ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.977.1

Иванов Александр Геннадьевич

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Тонков Евгений Леонидович

Ижевск 2006

Оглавление

Список основных обозначений

$\doteq$ — "равно по определению".

$\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$.

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — пространство матриц размерности $m \times n$ с нормой $|A| = \sup\limits_{x \neq 0} |Ax|/|x|$.

$\mathrm{ri}\, F$ — относительная внутренность множества $F \subset \mathbb{R}^n$.

$\mathrm{int} F$ — внутренность множества $F \subset \mathbb{R}^n$.

$\mathrm{comp}(\mathfrak{X})$ — совокупность компактных подмножеств метрического пространства $(\mathfrak{X}, \rho)$ с метрикой Хаусдорфа dist_ρ.

$\mathrm{conv}(\mathfrak{X})$ — совокупность выпуклых компактных подмножеств метрического пространства $(\mathfrak{X}, \rho)$ с метрикой Хаусдорфа dist_ρ.

$\mathrm{Cone}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность выпуклых замкнутых конусов с вершиной в нуле в $\mathbb{R}^n$.

$\mathrm{co}\, F$ — выпуклая оболочка множества $F \subset \mathbb{R}^n$.

$c\,(\psi, F) \doteq \max\limits_{f \in F} \psi f$ — значение опорной функции множества $F \subset \mathbb{R}^n$, отвечающее вектору $\psi \in \mathbb{R}^{n^*}$.

$C(X, Y)$ — совокупность непрерывных функций, определенных на метрическом пространстве X со значениями в метрическом пространстве Y.

$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — совокупность измеримых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принадлежащих для каждого отрезка $[a, b]$ пространству $L_1([a, b], \mathbb{R})$.

В заданной динамической системе $(\mathfrak{X}, f^t)$ $\mathrm{orb}_f^-(x)$, $\mathrm{orb}_f^+(x)$ и $\mathrm{orb}_f(x)$ — отрицательная, положительная полутраектории и траектория, соответственно, отвечающие движению $t \mapsto f^t(x)$ точки $x \in \mathfrak{X}$.

п. п. — "почти периодический".

э. д. система — "экспоненциально дихотомичная система".

ДС — "динамическая система".

Введение

Задачи оптимального управления, в которых допустимыми процессами служат *периодические процессы*, принято называть *задачами оптимального управления периодическими движениями* или просто задачами периодической оптимизации (ПО). Этим задачам, в отличие от задач, определенных на множестве *почти периодических* (п. п.) *функций*, в последние десятилетия, начиная, по-видимому, с работы [191], посвящено большое количество публикаций (см., например, [12, 13, 29, 51, 52, 80, 127, 128], [130]–[133], [147, 149, 150, 156, 157, 161, 167, 176, 177, 181], [188]–[191], [193, 196, 198]), в которых приведены необходимые, необходимые и достаточные условия оптимальности, исследованы вопросы качественного поведения периодических систем управления и разобрано значительное количество реальных примеров. Вместе с тем, в ряде работ (см., например, [12, 29, 52, 127, 128, 149, 190]), указывается на актуальность изучения *задачи оптимального управления п. п. движениями* как представляющей интерес в исследованиях, связанных с оптимальным управлением колебательными процессами. Это, в частности, обусловлено тем, что в самой постановке задачи рассматриваемая система управления нестационарна и по временной переменной обладает свойством почти периодичности, а также тем, что физическая интерпретация задачи наряду с периодическими процессами допускает рассмотрение и п. п. процессов, а целевой функционал, определяемый на периодических процессах, может быть продолжен и на п. п. процессы. В этом случае говорим, что задача оптимального управления п. п. движениями является расширением задачи периодической оптимизации. На целесообразность такого расширения указано, например, в [25, 70, 127, 133, 198]. В этих работах приведены примеры задач ПО, в которых точная нижняя грань значений целевого функционала ограничена и не достигается ни при каком допустимом периодическом процессе, а достигается на п. п. процессе задачи, являющейся расширением рассматриваемой задачи. Кроме того, такое расширение в ряде случаев вообще может улучшить оптимальное значение целевого функционала рассматриваемой задачи ПО. В обоих случаях говорим, что такое расширение является *эффективным.* Примеры эффективного расширения задачи ПО до п. п. задачи оптимального управления в данной работе приведены в третьем пункте двенадцатого параграфа. Сказанное также указывает на целесообразность изучения задачи оптимального управления п. п. движениями.

Прежде чем обосновать следующий аспект актуальности изучения задач оптимального управления п. п. движениями, сначала на примере одной оптимизационной задачи, определенной на отрезке $[t_0, t_1]$, укажем на важную роль *мерозначных* (*обобщенных*) *управлений* в вопросах, связанных с описанием поведения оптимальных процессов этой задачи при $t_1 - t_0 \to \infty$. В связи с этим кратко остановимся на некоторых положениях теории мерозначных управлений, определенных на заданном промежутке $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. Заметим, что указанные ниже свойства таких управлений в случае, когда в качестве $\mathbb{T}$ выступает конечный отрезок, доказаны, например, в [22, 31] и справедливы также в случае неограниченности промежутка $\mathbb{T}$.

Пусть $(\mathrm{frm}(\mathcal{U}), |\cdot|_w)$ — нормированное пространство мер Радона на $\mathbb{R}^m$, носитель которых содержится в $\mathcal{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ [22, с. 297], $\mathrm{rpm}(\mathcal{U})$ — его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона, и $\mathrm{DIR}(\mathcal{U})$ — совокупность мер Дирака δ_u, сосредоточенных в точках $u \in \mathcal{U}$. Через $\mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ обозначим совокупность таких измеримых отображений $\mu : \mathbb{T} \to \mathrm{frm}(\mathcal{U})$, что $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{T}} |\mu(t)|(\mathcal{U}) < \infty$, где $|\mu(t)|(\mathcal{U})$ — вариация меры $\mu(t) \in \mathrm{frm}(\mathcal{U})$. Поскольку $\mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ алгебраически изоморфно пространству, сопряженному с пространством каратеодоровских функций $\varphi : \mathbb{T} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, то на $\mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ определена норма $\|\cdot\|_{w,\mathbb{T}}$, относительно которой выпуклое множество $\mathcal{M}_{\mathbb{T}} \doteq \mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ — множество *мерозначных управлений*, компактно. При этом, поскольку каждому такому управлению (то есть измеримой функции) $u : \mathbb{T} \to \mathcal{U}$ отвечает (см. [22, 31]) единственное обобщенное управление $t \mapsto \delta_{u(t)} \in \mathrm{DIR}(\mathcal{U})$, то можно считать, что множество $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ содержится в $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$. Процедура расширения множества $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ до $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, где в качестве $\mathbb{T}$, как правило, рассматривается конечный отрезок прямой, широко используется в математической теории управления и дифференциальных играх (см., например, [9, 10, 16, 22, 31, 32, 49, 104, 120, 125, 141, 143, 162], [164]–[166], [182, 183, 186, 196]). Это обусловлено тем, что обобщенные управления обладают, по крайней мере, двумя преимуществами перед обычными — выпуклостью и компактностью, которые отчетливо проявляются, в частности, при доказательстве необходимых условий оптимальности (в виде принципа максимума Понтрягина) допустимого процесса в различных по постановке задачах оптимального управления, а также при исследовании вопросов, связанных с существованием решения. Наряду с множеством управлений $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, как показывают интенсивно проводимые в г. Екатеринбурге исследования, в указанных областях математики могут быть использованы измеримые отображения $t \mapsto \mu(t)$, $t \in \mathbb{T}$ со значениями в пространстве конечно–аддитивных мер. Такие управления, помимо указанных для управлений $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ приложений, широко используются при исследовании задач, связанных с компактификацией траекторий управляемых систем, асимптотически достижимых элементов, с универсальной интегрируемостью, корректностью расширений, и ряда других задач (см., например, [120, 125, 141, 162, 163, 165, 182, 183]).

В диссертации также используются мерозначные управления, но заданные, как правило, на неограниченных промежутках времени. Это обусловлено исследованием задач, в которых допустимые процессы определены на неограниченных временных промежутках. Обозначим ряд таких задач, ограничившись для краткости изложения рассмотрением следующей (*овыпукленной*) системы управления:

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(x,u) \rangle \doteq \int_{\mathcal{U}} f(x,u)\mu(t)(du), \tag{0.1}$$

в которой $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$. Через $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T})$ обозначим совокупность пар $(x(\cdot), \mu(\cdot))$, в которых $x(t)$, $t \in \mathbb{T}$ — решение системы (0.1), отвечающее управлению $\mu(\cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$. Далее, на $\mathfrak{A}_c[t_0, t_1]$ рассмотрим функционал

$$(x(\cdot), \mu(\cdot)) \mapsto J(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \doteq \int_{t_0}^{t_1} \langle \mu(t), f_0(x,u) \rangle dt \quad \bigl(f_0 \in C(\mathbb{R}^n \times \mathcal{U}, \mathbb{R})\bigr) \tag{0.2}$$

и по аналогии с определением в [127, с. 24] процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_1]$ называем *оптимальным*, если для любого процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_1]$, такого что $x(t_0) = \widehat{x}(t_0)$, $x(t_1) = \widehat{x}(t_1)$, выполнено неравенство $J(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \leqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0, t_1)$. $\blacksquare$

Совокупность оптимальных в указанном смысле процессов обозначим $\mathcal{OP}[t_0, t_1]$ и через $\mathcal{OP}(\mathbb{R})$ обозначим совокупность таких процессов $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$, что их сужение $(x(\cdot), \mu(\cdot))|_{[t_0,t_1]}$ на любой отрезок $[t_0, t_1]$ принадлежит $\mathcal{OP}[t_0, t_1]$.

Отметим, что если система (0.1) имеет ограниченное на $\mathbb{R}$ решение, отвечающее некоторому управлению из множества $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, то в $\mathbb{R}^n$ найдется такое компактное множество K, что для каждого отрезка $[t_0, t_1]$ совокупность процессов $\mathfrak{A}_c([t_0, t_1]; K) \doteq \bigl\{(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_1] : x(t) \in K,\ t \in [t_0, t_1]\bigr\}$ непуста и, в силу компактности множества $\mathcal{M}_{[t_0,t_1]}$, является компактным подмножеством метрического пространства $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{[t_0,t_1]}$. Отсюда, в свою очередь, используя непрерывность функционала (0.2), получаем, что множество оптимальных процессов $O\mathcal{P}([t_0,t_1];K)\doteq\big\{(x(\cdot),\mu(\cdot))\in O\mathcal{P}[t_0,t_1]:x(t)\in K,\ t\in[t_0,t_1]\big\}$ непусто.

Тем самым корректно определена следующая задача: указать определенный на $\mathbb{R}$ управляемый процесс, в терминах которого можно описать поведение оптимальных процессов из $O\mathcal{P}([t_0,t_1];K)$ или отвечающих им значений целевого функционала при $t_1-t_0\to\infty$. Эта задача по характеру постановки относится к основным задачам теории магистральных процессов (см., например, [33, 34, 127] и приведенную там библиографию), а также теории асимптотически достижимых элементов [162, 182, 183] и далее, для краткости, называется *задачей о магистральных процессах.*

Расширение множества $\mathfrak{U}\doteq\mathfrak{U}_{\mathbb{R}}$ до $\mathcal{M}$ позволяет сразу указать на одно свойство оптимальных процессов $O\mathcal{P}([t_0,t_1];K)$ при $t_1-t_0\to\infty$. Действительно, зафиксируем произвольную систему отрезков $\mathbb{T}_1\subset\mathbb{T}_2\subset\ldots$, исчерпывающих $\mathbb{R}$. Тогда можно показать, что любая последовательность $(\widehat{x}_j(\cdot),\widehat{\mu}_j(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_j;K)$, $j\in\mathbb{N}$, содержит подпоследовательность, сходящуюся на каждом отрезке $\mathbb{T}$ в топологии пространства $C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ к некоторому предельному процессу из $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};K)$.

В диссертации для более полного анализа поведения процессов из $O\mathcal{P}([t_0,t_1];K)$ при $t_1-t_0\to\infty$, характеристики указанных выше предельных процессов и доказательства существования процессов, принадлежащих $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$, используются *динамическая система* (ДС) *сдвигов*, определенная на множестве $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$, а также его подмножество состоящее из п. п. процессов. Кроме того, используется определенное далее свойство управляемости нелинейной системы на интегральную кривую, отвечающую заданному решению системы (0.1).

Напомним (см. [144]), что система

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\ \ (t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathfrak{U} \tag{0.3}$$

называется *равномерно локально управляемой* (РЛУ) в начало координат, если найдутся такие константы $\varepsilon,\vartheta>0$, что при каждом $\tau\geqslant 0$ для любого $x_0\in O_\varepsilon[0]$ на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ существует управление из $\mathcal{U}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, переводящее позицию (τ,x_0) системы (0.3) в позицию $(\tau+\vartheta,0)$. При этом, в случае когда $0\in\operatorname{co}\mathfrak{U}$, несложно показать, что существует также такое $\eta>0$, не зависящее от τ и выбора точек x_0, что среди управлений, обеспечивающих указанный перевод, найдется такое управление $u(t)\in\operatorname{co}\mathfrak{U}$, что при п. в. $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$ будет выполнено неравенство: $|u(t)|\leqslant\eta|x_0|$, показывающее, что равномерно по τ "близкие" к началу координат точки могут быть переведены в нуль с помощью "малых" (в существенном) управлений. Таким образом, можно сказать, что система (0.3) РЛУ (в нуль), если существуют такие константы $\varepsilon,\vartheta,\eta>0$, что при каждом $\tau\geqslant 0$ для любого $x_0\in O_\varepsilon[0]$ найдется такое управление $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, что $|u(t)|\leqslant\eta|x_0|$ при п. в. $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$, и при котором система имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее условиям: $x(\tau)=x_0$, $x(\tau+\vartheta)=0$.

Заметим, что еще в 60-х годах определился ряд направлений исследования, в том числе (см., например [3, 91, 99, 100, 102, 105, 109]), задачи стабилизации, оптимального управления и наблюдаемости нелинейных систем управления в окрестности интегральной кривой $\gamma_+(\widetilde{x})$, отвечающей фиксированному решению $\widetilde{x}(t)$, определенному на полуоси. В данной работе исследуется свойство РЛУ нелинейной системы управления на $\gamma_+(\widetilde{x})$, означающее возможность возвращения с помощью допустимых управлений на каждом отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]\subset\mathbb{R}_+$ состояний $x_0\in O_\varepsilon[\widetilde{x}(\tau)]$ в состояние

$\widetilde{x}(\tau+\vartheta)$. При этом, помимо данного свойства системы, при решении обозначенных выше задач важно, чтобы "близкие" к $\widetilde{x}(\tau)$ точки x_0 переводились в состояние $\widetilde{x}(\tau+\vartheta)$ с помощью управлений, "близких" к заданному. А поскольку управления, вообще говоря, входят в систему управления нелинейно, то указанное свойство управлений не столь прозрачно, как для линейной системы (0.3). Поэтому в определении свойства РЛУ на интегральную кривую для овыпукленных систем управления требуется зависимость управлений от величины $|\widetilde{x}(\tau)-x_0|$.

Фиксируем процесс $(\widetilde{x}(\cdot),\widetilde{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$. В соответствии с данным определением РЛУ линейной системы говорим, что система (0.1) является РЛУ *на интегральную кривую* $\gamma_+(\widetilde{x})$, если существуют такие константы $\varepsilon,\ \vartheta,\ \eta>0$, что при каждом $\tau\geqslant 0$ для любого $x_0\in O_\varepsilon[\widetilde{x}(\tau)]$ найдется такое управление $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, что $\|\widetilde{\mu}-\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\leqslant\eta\,|\widetilde{x}(\tau)-x_0|$, и при котором система (0.1) имеет решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее условиям $x(\tau)=x_0,\ x(\tau+\vartheta)=\widetilde{x}(\tau+\vartheta)$. При этом, если для любого $\zeta>0$ найдется такое $\delta\in(0,\varepsilon]$, что при каждом x_0 из $O_\delta[\widetilde{x}(\tau)]$ решение, фигурирующее в этом определении, удовлетворяет неравенству $\max\limits_{t\in[\tau,\tau+\vartheta]}|\widetilde{x}(t)-x(t)|\leqslant\zeta$, то говорим, что система (0.1) РЛУ *в малом на* $\gamma_+(\widetilde{x})$.

Наряду со свойством РЛУ системы (0.1) на $\gamma_+(\widetilde{x})$, необходимо также свойство *равномерной локальной достижимости* (РЛД) с $\gamma_+(\widetilde{x})$, означающее наличие таких констант $\varepsilon,\vartheta,\eta>0$, что при каждом $\tau\geqslant 0$ для любой точки $x_0\in O_\varepsilon[\widetilde{x}(\tau+\vartheta)]$ найдется такое управление $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, что $\|\widetilde{\mu}-\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\leqslant\eta\,|\widetilde{x}(\tau+\vartheta)-x_0|$ и при котором система (0.1) имеет такое решение $x(\cdot)$, что $x(\tau)=\widetilde{x}(\tau)$ и $x(\tau+\vartheta)=x_0$.

Аналогично определению РЛУ в малом на $\gamma_+(\widetilde{x})$ определяется, с естественными изменениями в формулировках, свойство РЛД *в малом с* $\gamma_+(\widetilde{x})$.

В диссертации для краткости изложения, в случае когда найдутся общие константы $\varepsilon,\vartheta,\eta>0$, определяющие свойства РЛУ в малом на $\gamma_+(\widehat{x})$ и РЛД в малом с $\gamma_+(\widetilde{x})$, говорится, что эта система *обладает свойством* (C) *относительно* $\gamma_+(\widetilde{x})$.

Результаты, приведенные в § 13, указывают на содержательность введенного определения, в том смысле, что там приведены достаточные условия, при которых система (0.1) обладает свойством (C) относительно $\gamma_+(\widetilde{x})$. Эти условия приведены в терминах РЛУ (в нуль) следующей системы управления

$$\dot{x}=A(t)x+v(t),\ v(t)\in V(t),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \tag{0.4}$$

в которой $A(t)\doteq\langle\widetilde{\mu}(t),f'_x(\widetilde{x}(t),u)\rangle,\quad V(t)\doteq\langle\widetilde{\mu}(t),f(\widetilde{x}(t),u)\rangle-f(\widetilde{x}(t),\mathcal{U})$. Отметим, что эти условия не предполагают наличия непрерывной производной функции f по переменной u и того, что $0\in\operatorname{int}\mathcal{U}$ (множество $\mathcal{U}$ вообще может не содержать нуля), то есть условий, которые, как правило, предполагаются выполненными при рассмотрении условия локальной управляемости (в нуль) на фиксированном отрезке $[t_0,t_1]$ нелинейной системы в терминах локальной управляемости системы линейного приближения (см., например, [28, 30, 103, 110, 113, 154, 200]).

