)$ обозначим через $\Sigma(\varphi_0)$. По определению $\varphi \in \Sigma(\varphi_0)$ в том и только в том случае, если существует последовательность $\{\tau_i\}_1^\infty$, такая, что $\tau_i \to \infty$ и $\varphi_{\tau_i} \xrightarrow{\text{лок}} \varphi$ (последняя запись означает, что φ_{τ_i} сходится к φ равномерно на отрезках). Пространство $\mathcal{R}^+(\varphi_0)$ представимо в виде $\mathcal{R}^+(\varphi_0) = \Theta^+(\varphi_0) \cup \Sigma(\varphi_0)$, где $\Theta^+(\varphi_0) = \mathcal{R}^+(\varphi_0) \setminus \Sigma(\varphi_0)$ и если пространство $\mathcal{R}(\varphi_0)$ является минимальным компактным инвариантным (относительно g^τ) множеством (в этом случае уравнение φ_0 называется рекуррентным [6I], стр.402, [56]), то $\Theta^+(\varphi_0) = \varnothing$. Отметим ещё, что если $\Sigma(\varphi_0)$ является минимальным компактным инвариантным (относительно g^τ) множеством, то для всякого уравнения $\varphi \in \Sigma(\varphi_0)$ и любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ множество

$$\overset{\circ}{\mathcal{E}}(\varphi, \varepsilon, N) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}: \max_{|t| \leq N} |\varphi(t) - g^\tau(\varphi)(t)| < \varepsilon\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$.

В § 2 исследуется свойство равномерной полной управляемости. Всякому уравнению $\varphi \in \mathcal{R}(\varphi_0)$ и множеству $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ поставим в соответствие множество управляемости в нуль $D(\varphi, \sigma, \mathcal{U})$ уравнения φ на отрезке $[0, \sigma]$ с измеримыми и ограниченными управлениями $u: [0, \sigma] \to \mathcal{U}$. Пусть далее, $D(\varphi, \mathcal{U}) \doteq \bigcup_{\sigma \geq 0} D(\varphi, \sigma, \mathcal{U})$.

О п р е д е л е н и е 0.I. Уравнение φ_0 называется равномерно вполне управляемым (вправо), если существуют числа $\sigma > 0$, $\eta > 0$, такие, что всякое уравнение $\varphi \in \mathcal{R}^+(\varphi_0)$ вполне управляемо на отрезке $[0, \sigma]$ (т.е. $D(\varphi, \sigma, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$) и среди управлений, переводящих φ из точки $x(0)=x_0$ в точку $x(\sigma)=0$ найдётся управление $t\to u(t,x_0;\varphi)$, удовлетворяющее неравенству $|u(t,x_0;\varphi)|\le\eta|x_0|$ для всех $t\in[0,\sigma]$, $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Это определение эквивалентно (см.§ 4) определению равномерной полной управляемости в смысле Р.Калмана [102]: уравнение φ_0 равномерно вполне управляемо (в смысле [102]), если существуют $\alpha_i>0, i=1,\dots,4, \sigma>0$, что при всех $\tau\ge 0$ выполнены неравенства (понимаемые в смысле квадратичной формы):

$$\alpha_1 I\le W_0(\tau)\le\alpha_2 I,\quad \alpha_3 I\le\widetilde{W}_0(\tau)\le\alpha_4 I,$$

где I - тождественное отображение в $\mathbb{R}^n$,

$$W_0(\tau)=\int_\tau^{\tau+\sigma}X_0(\tau+\sigma,t)B_0(t)B_0'(t)X_0'(\tau+\sigma,t)dt,$$

$$\widetilde{W}_0(\tau)=\int_\tau^{\tau+\sigma}X_0(\tau,t)B_0(t)B_0'(t)X_0'(\tau,t)dt,$$

$X_0(t,s)$ - оператор Коши уравнения $\dot{A}_0$.

Т е о р е м а 0.1. Если $\Sigma(\varphi_0)$ является минимальным компактным инвариантным относительно g^τ множеством и найдётся такое уравнение $\varphi\in\Sigma(\varphi_0)$, что $D(\varphi,\mathbb{R}^m)=\mathbb{R}^n$ (т.е. уравнение φ вполне управляемо), то уравнение φ_0 равномерно вполне управляемо.

Условия теоремы 0.1 являются предельными в следующем смысле: условие $D(\varphi,\mathbb{R}^m)=\mathbb{R}^n$ необходимо для равномерной полной управляемости, а условие рекуррентности (минимальности $\Sigma(\varphi_0)$)

нельзя ослабить до условия устойчивости по Пуассону ($\mathcal{E}(\varphi,\varepsilon,N)\cap [t_0,\infty)\neq\emptyset$ для всех $t_0>0, \varepsilon>0, N>0$ и некоторого $\varphi\in\Sigma(\varphi_0)$). Свойство равномерной полной управляемости устойчиво относительно возмущений из множества

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\varphi_0)\doteq\bigcup_{T\geq 0}\{\tilde{\varphi}_0:\ \tilde{\varphi}_0 \text{ ограничено, равномерно непрерывно на } \mathbb{R} \text{ и } \sup_{t\geq T}|\tilde{\varphi}_0(t)-\varphi_0(t)|<\varepsilon\}.$$

Т е о р е м а 0.2. Если уравнение φ_0 равномерно вполне управляемо, то найдётся такое $\varepsilon=\varepsilon(\varphi_0)>0$, что всякое уравнение $\tilde{\varphi}_0$ из $\mathcal{U}_\varepsilon(\varphi_0)$ равномерно вполне управляемо.

Т е о р е м а 0.3. Для всякого рекуррентного уравнения φ_0 и любого $\varepsilon>0$ найдётся равномерно вполне управляемое $\tilde{\varphi}_0$, такое, что $\sup_t|\varphi_0(t)-\tilde{\varphi}_0(t)|<\varepsilon$, $t\in\mathbb{R}$.

В § 3 и § 4 доказаны теоремы 0.I – 0.3 и утверждение об эквивалентности определения 0.I и определения равномерной полной управляемости в смысле работы [I02].

В пятом параграфе введено определение равномерной локальной управляемости. Пусть фиксировано множество $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}^m$. Обозначим $O^n_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|\leq\varepsilon\}$.

О п р е д е л е н и е 0.2. Уравнение φ_0 называется равномерно локально управляемым (вправо), если существуют числа $\sigma>0$ и $\varepsilon>0$, такие, что $O^n_\varepsilon\subset\mathcal{D}(\varphi,\sigma,\mathcal{U})$ для всякого $\varphi\in\mathcal{R}^+(\varphi_0)$.

Т е о р е м а 0.4. Если

$$\mathcal{U} \text{ – компакт в } \mathbb{R}^m \text{ и } 0\in\operatorname{int}(\operatorname{conv}\mathcal{U}), \tag{0.9}$$

–

то уравнение φ_0 равномерно локально управляемо в том и только в том случае, если оно равномерно вполне управляемо.

О п р е д е л е н и е 0.3. Число λ_0 называется регулярным для уравнения

$$\dot{x} = (A_0(t) + \lambda Q_0(t))x + B_0(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{0.10}$$

если при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (0.10) равномерно локально управляемо; в противном случае число λ_0 называется собственным значением.

Т е о р е м а 0.5. Пусть множество $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию (0.9), уравнение (0.10) рекуррентно и $\lambda = 0$ не является собственным значением. Тогда существует не более счётного числа собственных значений уравнения (0.10), причём на каждом отрезке $[\lambda_*, \lambda^*]$ собственных значений конечное число.

В шестом параграфе введено определение равномерной полной наблюдаемости и отмечена связь этого определения с задачами наблюдения в условиях помех.

Глава II посвящена равномерной глобальной управляемости. В седьмом параграфе введено следующее определение.

О п р е д е л е н и е 0.4. Уравнение φ_0 называется равномерно глобально управляемым (вправо), если

$$D(\varphi, \mathcal{U}) \doteq \bigcup_{\sigma \geq 0} D(\varphi, \sigma, \mathcal{U}) = \mathbb{R}^n$$

для всех $\varphi \in \mathcal{R}^+(\varphi_0)$.

Если выполнено условие (0.9), то свойство равномерной глобальной управляемости эквивалентно следующему свойству:

для любого $N>0$ существует такое $\sigma=\sigma(N)>0$, что $O_N^n\subset D(\varphi_\tau,\sigma,\mathfrak{U})$ для всех $\tau\geq 0$.

Т е о р е м а 0.6. Пусть выполнено условие (0.9). Если кроме того:

(а) уравнение φ_0 равномерно локально управляемо;

(б) показатели А.М.Ляпунова $\lambda_i(A_0)\leq 0$, $i=1,\dots,n$;

(в) уравнение A_0 приводимо (ляпуновским преобразованием к уравнению с постоянным оператором);

то уравнение φ_0 равномерно глобально управляемо.

Существенность условий (а)-(в) выясняется в следующей теореме. Обозначим через $M(A_0)$ множество нормированных борелевских мер на $\mathcal{R}^+(A_0)$ инвариантных относительно сдвигов. В силу теоремы Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова ([61], стр.514), множество $M(A_0)$ непусто.