Теперь рассмотрим процесс $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ с ограниченным на $\mathbb{R}$ решением. Ограниченность решения, как было отмечено выше, позволяет доказать, что при любом $\varepsilon>0$ на каждом отрезке $[0,T]$ множество $O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$ оптимальных процессов из множества $\mathfrak{A}_c([0,T],x,\varepsilon)$, состоящего из таких пар $(z(\cdot),\nu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c[0,T]$, что $z(t)\in O_\varepsilon[x(t)]$ при всех $t\in[0,T]$, непусто. Далее, зафиксировав неограниченную последовательность $t_1<t_2<\ldots$, получаем, что любая последовательность $(\widehat{x}_j(\cdot),\widehat{\mu}_j(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,t_j],x,\varepsilon)$, $j\in\mathbb{N}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся на каждом отрезке $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}_+$ в топологии пространства $C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ к некоторому предельному процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$. В § 16 показано, что если система (0.1) обладает свойством (C) относительно $\gamma_+(x)$, то в приведенных построениях при $\varepsilon > 0$, входящем в определение этого свойства, предельный процесс будет решением задачи (здесь см. (0.2))

$$\mathbb{I}(z(\cdot),\nu(\cdot)) \doteq \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} J(z(\cdot),\nu(\cdot);0,T) \to \inf, \quad (z(\cdot),\nu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon).$$

Более того, если этот предельный процесс окажется почти периодическим, то, во-первых, для него существует предел $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \langle \widehat{\mu}(t), f_0(\widehat{x}(t),u)\rangle dt = \mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ и, во-вторых, равномерно по всем процессам $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$ существует предел $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \langle \mu_T(t), f_0(x_T(t),u)\rangle dt \doteq c_0$, и при этом $c_0 = \mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Таким образом, наличие свойства (C) относительно $\gamma_+(x)$ позволяет показать, что предельный процесс будет решением указанной выше задачи оптимального управления, а условие его почти периодичности позволяет описать поведение при $T\to\infty$ усредненных значений целевых функционалов $J(z(\cdot),\nu(\cdot);0,T)$, отвечающих оптимальным процессам $(z(\cdot),\nu(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$. Это также обусловливает целесообразность рассмотрения п. п. процессов при изучении указанных выше задач.

Определим п. п. процессы рассматриваемой системы (0.1). В множестве $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ управляемых процессов этой системы выделим подмножество D_c, состоящее из процессов, принадлежащих пространству $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times \mathrm{APM}_1$, где $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — совокупность *п. п. по Бору функций* [107], а APM_1 — подмножество из $\mathcal{M}$, состоящее из таких (измеримых) отображений $t\mapsto\mu(t)$, что для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ отображение $t\mapsto\langle\mu(t),c(u)\rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *п. п. по Степанову функций* [107]. Множество D_c называем далее множеством *п. п. процессов* системы (0.1). Достаточные условия существования таких процессов получены из утверждений о свойствах ДС сдвигов, введенной в § 15. Поскольку свойства этой ДС играют важную роль и в других исследованиях, проведенных в работе, то кратко ее опишем.

Пусть $(\mathfrak{Y},\rho)$ — метрическое пространство. На $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ определим расстояние

$$\varrho(f,g) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \big[\min\big\{\int_t^{t+1} \rho(f(s),g(s))ds, |t|^{-1}\big\}\big],\ \ f,g\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}). \tag{0.5}$$

Далее, на метрическом пространстве $\mathfrak{B} \doteq (L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}),\varrho)$ введем однопараметрическое семейство отображений $g^t\colon \mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, $t\in\mathbb{R}$, определенное равенством $g^t(f)=f_t$. В § 15 показано, что в случае, когда метрическое пространство $(\mathfrak{Y},\rho)$ сепарабельно, то $(\mathfrak{B},g^t)$ является динамической системой (в смысле Маркова).

Введенная на $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ метрика ϱ (см. (0.5)) является естественным распространением метрики Бебутова ϱ_c [11, 123, 171], заданной на пространстве $C(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ равенством:

$$\varrho_c(f,g) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}[\min\{\rho(f(t),g(t)),|t|^{-1}\}]. \tag{0.6}$$

Отметим, что ДС сдвигов $(\mathfrak{B}_c,g^t)$, определенная на пространстве $\mathfrak{B}_c$ непрерывных функций с метрикой ϱ_c, описанная, например, в [11, 123, 171], играет важную роль в теории ДС и ее приложениях (см., например, [11, 20], [115]–[117], [123, 126, 142], [169]–[172]). Важной ее особенностью является то, что точками ее фазового пространства служат функции, а движениями — сдвиги функций. Это позволяет использовать результаты и методы общей теории ДС, например, при исследовании тех или иных свойств отображений [171, 172], при указании достаточных условий существования *рекуррентных* [170, 171] и почти периодических по Бору [115, 117] предельных решений систем дифференциальных уравнений, при изучении вопросов управляемых систем [144, 145]. ДС сдвигов на множестве функций с введенной на нем топологией посредством оператора замыкания использовалась в [127, 128] при изучении магистральных процессов.

В данной работе, с целью изучения структуры множества управляемости систем вида (0.4) и исследования ряда свойств задач оптимального управления п. п. движениями, вводится ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$. При этом основное внимание уделяется достаточным условиям, при которых функции из $L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ принадлежат его подмножеству $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, состоящему из п. п. по Степанову функций, а также вытекающим из них следствиям о почти периодичности в смысле Бора непрерывных функций.

Для обоснования подхода, который используется при получении таких условий, сделаем ряд замечаний, связанных с особенностью ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$, позволяющей в терминах функций указать характер движений этой ДС. В частности, задав на $L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ d-расстояние:

$$d(f,g) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \rho(f(s), g(s))ds, \;\; f, g \in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}), \tag{0.7}$$

получаем (см. § 15), что для *d-ограниченной* функции $f \in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ замыкание (в метрике ϱ) траектории, отвечающей движению $t \mapsto g^t(f)$, компактно в том и только в том случае, если эта функция является *d-непрерывной*. В этом случае множество $\Omega(f)$ *омега–предельных точек* движения $t \mapsto g^t(f)$ компактно. Следовательно, по теореме Биркгофа [123] оно содержит *рекуррентные движения*. Тем самым, в рассматриваемой ДС для достаточно широкого класса функций отвечающие им движения удовлетворяют условиям, предъявляемым в теоремах А. А. Маркова [123] и В. В. Немыцкого [122] к движениям абстрактной ДС. Поэтому, применив теоремы А. А. Маркова [123], в терминах устойчивости по Ляпунову движений ДС, можно, конечно, указать достаточные условия почти периодичности самого движения, а также условия, при которых рекуррентное движение в (компактном) инвариантном множестве $\Omega(f)$ будет почти периодическим. Применив же теорему В. В. Немыцкого [122], в этих же терминах получим достаточные условия, когда все движения, начинающиеся в $\Omega(f)$, будут почти периодическими. Поскольку (см. § 15) рекуррентность и почти периодичность движения, отвечающего заданной функции из $L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, равносильны ее рекуррентности и, соответственно, п. п. по Степанову, то в силу вышесказанного получаем, что в терминах *устойчивости по Ляпунову движений* ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$ можно указать достаточные условия существования функций, принадлежащих пространству $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

В диссертации показано, что используя идеи, заложенные в доказательстве указанных теорем А. А. Маркова и В. В. Немыцкого, и принимая во внимание определение метрики ϱ и специфику рассматриваемой ДС, такие условия, на самом деле, могут быть приведены в терминах введенных в § 15 определений *устойчивости функции относительно сдвигов в отрицательном* или *положительном направлениях*, а также в терминах *устойчивости* заданного *множества функций* $\mathfrak{F} \subset L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *относительно положительной* или *отрицательной полутраекторий*, определение которой основано на понятии устойчивости функций из $\mathfrak{F}$ относительно положительной или отрицательной полутраекторий. Так, например, доказано, что для п. п. по Степанову рекуррентной функции достаточно, чтобы она обладала свойством устойчивости относительно сдвигов в положительном направлении. В терминах же устойчивости омега–предельного множества $\Omega(f)$, отвечающего функции $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, относительно $\mathrm{orb}_g^+(f)$ в положительном направлении доказано, что $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, а в терминах устойчивости этого множества относительно этой же полутраектории, только в отрицательном направлении, показано, что $\Omega(f)$ содержится в $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

В дальнейшем при конкретном выборе пространства $\mathfrak{Y}$ результаты § 15 используются для исследования вопросов существования рекуррентных и п. п. решений систем дифференциальных уравнений, но в основном в вопросах, связанных с изучением структуры множества управляемости систем вида (0.4), а также задачах оптимального управления п. п. движениями.

Опишем одну из конкретных реализаций рассмотренной ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$. В качестве $\mathfrak{Y}$ рассмотрим $(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$. Из определения $\mathbb{M} \doteq \mathbb{M}(\mathbb{R}, (\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$ следует, что на нем определены (см. (0.6) и (0.7) при указанном $\mathfrak{Y}$) метрика

$$\varrho_w(\mu, \nu) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \bigl[\min\bigl\{\int_t^{t+1} \rho_w(\mu(s), \nu(s))\, ds, |t|^{-1}\bigr\}\bigr], \ \mu, \nu \in \mathbb{M}, \tag{0.8}$$

а также мажорирующая ее метрика

$$d_w(\mu, \nu) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \rho_w(\mu(s), \nu(s))\, ds, \ \mu, \nu \in \mathbb{M}. \tag{0.9}$$

Наличие метрики ϱ_w позволяет ввести в рассмотрение ДС $(\mathfrak{B}_w, g^t)$, в которой фазовым пространством служит полное сепарабальное метрическое пространство $\mathfrak{B}_w \doteq (\mathcal{M}, \varrho_w)$, а поток $g^t : \mathfrak{B}_w \to \mathfrak{B}_w$, $t \in \mathbb{R}$, определяется как сдвиг: $g^t(\nu) \doteq \nu_t$. Отметим, что возможность введения ДС на множестве $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ является особенностью, отличающей его от множества $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ мерозначных отображений, определенных на конечном отрезке $\mathbb{T}$, и позволяющей указать, помимо свойств выпуклости и (слабой) компактности множества $\mathcal{M}$, и ряд других свойств. В частности, используя результаты пятнадцатого параграфа, указать достаточные условия, обеспечивающие почти периодичность заданного d_w-непрерывного отображения $\mu \in \mathcal{M}$, а также существования в омега–предельном множестве, отвечающем движению $t \mapsto g^t(\mu)$, отображений, принадлежащих APM_1 .

Используя достаточные условия п. п. по Степанову мерозначных отображений, а также условия п. п. по Бору непрерывных отображений, в шестнадцатом параграфе диссертации, во–первых, показано, что при наличии процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot))$, в котором решение $x(\cdot)$, отвечающее d_w-непрерывному управлению $\mu(\cdot) \in \mathcal{M}$, ограничено в прямом произведении $\Omega(x) \times \Omega(\mu)$ омега–предельных множеств, отвечающих, соответственно, движениям $t \mapsto g^t(x)$ и $t \mapsto g^t(\mu)$, всегда существует рекуррентный процесс, а во–вторых, приведен ряд условий существования п. п. процессов включающих, в частности, почти периодичность указанного рекуррентного процесса, а также самого процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot))$.

Отметим, далее, что ДС $(\mathfrak{B}_c, g^t)$ и $(\mathfrak{B}_w, g^t)$ определяют ДС $(\mathfrak{P}, g^t)$, в которой фазовым пространством служит пространство $\mathfrak{P} \doteq (C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}, \varrho_{c,w})$, с метрикой $\varrho_{c,w}$ прямого произведения, индуцированной (см. (0.6) и (0.8)) метриками ϱ_c и ϱ_w, а поток $g^t : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$, $t \in \mathbb{R}$ определяется как сдвиг: $g^t(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq (x_t(\cdot), \mu_t(\cdot))$.

Указанная ДС $(\mathfrak{P}, g^t)$ используется при описании свойств управляемости нелинейной системы на интегральную кривую и процессов, принадлежащих множеству $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Кроме того, результаты § 15 позволяют в терминах устойчивости омега–предельного множества $\Omega(x,\mu)$ относительно положительной полутраектории движения $t \mapsto g^t(x(\cdot),\mu(\cdot))$, $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ в отрицательном направлении привести достаточные условия, когда это множество целиком содержится в множестве D_c п. п. управляемых процессов системы (0.1). Применение этих условий для предельного процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$, являющегося решением задачи $\mathbb{I}(z(\cdot),\nu(\cdot)) \to \inf$, определенной на $\mathfrak{A}_c([0,T],x,\varepsilon)$, позволяет в терминах п. п. процессов из $\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ описать поведение при $T \to \infty$ усредненных значений целевых функционалов $J(z(\cdot),\nu(\cdot);0,T)$, отвечающих оптимальным процессам $(z(\cdot),\nu(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$. Сказанное указывает на целесообразность, при исследовании оптимальных процессов (в определенном выше смысле), введения ДС сдвигов на множестве управляемых процессов и получения в ее терминах достаточных условий существования п. п. процессов.

Далее, перед постановкой задачи оптимального управления, определенной на подмножестве D_c п. п. управляемых процессов системы (0.1), напомним [107, 108], что для каждой п. п. функции (как по Бору, так и по Степанову) $t \mapsto F(t)$ существует среднее значение $M\{F(t)\} \doteq \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)dt$, причем, если F является ω-периодической функцией, то $M\{F(t)\} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega F(t)dt$. Сейчас, используя утверждение, доказанное в § 2: при заданной функции $g \in C(\mathbb{R}^n \times \mathcal{U}, \mathbb{R})$ для всех $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \times \mathrm{APM}_1$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), g(x(t),u)\rangle \doteq \int\limits_{\mathcal{U}} g(x(t),u)\mu(t)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, получаем, что если множество D_c п. п. управляемых процессов системы (0.1) непусто, то корректно определена следующая *задача оптимального управления п. п. движениями* системы (0.1):

$$\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), f_0(x(t),u)\rangle\} \to \inf \quad (x(\cdot),\mu(\cdot)) \in D_c, \tag{0.10}$$

в которой процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ называется решением, если для всех $(x(\cdot),\mu(\cdot))$ из D_c справедливо неравенство $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot))$.

Особенности изучения задач оптимального управления п. п. движениями приведем ниже. Сейчас же укажем на тесную связь решений таких задач с процессами, принадлежащими множеству $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Действительно, пусть $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ — решение задачи (0.10). Из результатов § 14 следует, что если система (0.1) обладает свойством (C) относительно $\gamma_+(\widehat{x})$, то этот процесс принадлежит множеству $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Там же показано, что равномерно по всем оптимальным процессам $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T];K)$, где $K \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_\varepsilon[0]$, а ε — константа, входящая в определение свойства (C) относительно интегральной кривой $\gamma_+(\widehat{x})$, существует предел $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \langle \mu_T(t), f_0(x_T(t),u)\rangle dt \doteq c_0$ и при этом $c_0 = \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$. При наличии этих двух свойств такой п. п. процесс называем, для краткости, *магистральным*.

В конце шестнадцатого параграфа для заданного процесса $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ с ограниченным на $\mathbb{R}$ решением, при условии, что система (0.1) обладает свойством (C) относительно $\gamma_+(x)$ и принадлежащего при некотором $T > 0$ множеству $O\mathcal{P}([T,\infty);X)$, где $X \doteq \overline{\mathrm{orb}}(x) + O_\varepsilon[0]$, а ε — константа, входящая в определение свойства (C) относительно интегральной кривой $\gamma_+(x)$, в терминах ДС сдвигов приведены достаточные условия существования п. п. процесса, который будет решением задачи (0.10), определенной на некотором подмножестве $\mathcal{A} \subset D_c$, и являться магистральным процессом.

Сказанное и определяет актуальность изучения задач оптимального управления п. п. движениями при исследовании задач теории магистральных процессов.

В [127, 128] на множестве $\mathfrak{A}(\mathbb{R}; H) \doteq \{(x(\cdot), u(\cdot)) : ((x(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; H)\}$, где $H \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, управляемых процессов системы $\dot{x} = f(x, u)$ рассматривались аналогичные по постановке задачи в предположении, что при каждом $T > 0$ множество оптимальных процессов $\mathcal{OP}_1([0, T]; H) \doteq \{(x(\cdot), u(\cdot)) : ((x(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in \mathcal{OP}([0, T]; H)\}$ непусто, а рассматриваемая система обладает свойством равномерной управляемости на H, означающим, что найдется такое $\sigma > 0$, что для любых $x_0, x_1 \in H$ существует управление $u : [0, \sigma] \to \mathcal{U}$, при котором система $\dot{x} = f(x, u(t))$ имеет решение $x(t) \in H$, $t \in [0, \sigma]$, удовлетворяющее условиям: $x(0) = x_0$, $x(\sigma) = x_1$. В этих работах показано, что равномерно по $(x_T(\cdot), u_T(\cdot)) \in \mathcal{OP}_1([0, T]; X)$ существует $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} J(x_T(\cdot), u_T(\cdot); 0, T)$, совпадающий с точной нижней гранью целевого функционала задачи периодической оптимизации, определенной на множестве $\mathbb{P} \subset \mathfrak{A}(\mathbb{R}; H)$ периодических процессов, чем и мотивировалось рассмотрение задач периодической оптимизации при исследовании магистральных процессов. При этом обращалось внимание на целесообразность расширения множества $\mathbb{P}$ допустимых периодических процессов до п. п. процессов и ставились задачи [127, с. 84], [128, с. 531]: определить п. п. магистраль и минимизировать усредненный по T функционал $\frac{1}{T} J(x(\cdot), u(\cdot); 0, T)$ на множестве процессов, для которых предел $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} J(x(\cdot), u(\cdot); 0, T)$ существует.

В диссертации даны ответы на поставленные вопросы. Кроме того, из приведенных выше рассуждений следует, что при исследовании поставленных задач на самом деле целесообразнее расширить множество обычных управлений до мерозначных и использовать п. п. управляемые процессы, а также определенную на них задачу оптимального управления п. п. движениями.

Таким образом, сказанное показывает, что при изучении задач теории магистральных процессов и теории оптимального управления колебательными процессами важную роль играет задача оптимального управления п. п. движениями. Вместе с тем, в отличие от большого количества публикаций, посвященных п. п. функциям или использующих их аппарат, в том числе, посвященных теории дифференциальных уравнений с п. п. коэффициентами, число работ в которых рассматриваются вопросы оптимизации в классе п. п. функций невелико. В этом направлении исследований отметим работы [5, 24, 106, 128, 168, 174, 178, 179, 184, 185, 199], в которых в той или иной постановке рассматриваются задачи минимизации функционала, определенного на множестве п. п. функций.

Сейчас кратко, на примере задачи оптимального управления п. п. движениями, для которой овыпукленной служит задача (0.10), укажем ряд особенностей, характерных для таких задач, и опишем схему доказательства необходимых условий (в виде принципа максимума Понтрягина) оптимальности допустимого процесса.

Покажем прежде, что задача (0.10) с управлениями из $\mathrm{APM}_1 \subset \mathcal{M}$ — множества мерозначных п. п. отображений — является овыпукленной для вполне определенной задачи, в которой в качестве обычных управлений выступают измеримые функции $t \mapsto u(t) \in \mathcal{U}$, принадлежащие множеству $S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. В самом деле, несложно показать (см. § 2), что функция $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ в том и только в том случае, если отвечающее ей мерозначное отображение $t \mapsto \delta_{u(t)} \in \mathrm{DIR}(\mathcal{U})$ принадлежит APM_1. Отождествляя каждое $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ с таким отображением, можно считать его элементом множества APM_1. В этом смысле пространство $S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ вкладывается в APM_1, что, в свою очередь, позволяет рассматривать множество $D \doteq \{(x(\cdot),u(\cdot)) : (x(\cdot),\delta_{u(\cdot)}) \in D_c\} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ как подмножество множества D_c п. п. процессов системы (0.1). Отсюда получаем, что задача (0.10) является овыпукленной для следующей задачи оптимального управления п. п. движениями:

$$I(x(\cdot),u(\cdot)) \doteq M\{f_0(x(t),u(t))\} \to \inf \quad (x(\cdot),u(\cdot)) \in D, \tag{0.11}$$

определенной на множестве D п. п. процессов системы $\dot{x} = f(x,u(t))$ с управлениями, принадлежащими $S(\mathbb{R},\mathcal{U})$. В свою очередь, поскольку множество $P \doteq \bigcup\limits_{\omega>0} P_\omega$, где P_ω $(\omega > 0)$ — совокупность ω-периодических пар $(x(\cdot),u(\cdot))$, в которых $x(\cdot)$ — ω-периодическое решение системы $\dot{x} = f(x,u(t))$, отвечающее ω-периодическому измеримому управлению $u : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$, то задача (0.11) является расширением следующей (с нефиксированным периодом) задачи ПО:

$$I(x(\cdot),u(\cdot)) \doteq M\{f_0(x(t),u(t))\} \to \inf \quad (x(\cdot),u(\cdot)) \in P. \tag{0.12}$$

Отметим некоторые особенности задачи (0.11), характерные, конечно, и для отвечающей ей овыпукленной задачи (0.10). Первая особенность таких задач состоит в том, что их допустимые процессы определены на всей прямой, а вторая — в характеризующем эти процессы свойстве "почти точного повторения через почти один и тот же промежуток времени", то есть свойстве почти периодичности. Заметим здесь, что несмотря на минимальное терминологическое различие между понятиями "точной повторяемости через один и тот же промежуток времени" и "почти точной повторяемости через почти один и тот же промежуток времени", характеризующими, соответственно, периодические и п. п. процессы, в действительности исследование задач, определенных на п. п. процессах, вообще говоря, существенно отличается от исследования аналогичных по постановке задач, определенных на периодических процессах. Так, если в задаче (0.12) вопросов, связанных с корректностью определения целевого функционала, нет, так как для каждого ω-периодического процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$ функция $t \mapsto f_0(x(t),u(t))$ будет ω-периодической и, стало быть, для нее существует среднее значение $M\{f_0(x(t),u(t))\} = \omega^{-1}\int\limits_0^\omega f_0(x(t),u(t))$, то в задаче (0.10) уже необходимо доказывать существование среднего значения функции $t \mapsto f_0(x(t),u(t))$, поскольку $u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$. В п. п. случае требуют специального рассмотрения также вопросы, связанные с поточечным максимумом. Это обусловлено тем (см. § 6), что не для всякой функции g, принадлежащей пространству $B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$, состоящему из функций, которые п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u \in \mathcal{U}$, существуют функции $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, обеспечивающие при п. в. $t \in \mathbb{R}$ равенство $\max\limits_{u\in\mathcal{U}} g(t,u) = g(t,\widehat{u}(t))$. Далее, при доказательстве (см. обзорные статьи [188, 196]) необходимых условий оптимальности $\widehat{\omega}$-периодического процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ в ряде задач ПО возможна редукция к задаче оптимального управления с интегральным целевым функционалом, определенной на конечном отрезке времени (например, для задачи (0.12) в [175] такая редукция была проведена с помощью замены времени $\tau = \widehat{\omega}/t$), а в задачах с фиксированным периодом или с нефиксированным периодом, но сводящихся к указанным задачам, как показано в [149, 150, 193], достаточно ограничиться известной вариацией Макшейна [134, 135] для оптимального управления $\widehat{u}(\cdot)$ (в таких задачах основную нагрузку несут теоремы о существовании и непрерывной зависимости периодического решения системы управления от параметра).

В задаче же оптимального управления п. п. движениями, чтобы охарактеризовать допустимый процесс, необходимо учитывать его поведение на всей числовой прямой, и значение целевого функционала, отвечающего таким процессам, не сводится к среднему значению интеграла, определенного на конечном отрезке. Поэтому, вообще говоря, пока неясно, к какой задаче оптимизации можно редуцировать, с целью получения необходимых условий оптимальности п. п. процесса, задачу оптимального управления п. п. движениями. Кроме того, если попытаться воспользоваться указанными вариациями Макшейна, то сразу возникает вопрос: на каком отрезке и какой длины варьировать оптимальное управление? Более того, проварьированное на каком-либо выбранном отрезке п. п. управление, очевидно не будет допустимым, то есть почти периодическим по Степанову. В связи с этим, возникает вопрос о возможном методе доказательства необходимых условий оптимальности допустимого процесса задачи оптимального управления п. п. движениями.

В диссертации, с целью получения таких условий, множество $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ расширяется до множества APM_1 мерозначных п. п. управлений и изначально исследуется овыпукленная задача оптимального управления п. п. движениями. Для такой задачи, аналогично определению, данному в [32], вводится понятие *решения в ослабленном смысле*, и приведенные в § 11 необходимые условия, в силу его определения, позволяют указать необходимые условия оптимальности как для овыпукленной задачи оптимального управления п. п. движениями, так и для отвечающей ей задачи с управлениями из пространства $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$. Поэтому далее будем говорить о методе доказательства принципа максимума для овыпукленной задачи оптимального управления п. п. движениями и его особенностях.

Предложенный в диссертации метод исследования таких задач можно охарактеризовать как метод, основанный на п. п. вариациях, и преимущества мерозначных п. п. управлений перед обычными п. п. управлениями отчетливо проявляются при построении и изучении свойств п. п. вариаций, а также в вопросах существования решения задачи оптимального управления п. п. движениями.

Ниже кратко, на примере задачи (0.10) укажем способ построения п. п. вариаций.

При определении семейства п. п. вариаций, отвечающего заданному (не обязательно оптимальному) допустимому процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ задачи (0.10), сначала строится вариация $\mu(\cdot,\vartheta,\varepsilon)$ управления $\widehat{\mu}(\cdot)\in\mathrm{APM}_1$. Приведенная в § 4 конструкция таких вариаций, использующая п. п. мерозначные последовательности и специальный выбор точки ϑ, позволяет показать, что отображение $\mu(\cdot,\vartheta,\varepsilon)\in\mathrm{APM}_1$. Кроме того, используя доказанные в этом параграфе свойства таких вариаций и результаты шестого параграфа о свойствах п. п. (по Бору) решений систем управления, можно привести достаточные условия существования при всех (малых) $\varepsilon>0$ п. п. (по Бору) решения $x(\cdot,\vartheta,\varepsilon)$ системы $\dot{x}=\langle\mu(t,\vartheta,\varepsilon),f(x,u)\rangle$ и указать его зависимость от параметра ε.

Построенная совокупность допустимых процессов $\{(x(\cdot,\vartheta,\varepsilon),\mu(\cdot,\vartheta,\varepsilon))\}_{\varepsilon>0}$ для задачи (0.10) и рассматривается в качестве п. п. вариаций, отвечающих заданному процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$, а вытекающие из приведенных в девятом и десятом параграфах результатов их свойства позволяют, в случае если процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$ будет для задачи (0.10) решением в ослабленном смысле, доказать его необходимые условия в виде принципа максимума Понтрягина. При этом, вследствие специфики целевого функционала, при получении необходимых условий сначала доказывается, что оптимальное управление $\widehat{\mu}(\cdot)$ является решением задачи $M\{\langle\mu(t),H(\widehat{x}(t),u,\widehat{p}(t))\rangle\}\to\sup$, $\mu(\cdot)\in\mathrm{APM}_1$, где $\widehat{p}(t)$ — п. п. по Бору решение системы $\dot{p} = -p\langle\widehat{\mu}(t), f'_x(\widehat{x}(t), u)\rangle + \langle\widehat{\mu}(t), f'_{0x}(\widehat{x}(t), u)\rangle$, а $H(x, u, p) \doteq pf(x, u) - f_0(x, u)$ — функция Понтрягина задачи (0.11). Теперь возникает вопрос (в отличие от аналогичной ситуации в периодическом случае) о справедливости при п. в. $t \in \mathbb{R}$ поточечного максимума: $\max\limits_{u\in\mathcal{U}} H(\widehat{x}(t), u, \widehat{p}(t)) = \langle\mu(t), H(\widehat{x}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle$. Поскольку отображение $(t, u) \mapsto H(\widehat{x}(t), u, \widehat{p}(t))$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \mathcal{U}, \mathbb{R})$, то положительный ответ на поставленный вопрос вытекает из соответствующего утверждения, доказанного в § 6 .

Отметим, что точно так же, как исследование задач оптимального управления, определенных на конечном отрезке, предполагает наличие определенного математического аппарата, так и для изучения задач оптимального управления п. п. движениями потребовалось доказательство ряда общих утверждений о свойствах п. п. функций и п. п. систем управления. Основные элементы математического аппарата, используемые при исследовании рассмотренных в работе задач оптимального управления п. п. движениями приведены в первых трех главах.

Далее, как было показано выше, при исследовании рассматриваемых задач теории магистральных процессов важную роль играет случай, когда система (0.1) обладает свойством (С) относительно интегральной кривой $\gamma_+(\widetilde{x})$. Было отмечено, что достаточные условия, обеспечивающие это свойство управляемости, в тринадцатом параграфе доказаны в терминах РЛУ (в нуль) линейной системы (0.4), в которой $A(t) \doteq \langle\widetilde{\mu}(t), f'_x(\widetilde{x}(t), u)\rangle$, $V(t) \doteq \langle\widetilde{\mu}(t), f(\widetilde{x}(t), u)\rangle - f(\widetilde{x}(t), \mathcal{U})$, а допустимыми управлениями служат измеримые сечения отображения $t \mapsto V(t)$. Отождествляя такую систему с отображением $t \mapsto \varphi(t) = (A(t), V(t))$, получаем, что при указанных $A(t)$ и $V(t)$ она принадлежит следующему пространству отображений (систем): $\mathfrak{S} \doteq \{\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0) : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} (|A(s)| + |V(s)|)ds < \infty\}$, где $\mathcal{P}_0$ — совокупность таких пар $(\mathbb{A}, \mathbb{V}) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, что $0 \in \mathrm{co}\,\mathbb{V}$, а $|V(s)| \doteq \max\limits_{v\in V(s)} |v|$.

Последняя, шестая, глава диссертации посвящена исследованию вопроса о РЛУ систем вида (0.4), таких что отвечающее им отображение $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot))$ принадлежит множеству $\mathfrak{S}$. Отметим, что это множество содержит все равномерно непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ функции $t \mapsto (A(t), V(t))$, в частности и те, в которых $V(t)$ представимо в виде $V(t) = B(t)\mathcal{U}$, где $B(t) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, а множество $\mathcal{U} \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^m)$ такое, что $0 \in \mathrm{int}\,\mathcal{U}$. Именно для такого вида систем или, что равносильно, систем (0.3), в [144], по–видимому, впервые было введено понятие РЛУ, представляющее интерес для приложений [145]. Однако изучение систем из $\mathfrak{S}$, в которых множество, ограничивающее значения допустимых управлений, зависит от t и традиционное для задач управления условие $0 \in \mathrm{ri}\,\mathrm{co}V(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ ослаблено до условия: $0 \in \mathrm{co}\,V(t)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$, не исключающего возможности, что нуль лежит при п. в. $t \in \mathbb{R}$ на границе множества $\mathrm{co}\,V(t)$, обусловливается не только исследованием вопросов об управляемости систем более общего вида в сравнении с (0.3), но и, в частности, изучением вопроса о РЛУ нелинейной системы на интегральную кривую.

Определение РЛУ систем $\varphi \in \mathfrak{S}$ аналогично приведенному выше определению РЛУ систем (0.3), данному в [144], и означает существование таких констант $\varepsilon, \vartheta > 0$, что шар $O_\varepsilon[0]$ при всех $\tau \geqslant 0$ содержится в $D_\tau(\varphi, \varepsilon)$ — множестве управляемости системы φ на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$. В случае, если система $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot))$ РЛУ, можно также указать равномерную по $\tau \geqslant 0$ зависимость управлений $v(t) \in V(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, переводящих точки $x_0 \in O_\varepsilon[0]$ в начало координат, от их нормы. Вместе с тем, указанные особенности систем из пространства $\mathfrak{S}$, вообще говоря, не позволяют при изучении свойства РЛУ автоматически использовать результаты о РЛУ систем (0.3). Действительно, в случае когда $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$, для системы (0.3) с постоянными матрицами A и B для РЛУ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $[B, \ldots, A^{n-1}B]$ был равен n. В случае же, когда $0 \in \partial\, \mathcal{U}$, можно привести пример системы (0.3) с постоянными матрицами, для которой ранг указанной матрицы равен n, и в то же время не являющейся локально управляемой, и можно привести пример РЛУ системы (0.3) с постоянными матрицами, для которой ранг указанной матрицы меньше n. Отсутствие, в общем случае, для систем (0.4) матрицы управляемости и зависимость множества $V(t)$, ограничивающего значения допустимых управлений, от t, также создают определенные трудности их исследования в сравнении с системами вида (0.3) при условии, что $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$ и множество $\mathcal{U}$ не зависит от времени. Вместе с тем, поскольку на каждом отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$, $\tau \geqslant 0$ множество управляемости системы $\varphi \in \mathfrak{S}$ совпадает с множеством управляемости $D(\varphi_\tau, \vartheta)$ на отрезке $[0, \vartheta]$ системы $\varphi_\tau(\cdot) \doteq \varphi(\cdot + \tau)$, то, так же как и при изучении (см. [144, 145]) систем вида (0.3), удобно использовать ДС сдвигов, определенную на $\mathfrak{S}$. При этом, поскольку в [144, 145], как было отмечено, рассматривались системы (0.3) с множеством $\mathcal{U}$, ограничивающим управления и не зависящим от времени, то ДС сдвигов достаточно было определять на множестве отображений $t \mapsto (A(t), B(t))$. В рассматриваемом же случае ДС сдвигов определяется на множестве локально суммируемых отображений $t \mapsto \varphi(t) = (A(t), V(t)) \in \mathcal{P}_0$, в котором фигурирует ограничивающее управления отображение $t \mapsto V(t)$.

Для определения такой ДС, в качестве сепарабельного метрического пространства $\mathfrak{Y}$ достаточно рассмотреть пространство $\mathcal{P}$ с метрикой прямого произведения метрических пространств $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)$ и $(\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n), \operatorname{dist})$. Тогда получим метрическое пространство $\mathfrak{B}_0 = (L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0), \varrho)$ с метрикой (см. 0.7))

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \big[\min\big\{ \int_t^{t+1} \big(|A_1(s) - A_2(s)| + \operatorname{dist}(V_1(s), V_2(s))\big) ds,\ |t|^{-1} \big\}\big]. \qquad (0.13)$$

Отсюда, учитывая, что $\mathfrak{S} \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$, получаем ДС $(\mathfrak{S}, g^t)$, в которой фазовым пространством является пространство систем управления, а поток $g^t : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ определяется как сдвиг: $g^t(\varphi) \doteq \varphi_t$.

В диссертации в терминах указанной ДС $(\mathfrak{S}, g^t)$ исследуется структура РЛУ систем из пространства $\mathfrak{S}$. В частности, приведены достаточные условия РЛУ систем из заданного компактного инвариантного (относительно потока g^t) множества $\mathcal{E} \subset \mathfrak{S}$. В § 19 введено понятие колеблемости и равномерной колеблемости однородной системы дифференциальных уравнений относительно заданного выпуклого замкнутого конуса с вершиной в нуле. Приведенная в работе связь этих понятий с локальной и равномерной локальной управляемостью позволяет использовать результаты, полученные при исследовании вопросов локальной и равномерной локальной управляемости, для изучения вопросов колеблемости и равномерной колеблемости однородных систем дифференциальных уравнений относительно конуса, в частности, линейных дифференциальных уравнений, и наоборот, делает возможным применять результаты о поведении решений однородных систем дифференциальных уравнений относительно конуса при изучении локальной и равномерной локальной управляемости.

Таковы основные направления исследований, проведенных в диссертации, и подходы к решению поставленных в них задач.

* * *

Диссертация состоит из введения, шести глав, двадцати параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы.

В первом параграфе указаны основные сведения о почти периодических (п. п.) функциях и их свойствах, которые используются в дальнейшем. Краткому описанию результатов этого параграфа предпошлем определения функциональных пространств, фигурирующих в определениях п. п. отображений.

Через $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, где $(\mathfrak{Y},\rho)$ — метрическое пространство, обозначим совокупность таких измеримых (по Лебегу) функций $f:\ \mathbb{R}\to\mathfrak{Y}$, что при некотором фиксированном $y\in\mathfrak{Y}$ отображение $t\mapsto\rho(y,f(t))$ принадлежит $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Как было уже отмечено, на множестве таких функций определено (см. (0.7)) d-расстояние

Далее, через $\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, где $\mathbb{T}$ — промежуток прямой, возможно совпадающий с ней, $(\mathfrak{X},\rho)$ и $(\mathfrak{Y},\|\cdot\|)$, соответственно, компактное метрическое пространство и сепарабельное банахово пространство, обозначаем совокупность отображений $\varphi:\mathbb{T}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ удовлетворяющих (усиленным) условиям Каратеодори (см., например, [22, с. 158]). Функция $\varphi\mapsto\|\varphi\|_{\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})}\doteq\int\limits_{\mathbb{T}}\max\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|\varphi(t,x)\|dt$ является нормой на $\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, и это нормированное пространство будет алгебраически изоморфным пространству $L_1(\mathbb{T},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))$ и сепарабельным.

Наряду с пространством $\mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ в диссертации рассматривается совокупность $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ таких функций $\varphi:\mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, что для каждого отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}\quad\varphi\in\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Отсюда, в силу того, что для каждого отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ $\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\cong L_1(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))$, следует, что всякую функцию $f\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},C(\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y})$ можно представлять как отображение

$$(t,x)\mapsto f(t,x)\in\mathfrak{Y},\ \ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\tag{0.14}$$

считая его элементом пространства $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

Приведем основные обозначения и утверждения о п. п. функциях.

Аналогично определению данному в [107, с. 222] для функций из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, говорим, что функция f из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, здесь $(\mathfrak{Y},\rho)$ — метрическое пространство, принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, если для любого $\varepsilon>0$ множество $E_S(f,\varepsilon)$ — ее ε-п. п. относительно плотно, и через $B(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ обозначаем подмножество пространства $\mathrm{C}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, состоящее из п. п. по Бору функций [107, с. 12]. Напомним, что для каждой п. п. функции f определен $\mathrm{Mod}(f)$ [107], который в случае, если $\mathfrak{Y}$ — сепарабельное банахово пространство, совпадает с $\mathrm{Mod}(\Lambda(f))$, где $\Lambda(f)$ — множество показателей Фурье для f и существует среднее значение $M\{f(t)\}\in\mathfrak{Y}$. Для этого же случая в § 1 введены в рассмотрение п. п. последовательности, принадлежащие пространству $L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ $(a>0)$, и указана связь между *п. п. последовательностями* и п. п. по Степанову функциями $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{Y}$. Из утверждений о свойствах таких функций отметим следующее.