Т е о р е м а 0.7. Пусть выполнено условие (0.9). Если уравнение φ_0 равномерно глобально управляемо, то:

(а) уравнение φ_0 равномерно локально управляемо;

(б) показатели А.М.Ляпунова $\lambda_1(A),\dots,\lambda_n(A)$ неположительны для почти всех (относительно любой меры из $M(A_0)$) $A\in\mathcal{R}^+(A_0)$;

(в) если уравнение A_0 приводимо или почти-периодично (в смысле Бора), то $\lambda_i(A)\leq 0$, $i=1,\dots,n$ для всех $A\in\mathcal{R}^+(A_0)$.

Доказательство теорем 0.6 и 0.7 опирается на свойства ляпуновских преобразований и оценки опорной функции, которые представляют самостоятельный интерес и поэтому я привожу их ниже. Доказательство пункта (б) теоремы 0.7 использует результаты работы В.М.Миллионщикова [60] о мере множества абсолютно регулярный уравнений.

Пусть $\ell \to h(\ell;\varphi,\mathcal{U}) \doteq \max\limits_{x} \ell' x,\ x \in D(\varphi,\mathcal{U})$ – опорная функция множества $D(\varphi,\mathcal{U}) \doteq \bigcup\limits_{\sigma \geqslant 0} D(\varphi,\sigma,\mathcal{U})$, $S_1 \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Л е м м а 0.1. Пусть выполнено условие (0.9) и уравнение φ_0 равномерно локально управляемо. Тогда найдутся такие константы δ_1 и δ_2 (не зависящие от (ℓ,φ)), что $\delta_1 > 0$ и для всех $(\ell,\varphi) \in S_1 \times \mathcal{R}^+(\varphi_0)$ выполнены неравенства

$$\delta_1 \vartheta(\ell,A) \leqslant h(\ell;\varphi,\mathcal{U}) \leqslant \delta_2 \vartheta(\ell,A), \tag{0.11}$$

где $\vartheta(\ell,A) = \int\limits_0^\infty |\ell' X(0,t)|\,dt$.

Отметим, что функция $\ell \to \vartheta(\ell,A_0)$ является опорной функцией множества управляемости $D(\xi_0, O_1^n)$ уравнения

$$\xi_0 \doteq (A_0, I):\ \dot{x} = A_0(t)x + v$$

с множеством $\mathcal{U} = O_1^n \subset \mathbb{R}^n$ и в силу неравенств (0.11), вопрос о равномерной глобальной управляемости уравнения φ_0 сводится к вопросу о равномерной глобальной управляемости уравнения ξ_0.

Теоремы 0.6 и 0.7 оставляют невыясненными ряд вопросов, один из которых (поставленный В.М.Миллионщиковым) состоит в следующем: являются ли условия (а) и (б) теоремы 0.6 достаточными условиями равномерной глобальной управляемости почти-периодического (в смысле Бора) уравнения φ_0 (из теоремы 0.7 следует, что эти условия необходимы)?

Ответ на этот вопрос дают сформулированные ниже теоремы 0.8 и 0.9. Введём в рассмотрение два множества

$$\mathfrak{M} \doteq \{\varphi \in \mathcal{R}^+(\varphi_0) : D(\varphi, \mathcal{U}) = \mathbb{R}^n\}$$

- множество глобально управляемых уравнений из $\mathcal{R}^+(\varphi_0)$ и

$$\mathfrak{N} \doteq \{\varphi \in \mathcal{R}^+(\varphi_0) : D(\varphi, \mathcal{U}) \neq \mathbb{R}^n\}.$$

Множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ инвариантны относительно g^τ и если уравнение φ_0 почти-периодично, то динамическая система сдвигов $(\mathcal{R}(\varphi_0), g^\tau)$ строго эргодична, т.е. на $\mathcal{R}(\varphi_0)$ существует единственная нормированная борелевская мера μ, инвариантная относительно сдвигов и такая, что для любого инвариантного борелевского множества Q, $\mu(Q)$ равна нулю или единице. Отметим ещё, что верхний особый показатель $\Omega^0(A_0)$ уравнения A_0 определяется равенством ([II], стр.II6)

$$\Omega^0(A_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \ln(\sup_{t \geq 0} |X(t+h, t)|).$$

Т е о р е м а 0.8. Пусть выполнено условие (0.9) и уравнение φ_0 почти-периодично. Тогда равенство $\mu(\mathfrak{M})=1$ имеет место в том и только в том случае, если $D(\varphi_0,\mathbb{R}^m)=\mathbb{R}^n$ (т.е. уравнение φ_0 вполне управляемо) и $\Omega^0(A_0)\leq 0$.