Т е о р е м а 0.1. *Пусть функция f принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ и $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$, где $\mathfrak{f}_m(t)\doteq f_{ma}(t)$, $t\in[0,a]$, — отвечающая этой функции п. п. последовательность. Пусть также задан положительный сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$. Тогда из любого неограниченного множества $Q\subset\mathbb{N}$ можно выделить такую последовательность $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$, что из всякой стремящейся* *к нулю при* $j \to \infty$ *последовательности* $\{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0, a]$ *можно выделить такую подпоследовательность* $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{j\to\infty} \eta_j = 0$, *что для п.в.* $\vartheta \in [0, a]$ *будут выполнены равенства:*

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_j}\int_0^{\eta_j}\|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta)-\mathfrak{f}_m(\vartheta)\|dt\Big)=0,$$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\eta_j}\int_0^{\eta_j}\|\mathfrak{f}_{m+k}(t+\vartheta)-\mathfrak{f}_{m+k}(\vartheta)\|dt\Big)=0.$$

Доказан также ряд свойств п. п. по Степанову функций $S(\mathbb{R}, \mathbb{Y}) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{Y})$, когда в качестве $\mathbb{Y}$ рассматривается пространство $C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, в частности свойство указанное в следствии теоремы 0.1. Прежде чем его сформулировать, отметим, что в данном параграфе и в дальнейшем, в силу алгебраического изоморфизма между пространствами $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ и $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$, каждая функция f из $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ представляется в виде отображения (0.14), предполагается, что $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и множество $E_S(f, \varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max\limits_{x\in\mathfrak{X}} \|f(s+\tau, x) - f(s, x)\|ds \leqslant \varepsilon\}$ ее ε-п. п. относительно плотно.

С л е д с т в и е 0.1. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ *и заданная последовательность* $\{q'_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *такая, что* $\lim\limits_{l\to\infty} q'_l = \infty$. *Тогда найдутся подпоследовательность* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{q'_l\}_{l=1}^{\infty}$ *и измеримое множество* $\Xi \subset [0, a]$, $\operatorname{mes} \Xi = a$, *такие, что в каждой точке* $\vartheta \in \Xi$ *и для любой заданной п. п. последовательности* $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{X}$ *существует* $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l-1} f(\vartheta + ma, x_m)$.

Далее, через $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначается совокупность непрерывных функций вида (0.14), которые *п. п. по* $t \in \mathbb{R}$ *в смысле Бора равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$ (см., например, [107, 108, 187]), и введено в рассмотрение пространство $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, состоящее из функций вида (0.14), которые *п. п. по* $t \in \mathbb{R}$ *в смысле Степанова равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Отображение (0.14) называется п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$, если оно удовлетворяет одновременно следующим условиям: при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] = 0$, где $\mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] \doteq \sup\{d(f(\cdot, x_1), f(\cdot, x_2)) : \ x_1, x_2 \in \mathfrak{X},\ \rho(x_1, x_2) < \gamma\}$.

В § 1 приведены основные свойства функций из $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, когда $\mathfrak{Y}$ — сепарабельное банахово пространство. Целесообразность введения в рассмотрение такого пространства функций в данной работе обусловлена, в частности, описанием свойств семейства п. п. вариаций, отвечающего заданному мерозначному п. п. управлению.

В этом же параграфе введены в рассмотрение функциональные последовательности $(t, x) \mapsto \mathfrak{f}_m(t, x) \in \mathfrak{Y}$, $(t, x) \in [0, a] \times \mathfrak{X}$, $m \in \mathbb{Z}$, которые *п. п. равномерно* по $x \in \mathfrak{X}$. Для таких последовательностей определяется множество $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$ показателей Фурье, и приведена связь множества показателей Фурье функции $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и отвечающей ей п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ последовательности.

Во втором параграфе определены *мерозначные п. п. по Степанову функции* и доказан ряд их свойств.

Напомним (см. первую часть введения), что в диссертации через $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ обозначается совокупность таких измеримых отображений $\mu\colon \mathbb{R} \to (\mathrm{frm}(\mathcal{U}), |\cdot|_w)$, что $\|\mu\| \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\mu(t)|(\mathcal{U}) < \infty$. Следуя схеме доказательства теоремы Данфорда — Петтиса [22, с. 299] о структуре пространства $\big(\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathcal{U},\mathbb{R})\big)^*$ для случая, когда $\mathbb{T}$ — отрезок прямой, можно показать, что $\mathbb{M} \cong \mathfrak{V}_1^*$, где $\mathfrak{V}_1 \doteq \mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$. Поэтому каждое $\mu \in \mathbb{M}$ рассматриваем как функцию $\varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \mu(t), \varphi(t,u)\rangle dt$, $\varphi \in \mathfrak{V}_1$, где $\langle \mu(t), \varphi(t,u)\rangle dt \doteq \int\limits_{\mathcal{U}} \varphi(t,u)\mu(t)(du)$, принадлежащую $\mathfrak{V}_1^*$. При этом, отображение $\mu \mapsto \|\mu\|_w \doteq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1+\|\varphi_j\|_{\mathfrak{V}_1}} \cdot |\int\limits_{\mathbb{R}} \langle \mu(t), \varphi(t,u)\rangle dt|$, $\mu \in \mathbb{M}$, где $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathfrak{V}_1$ — счетное всюду плотное множество в $\mathfrak{V}_1$, задает норму в $\mathcal{M}$. Полученное нормированное пространство $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_w)$ является сепарабельным, и два его подмножества $\mathcal{M} \doteq \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$, $\mathfrak{S}_1 \doteq \{\mu \in \mathbb{M}\colon\ \|\mu\| \leqslant 1\}$ компактны.

Определение 0.2. Отображение $\mu \in \mathbb{M}$ называется п. п. по Степанову, если для любой функции $c \in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u)\rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Совокупность всех п. п. по Степанову отображений из $\mathbb{M}$ обозначим APM и через APM_1 — множество $\mathrm{APM} \cap \mathcal{M}$. Кроме того, $\mathrm{APM}_1^{(1)}$ — совокупность таких $\mu \in \mathrm{APM}_1$, что $\mu(t) = \delta_{u(t)}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и некотором измеримом отображении $u\colon \mathbb{R} \to \mathcal{U}$. В § 2 показано, что $S(\mathbb{R},\mathcal{U}) \cong \mathrm{APM}_1^{(1)}$, что позволяет каждое $u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ рассматривать как элемент множества $\mathrm{APM}_1^{(1)} \subset \mathrm{APM}_1$, отождествляя его с мерозначным п. п. отображением $t \mapsto \delta_{u(t)} \in \mathrm{DIR}(\mathcal{U})$.

Отметим, что так как на $\mathbb{M}$ определено d_w-расстояние, то в $\mathbb{M}$ можно выделить подмножество $S(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathcal{U}))$, состоящее из п. п. по Степанову отображений в смысле определения пространства $S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, когда в качестве $\mathfrak{Y}$ рассматривается пространство $(\mathrm{frm}(\mathcal{U}), |\cdot|_w))$, то есть таких $\mu \in \mathbb{M}$, что при каждом $\varepsilon > 0$ множество $E_S(\mu,\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : d_w(\mu_\tau, \mu) \leqslant \varepsilon\}$ относительно плотно. Во втором параграфе показано, что отображение μ принадлежит $S(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ (или его подмножеству $S(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U})))$ в том и только в том случае, если оно обладает свойством почти периодичности в смысле определения 0.2. В этом же параграфе указывается, что приведенное определение 0.1 при $\mathfrak{Y} = \mathrm{frm}(\mathcal{U})$ позволяет рассмотреть пространство $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{frm}(\mathcal{U}))$, состоящее из п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in (\mathfrak{X},\rho)$ отображений $(t,x) \mapsto \mu(t,x) \in \mathrm{frm}(\mathcal{U})$, то есть таких, что при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $\mu(\cdot,x) \in S\big(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathcal{U})\big)$ (или, что равносильно, $\mu(\cdot,x) \in \mathrm{APM}$) и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}] = 0$, где $\mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}] \doteq \sup\{d_w\big(\mu(\cdot,x_1), \mu(\cdot,x_2)\big) : x_1, x_2 \in \mathfrak{X},\ \rho(x_1,x_2) \leqslant \gamma\}$. При этом для важного в задачах оптимального управления п. п. движениями выпуклого подмножества $S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U})\big)$ пространства $S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{frm}(\mathcal{U})\big)$ показано, что $\mu \in S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U})\big)$ в том и только в том случае, если для каждой функции $c \in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ отображение $(t,x) \mapsto \langle \mu(t,x), c(u)\rangle \doteq \int\limits_{\mathcal{U}} c(u)\mu(t,x)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$. Это утверждение позволяет указанное в нем свойство принять за определение пространства $S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U})\big)$. В дальнейшем аналогичным образом определяется его подмножество $S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U})\big)$, то есть как совокупность таких отображений $(t,x) \mapsto \mu(t,x) \in \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, что для каждой функции $c \in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ отображение $(t,x) \mapsto \langle \mu(t,x), c(u)\rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$. Отметим также, что аналогичное свойство справедливо и для всех $\mu \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{frm}(\mathcal{U}))$, удовлетворяющих условию: $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|\mu(\cdot,x)\|<\infty$.

В третьем и четвертом пунктах § 2 показано, что каждому $\mu\in \mathrm{APM}$ можно однозначно поставить в соответствие мерозначный ряд Фурье, и определяется множество $\Lambda(\mu)$ его показателей Фурье. Для $\mu\in S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$ множество показателей Фурье $\Lambda(\mu)$ определено равенством $\Lambda(\mu)\doteq\bigcup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda\big(\mu(\cdot,x)\big)$, где $\Lambda\big(\mu(\cdot,x)\big)$ — множество показателей Фурье п. п. по Степанову отображения $t\mapsto\langle\mu(t,x)$. Кроме того, в третьем пункте введены определения *п. п. последовательностей* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, их множества $\Lambda(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ показателей Фурье и модуля $\mathrm{Mod}(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$.

Известно (см., например, [52], [97, 187]), что, если $g\in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то для любой функции $u\in B(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ отображение $t\to g(t,u(t))$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Доказанная в § 2 следующая теорема дополняет это утверждение.

Т е о р е м а 0.2. *Пусть $(\mathfrak{X},\rho)$ — компактное метрическое пространство, множество $\mathfrak{A}\doteq\{\mu(\cdot,x),x\in\mathfrak{X}\}$ содержится в* APM, *является равностепенно п. п. и $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|\mu(\cdot,x)\|<\infty$. Тогда для любой функции $g\in S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)$ совокупность отображений $t\mapsto f(t,x)\doteq\langle\mu(t,x),g(t,u)\rangle$, $x\in\mathfrak{X}$, где $\langle\mu(t,x),g(t,u)\rangle=\int\limits_{\mathfrak{U}}g(t,u)\mu(t,x)(du)$, равностепенно п. п. по Степанову. Кроме того, если $\mu\in S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$, то функция $(t,x)\mapsto f(t,x)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$ и ее модуль содержится в $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu)\cup\Lambda(g))$.*

Отметим, далее, что в [59] доказано, что для каждого $\mu\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})))$ и любой функции $g\in S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)$ отображение $(t,x)\mapsto\langle\mu(t,x),g(t,u)\rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$ и его модуль содержится в $\mathrm{Mod}\big(\Lambda(g)\cup\Lambda(\mu)\big)$. Отсюда, принимая во внимание доказанное в этом параграфе утверждение о том, что функция $u\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{U})$ ($u\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{U}))$) в том и только в том случае, если отображение $(t,x)\mapsto\delta_{u(t,x)}$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ $\big(S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))\big)$ и их модули совпадают, из теоремы 0.2 получаем два следующих следствия.

С л е д с т в и е 0.2. *Пусть $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ и функция $u(\cdot)$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{U})$ или $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{U}))$. Тогда отображение $(t,x)\mapsto g(t,u(t,x))$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$, соответственно — $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$, и его модуль содержится в $\mathrm{Mod}\big(\Lambda(g)\cup\Lambda(u)\big)$.*

С л е д с т в и е 0.3. *Пусть отображение $g:\mathbb{R}\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}$ принадлежит либо пространству $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, либо $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$. Тогда для всякого $\mu\in\mathrm{APM}_1$ и $u\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ отображения $t\mapsto\langle\mu(t),g(t,u)\rangle$, $t\mapsto g(t,u(t))$ принадлежат пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, и их модули содержатся в $\mathrm{Mod}\big(\Lambda(\mu)\cup\Lambda(g)\big)$ и $\mathrm{Mod}\big(\Lambda(g)\cup\Lambda(u)\big)$, соответственно.*

В заключительной части второго параграфа показано, что для каждого отображения $\mu(\cdot)\in\mathrm{APM}_1$ при фиксированном $h>0$ и всяком $t\in\mathbb{R}$ существует такая мера $\mu(t,h)\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, что для всех $c(\cdot)\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\langle\mu(t,h),c(u)\rangle=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle\mu(s),c(u)\rangle ds.$$

Указанное отображение $t\mapsto\mu(t,h)$ названо *стекловским усреднением* для $\mu(\cdot)\in\mathrm{APM}_1$. Доказаны следующих два утверждения о свойствах стекловских усреднений.

Л е м м а 0.1. *Пусть* $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$. *Тогда при каждом* $h \in (0,1]$ *отображение* $\mu(\cdot,h) \in B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *и* $\mathrm{Mod}(\mu(\cdot,h)) \subset \mathrm{Mod}(\mu(\cdot))$. *Кроме того, множество* $\mathcal{F} \doteq \{\mu(\cdot,h),\ h \in (0,1]\}$ *равностепенно п. п. по Степанову и* $\lim\limits_{h\downarrow 0} \|\mu(\cdot) - \mu(\cdot,h)\|_w = 0$.

Т е о р е м а 0.3. *Пусть отображение* $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ *и* $\mu(\cdot,h) \in B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *— отвечающее ему стекловское усреднение. Тогда для всякой функции* g, *принадлежащей* $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, *справедливо равенство:* $\lim\limits_{h\downarrow 0}(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\int\limits_t^{t+1} \langle \mu(s,h) - \mu(s), g(s,u)\rangle ds|) = 0$, *и, значит,* $\lim\limits_{h\downarrow 0} M\{\langle \mu(t,h), g(t,u)\rangle\} = M\{\langle \mu(t), g(t,u)\rangle\}$.

Как было отмечено выше, множества $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ и $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ могут быть рассмотрены как подпространства пространств $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ и APM_1, соответственно. Корректность такого расширения обосновывает следующее утверждение доказанное в § 3 работы.

Т е о р е м а 0.4. *Пусть* $(\mathfrak{X}, \rho)$ *— компактное метрическое пространство. Тогда для каждого отображения* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *существует такая последовательность функций* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *из пространства* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$, *что* $\mathrm{Mod}(u_j) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$ *для всех* $j \in \mathbb{N}$ *и обладающая также следующими свойствами:* 1) *имеет место равенство* $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} \|\mu(\cdot,x) - \delta_{u_j(\cdot,x)}\|_w) = 0$; 2) *при каждом* $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}} \big(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\delta_{u_j(s,x_1)} - \delta_{u_j(s,x_2)}|(\mathfrak{U}) ds\big)\Big) = 0;$$

3) *для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\int\limits_t^{t+1} \langle \mu(s,x) - \delta_{u_j(s,x)}, g(s,u)\rangle ds| \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0$ *при* $j\to\infty$, *и, следовательно,* $M\{g(t, u_j(t,x))\} \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} M\{\langle \mu(t,x), g(t,u)\rangle\}$ *при* $j \to \infty$.

В четвертом параграфе для мерозначных отображений, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}(\Delta) \doteq \{\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1 : \mathrm{Mod}(\mu) \subset \mathrm{Mod}(\Delta)\}$, где Δ — фиксированное подмножество прямой, определяются п. п. вариации. С этой целью при $p \in \mathbb{N}$ рассматривается множество $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p \doteq \{\vec{\mu} = (\mu_j)_{j=1}^p,\ \mu_j \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}),\ j = 1,\dots,p\}$, и последовательность $\{\vec{\mu}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p$ называется п. п., если при каждом $j = 1,\dots,p$ последовательность $\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ является п. п. Далее, фиксируются такая константа $a > 0$, что $\frac{2\pi}{a} \in \mathrm{Mod}(\Delta)$, число $N \in \mathbb{N}$ и произвольный набор точек $0 \leqslant \vartheta_1 < \dots < \vartheta_N < a$, который отождествляется с вектором $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$. Кроме того, рассматриваются лишь такие п. п. последовательности $\{\vec{\mu}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p$, $\vec{\mu}(m) = (\mu_j(m))_{j=1}^p$, $m \in \mathbb{Z}$, что при каждом $j = 1,\dots,p$ $\mathrm{Mod}(\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ содержится в $a\,\mathrm{Mod}(\Delta)$. Такие п. п. последовательности названы *допустимыми*. Каждому $i \in \{1,\dots,N\}$ ставится в соответствие число $k_i \in \mathbb{N}$ и пара $(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$, в которой $\vec{\beta}_{k_i} \doteq (\beta_{ij})_{j=1}^{k_i}$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, $j = 1,\dots,k_i$, а $\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $\vec{\nu}_{k_i}(m) \doteq (\nu_{ij}(m))_{j=1}^{k_i}$, $m \in \mathbb{Z}$ п. п. последовательность из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i}$. В дальнейшем $|\vec{\beta}_{k_i}| \doteq \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij}$ и, если $\vec{\beta}^p_{k_i^p} = (\beta^p_{ij})_{j=1}^{k_i^p}$, $\vec{\nu}^p_{k_i^p}(m) \doteq (\nu^p_{ij}(m))_{j=1}^{k_i^p}$, $m \in \mathbb{Z}$, $p = 1,2$, то полагается:

$$\begin{cases} (\vec{\beta}^1_{k_i^1}, \vec{\beta}^2_{k_i^2}) \doteq (\beta^1_{i1},\dots,\beta^1_{ik_i^1}, \beta^2_{i1},\dots,\beta^2_{ik_i^2}) \\ (\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m), \vec{\nu}^2_{k_i^2}(m)) \doteq (\nu^1_{i1}(m),\dots,\nu^1_{ik_i^1}(m), \nu^2_{i1}(m),\dots,\nu^2_{ik_i^2}(m)), \end{cases} \tag{0.15}$$

где $m\in\mathbb{Z}$ и, следовательно, если $\{\vec{\nu}^{\,p}_{k_i^p}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — допустимые п. п. последовательности из $(\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))^{k_i^p}$, $p=1,2$, то $\{(\vec{\nu}^{\,1}_{k_i^1}(m),\vec{\nu}^{\,2}_{k_i^2}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — допустимая п. п. последовательность из $(\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))^{k_i^1+k_i^2}$.