Т е о р е м а 0.9. Для любых m и n существуют уравнение φ_0 вида (0.I) и компактное множество U $(0\in \operatorname{int} U)$, такие, что $\mathfrak{N}\neq \varnothing$ и при этом: (I) уравнение φ_0 условно-периодично с двумерным базисом частот; (2) уравнение φ_0 равномерно локально управляемо; (3) уравнение A_0 правильное (и даже абсолютно регулярное [58]); (4) $\Omega^0(A_0)\leq 0$; (5) $\varphi_0\in\mathfrak{N}$.

Теорема 0.8 допускает обобщение на эргодические системы. Для формулировки такого обобщения отметим, что если $(\mathcal{R}^+(\varphi_0),g^\tau)$-эргодическая система (т.е. на $\Sigma(\varphi_0)$ существует по крайней мере одна эргодическая мера μ), то система $(\mathcal{R}^+(A_0),g^\tau)$ тоже эргодическая и мера ν_μ , определённая равенством

$$\nu_\mu(Q)=\mu(Q_{\varphi_0}), \quad Q_{\varphi_0}=\{\varphi=(A,B)\in\mathcal{R}^+(\varphi_0):\ A\in Q\},$$

эргодична на $\mathcal{R}^+(A_0)$.

Т е о р е м а 0.10. Пусть выполнено условие (0.9), система $(\mathcal{R}^+(\varphi_0),g^\tau)$ эргодична и μ - фиксированная эргодическая мера. Если уравнение φ_0 равномерно локально управляемо и для почти всех (в смысле меры ν_μ) уравнений A из $\mathcal{R}^+(A_0)$ выполнены неравенства $\lambda_i(A)\leq 0,\ i=1,\dots,n$, то $\mu(\mathfrak{M})=1$.

С л е д с т в и е 0.I. Пусть выполнены условия теоремы 0.10 и уравнение φ_0 рекуррентно. Тогда множество $\mathfrak{N}$ имеет первую категорию Бэра.

Пятнадцатый параграф посвящён вопросам равномерной стабилизации уравнения φ_0.

Определение 0.5. Уравнение φ_0 называется равномерно стабилизируемым, если для всякого $\alpha \geq 0$ существует ограниченная и равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $k_0 : \mathbb{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (k_0 зависит от α), обладающая свойством (s): каждому уравнению φ из $\mathcal{R}^+(\varphi_0)$ отвечает функция $k \in \mathcal{R}^+(k_0)$, такая, что $\Omega^0(P) \leq \alpha$, где $P(t) = A(t) + B(t)k(t)$.

Теорема 0.11. Уравнение φ_0 равномерно стабилизируемо в том и только в том случае, если оно равномерно вполне управляемо. Если уравнение φ_0 равномерно стабилизируемо, то для каждого $\alpha \geq 0$ функция

$$t \to k_0(t) = -\frac{1}{2} B_0'(t) Q_0^{-1}(t), \tag{0.12}$$

где

$$Q_0(t) = \int_t^{t+\sigma} X_0(t,s) B_0(s) B_0'(s) X_0'(t,s) \exp(2\alpha(t-s))\, ds,$$

удовлетворяет свойству (s) при всех достаточно больших $\sigma > 0$. Оказывается далее, что если уравнение φ_0 рекуррентно, то функция (0.12) рекуррентна и для любых $\varepsilon > 0$, $N > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $M > 0$, такие, что $\mathcal{E}(\varphi_0, \delta, M) \subset \mathcal{E}(k_0, \varepsilon, N)$, где

$$\mathcal{E}(\varphi_0, \delta, M) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq N} |\varphi_\tau(t) - \varphi_0(t)| < \varepsilon\}.$$

Если же уравнение φ_0 почти-периодично (в смысле Бора), то k_0 почти-периодична и $\mathfrak{M}(k_0) \subset \mathfrak{M}(\varphi_0)$, где $\mathfrak{M}(\varphi_0)$ – модуль функции φ_0 (т.е. наименьшая абелева группа, содержащая все показатели Фурье).

Свойство равномерной стабилизируемости эквивалентно свойству равномерной полной управляемости, а свойство равномерной полной управляемости - грубое свойство, поэтому и свойство равномерной стабилизируемости - грубое свойство. Естественно, что свойство равномерной стабилизируемости должно сохраняться (по крайней мере в локальном смысле) и при нелинейных возмущениях уравнения φ_0. Доказательству этого утверждения посвящён конец параграфа пятнадцать.