Далее вводится в рассмотрение множество

$$\mathcal{V}\doteq\big\{\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}\doteq\big\{(\vec{\beta}_{k_1},\{\vec{\nu}_{k_1}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}),...,(\vec{\beta}_{k_N},\{\vec{\nu}_{k_N}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big\}\big\},$$

в котором $k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{N}$. Определив на множестве наборов $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$ операции сложения и умножение на число, аналогично как и при определении многочленных вариаций Макшейна (см., например [134], [135]), принимая во внимание (0.15), получим, что $\mathcal{V}$ — конус, названный *конусом допустимых п п. наборов.* В дальнейшем

$$\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\doteq\big\{\vec{\iota}=(\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},\ \iota_1,\ldots,\iota_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in\mathcal{V}\big\},\ \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\doteq\big\{\vec{\mathfrak{y}}=(\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},\ \mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in[0,\rho]\big\},\quad(0.16)$$

где $\rho>0$, и для любых $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ полагается $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\doteq\mathfrak{y}_1\iota_1+\ldots+\mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\iota_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$. Поэтому, если $\iota_{\mathfrak{q}}\doteq\{(\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}},\{\vec{\nu}^{\,\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$, $\mathfrak{q}=1,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, то $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\in\mathcal{V}$ и, при этом,

$$\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}=\big\{((\mathfrak{y}_1\vec{\beta}^{1}_{k_i^1},\ldots\mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\vec{\beta}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}_{k_i^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}),\{(\vec{\nu}^{\,1}_{k_i^1}(m),\ldots,\vec{\nu}^{\,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}_{k_i^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}})\big\}_{i=1}^{N}.\qquad(0.17)$$

С каждой иголкой $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}\in\mathcal{V}$ такой, что $\beta(\iota)\doteq\sum_{i=1}^{N}|\vec{\beta}_{k_i}|>0$ свяжем положительное число $\varepsilon(\iota)\doteq\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(\vartheta_{i+1}-\vartheta_i)/\beta(\iota)$, $\quad\vartheta_{N+1}\doteq a$ и при (ε,m) из $(0,\varepsilon(\iota)]\times\mathbb{Z}$ для каждого $i=1,\ldots,N$ рассмотрим дизъюнктную, примыкающую друг к другу систему полуинтервалов $\{T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota)\}_{j=1}^{k_i}$, которая при фиксированном $m\in\mathbb{Z}$ задается практически аналогично полуинтервалам, используемых при построении многочленных вариаций Макшейна на отрезке $[ma,(m+1)a]$, отвечающих измеримому управлению. Далее, если рассматривается иголка $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\in\mathcal{V}$ такая, что $\beta(\vec{\iota})\doteq\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}|\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}|>0$, то ей ставится в соответствие положительное число $\varepsilon(\rho,\vec{\iota})\doteq\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(\vartheta_{i+1}-\vartheta_i)/\rho\beta(\vec{\iota})$, $\vartheta_{N+1}=a$. Показано, что для такой иголки при каждом $i\in\{1,\ldots,N\}$ и всех $(\varepsilon,m)\in(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]\times\mathbb{Z}$

$$T_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})=\begin{cases}T_{m,i,j}(\varepsilon\mathfrak{y}_1,\iota_1),\ 1\leqslant j\leqslant k_i^1,\\[2mm] \varepsilon(\mathfrak{y}_1|\vec{\beta}^{1}_{k_i^1}|+\ldots+\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}-1}|\vec{\beta}^{\mathfrak{q}-1}_{k_i^{\mathfrak{q}-1}}|)+T_{m,i,j}(\varepsilon\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}},\iota_{\mathfrak{q}}),\ 2\leqslant\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{k}+\mathfrak{m},\ 1\leqslant j\leqslant k_i^{\mathfrak{q}}.\end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 0.3. Пусть набор $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$, принадлежащий конусу $\mathcal{V}$, такой, что $\beta(\iota)>0$, и пусть $\varepsilon\in[0,\varepsilon(\iota))$. Тогда отображение $t\mapsto\mu(t;\varepsilon,\iota)\in\mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, $t\in\mathbb{R}$, определенное равенством

$$\mu(t;\varepsilon,\iota)\doteq\begin{cases}\widehat{\mu}(t),\ t\in\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\big([ma,(m+1)a]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{N}\bigcup\limits_{j=1}^{k_i}T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota)\big),\\[2mm] \nu_{ij}(m),\ t\in T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota),\ m\in\mathbb{Z},\,1\leqslant i\leqslant N,\,1\leqslant j\leqslant k_i,\end{cases}$$

называется *игольчатой вариацией* отображения $\widehat{\mu}\in\mathfrak{M}(\Delta)$, отвечающей набору ι.

Далее, если рассматривается (см. (0.17)) набор $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\in\mathcal{V}$ такой, что $\beta(\vec{\iota})>0$, то для него при каждом $m\in\mathbb{Z}$ и $i=1,\ldots N$, рассматривается система полуинтервалов $\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\doteq\bigcup\limits_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}T_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, $1\leqslant\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$. Доказаны следующие утверждения.

Л е м м а 0.2. *Пусть* $\widehat{\mu} \in \mathfrak{M}(\Delta)$, $\mathfrak{y}\vec{\iota} \in \mathcal{V}$ *и* $\beta(\vec{\iota}) > 0$. *Тогда при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota}))$ *и всех* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$\mu(t;\varepsilon,\mathfrak{y}\vec{\iota}) = \begin{cases} \widehat{\mu}(t), \ t \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} \Big([ma,(m+1)a] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} \bigcup\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\mathfrak{y}\vec{\iota})\Big) \\ \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m), \ t \in T_{m,i,j}(\varepsilon,\mathfrak{y}\vec{\iota}), \ m \in \mathbb{Z}, \, 1 \leqslant i \leqslant N, \, 1 \leqslant \mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \, 1 \leqslant j \leqslant k_i^{\mathfrak{q}}, \end{cases}$$

Т е о р е м а 0.5. *Пусть* $\vec{\iota} = (\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *где* $\iota_{\mathfrak{q}} \doteq \{(\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}, \{\vec{\nu}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$, $\mathfrak{q} = 1,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ *и* $\beta(\vec{\iota}) > 0$. *Тогда для каждой функции* $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathfrak{M}(\Delta)$ *множество* $\mathfrak{A} \doteq \big\{\mu(\cdot;\varepsilon,\mathfrak{y}\vec{\iota}), \ (\varepsilon,\mathfrak{y}) \in \mathfrak{X}\big\}$, *где* $\mathfrak{X} \doteq [0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})] \times \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *содержится в множестве* $\mathfrak{M}(\Delta)$, *является равностепенно п. п., и* $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(\sup\limits_{\mathfrak{y}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\mu(\cdot;\varepsilon,\mathfrak{y}\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(\cdot)\|_w) = 0$. *Кроме того, выполнено равенство*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\operatorname*{supremum}_{\substack{(\varepsilon',\mathfrak{y}'),(\varepsilon'',\mathfrak{y}'')\in\mathfrak{X} \\ |\varepsilon'-\varepsilon''|+|\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}''|\leqslant\gamma}} \big(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \big|\big(\mu(s;\varepsilon',\mathfrak{y}'\vec{\iota}) - \mu(s;\varepsilon'',\mathfrak{y}''\vec{\iota})\big)\big|(\mathcal{U})ds\big)\Big) = 0.$$

С л е д с т в и е 0.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 0.6. *Тогда отображение* $(t,\varepsilon,\mathfrak{y}) \mapsto \mu(t;\varepsilon,\mathfrak{y}\vec{\iota})$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$, *где* $\mathfrak{X} \doteq [0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})] \times \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *и для любой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$ *имеет место следующее предельное соотношение:* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |\langle \mu(s;\varepsilon,\mathfrak{y}\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(s), g(s,u)\rangle| ds \underset{\mathfrak{y}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} 0$ *при* $\varepsilon \downarrow 0$.

В третьем пункте этого параграфа доказаны также два утверждения позволяющие указать дополнительные свойства игольчатых вариаций отображений из $\mathfrak{M}(\Delta)$ отвечающим наборам из конуса $\mathcal{V}$.

Отметим далее, что построенных игольчатых вариаций и указанных их свойств достаточно чтобы доказать необходимые условия решения в ослабленном смысле задачи оптимального управления п. п. движениями определенной на множестве управляемых процессов $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \times \mathrm{APM}_1$ нелинейной п. п. системы управления. Вместе с тем при исследовании рассматриваемых в диссертации задач оптимального управления п. п. движениями при наличии параметра, то есть в которых управлениями служат пары $(v(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, в которых первая компонента $v(\cdot)$ принадлежит заданному множеству (параметров) $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$, необходимо рассматривать *последовательности п. п. вариаций* отвечающих заданной паре $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$. Определению которых посвящен последний, четвертый, пункт второго параграфа. Для их задания рассматривается касательный конус Кларка [93] $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ к множеству $\mathfrak{S}$ с вершиной в точке $\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S}$, и вводятся в рассмотрение допустимые наборы $\big(\vec{\iota}, \vec{h}(\cdot), \{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\big)$, в которых $\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ такое, что $\beta(\vec{\iota}) > 0$, $\vec{h}(\cdot) \doteq (h_{\mathfrak{l}}(\cdot))_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $h_{\mathfrak{l}}(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, и последовательность $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}$, содержащаяся в некотором полуинтервале $(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$, стремится к нулю при $p \to \infty$. Далее, по паре $\big(\vec{h}(\cdot), \{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\big)$ строятся определенным образом последовательности $\{w(\cdot,\varepsilon_p,\mathfrak{y})\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}$, отвечающие $\mathfrak{y} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, где $\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ — компакт, являющийся образом множества (см. 0.16) $\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ для указанного в четвертом пункте § 4 непрерывного отображения $\mathfrak{y} \mapsto \mathfrak{g}(\mathfrak{y})$. В дальнейшем совокупность последовательностей $\big\{\{(w(\cdot,\varepsilon_p,\mathfrak{y}),\mu(\cdot;\varepsilon_p\mathfrak{y}\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty}, \ \mathfrak{y} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\big\} \subset \mathfrak{S} \times \mathfrak{M}(\Delta)$, в которых отображение $\mu(\cdot;\varepsilon_p\mathfrak{y}\vec{\iota}) \in \mathfrak{M}(\Delta)$ определено в лемме при $\varepsilon = \varepsilon_p$, называется последовательностью п. п. вариаций для $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{M}(\Delta)$, отвечающей заданному допустимому набору $\big(\vec{\iota}, \vec{h}(\cdot), \{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\big)$.

Приведенные во второй главе результаты носят вспомогательный характер, в том смысле, что они по сути не используются при доказательстве основных результатов, и в основном используются при описании свойств функции Понтрягина в задачах оптимального управления п. п. движениями. Поэтому ограничимся лишь указанием ряда некоторых из основных результатов этой главы.

В пятом параграфе заданной функции $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, где $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство, $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство, такой, что при каждом $x \in \mathfrak{X}\quad f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, ставится в соответствие (измеримое) отображение $\mathcal{N} : \mathbb{R} \to \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$ определенное равенством: $\mathcal{N}(t) \doteq \{x \in \mathfrak{X} : f(t, x) = 0\}$. В силу леммы Филиппова [22, 180] указанное отображение имеет измеримое сечение. Однако, как показано в этом параграфе, можно построить пример такой функции с указанными свойствами, что отвечающее ей отображение $t \mapsto \mathcal{N}(t)$ не имеет п. п. по Степанову сечений. В связи со сказанным, возникает вопрос о существовании таких сечений введенного отображения $t \mapsto \mathcal{N}(t)$. Чтобы указать достаточные условия существования таких сечений при $\alpha > 0$ рассматривается (измеримое) отображение $t \mapsto \mathcal{W}(t, \alpha) \doteq \{x \in \mathfrak{X} \colon \|f(t, x)\| \leqslant \alpha\} \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$.

В следующей, основной, теореме из § 5 под условием A) для функции f понимается, что при каждом $\sigma > 0\quad \lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(\mathrm{mes}\{s \in [t, t+1] : \omega_\gamma[f(s, \dot{\,}), \mathfrak{X}] \geqslant \sigma\})\big) = 0.$

Т е о р е м а 0.6. *Пусть функция* $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *удовлетворяет условию A) и при каждом* $x \in \mathfrak{X}\quad f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. *Тогда, если выполнено следующее предельное равенство*: $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\big(\int\limits_t^{t+1}\mathrm{dist}_\rho(\mathcal{W}(s, \alpha), \mathcal{N}(s))ds\big) = 0$, *то* $\mathcal{N} \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathfrak{X}))$ *и* $\mathrm{Mod}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Mod}\big(\bigcup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(f(\cdot, x))\big)$. *Кроме того, существует такая функция* x, *принадлежащая пространству* $S(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$, *что* $x(t) \in \mathcal{N}(t)$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *и* $\mathrm{Mod}(x) \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{N})$.

Вытекающие из теоремы 0.6 следствия далее используются для исследования связи п. п. по Бору решений дифференциального включения $\dot{x} \in \mathrm{co}\, f(t, x, \mathfrak{U})$ с п. п. по Степанову правой частью и системы уравнений $\dot{x} = \langle\mu(t), f(t, x, u)\rangle$, $\mu \in \mathrm{APM}_1$, а в следующем, шестом, параграфе при исследовании вопроса о поточечном максимуме. Более точно, заданной функции g, принадлежащей пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ (или $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$), поставим в соответствие отображение $t \mapsto \varphi(t) \doteq \max\limits_{u\in\mathfrak{U}} g(t, u)$, которое, как несложно проверить, будет п. п. по Степанову (п. п. по Бору), и рассмотрим измеримое отображение $t \mapsto F(t) \doteq \{u \in \mathfrak{U} \colon g(t, u) = \varphi(t)\} \in \mathrm{comp}(\mathfrak{U})$. Применяя, для п. п. по Степанову функции $t \mapsto -\varphi(t) + g(t, u)$, одно из следствий теоремы 0.6, в первом пункте § 6 указаны достаточные условия, когда $F \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathfrak{U}))$ и будет иметь п. п. по Степанову сечения. Далее, для функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, по аналогии с отображением φ, можно ввести в рассмотрение (п. п. по Степанову) отображение $t \mapsto \psi(t) \doteq \max\limits_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}\langle\nu, g(t, u)\rangle$. Поскольку $\psi(t) = \varphi(t)$, то отображением в пространстве мер, аналогичным отображению $t \mapsto F(t) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{U})$, будет следующее отображение $t \mapsto \mathfrak{F}(t) \doteq \{\nu \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}) \colon \langle\nu, g(t, u)\rangle = \varphi(t)\} \in \mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, содержащее при каждом $t \in \mathbb{R}$ множество $\{\delta_u,\ u \in F(t)\}$. В первом пункте приведен ряд утверждений указывающих на тесную связь между отображениями F и $\mathfrak{F}$. В том числе, доказано, что отображение F имеет сечение $u \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ в том и только в том случае, когда отображение $\mathfrak{F}$ имеет сечение $\mu \in APM_1$ и при этом $\mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$.

Результаты п. 1 используются при исследовании ряда задач в классе п. п. функций, среди которых ниже выделим лишь имеющие важное значение при описании свойств функции Понтрягина в задачах оптимального управления п. п. движениями. Используется также следующая теорема из совместной публикации [39].

Т е о р е м а 0.7. *Пусть* $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая функция* $u \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, *что* $g(t, u(t)) > \varphi(t) - \varepsilon$ *и* $\mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(g)$.

Пусть, теперь, $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$. По следствию 0.3 получаем, что корректно определена задача: $I(u(\cdot)) \doteq M\{g(t, u(t))\} \to \sup$, $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, в которой функция $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ называется решением, если $I(\widehat{u}(\cdot)) \geqslant I(u(\cdot))$ для всех $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$. В п. 2 доказано, что функция $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ является решением этой задачи в том и только том случае, если для п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\max\limits_{u \in \mathfrak{U}} g(t, u) = g(t, \widehat{u}(t))$. Далее, также в силу следствия 0.3 получаем корректность определения задачи $\mathfrak{T}(\mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), g(t, u) \rangle\} \to \sup$, $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$, являющейся овыпукленной для задачи $I(u(\cdot)) \to \sup$, $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$. Доказано, что функция $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ является решением этой задачи в том и только том случае, если для п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\max\limits_{u \in \mathfrak{U}} g(t, u) = \langle \widehat{\mu}(t), g(t, u) \rangle$. Кроме того, это решение существует в том и только в том случае, если существует решение $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ задачи $I(u(\cdot)) \to \sup$, $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ и при этом $I(\widehat{u}(\cdot)) = \mathfrak{T}(\widehat{\mu}(\cdot))$.

Доказано также следующее утверждение о свойстве функции максимума.

Л е м м а 0.3. *Пусть функция* $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$ *такая, что при каждом* $u \in \mathfrak{U}$ *отображение* $t \mapsto g(t, u)$ *абсолютно непрерывно,* $g'_t \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ *и* $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in \mathbb{R}} (\max\limits_{u \in \mathfrak{U}} |g'_t(t, u)|) < \infty$. *Пусть, далее, функция* $\varphi(t) \doteq \max\limits_{u \in \mathfrak{U}} g(t, u)$ *и существует такое отображение* $\widetilde{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$, *что при всех* $t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t) = \langle \widetilde{\mu}(t), g(t, u) \rangle$. *Тогда функция* $\varphi(\cdot)$ *абсолютно непрерывна,* $\dot{\varphi}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ $\dot{\varphi}(t) = \langle \widetilde{\mu}(t), g'_t(t, u) \rangle$.

При получении необходимых условий оптимальности допустимого процесса в задачах оптимального управления п. п. движениями одну из основных нагрузок при получении необходимых условий оптимальности несут теоремы о существовании и непрерывной зависимости от параметра п. п. решения нелинейной системы управления. Этим вопросам посвящена третья глава диссертации.

Для формулировки основных результатов седьмого и восьмого параграфов укажемем сначала ограничения на рассматриваемую систему управления.

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ и, не оговаривая, рассматриваем функцию $(t, x, v, u) \mapsto f(t, x, v, u) \in \mathbb{R}^n$, которая дифференцируема по x в каждой точке $(t, x, v, u) \in \mathbb{R} \times G \times V \times \mathfrak{U}$. Для такой функции рассматриваем условие:

1) для любого фиксированного множества $K \in \mathrm{comp}(G)$ $f \in S(\mathbb{R}, C(K \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$, $f'_x \in S(\mathbb{R}, C(K \times V \times \mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \Big(\operatorname*{maximum}_{(x,v,u) \in K \times V \times \mathfrak{U}} \big(|f(t, x, v, u)| + |f'_x(t, x, v, u)| \big) < \infty. \qquad (0.18)$$

Зафиксируем далее $\widehat{v}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, V)$ и при $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t, x, \widehat{v}(t), u) \rangle, \ (t, x) \in \mathbb{R} \times G, \qquad (0.19)$$

для которой пару $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathrm{APM}_1$ называем допустимой, если $x(\cdot)$ — решение этой системы уравнений, отвечающее $\mu(\cdot)$ и такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x)\subset G$.

Фиксируем направленное множество $(\mathbb{A},\prec)$, содержащее счетное конфинальное подмножество, а также множество параметров Ω.