В § 16 исследуются условия, при которых $D(\varphi_0, \sigma, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$, т.е. условия полной управляемости уравнения φ_0 на заданном отрезке $[0,\sigma]$. Вопрос об эффективных условиях полной управляемости нестационарного уравнения φ_0 (важность которого отмечалась Н.Н.Красовским ещё в 1968 году [42], стр.15) по-прежнему не получил существенного развития. Здесь доказано следующее утверждение.

Л е м м а 0.2. Следующие свойства эквивалентны:

(а) уравнение φ_0 вполне управляемо на $[0,\sigma]$;

(б) краевая задача

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)B_0'(t)y,$$

$$\dot{y} = -A_0'(t)y, \quad x(0) = 0, \quad x(\sigma) = 0,$$

имеет только тривиальное решение;

(в) существует симметричная абсолютно непрерывная на $[0,\sigma]$ функция $t \to \theta(t) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, такая, что $\theta(0) \leq 0$, $\theta(\sigma) > 0$ и при почти всех $t \in [0,\sigma]$ выполнено неравенство

$$\dot{\theta}(t) - A_0(t)\theta(t) - \theta(t)A_0'(t) \leq B_0(t)B_0'(t)$$

(все неравенства понимаются в смысле квадратичной формы, штрих означает операцию транспонирования).

Из этой леммы получаются эффективные достаточные условия полной управляемости, дополняющие ряд последних исследований, среди которых отметим работы [2], [I6], [4I], [I03], [I07].

Другой вопрос, обсуждаемый в § I6 состоит в следующем: пусть фиксировано некоторое множество $\mathcal{L}$ вполне управляемых уравнений φ_0 вида (0.I) (например, $\mathcal{L}$ - множество ω-периодических вполне управляемых уравнений). Требуется получить оценку сверху числа $\sigma = \sigma(\mathcal{L})$, обеспечивающего полную управляемость на отрезке $[0,\sigma]$ любого из уравнений $\varphi \in \mathcal{L}$. В этом направлении получены следующие результаты. Пусть T^r - тор размерности r с угловыми координатами $z_1, \dots, z_r \pmod{2\pi}$. Пусть задан вектор частот $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$, причём для любого ненулевого вектора $p = (p_1, \dots, p_r)$ с целочисленными координатами линейная комбинация $p_1\nu_1 + \dots + p_r\nu_r$ не обращается в нуль. Рассмотрим уравнение $\varphi_0(\nu t) \doteq (A_0(\nu t), B_0(\nu t))$ вида (0.I), где $z \to A_0(z)$ и $z \to B_0(z)$ непрерывные на T^r функции. Тогда уравнение $\varphi_0(\nu t)$ является условно-периодическим с периодами $\omega_i = 2\pi/\nu_i$, $i = 1, \dots, r$. Пусть $\mathcal{L}(\nu)$ - множество вполне управляемых уравнений вида $\varphi_0(\nu t)$ (базис $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$ фиксирован).

Т е о р е м а 0.12. Если $\tau > 1$, то для каждого фиксированного (рационально независимого) базиса ν в $\mathcal{L}(\nu)$ существует последовательность уравнений $\{\varphi_0^N(\nu t)\}_{N=1}^{\infty}$ с аналитическими $A_0^N(z)$ и бесконечно дифференцируемыми $B_0^N(z)$, такая, что $D(\varphi_0^N, N, \mathbb{R}^m) \neq \mathbb{R}^n$ для всех N.

Если $\tau = 1$ (т.е. уравнение $\varphi_0(\nu t)$ периодично с периодом $\omega = 2\pi/\nu$), то в [89] доказано, что $D(\varphi_0, 2n\pi/\nu, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$ для всех $\varphi_0 \in \mathcal{L}(\nu)$. В [35] утверждается (см. предложение (2.26)), что для всех $\varphi_0 \in \mathcal{L}(\nu)$ $D(\varphi_0, 2\pi/\nu, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$. Это утверждение верно, если $n = 1$ или $A_0(z)$, $B_0(z)$ аналитичны. В общем случае предложение (2.26) из [35] опровергается следующим утверждением.

Т е о р е м а 0.13. Пусть $\tau = 1, n \geqslant 2$, ν - фиксировано. В $\mathcal{L}(\nu)$ существует уравнение $\varphi_0(\nu t)$ с аналитической $A_0(z)$ и бесконечно дифференцируемой $B_0(z)$, такое, что для всех $\tau \in [0, 2\pi/\nu]$ $D(\varphi_\tau, 2\pi/\nu, \mathbb{R}^m) \neq \mathbb{R}^n$.

Последняя глава посвящена исследованию структуры границы $\partial D(\varphi_0, \sigma, \mathcal{U})$ множества управляемости $D(\varphi_0, \sigma, \mathcal{U})$ в предположении, что $m = 1$, $\mathcal{U} = [-1, 1]$ и $\sigma \leq \sigma_0(\varphi_0)$, где $\sigma_0(\varphi_0)$ – верхняя грань таких σ, что на $[0, \sigma)$ функции

$$\xi_1(t) \doteq \psi_1(t) b_0(t), \ \dots, \ \xi_n(t) \doteq \psi_n(t) b_0(t)$$

($\psi_1, \dots, \psi_n$ - произвольный базис пространства решений уравнения $\dot{\psi} = -\psi A_0(t)$) образуют чебышевскую систему функций (т.е. любая линейная комбинация

$$c_1 \xi_1(t) + \ \dots \ + c_n \xi_n(t),$$

где не все $c_1,\dots,c_n$ равны нулю одновременно, имеет не более $n-1$ геометрически различных нулей на $[0,\sigma)$).

Т е о р е м а 0.14. Пусть $m=1$, $\mathcal{U}=[-1,1]$ и $\sigma\le\sigma_0(\varphi_0)$. Тогда $D(\varphi_0,\sigma,\mathcal{U})$ - строго выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ и граница $\partial D(\varphi_0,\sigma,\mathcal{U})$ есть объединение гладких многообразий $\mathcal{M}_+^k$ и $\mathcal{M}_-^k$, $k=0,1,\dots,n-1$, $\dim\mathcal{M}_\pm^k=$ $=k$, атлас $\mathcal{M}_\pm^k$ состоит из одной карты $\Delta^k=\{\tau=(\tau_1,\dots,\tau_k): 0<\tau_1<\dots<\tau_k<\sigma\}$ и объединение $\bigcup\limits_{j=0}^{k-1}\mathcal{M}_\pm^j$ является общим краем многообразий $cl\,\mathcal{M}_+^k$ и $cl\,\mathcal{M}_-^k$ (cl - замыкание в $\mathbb{R}^n$). Далее, всякой точке $x\in\mathcal{M}_+^k$ отвечает единственное управление $t\to u_x(t)\in[-1,1]$, такое, что $|u_x(t)|=1$, $u_x(t)$ имеет ровно k переключений на $(0,\sigma)$, $u_x(t)=1$ при малых $t\ge 0$ и $u_x(t)$ переводит $x(0)=x$ в $x(\sigma)=0$. Кроме того, если $x\in\mathcal{M}_-^k$, то $-x\in\mathcal{M}_+^k$.

Эта теорема является обобщением на нестационарные уравнения известной теоремы А.А.Фельдбаума ([65], стр.134) о числе переключений. Она была опубликована в [70], а затем переоткрыта (при более жёстких ограничениях) в ряде работ (см., например, [96]). Вообще, в последние годы вопросу о числе переключений посвящено большое число работ, причём рассматриваются как линейные так и нелинейные уравнения [66], [92], [96], [99], [106], [108], [109].

Утверждения типа теоремы 0.14 облегчают построение синтезирующей функции. Функция $v:[0,\sigma]\times D(\varphi_0,\sigma,\mathcal{U})\to\mathcal{U}$ называется синтезирующей (в смысле быстродействия), если:

(1) функция $t\to v(t,x)$ измерима по Лебегу на $[0,\sigma]$ при каждом фиксированном $x\in D(\varphi_0,\sigma,\mathcal{U})$;

(2) функция $x\to v(t,x)$ измерима по Борелю на $D(\varphi_0,\sigma,\mathcal{U})$ при

каждом фиксированном $t \in [0,\sigma]$;

(3) для каждого $x_0 \in D(\varphi_0,\sigma,U)$ задача

$$\dot{x} = A_0(t)x + b_0(t)v(t,x), \quad x(0) = x_0, \tag{0.13}$$

имеет единственное каратеодоревское решение $t \to x_0(t)$ и это решение определено при всех $t \in [0,\sigma]$;