Т е о р е м а 0.8. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}\times G\times V\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию* 1), *для заданной функции* $\widehat{v}(\cdot)\in S(\mathbb{R},V)$ *пара* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathrm{APM}_1$ *допустима для системы* (0.19) *и система уравнений в вариациях*

$$\dot y=\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle y,\ (t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \tag{0.20}$$

является э. д. Тогда, если множество $\big\{\mu(\cdot,\alpha,\omega),\,(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega\big\}$ *из* APM_1 *равностепенно п. п. и заданная совокупность отображений* $\big\{v(\cdot,\alpha,\omega),\,(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega\big\}$ *из* $S(\mathbb{R},V)$ *такие, что* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\big(\sup\limits_{\omega\in\Omega}\|\widehat{\mu}(\cdot)-\mu(\cdot,\alpha,\omega)\|_w+\sup\limits_{\omega\in\Omega}d(\widehat{v}(\cdot),v(\cdot,\alpha,\omega))\big)=0$, *то найдутся такие* $\mathcal{K}\in\mathrm{comp(G)}$ *и* $\alpha_0\in\mathbb{A}$, *что для всякого* $\alpha\in\mathbb{A}$, *удовлетворяющего условию* $\alpha_0\prec\alpha$, *при каждом* $\omega\in\Omega$ *система*

$$\dot x=\langle\mu(t,\alpha,\omega),f(t,x,v(t,\alpha,\omega),u)\rangle, \tag{0.21}$$

имеет п. п. по Бору решение $x(\cdot,,\alpha,\omega)$ *такое, что* $\overline{\mathrm{orb}}\,(x(\cdot,\alpha,\omega))\subset\mathcal{K}$. *Это решение единственно и* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\big(\sup\limits_{\omega\in\Omega}\|x(\cdot,\alpha,\omega)-\widehat{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\big)=0$.

Непосредственное доказательство теоремы 0.9 приведено в четвертом пункте § 7 и опирается на свойства п. п. (по Бору) решений линейных п. п. по Степанову систем с мерозначными управлениями, доказанных в первых трех пунктах этого параграфа.

В пятом пункте доказана следующее утверждение о свойствах п. п. решений $x(\cdot,\alpha,\omega)$ системы (0.21).

Т е о р е м а 0.9. *Пусть в условиях теоремы* 0.8 (Ω,ρ) — *компактное метрическое пространство. Тогда для всех* $\alpha\in\mathbb{A}$, *удовлетворяющих условию* $\alpha_0\prec\alpha$, *где* $\alpha_0\in\mathbb{A}$ *взято из теоремы* 0.9, *для которых отображение* $(t,\omega)\mapsto v(t,\alpha,\omega)$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}\times\Omega,V)$ *и*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup\Big\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\mu(s,\alpha,\omega_1)-\mu(s,\alpha,\omega_2)|(\mathfrak{U})ds,\ \omega_1,\omega_2\in\Omega,\ \rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma\Big\}\Big)=0,$$

функция $(t,\omega)\mapsto x(t,\alpha,\omega)$ *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Перед формулировкой основных утверждений § 8, играющих наряду с теоремой 0.4 важную роль при обосновании корректности процедуры овыпукления, а также при доказательстве принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления п. п. движениями, приведем условия при которых доказываются эти утверждения.

В этом параграфе (Ω,ρ) — компактное метрическое пространство и функция $f\colon\mathbb{R}\times G\times V\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$, где $V\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$, удовлетворяет условию 1). При заданных $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ и $v\in S(\mathbb{R},C(\Omega,V))$ рассматривается (п. п. по Степанову) система (0.21) для которой пара $(x(\cdot,\omega)),\mu(\cdot,\omega))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathrm{APM}_1$, отвечающую $\omega\in\Omega$, называется допустимой, если $x(\cdot,\omega)$ — решение этой системы уравнений, отвечающее $\mu(\cdot,\omega)$ и такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot,\omega))\subset G$.

Далее предполагается, что выполнены условия:

а) для любого $\omega \in \Omega$ пара $(x(\cdot,\omega),\mu(\cdot,\omega)) \in B(\mathbb{R},G)\times \mathrm{APM}_1$ является допустимой для системы (0.21), при этом отображение $(t,\omega)\mapsto x(t,\omega)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\Omega,G)$;

б) при каждом $\omega\in\Omega$ система уравнений в вариациях

$$\dot y = \langle \mu(t,\omega), f'_x(t,x(t,\omega),v(t,\omega),u)\rangle y,\ (t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

допускает э.д., причем существуют такие положительные константы $\tilde{\mathfrak{r}}_j,\tilde\sigma_j,\ j=1,2$, не зависящие от $\omega\in\Omega$, что для функции Грина

$$\mathcal{G}(t,s;\omega)=\chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t,s;\omega)-\chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t,s;\omega),\quad t,s\in\mathbb{R}$$

этой системы выполнены оценки

$$\begin{cases}|P_1(t,s;\omega)|\leqslant \tilde{\mathfrak{r}}_1 e^{-\tilde{\sigma}_1(t-s)},\ -\infty<s\leqslant t<\infty,\\ |P_2(t,s;\omega)|\leqslant \tilde{\mathfrak{r}}_2 e^{-\tilde{\sigma}_2(s-t)},\ -\infty<t\leqslant s<\infty.\end{cases}$$

Т е о р е м а 0.10. *Пусть для системы* (0.21) *выполнены условия* а), б) *и* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— последовательность функций из* $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathcal{U})$, *указанная в теореме* **??**, *аппроксимирующая отображение* $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$. *Тогда найдутся такое множество* $\mathcal{K}\in\mathrm{comp}(G)$ *и* $j_0\in\mathbb{N}$, *что при каждом* $j\geqslant j_0$ *и всяком* $\omega\in\Omega$ *система уравнений* $\dot x = f(t,x,v(t,\omega),u_j(t,\omega))$ *имеет такое п. п. по Бору решение* $x_j(\cdot,\omega)$, *что* $\overline{\mathrm{orb}}(x_j(\cdot,\omega))\subset\mathcal{K}$ *и удовлетворяющее предельному равенству:* $\lim\limits_{j\to\infty}\bigl(\sup\limits_{\omega\in\Omega}\|x(\cdot,\omega)-x_j(\cdot,\omega)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\bigr)=0$.

Доказательство теоремы 0.10 приведено в третьем пункте параграфа и использованы результаты о свойствах п. п. решений линейных п. п. по Степанову систем уравнений с управлениями, аппроксимирующих заданное мерозначное п. п. управление, приведенные во втором пункте.

В конце восьмого параграфа доказана

Т е о р е м а 0.11. *Пусть в теореме* 0.10 *отображение* μ *такое, что*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\bigl(\sup\bigl\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\mu(s,\omega_1)-\mu(s,\omega_2)|(\mathcal{U})ds,\ \omega_1,\omega_2\in\Omega,\ \rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma\bigr\}\bigr)=0,$$

Тогда при каждом $j\geqslant j_0$, *где* j_0 *взято из утверждения теоремы* 0.11, *решение* x_j *системы* $\dot x = f(t,x,v(t,\omega),u_j(t,\omega))$ *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$.

В девятом параграфе фиксируется множество $\mathfrak{S}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ и при $(v(\cdot),\mu(\cdot))$, принадлежащих $\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ рассматривается п. п. по Степанову систему уравнений

$$\dot x = \langle\mu(t), f(t,x,v(t),u)\rangle,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G, \tag{0.22}$$

с дифференцируемой по x и v в каждой точке $(t,x,v,u)\in\mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathcal{U}$ функцией $(t,x,v,u)\mapsto f(t,x,v,u)\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяющей условию:

1) для любых заданных $K\in\mathrm{comp}(G)$ и $V\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ $\quad f\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$, $f'_x\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathcal{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$, $f'_v\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathcal{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)))$ и выполнено свойство (0.18).

Всякий набор $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, в котором $x(\cdot)$ — такое п. п. по Бору решение системы (0.22), отвечающее паре $(v(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, что $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$, называется допустимым управляемым процессом и их совокупность обозначается D_c.

Основной целью проведенных в § 9 исследований является построение конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, отвечающего заданному набору из D_c.

На первом шаге этого построения показано, что каждому набору $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ из D_c такому, что отвечающая ему система (0.20) допускает э.д., можно поставить в соответствие определенную последовательность допустимых наборов — п. п. вариаций. С этой целью допустимому набору $(\vec{\iota}, \vec{h}(\cdot), \{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty})$, то есть набору, в котором $\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ такое, что $\beta(\vec{\iota}) > 0$, $\vec{h}(\cdot) \doteq (h_{\mathfrak{q}}(\cdot))_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, где $h_{\mathfrak{l}}(\cdot)$ принадлежат касательному конусу Кларка $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, и $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota})]$, $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$, ставится в соответствие совокупность последовательностей $\big\{\{(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty},\ \vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\big\}$ из $\mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, состоящую из п. п. вариаций для $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$. Указанные в § 4 свойства которой, как показано в § 9, позволяют для последовательности, составленной из п. п. вариаций, воспользоваться теоремой 0.9. В данном случае, следует существование такого $\widehat{p}_1 \in \mathbb{N}$, что при каждом $p \geqslant \widehat{p}_1$ и любом $\vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ система $\dot{x} = \langle \mu(t; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f(t, x, w(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), u)\rangle$ имеет п. п. по Бору решение $x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, такое, что $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\widehat{x}(\cdot) - x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|_C\big) = 0$.

Таким образом, каждому набору $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ при любом $\mathfrak{y} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ отвечает последовательность

$$\big\{\big(x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\big)\big\}_{p \geqslant \widehat{p}_1} \subset D_c, \tag{0.23}$$

названная *последовательностью п. п. вариаций, отвечающую заданному допустимому набору* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$.

Доказанные во первом пункте § 9 свойства этой последовательности позволяют для заданных функций $f_{\mathfrak{l}} : \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{l} = 0, \ldots, \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$, удовлетворяющих условиям, аналогичным для функции f, выбрать набор $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^{N}$ и указать последовательность $\{\varepsilon_p\}_{p \geqslant \widehat{p}_1}$ так, что в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{l}+\mathfrak{m}}$ можно определенным образом построить выпуклый конус

$$\mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \doteq \{(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot)), \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot))),\ (\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\} \tag{0.24}$$

с вершиной в нуле. Построение компонент $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot))$, $\mathfrak{l} = 0, \ldots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, входящих в его определение, приведено во втором пункте § 9 и в последнем пункте этого параграфа, в терминах определенных на D_c функционалов

$$(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \mapsto \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), f_{\mathfrak{l}}(x(t), v(t), u)\rangle\}, \tag{0.25}$$

доказано, используемое в дальнейшем, свойство этих компонент.

Четвертая глава диссертации посвящена необходимым условиям оптимальности допустимого процесса рассмотренной в диссертации задачи оптимального управления п. п. движениями. Для постановки такой задачи в начале § 10 на множестве D_c управляемых процессов системы (0.22) с дифференцируемой по x и v в каждой точке $(t, x, v, u) \in \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathcal{U}$ функцией $(t, x, v, u) \mapsto f(t, x, v, u) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию **1**), при каждом $\mathfrak{l} = 0, \ldots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ рассматривается функционал, определенный равенством (0.25) в котором функция $f_{\mathfrak{l}} : \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию, аналогичному для f. Далее в D_c выделяется подмножество $\mathfrak{D}_c$, состоящее из таких наборов $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c$, что $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \leqslant 0$ при $\mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k}$ и $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) = 0$ при $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}+1, \ldots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}$.

О п р е д е л е н и е 0.4. Задача

$$\mathfrak{T}_0(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf, \ (x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c \tag{0.26}$$

называется *задачей оптимального управления п. п. движениями при наличии ограничений на средние значения типа равенств и неравенств.* Набор $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$, принадлежащий $\mathfrak{D}_c$, называется решением этой задачи, если для всех $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot))$ из $\mathfrak{D}_c$ выполнено неравенство $\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}_0(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot))$.

Как было уже отмечено каждое $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ можно рассматривать как элемент из APM_1 отождествляя его с отображением $t \mapsto \delta_{u(\cdot)} \in \mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$. Поэтому множество $D \doteq \{(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) : (x(\cdot), v(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in D_c\}$ будет множеством управляемых процессов системы уравнений $\dot{x} = f(t, x, v(t), u(t))$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times G$, в которой параметр $v(\cdot) \in \mathfrak{S}$, а управление $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$. Далее, так как для всякого набора $(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in D$ $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \overset{(0.25)}{=} M\{f_{\mathfrak{l}}(x(t), v(t), u(t))\} \doteq I_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot))$, то задача (0.26) является расширением следующей задачи оптимального управления п. п. движениями

$$I_0(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \to \inf, \ (x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{D}, \tag{0.27}$$

определенной на множестве $\mathfrak{D} \doteq \{(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) : (x(\cdot), v(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in \mathfrak{D}_c\}$.

Отметим, что теоремы 0.4 и 0.11 указывают условия, при которых *расширение задачи* (0.27) *до задачи* (0.26) *корректно*, в том смысле, что позволяют привести условия, когда для заданного набора $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ найдется последовательность $\{(x_j(\cdot), v(\cdot), u_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}$, при которой выполняется равенство $\lim\limits_{j\to\infty} I_{\mathfrak{l}}(x_j(\cdot), v(\cdot), u_j(\cdot)) = \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot))$. Заметим также, что в задачах (0.27) и (0.26) в качестве управлений рассматриваются пары $(v(\cdot), u(\cdot))$ и, соответственно, $(v(\cdot), \mu(\cdot))$, в которых первая компонента $v(\cdot)$, принадлежащая заданному множеству п. п. по Бору функций $\mathfrak{S}$, является параметром задачи [1].

Формулировка и доказательство необходимых условий оптимальности допустимого набора задачи (0.26) приведены в § 11 в таком виде чтобы из этих условий можно было получить необходимые условия для решения задачи (0.27). В связи с этим, по аналогии с определением [31, с .157] для задачи быстродействия с обобщенными управлениями (мерами), в § 10 приводится следующее определение.

О п р е д е л е н и е 0.5. Набор $(\widehat{x}(\cdot), (\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ называется *решением задачи* (0.26) *в ослабленном смысле,* если не существует допустимого процесса $(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot))$ задачи (0.27), при котором $I_0(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) < \mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$.

[1] О целесообразности исследования задач оптимального управления с параметром, то есть в которых в качестве управлений рассматриваются пары $(v(\cdot), u(\cdot))$, в которых первая компонента принадлежит заданному множеству параметров, а вторая множеству допустимых управлений со значениями в $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, см., например, [9, 10, 49, 114, 118, 119] и приведенную там библиографию. В задачах же оптимального управления периодическими движениями, как отмечено, например, в [149, 188], для приложений представляют интерес уже управления вида $(q, u(\cdot))$, где q принадлежит заданному множеству $Q \subset \mathbb{R}^k$, а $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$ — измеримая ω-периодическая функция.

Отметим, что всякое решение задачи (0.26) является одновременно ее решением в ослабленном смысле, и для задачи (0.27) оба этих понятия совпадают.

В этом же параграфе доказаны свойства конуса (см. (0.24)) $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, отвечающего заданному допустимому набору $(\widehat{x}(\cdot),(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ задачи (0.26).

Чтобы привести первое свойство этого конуса, в § 10 вводится в рассмотрение проектор $P\colon\ \mathcal{K}(\vec{\vartheta})\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, определенный для каждой точки $(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\varsigma),\dots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma))$ из $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, где, здесь и далее, $\varsigma\doteq(\iota,h(\cdot))$, равенством

$$P\big((\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\varsigma),\dots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}(\vec{\vartheta},\varsigma),\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta},\varsigma),\dots\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)\big)\doteq\big(\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta},\varsigma),\dots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)\big),$$

и рассмотрен также выпуклый в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ конус

$$\mathcal{H}\doteq\{(x_0,\dots,x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}})\colon\ x_0,\dots,x_{\mathfrak{k}}<0,\ x_{\mathfrak{k}+1}=\dots=x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}=0\}.$$

Следующая теорема отражает свойство конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, отвечающее случаю, когда $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$ при всех $\mathfrak{l}=1,\dots,\mathfrak{k}$.

Т е о р е м а 0.12. *Пусть п. п. по Степанову система уравнений* (0.20), *отвечающая набору* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$, *допускает э. д. Тогда, если* $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})\cap\mathcal{H}\neq\varnothing$ *и* $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta}))=\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, *то найдется такой допустимый набор* $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in\mathfrak{D}$, *что будет выполнено неравенство:* $I_0(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Аналогичное свойство доказано в случае, когда в задаче (0.26) присутствуют ограничения в виде строгих неравенств.

Доказанные свойства конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ позволяют в свою очередь доказать следующую теорему, в которой

$$y(t;h(\cdot))\doteq\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s),f'_v(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle h(s)\,ds,$$

$$y_{\mathfrak{l}}(t;h(\cdot))\doteq\langle\widehat{\mu}(t),f'_{\mathfrak{l}v}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle h(t),$$

$$\mathfrak{L}^{(m)}_{\mathfrak{l}}(\vartheta,\nu(m))\doteq\int_0^a\psi_{\mathfrak{l},m}(t)\sum_{k=0}^{\infty}\{\mathcal{G}_m(t,\vartheta-(k+1)a)\vartriangle f_m(\vartheta-(k+1)a,\nu(m-(k+1))+$$
$$+\mathcal{G}_m(t,\vartheta+ka)\vartriangle f_m(\vartheta+ka,\nu(m+k))\}dt,$$

где в свою очередь $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ — допустимая п. п. последовательность и

$$\begin{cases}\vartriangle f(t,\nu)\doteq\langle\widehat{\mu}(t)-\nu,f(t,\widehat{x}(t),u)\rangle,\ \vartriangle f_m(t,\nu)\doteq\vartriangle f(t+ma,\nu),\ m\in\mathbb{Z},\\ \psi_{\mathfrak{l}}(t)\doteq\langle\widehat{\mu}(t),f_{\mathfrak{l}x}(t,\widehat{x}(t),u)\rangle,\ \psi_{\mathfrak{l},m}(t)\doteq\psi_{\mathfrak{l}}(t+ma),\ \mathfrak{l}=0,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}.\end{cases}$$

Т е о р е м а 0.13. *Пусть допустимый набор* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ *является решением задачи* (0.26) *в ослабленном смысле и система* (0.20) *допускает э. д. Тогда существуют такие числа* $\widehat{\lambda}_0\geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1,\dots,\widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ *не равные нулю одновременно, что для каждого* $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, *всякой точки* $\vartheta\in\Xi$ *и любой п. п. последовательности* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ *выполнено неравенство*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\Big(\vartriangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\nu(m))+\mathfrak{L}^{(m)}_{\mathfrak{l}}(\vartheta,\nu(m))-$$
$$-M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)y(t,h(\cdot))\}-M\{y_{\mathfrak{l}}(t,h(\cdot))\}\Big)\leqslant 0$$

и, кроме того, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$, $\mathfrak{l}=1,\dots,\mathfrak{k}$.

В § 11, используя теорему 0.13, а также теорему 0.3 о свойствах стекловских усреднений для отображений из APM_1, доказана следующая основная теорема первых четырех глав диссертации.