(4) управление $u_0(t) = v(t,x_0(t))$, определённое по решению задачи (0.13) оптимально в смысле быстродействия для задачи

$$\dot{x} = A_0(t)x + b_0(t)u_0(t), \quad x(0) = x_0.$$

Пусть $T(s,y)$ – время быстродействия в нуль для уравнения φ_0 из точки $x(s)=y$; $\Omega(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : t + T(t,x) \le \sigma\}$, $\mathcal{D}(t,x) \doteq \{y \in \mathbb{R}^n : T(t,y) \le T(t,x)\}$. Так как $\mathcal{D}(t,x)$ – множество управляемости уравнения φ_0 на отрезке $[t, t+T(t,x)]$, то при всех (t,x), таких, что $t+T(t,x) \le \sigma_0(\varphi_0)$, граница множества $\mathcal{D}(t,x)$ устроена как в теореме 0.14. В частности, $\partial\mathcal{D}(t,x) = \partial\mathcal{D}_+(t,x) \cup \partial\mathcal{D}_-(t,x)$, где

$$\partial\mathcal{D}_+(t,x) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{M}_+^k(t,x), \quad \partial\mathcal{D}_-(t,x) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{M}_-^k(t,x).$$

Т е о р е м а 0.15. Пусть $\sigma < \sigma_0(\varphi_0)$. Тогда функция

$$v(t,x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in \partial\mathcal{D}_+(t,x), \\ \\ -1, \text{если } x \in \partial\mathcal{D}_-(t,x), \end{cases} \qquad v(t,0) = 0,$$

является синтезирующей (в смысле быстродействия) функцией на множестве $[0,\sigma] \times \Omega(t)$ для уравнения φ_0.

Допустим, что выполнены следующие два условия:

(а) для каждого $i=1,\dots,n+1$ функции $t\to q_i(t)$ определённые равенствами

$$q_1(t)=b_0(t),\dots,q_i(t)=\dot q_{i-1}(t)-A_0(t)q_{i-1}(t),$$

непрерывны на $[0,\infty)$ и $\det Q(t)\neq 0$ при всех $t\geq 0$, где $Q(t)\doteq(q_1(t),\dots,q_n(t))$.

(б) найдутся числа $\nu_1,\dots,\nu_{n-1}$, такие, что $\nu_1\leq\dots\leq\nu_{n-1}$ и для корней $\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t)$ уравнения

$$\det(\lambda Q(t)-H(t))=0,$$

где $H(t)\doteq(q_2(t),\dots,q_{n+1}(t))$ при всех $t\geq 0$ выполнены неравенства

$$\lambda_1(t)\leq\nu_1\leq\lambda_2(t)\leq\dots\leq\nu_{n-1}\leq\lambda_n(t). \qquad (0.14)$$

Из теорем 0.14, 0.15 и результатов работ [49], [101] следует

Утверждение 0.1. Пусть выполнены условия (а) и (б). Тогда $\sigma_0(\varphi_0)=\infty$ и поэтому для каждого фиксированного $\sigma>0$ множество управляемости $D(\varphi_0,\sigma,U)$ обладает свойствами сформулированными в теореме 0.14. Далее, если найдутся такие константы $\varepsilon>0$ и $\delta>0$, что дополнительно к (0.14) при всех достаточно больших t выполнены неравенства

$$\delta\leq\lambda_1(t),\quad \nu_{i-1}+\varepsilon\leq\lambda_i(t)\leq\nu_i-\varepsilon,\quad i=2,\dots,n-1,$$

то уравнение φ_0 глобально управляемо (т.е. $\bigcup\limits_{\sigma\geq 0} D(\varphi_0,\sigma,\mathcal{U})=\mathbb{R}^n$) и синтезирующая функция $v(t,x)$ определена в области $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ (т.е. уравнение φ_0 допускает глобальный синтез).

Теоремы 0.I4, 0.I5 и утверждение 0.I сформулированы в §§ I7, 20 и I9 соответственно, параграф восемнадцать посвящён выяснению двух вопросов: при каких условиях $\sigma_0(\varphi_0)>0$? При каких условиях для заданного σ выполнено неравенство $\sigma<\sigma_0(\varphi_0)$? Как уже отмечалось, эти вопросы тесно связаны с вопросом о неосцилляции в смысле Ш.Валле-Пуссена. Но теория неосцилляции развита только для уравнения и перенесение этой теории на систему уравнений нетривиально.

В § I8 доказаны следующие утверждения. Пусть заданы уравнение

$$\dot\psi=\psi P(t),$$

(с непрерывной $P:\mathbb{R}\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$) и непрерывная функция b: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$.