Для формулировки этой теоремы на $\mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathrm{rpm}(\mathcal{U})\times\mathbb{R}^{n^*}$ для задачи (0.26) определим отображение $(t,x,v,\nu,p)\mapsto\mathbb{H}(t,x,v,\nu,p)\doteq\int\limits_{\mathcal{U}}H(t,x,v,u,p)\nu(du)$, где $H(t,x,v,u,p)=H(t,x,v,u,p;\lambda)\doteq pf(t,x,v,u)-\sum\limits_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\lambda_{\mathfrak{l}}f_{\mathfrak{l}}(t,x,v,u)$, $\lambda=(\lambda_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ — функция Понтрягина.

Напомним также, что $T_{v(\cdot)}\mathfrak{S}$ — касательный конус Кларка к заданному множеству $\mathfrak{S}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ с вершиной в точке $v(\cdot)\in\mathfrak{S}$.

Т е о р е м а 0.14. *Пусть допустимый процесс* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ *является решением в ослабленном смысле задачи* (0.26) *и система уравнений* (0.26) *допускает э. д. Тогда найдутся такие не равные нулю одновременно числа* $\widehat{\lambda}_0\geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1\ldots\widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *что*

$$\sup_{\mu(\cdot)\in\mathrm{APM}_1}M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\mu(t),\widehat{p}(t);\widehat{\lambda})\}=M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{\mu}(t),\widehat{p}(t);\widehat{\lambda})\},\qquad(0.28)$$

где $\widehat{\lambda}=(\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *а функция* $t\mapsto\widehat{p}(t)\in\mathbb{R}^{n^*}$ *является п. п. по Бору решением системы уравнений*

$$\dot{p}=-p\,\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle+\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\langle\widehat{\mu}(t),f'_{\mathfrak{l}x}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle.$$

Кроме того, выполняются условия: $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$, $\mathfrak{l}=1\ldots\mathfrak{k}$, *и при каждом* $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\quad M\{\langle\widehat{\mu}(t),H'_v(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))\rangle h(t)\}\leqslant 0.$

Отметим, так как отображение $(t,u)\mapsto H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$, то отвечающая ему функция максимума

$$t\mapsto\mathcal{H}(t)\doteq\max_{u\in\mathcal{U}}H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))$$

п. п. по Степанову, при всех $t\in\mathbb{R}$ $\mathcal{H}(t)=\max\limits_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathcal{U})}\langle\nu,H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))\rangle$, и равенство (0.28) равносильно тому, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$ $\mathcal{H}(t)=\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{\mu}(t),\widehat{p}(t))$.

Далее, как уже отмечалось, из теоремы 0.15 в силу определения 0.5 следуют необходимые условия оптимальности решения $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))\in\mathfrak{D}$ задачи (0.27). Формулировку этих условий опускаем, поскольку она может быть получена из формулировки теоремы 0.15 с заменой в ней набора $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ на набор $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\delta_{\widehat{u}(\cdot)})\in\mathfrak{D}_c$, отождествляемый с набором $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))\in\mathfrak{D}$.

В конце параграфа указаны достаточные условия оптимальности допустимого процесса для одного частного случая задачи (0.26), а именно, для случая когда функционал $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),\mu(\cdot))=M\{a_{\mathfrak{l}}(t,x(t))+\langle\mu(t),b_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}$, $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, а $(x(\cdot),\mu(\cdot))$ — управляемый процесс системы $\dot{x}=A(t,x)+\langle\mu(t),B(t,u)\rangle$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

В § 12 на множестве $\mathcal{U}\doteq\{u(\cdot)\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^m):\ M\{|u(t)|^2\}\leqslant\varkappa^2\}\quad(\varkappa>0)$, при фиксированных матрицах $Q\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $P\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $D\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m)$ и рассматривается задача

$$I(x(\cdot),u(\cdot))\doteq M\{x^*(t)Qx(t)+x^*(t)Pu(t)+u^*(t)Du(t)\}\to\inf,\ u(\cdot)\in\mathcal{U},$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; u(\cdot))$ — п.п. по Бору решение системы $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ с постоянными матрицами $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, отвечающее $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, и всюду далее предполагается, что для всех $j = 1, \ldots, n \quad \mathrm{Re}(\lambda_j(A)) \neq 0$.

Для формулировки основных результатов параграфа рассмотрим подмножество $\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}$ множества $\mathcal{U}$, состоящее из тригонометрических полиномов порядка m, то есть функций из $\mathcal{U}$ вида $u(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j \cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t$, где $a_j, b_j \in \mathbb{R}^m$ и $0 \leqslant \omega_m < \ldots < \omega_1$. Целесообразность выделения такого подмножества обусловлена доказанным в § 12 равенством: $\inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} I(x(\cdot), u(\cdot)) = \inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}} I(x(\cdot), u(\cdot))$.

Далее, в пространстве $\mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}^+(\mathbb{R}^m))$ выделим множество

$$\mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}} \doteq \bigcup_{q=0}^{m} \bigl\{\mu(\cdot) = \mu(\cdot; \vec{k}_m, \omega_m, \ldots, \omega_{q+1})\colon \ \vec{k}_m \in \mathcal{K}_m,\ 0 \leqslant \omega_m < \cdots < \omega_{q+1})\bigr\},$$

в котором $\mathcal{K}_m \doteq \{\vec{k}_m \doteq (k_1, \ldots, k_m)\colon \ k_j \doteq (a_j, b_j),\ j = 1, \ldots, m,\ \sum\limits_{j=1}^{m} |a_j|^2 + |b_j|^2 \leqslant 2\varkappa^2\}$,

$$\mu(t; \vec{k}_m, \omega_m, \ldots, \omega_{q+1}) \doteq \begin{cases} \nu^{(q)} + \eta^{(q)}(t), \text{ если } q \geqslant 1, \\ \eta^{(0)}(t), \text{ если } q = 0, \end{cases}$$

и где, в свою очередь,

$$\nu^{(q)} \doteq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{q}\{\delta_{-a_j} + \delta_{a_j} + \delta_{-b_j} + \delta_{b_j}\}, \quad \eta^{(q)}(t) \doteq \sum_{j=q+1}^{m} \delta_{a_j\cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t}.$$

Теперь рассмотрим задачу

$$\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq M\{x^*(t)Qx(t) + x^*(t)\langle\mu(t), Pu\rangle + \langle\mu(t), u^*Du\rangle\} \to \inf,\ \mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}},$$

где $x(\cdot) \doteq x(\cdot; \mu(\cdot))$, $t \in \mathbb{R}$ — п. п. по Бору решение системы $\dot{x} = Ax + B\langle\mu(t), u\rangle$, отвечающее $\mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}}$. Из определения $\mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}}$ получаем, что эта задача является расширением следующей задачи: $I(x(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}$ $(x(\cdot) = x(\cdot; u(\cdot)))$, и, как показано в параграфе, это расширение корректно.

Основным утверждением данного параграфа является следующая теорема.

Т е о р е м а 0.15. *Решение задачи* $\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf$, $\mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}}$ *существует и при этом справедливо равенство* $\inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}} I(x(\cdot), u(\cdot)) = \inf\limits_{\mu(\cdot)\in\mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}}} \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot))$.

С л е д с т в и е 0.5. *Пусть матрица* $Q \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ *отрицательно определенная. Тогда для любой фиксированной матрицы* $D \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m)$ *задача*

$$I_0(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{x^*(t)Qx(t) + u^*(t)Du(t)\} \to \inf,\ u(\cdot) \in \mathcal{U},\ x(\cdot) = x(\cdot, u(\cdot)).$$

имеет оптимальное управление $\widehat{u}(\cdot)$, *принадлежащее* $\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}$.

В конце параграфа, используя следствие 0.5, приведены примеры иллюстрирующие, что расширение множества периодических процессов в задаче оптимального управления периодическими движениями до множества п. п. процессов может быть *эффективным.*

Рассмотрим, далее, следующую, не содержащую параметра и без ограничений, задачу оптимального управления п. п. движениями

$$\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), f_0(t,x(t),u)\rangle\} \to \inf,\ \ (x(\cdot),\mu(\cdot)) \in D_c, \tag{0.29}$$

определенную на множестве $D_c \subset B(\mathbb{R},G) \times \mathrm{APM}_1$ п. п. управляемых процессов

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t,x,u)\rangle, \tag{0.30}$$

Здесь относительно функций f_0 и f предполагаем, что при каждом $K \in \mathrm{comp}(G)$ они принадлежат пространствам $S(\mathbb{R},C(K,\mathbb{R}))$ и, соответственно, $S(\mathbb{R},C(K,\mathbb{R}^n))$.

В § 14 доказаны два свойства решения этой задачи. Первое из которых характеризует его сужение на произвольно заданный отрезок $[t_0,t_1] \subset \mathbb{R}$, а второе характеризует его как магистральный процесс, и которые доказаны в предположении, что система (0.30) обладает свойством C) относительно интегральной кривой $\gamma_+(\widehat{x})$. Поскольку формулировка этих свойств и содержащиеся в ней понятия и определения аналогичны приведенным в первой части введения свойствах решения задачи (0.2), то мы их здесь опускаем. Достаточные условия, когда нестационарная система (0.30) с функцией f принадлежащей при каждом $K \in \mathrm{comp}(G)$ пространству $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times K\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ и управлениими $\mu \in \mathcal{M}$ обладает свойством (C) относительно интегральной кривой доказаны в §13. В пятнадцатом параграфе рассматривается динамическая система $(\mathfrak{B},g^t)$, в которой фазовым пространством служит метрическое пространство $\mathfrak{B} \doteq (L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}),\varrho)$ с метрикой ϱ, заданной равенством (0.5), а однопараметрическое семейство отображений $g^t\colon\ \mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, $t\in\mathbb{R}$ определяется как сдвиг $g^t(f) = f_t$ функций $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. Основное содержание исследований проведенных в этом параграфе было описано в первой части введения и здесь не приводится. По этой же причине опускаем формулировки результатов шестнадцатого параграфа, посвященного изучению задачи теории магистральных процессов.

Последняя, шестая, глава диссертации посвящена исследованию вопроса о равномерной локальной управляемости (РЛУ) систем вида (0.4), таких что отождествляемое с ними отображение $\varphi(\cdot) = (A(\cdot),V(\cdot))$ принадлежит пространству (систем) $\mathfrak{S} \doteq \{\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathcal{P}_0) : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} (|A(s)|+|V(s)|)ds < \infty\}$, где $\mathcal{P}_0$ — совокупность таких пар $(\mathbb{A},\mathbb{V}) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\times\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, что $0 \in \mathrm{co}\,\mathbb{V}$, а $|V(s)| \doteq \max\limits_{v\in V(s)} |v|$. В этих исследованиях на $\mathfrak{S}$ рассматриваются d-расстояние, определенное равенством (0.7) при $\mathfrak{Y} = \mathcal{P}_0$, метрика ϱ, заданная равенством (0.13), а также динамическая система (ДС) $(\mathfrak{S},g^t)$, в которой в качестве фазового пространства рассматривается метрическое пространство $(\mathfrak{S},\varrho)$, а поток $g^t\colon\ \mathfrak{S}\to\mathfrak{S}$ определяется как сдвиг $g^t(\varphi) = \varphi_t$ на $t\in\mathbb{R}$ системы $\varphi \in \mathfrak{S}$.

Определения локальной и равномерной локальной управляемости линейной системы приводятся в первом пункте § 13. В следующем определении $D(\varphi_\tau,\vartheta)$ — множество управляемости на отрезке $[0,\vartheta]$ системы $\varphi_\tau(\cdot) \doteq \varphi(\cdot+\tau)$.

Определение 0.6. Система $\varphi \in \mathfrak{S}$ называется

1) ε,ϑ-*локально управляемой* $(\varepsilon,\vartheta > 0)$, если $O_\varepsilon[0] \subset D(\varphi,\vartheta)$;

2) ε,ϑ-*равномерно локально управляемой*, если для всех $\tau \geqslant 0$ справедливо включение $O_\varepsilon[0] \subset D(\varphi_\tau,\vartheta)$;

3) *локально управляемой*, либо *равномерно локально управляемой*, если при некоторых $\varepsilon,\vartheta > 0$ она является, соответственно, ε,ϑ-локально управляемой, ε,ϑ - равномерно локально управляемой.

Из определения 0.6 получаем, что множества $\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta} \doteq \{\varphi \in \mathfrak{S} : O_\varepsilon[0] \subset D(\varphi,\vartheta)\}$, $\mathbb{L} \doteq \bigcup\limits_{\varepsilon,\vartheta>0} \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$ определяют совокупность всех ε,ϑ-локально управляемых и локально управляемых систем из $\mathfrak{S}$, соответственно. Кроме того, так как множество управляемости $D(\varphi_\tau,\vartheta)$ совпадает с множеством $D_\tau(\varphi,\vartheta)$ управляемости на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ системы $\varphi\in\mathfrak{S}$, то $\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta} \doteq \{\varphi \in \mathfrak{S} : \operatorname{orb}^+_g(\varphi) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}\}$, $\mathbb{L}^0 \doteq \bigcup\limits_{\varepsilon,\vartheta>0} \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$, где $\operatorname{orb}^+_g(\varphi) \doteq \{\varphi(\cdot+\tau),\ \tau\geqslant 0\}$, составляют совокупность всех ε,ϑ-равномерно локально управляемых и равномерно локально управляемых систем, принадлежащих $\mathfrak{S}$.

Доказанные в § 17 результаты о РЛУ систем из $\mathfrak{S}$ и свойствах отображения $\varphi \mapsto D(\varphi,\vartheta)$, $\varphi\in\mathfrak{S}$ используются в исследованиях проведенных в последующих параграфах. В частности, следующая теорема и ее следствия, доказанные в этом параграфе, использованы при доказательстве одного из основных утверждений § 18.

Т е о р е м а 0.16. *Пусть d-ограниченное множество систем $\mathcal{F}$ из $\mathfrak{S}$ при некоторых $\varepsilon,\vartheta>0$ содержится в $\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Тогда найдется такое $\delta>0$, что для каждой d-ограниченной совокупности систем $\Sigma\subset\mathfrak{S}$, для которой множество $\{t\geqslant 0\colon\ \varrho(\varphi_\tau,\mathcal{F})\leqslant\delta\}$ равномерно по $\varphi\in\mathfrak{S}$ относительно плотно, при некоторых $\varepsilon_1,\vartheta_1>0$ имеет место включение $\Sigma\subset\mathbb{L}^0_{\varepsilon_1,\vartheta_1}$.*

В § 18 в терминах ДС $(\mathfrak{S},g^t)$ доказаны достаточные, а также необходимые и достаточные условия РЛУ систем из пространства $\mathfrak{S}$.

Т е о р е м а 0.17. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное инвариантное (относительно потока g^t) множество из $\mathfrak{S}$ и $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если при каждом $\alpha\in\mathbb{I}$ $\mathcal{E}_\alpha\cap\mathbb{L}\neq\varnothing$, то найдутся такие $\varepsilon,\vartheta>0$, что $\mathcal{E}\subset\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$.*

С л е д с т в и е 0.6. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное инвариантное множество из $\mathfrak{S}$ и $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если при каждом $\alpha\in\mathbb{I}$ $\mathcal{E}_\alpha\cap\mathbb{L}\neq\varnothing$, то найдется такое $\delta>0$, что всякая система φ из $\mathfrak{S}$, для которой множество $\{t\geqslant 0:\ \varrho(\varphi_t,\mathcal{E})\leqslant\delta\}$ относительно плотно, принадлежит $\mathbb{L}^0$.*

С л е д с т в и е 0.7. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное минимальное множество из $\mathfrak{S}$ такое, что $\mathcal{E}\cap\mathbb{L}\neq\varnothing$. Тогда $\mathcal{E}\subset\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$ при некоторых $\varepsilon,\vartheta>0$.*

В этом же параграфе, используя утверждение последнего следствия, в терминах омега-предельного множества $\Omega(\varphi)$, отвечающего движению $t\mapsto g^t(\varphi)$, доказана

Т е о р е м а 0.18. *Пусть система $\varphi\in\mathfrak{S}$ d-непрерывна и $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех минимальных подмножеств из $\Omega(\varphi)$. Тогда $\varphi\in\mathbb{L}^0$ в том и только в том случае, если $\mathcal{E}_\alpha\cap\mathbb{L}\neq\varnothing$ при каждом $\alpha\in\mathbb{I}$.*

Далее, в соответствии с определением приведенном, например, в [6] для общей динамической системы, говорим, что множество $W^s(\mathcal{H})\doteq\{\varphi\in\mathfrak{S}:\ \Omega(\varphi)\subset\mathcal{H}\}$ является *зоной притяжения множества* $\mathcal{H}$ в пространстве $\mathfrak{S}$.

С л е д с т в и е 0.8. *Если $\mathcal{H}\subset\mathbb{L}$, то $W^s(\mathcal{H})\subset\mathbb{L}^0$.*

Отметим, что теорема 0.18, являющаяся по сути следствием теоремы 0.18, доказывалась в ряде частных случаев в работах [44, 145]. Так, в [145] она доказывалась для систем вида (0.3) при условии, что $\Omega(\varphi)$ (здесь $\varphi(\cdot) \doteq (A(\cdot), B(\cdot))$) является минимальным компакным множеством. В работе [44] это утверждение было обобщено для систем из пространства $\mathfrak{S}$ в предположении, что $\Omega(\varphi)$ представимо в виде объединения минимальных компактных множеств. Вместе с тем, как показано в приведенном в параграфе примере, объединение минимальных множеств, вообще говоря, составляет истинную часть $\Omega(\varphi)$. Отметим также, что приведенные утверждения показывают, что при исследовании вопроса о равномерной локальной управляемости важную роль играют минимальные множества динамических систем, которые, в свою очередь, в силу теорем Биркгофа и Маркова [123] тесно связаны с рекуррентностью и п. п. движений, а последние, как показано в пятом пункте § 15, — с рекуррентными и п. п. функциями. Поэтому в последнем пункте параграфа рассмотрен вопрос об управляемости рекуррентной и п. п. системы. Показано, что для равномерной локальной управляемости рекуррентной (или п. п.) системы из $\mathfrak{S}$ необходимо и достаточно, чтобы эта система являлась локально управляемой. Аналогичные свойства управляемости рекуррентных и п. п. по Бору систем вида (0.3), при условии, что $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{co}\mathcal{U})$, по видимому впервые были доказаны в [144, 146]. При этом, в [145] построен пример, показывающий, что требование рекуррентности системы в достаточности условия этих утверждений нельзя ослабить до требования устойчивости по Пуассону движения, отвечающего рассматриваемой системе.

Основной целью проведенных в § 19 исследований является сведение вопроса о локальной и равномерной локальной управляемости систем из пространства $\mathfrak{S}$ к соответствующему вопросу об управляемости системы с более простой геометрической структурой множества допустимых управлений, и, кроме того, привести связь указанных свойств управляемости со свойствами колеблемости и равномерной колеблемости однородных систем дифференциальных уравнений относительно конуса.