Обозначим $\sigma_0^*(P,b)=\sup\sigma$, где $\sup$ берётся по всем таким σ, что функции $\xi_i(t)=\psi_i(t)b(t), i=1,\dots,n$ ($\psi_1,\dots,\psi_n$ — базис пространства решений уравнения P), образуют на $[0,\sigma)$ чебышевскую систему функций. Допустим, что найдутся непрерывные скалярные функции $\beta_1,\dots,\beta_n$; f_{11}; f_{12},f_{22}; $\dots$; $f_{1\,n-1},\dots,f_{n-1\,n-1}$, такие, что $\beta_i(t)>0$, $t\in J=[0,\sigma)$, $i=1,\dots,n$ и функции $t\to q_i(t)$, определённые равенствами

$$q_1(t)=\frac{1}{\beta_1(t)}b(t),\ \dots,$$

$$q_{k+1}(t)=\frac{1}{\beta_{k+1}(t)}(\dot q_k(t)+(P(t)+f_{kk}(t)I)q_k(t)+\sum_{j=1}^{k-1} f_{jk}(t)q_j(t)),\ k=1,\dots,n-1,$$

непрерывны на J. Пусть, кроме того, непрерывна функция $\dot q_n(t)$, $t\in J$.

Утверждение 0.2. Если $\det Q(0)\neq 0$, где $Q(t)\doteq (q_1(t),\dots, q_n(t))$, то $\sigma_0^*(P,\ell)>0$.

Пусть $\det Q(t)\neq 0$ при всех $t\in J$. Обозначим через $\tau_1(t),\dots, \tau_n(t)$ координаты вектора, являющегося решением системы $Q(t)\tau = P(t)q_n(t)+\dot q_n(t)$ и по β_i, f_{jk} и τ_i построим квази-дифференциальное уравнение

$$(\ell_{n-1}\xi)^{\cdot}=\tau_1(t)(\ell_0\xi)+\dots+\tau_n(t)(\ell_{n-1}\xi), \tag{0.15}$$

где

$$\ell_0\xi=\frac{1}{\beta_1(t)}\xi,\ \dots,$$

$$\ell_k\xi=\frac{1}{\beta_{k+1}(t)}((\ell_{k-1}\xi)^{\cdot}+\sum_{j=1}^{k} f_{jk}(t)(\ell_{j-1}\xi)),\ k=1,\dots,n-1.$$

Уравнение (0.15), вообще говоря, не является обыкновенным дифференциальным уравнением, но обладает многими свойствами, присущими обыкновенным дифференциальным уравнениям. В частности, уравнение (0.15) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из непрерывно дифференцируемых функций.

У т в е р ж д е н и е 0.3. Пусть $\det Q(t) \neq 0$ при $t \in [0,\sigma]$. Неравенство $\sigma \leq \sigma_0^*(P,b)$ выполнено в том и только в том случае, если уравнение (0.I5) неосциллирует на $[0,\sigma)$, т.е. любое нетривиальное решение уравнения (0.I5) имеет на $[0,\sigma)$ не более $n-1$ геометрически различных нулей.

У т в е р ж д е н и е 0.4. Уравнение (0.I5) неосциллирует на $[0,\sigma]$, если существует согласованная (с уравнением (0.I5)) совокупность функций $\mu_1(t),\dots,\mu_{n-1}(t)$, $t \in [0,\sigma]$, т.е.:

(а) функции

$$(\ell_0\mu_i)(t),\dots,(\ell_{n-1}\mu_i)(t),\ (\ell_{n-1}\mu_i)^{\cdot}(t)$$

непрерывны на $[0,\sigma]$ при всех $i=1,\dots,n-1$;

(б) для всякого $k=1,\dots,n-1$ и любого набора индексов $i_1,\dots,i_k$, такого, что $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1$, определители

$$\det\begin{pmatrix}(\ell_0\mu_{i_1}) & \dots & (\ell_{k-1}\mu_{i_1})\\ \dots & \dots & \dots\\ (\ell_0\mu_{i_k}) & \dots & (\ell_{k-1}\mu_{i_k})\end{pmatrix}$$

строго положительны при $t \in [0,\sigma]$;

(в) для каждого $i=1,\dots,n-1$ и всех $t \in [0,\sigma]$ выполнены неравенства

$$(-1)^{n-i}(\ell\mu_i)(t) \leq 0,$$

где

$$\ell\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)(\ell_{i-1}\mu) - (\ell_{n-1}\mu)^{\cdot} .$$

Оказывается далее, что если уравнение (0.I5) неосциллирует на $[0,\sigma)$, то на $[0,\sigma)$ существует согласованная совокупность решений $\mu_1(t),\dots,\mu_{n-1}(t)$ уравнения (0.I5).

В параграфе восемнадцать приведены эффективные достаточные условия, обеспечивающие неравенство $\sigma < \sigma_0^*(P,b)$ для уравнения $\dot{\psi} = \psi P(t)$ при $n=2,3$ и доказано утверждение 0.I введения.