В этом параграфе через $\operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n)$ обозначается совокупность с всех выпуклых замкнутых конусов в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле и, для краткости изложения предполагается, что в рассматриваемых системах $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot)) \in \mathfrak{S}$ множество $V(t) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |V(t)| \leqslant 1$. Далее, на множестве $\mathfrak{S}$ задается отображение $\varphi \mapsto \boldsymbol{f}(\varphi)$, являющееся суперпозицией $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h}$ отображений $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$. Отображение $\boldsymbol{h}$ ставит каждой системе $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot)) \in \mathfrak{S}$ измеримую функцию

$$t \mapsto (A(t), \mathcal{K}_V(t)) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{K}_V(t) \doteq \overline{\operatorname{cone}}\, V(t),\ t \in \mathbb{R},$$

где $\overline{\operatorname{cone}}\, V(t)$ — замыкание в $\mathbb{R}^n$ конуса $\operatorname{cone} V(t) = \bigcup_{\lambda>0} \lambda V(t)$, порожденного множеством $V(t)$ [90, с. 173, 174]. В свою очередь, отображение $\boldsymbol{g}$ функции $t \mapsto (A(t), \mathcal{K}_V(t))$ ставит в соответствие систему $(A(\cdot), K_V(\cdot)) \in \mathfrak{S}$, в которой при п. в. $t \in \mathbb{R}$

$$K_V(t) \doteq \mathcal{K}_V(t) \cap O_1[0].$$

В следующ основных теоремах первого пункта § 19

$$\Xi_\vartheta(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) \doteq \{t \in [0, \vartheta]\colon\ c(\psi X(0, t; \varphi), K_V(t)) > 0\},$$

$$\Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) \doteq \{t \in [0, \vartheta]\colon\ c(\psi X(0, t; \varphi), K_V(t)) \geqslant \beta\},\ \Psi_1 \doteq \{\psi \in \mathbb{R}^{n^*} : |\psi| = 1\},$$

где $X(\cdot, t; \varphi)$ — оператор Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Т е о р е м а 0.19. *Следующие утверждения являются равносильными:*

1) *система* $\varphi \in \mathbb{L}$;

2) *система* $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}$;

3) *существуют такие* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что* $\operatorname{mes} \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) \geqslant \varepsilon$ *при всех* $\psi \in \Psi_1$;

4) *существует такое* $\vartheta > 0$, *что* $\operatorname{mes} \Xi_{\vartheta}(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) > 0$ *при всех* $\psi \in \Psi_1$.

Т е о р е м а 0.20. *Пусть система* $\varphi \in \mathfrak{S}$ *d-непрерывна. Тогда следующие утверждения являются равносильными:*

1) *система* $\varphi \in \mathbb{L}^0$;

2) *существуют такие* $\varepsilon, \vartheta > 0$, *что для всех* $\widehat{\varphi} \in \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(\varphi))$ *система* $\boldsymbol{f}(\widehat{\varphi}) \in \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$;

3) *существуют такие* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что при всех* $(\psi, \widehat{\varphi}) \in \Psi_1 \times \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(\varphi))$ *справедливо неравенство* $\operatorname{mes} \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\widehat{\varphi})) > \varepsilon$;

4) *существует такое* $\vartheta > 0$, *что при всех* $(\psi, \widehat{\varphi}) \in \Psi_1 \times \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(\varphi))$ *выполнено неравенство* $\operatorname{mes} \Xi_{\vartheta}(\psi, \boldsymbol{f}(\widehat{\varphi})) > 0$.

Таким образом, исследование вопроса о принадлежности системы φ множествам $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}^0$ сводится к вопросу о принадлежности этим множествам системы $\boldsymbol{f}(\varphi)$, имеющей более простую геометрическую структуру множества, ограничивающего значения допустимых управлений. В ряде случаев исследование вопроса о локальной или равномерной локальной управляемости системы $\boldsymbol{f}(\varphi)$ проще, нежели исходной системы φ. В свою очередь, вопрос о локальной и равномерной локальной управляемости системы $\boldsymbol{f}(\varphi)$ тесно связан с вопросом о поведении решений однородной системы дифференциальных уравнений относительно выпуклого замкнутого конуса с вершиной в нуле. Для указания этой связи во втором пункте введены понятия колеблемости и равномерной колеблемости системы дифференциальных уравнений относительно конуса.

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x, \ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{0.31}$$

и конус $\mathcal{H}(t) \in \operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$. В дальнейшем всякая такая пара (система и конус) отождествляется с отображением $t \mapsto \sigma(t) = (P(t), \mathcal{H}(t))$ и предполагается, что это отображение такое, что отвечающая ему функция $t \mapsto \sigma(t) = (P(t), \mathcal{H}(t) \cap O_1[0])$ принадлежит пространству $\mathfrak{S}$.

Напомним, далее, что углом между $x, y \in \mathbb{R}^n$ называется число $\measuredangle(x, y) \in [0, \pi]$ такое, что $\cos \measuredangle(x, y) = x^* y / |x| \cdot |y|$, и углом между $x \in \mathbb{R}^n$ и конусом $K \in \operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n)$ называется величина $\measuredangle(x, K) \doteq \min\limits_{y \in \operatorname{pr} K} \measuredangle(x, y)$, где $\operatorname{pr} K \doteq K \cap S_1(0)$.

О п р е д е л е н и е 0.7. Система (0.31) называется *колеблющейся относительно конуса* $\mathcal{H}(t)$, $t \geqslant 0$, *на полуинтервале* $[\tau, \infty)$, $\tau \geqslant 0$, если для каждого нетривиального решения $x(t) = x(t; \tau, x_0)$ этой системы справедливо неравенство $\operatorname{mes}\{t \geqslant \tau : \measuredangle(x(t), \mathcal{H}(t)) > 0\} > 0$, и называется *колеблющейся относительно конуса* $\mathcal{H}(t)$, $t \geqslant 0$, если она является колеблющейся относительно этого конуса на каждом полуинтервале $[\tau, \infty)$, $\tau \geqslant 0$.

Совокупность пар $(P, \mathcal{H})$ таких, что система (0.31) (или коротко система P) является колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t)$ на $[\tau, \infty)$, обозначено через $\mathfrak{K}(\tau)$. Поэтому, в силу данного определения, $\mathfrak{K} \doteq \bigcap\limits_{\tau \geqslant 0} \mathfrak{K}(\tau)$ это множество таких пар $(P, \mathcal{H})$, что система P является колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 0.8. Система (0.31) называется *равномерно колеблющейся относительно конуса* $\mathcal{H}(t)$, $t \geqslant 0$, если найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для любого $\tau \geqslant 0$ и каждого нетривиального решения $x(t) = x(t;\tau, x_0)$, $x_0 \in S_1(0)$ этой системы выполнено неравенство $\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta]\colon \measuredangle(x(t), \mathcal{H}(t)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$.

Совокупность пар $(P, \mathcal{H})$ таких, что система (0.31) является равномерно колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначим через $\mathfrak{K}^0$.

Заметим, что если $\mathcal{H}^{\#}(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x^*y \leqslant 0$ для всех $y \in \mathcal{H}(t)\}$, то есть [124] $\mathcal{H}^{\#}(t)$ — полярный конус для $\mathcal{H}(t)$, то, как несложно видеть, $(P, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}^0$ в том и только в том случае, если найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, причем $\beta < \frac{\pi}{2}$, что для всякого $\tau \geqslant 0$ и каждого решения $x(t) = x(t;\tau, x_0)$, $x_0 \in S_1(0)$ системы (0.31) выполнено следующее соотношение $\operatorname{mes}\{\tau \in [\tau, \tau+\vartheta]\colon \measuredangle(x(t), \mathcal{H}^{\#}(t)) \leqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$. Отметим также, что если рассмотреть систему (0.31) отвечающую заданному уравнению линейному дифференциальному уравнению

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0, \tag{0.32}$$

а в качестве конуса $\mathcal{H}(t)$ взять конус $\mathcal{H}(t) \equiv \{x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n\colon\ x_1 \leqslant 0\}$, то определение 0.7 эквивалентно тому, что при любом $\tau \geqslant 0$ каждое нетривиальное решение этого уравнения меняет знак на $[\tau, \infty)$ (то есть все решения уравнения (0.32) колеблющиеся, см. [95, с. 950]), а определение 0.8 эквивалентно следующему свойству решений уравнения (0.32): существуют такие константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для любого $\tau \geqslant 0$ и каждого решения $x(t) = x(t;\tau, x_0)$, $x_0 \in S_1(0)$ этого уравнения справедливо неравенство $\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta]:\ x(t) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$, и в этом случае уравнение (0.32) называется равномерно колеблющимся. Отметим, что если уравнение (0.32) является равномерно колеблющимся, то при любом $\tau \geqslant 0$ всякое нетривиальное решение $x(t;\tau, x_0)$ этого уравнения на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ хотя бы один раз сменит знак.

Во втором пункте § 19 доказаны утверждения о необходимых и достаточных условиях при которых заданная пара $(P, \mathcal{H})$ принадлежит множествам $\mathfrak{K}^0$ и $\mathfrak{K}(\tau)$. Используя которые, а также утверждения первого пункта, в третьем пункте доказаны утверждения устанавливающие связь между множествами $\mathfrak{K}$ и $\mathbb{L}$, $\mathfrak{K}^0$ и $\mathbb{L}^0$, соответственно. С этой целью, каждой системе управления $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot))$ из $\mathfrak{S}$ ставится в пара $(A(\cdot), \mathcal{K}_V(\cdot))$, в которой $\mathcal{K}_V(t) \doteq \overline{\operatorname{cone}}\, V(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В свою очередь, этой паре ставится в соответствие следующая пара $(-A^*(\cdot), \mathcal{H}(\cdot))$, в которой $\mathcal{H}(t) \doteq \mathcal{K}_V^{\#}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (то есть $\mathcal{H}(t)$ — конус, полярный для $\mathcal{K}_V(t)$).

Т е о р е м а 0.21. *Система* $\varphi = (A, V)$ *из* $\mathfrak{S}$ *принадлежит* $\mathbb{L}$ *в том и только в том случае, если отвечающая ей пара* $(-A^*, \mathcal{H})$ *из* Σ *принадлежит* $\mathfrak{K}(0)$, *и для того чтобы* $\operatorname{orb}_g^+(\varphi) \subset \mathbb{L}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $(-A^*, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}$.

В следующей теореме $\widehat{\mathcal{H}}(t) \doteq \mathcal{K}_{\widehat{V}}^{\#}(t)$.

Т е о р е м а 0.22. *Система* $\varphi = (A, V)$ *из* $\mathfrak{S}$ *принадлежит множеству* $\mathbb{L}^0$ *в том и только в том случае, если существует такое* $\vartheta > 0$, *что для каждой системы* $\widehat{\varphi} = (\widehat{A}, \widehat{V}) \in \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(\varphi))$, *отвечающая ей пара* $(-\widehat{A}^*, \widehat{\mathcal{H}}) \in \mathfrak{K}_\vartheta$.

Указанная в теоремах 0.22 и 0.23 связь между множествами $\mathfrak{K}$ и $\mathbb{L}$, и $\mathfrak{K}^0$, соответственно, позволяет переносить результаты, полученные при исследовании вопросов локальной и равномерной локальной управляемости систем из пространства $\mathfrak{S}$, в теорию колеблемости (что сделано в следующем параграфе) и наоборот, позволяет использовать результаты о поведении решений однородных систем дифференциальных уравнений относительно выпуклого замкнутого конуса с вершиной в нуле в исследованиие структуры множеств $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}^0$.

Далее, в работе [87] доказана

Т е о р е м а 0.23. *Пусть $(P, \mathcal{H}) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n)$. Тогда эта пара принадлежит $\mathfrak{K}(0)$ в том и только в том случае, если матрица P не имеет вещественных собственных векторов, принадлежащих конусу $\mathcal{H}$, и не имеет комплексных собственных векторов, ортогональных конусу $\mathcal{H}^\#$ полярному к $\mathcal{H}$.*

Из теорем 0.23 и 0.24 вытекает

Т е о р е м а 0.24. *Стационарная система управления $\varphi = (A, V)$ из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathbb{L}$ (а значит и $\mathbb{L}^0$) в том и только в том случае, если матрица $-A^*$ не имеет вещественных собственных векторов, принадлежащих конусу $\mathcal{H}$ полярному к конусу $\mathcal{K} \doteq \overline{\operatorname{cone}}\, V$, и не имеет комплексных собственных векторов ортогональных $\mathcal{K}$.*

Теорема 0.24 была впервые доказана в [96], опираясь на непосредственное определение локальной управляемости. Отметим, далее, что доказательство теоремы 0.23, приведенное в [87], позволяет эффективно (в терминах матрицы P и конуса $\mathcal{H}$) оценивать константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, входящие в определение равномерной колеблемости. Нахождению этих констант и их использованию при исследовании вопросов управляемости посвящены работы [40, 43].

В первом пункте § 20 используя указанную связь между множествами $\mathfrak{K}^0$ и $\mathbb{L}^0$, $\mathfrak{K}$ и $\mathbb{L}$, соответственно приведен ряд результатов о колеблемости и равномерной колеблемости системы дифференциальных уравнений относительно заданного конуса. Поскольку эти результаты аналогичны приведенным выше результатам о равномерной локальной управляемости систем из $\mathfrak{S}$, то формулировку их здесь опускаем. Приведем лишь некоторые вытекающие их них утверждения о колеблемости и равномерной колеблемости уравнений вида (0.32) в которых функции $p_j \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, n$ являются d-ограниченными и d-непрерывными, то есть $d(p_j, 0) \doteq \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |p_j(s)| ds < \infty$ и $\lim\limits_{h \to 0} d(p_j(\cdot + h), p_j(\cdot)) = 0$. Каждое такое уравнение отождествим с функцией $t \mapsto \boldsymbol{p}(t) \doteq (-p_n(t), \ldots, -p_1(t))$, принадлежащей $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n^*})$, и их совокупность обозначим через $\boldsymbol{U}$. Отметим, что на $\boldsymbol{U}$ определены метрика ϱ, заданная равенством (0.5) при $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^{n^*}$, а также однопараметрическое семейство отображений $g^t\colon\ \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$, определенное как сдвиг $g^t(\boldsymbol{p}) \doteq \boldsymbol{p}_t$. Из результатов § 15, принимая во внимание ограничения на коэффициенты уравнений из $\boldsymbol{U}$, получаем, что для каждого $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{U}$ множество $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(\boldsymbol{p})) \in \operatorname{comp}(\boldsymbol{U})$ и, значит, множество $\Omega(\boldsymbol{p})$ омега-предельных точек, отвечающего движению $t \mapsto g^t(\boldsymbol{p})$, непусто.

Обозначим, далее, через $x(t; \tau, x_0, \boldsymbol{p}(\cdot))$ решение уравнения $\boldsymbol{p}(\cdot) \doteq \big(-p_n(\cdot), \ldots, -p_1(\cdot)\big)$, начальные значения которого определяются парой $(\tau, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Совокупность колеблющихся на полуинтервале $[\tau, \infty)$ и колеблющихся уравнений обозначим, соответственно, через $\mathbb{K}(\tau)$ и $\mathbb{K}$, а совокупность равномерно колеблющихся уравнений — через $\mathbb{K}^0$. Во втором пункте § 20 приведены следующие утверждений о структуре множеств $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}^0$.

Т е о р е м а 0.25. *Следующие утверждения:*

1) *уравнение* $\boldsymbol{p}(\cdot))$ *принадлежит* $\mathbb{K}^0$,

2) *существуют такие положительные константы* $\varepsilon, \vartheta, \beta$, *что каждое уравнение* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\boldsymbol{p}))$ *при любом* $x_0 \in S_1(0)$ *обладает следующим свойством:* $\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta]\colon\ x(t;0,x_0,\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$,

3) *существует такая константа* $\vartheta > 0$, *что любое решение каждого уравнения* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\boldsymbol{p}))$ *на отрезке* $[0,\vartheta]$ *хотя бы один раз сменит знак,*

являются эквивалентными.

Т е о р е м а 0.26. *Пусть множество* $\mathcal{P} \subset \boldsymbol{U}$ *компактно и инвариантно (относительно потока* g^t*) и* $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ *— совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если при каждом* $\alpha \in \mathbb{I}$ $\ \mathcal{P}_\alpha \cap \mathbb{K}(0) \neq \varnothing$, *то найдутся такие константы* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что для каждого* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathcal{P}$ *при любых* $(\tau, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times S_1(0)$ *выполнено неравенство* $\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta]\colon\ x(t;0,x_0,\boldsymbol{p}_\tau(\cdot)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$.

Т е о р е м а 0.27. *Пусть уравнение* $\boldsymbol{p}(\cdot)$ *рекуррентно. Тогда* $\boldsymbol{p}(\cdot) \in \mathbb{K}^0$ *в том и только в том случае, если* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathbb{K}(0)$.

Указанная теорема 0.27 является обобщением соответствующего результата Адамова (см. [148]) для уравнения второго порядка с перидическими коэффициентами.

Из теорем 0.26 получаем также следующее утверждение.

Т е о р е м а 0.28. *Пусть* $\boldsymbol{p}(\cdot) \in \boldsymbol{U}$ *и* $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ *— совокупность всех минимальных подмножеств из* $\Omega(\boldsymbol{p})$. *Тогда* $\boldsymbol{p}(\cdot) \in \mathbb{K}^0$ *в том и только в том случае, если при каждом* $\alpha \in \mathbb{I}$ $\ \mathcal{P}_\alpha \cap \mathbb{K}(0) \neq \varnothing$.

Приведено также утверждение о структурной устойчивости множества $\mathbb{K}^0$, которое используется при доказательстве основной теоремы третьего пункта.

Сейчас рассмотрим колеблющееся уравнение

$$x^{(2n)} + a_1 x^{(2n-1)} + \dots + a_{2n-1}\dot{x} + a_{2n}x = 0, \tag{0.33}$$

с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{R}$, и пусть $\alpha_j \pm i\,\omega_j$, $j = 1, \ldots, n,$ — корни его характеристического уравнения.

Т е о р е м а 0.29. *Пусть уравнение* (0.33) *колеблющееся. Тогда для любой функции* $p \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *такой, что для п. в.* $t \geqslant 0$ $\ p(t) \geqslant -\frac{1}{2^n}\prod\limits_{j=1}^{n}\omega_j^2$, *каждое нетривиальное решение уравнения* $x^{(2n)} + a_1 x^{(2n-1)} + \dots + a_{2n-1}\dot{x} + (a_{2n} + p(t))x = 0$ *при любом* $\tau \geqslant 0$ *на отрезке* $[\tau, \tau+\widehat{\vartheta}]$, *где* $\widehat{\vartheta} \doteq 2\pi\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\omega_j}$, *по крайней мере один раз сменит знак.*

Результаты представленные в диссертации опубликованы в работах [25, 26], [39]–[45], [53]–[89]. Все основные результаты, включенные в работу получены автором самостоятельно. Из совместых работ в диссертацию включены лишь работы полученнее автором самостоятельно. В работах [80]–[88] Е. Л Тонкову принадлежит общее руководство работой. В теореме 6.3 использована теорема Л. И. Данилова работы [36] и ее результат принадлежит диссертанту и Л. И. Данилову в равной мере.

Автор выражает искреннюю признательность научному консультанту Е. Л Тонкову за постоянное внимание к работе и плодотворные обсуждения.

Работа поддержана программой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики" (проект 1.5.22), Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 94-01-00843-а, 97-01-00413, 99-01-00454, 03-01-00014), Конкурсным центром фундаментального естествознания (гранты 93-1-46-18, 97-0-1.9, Е00-1.0-5, Е02-1.0-100) и Конкурсным центром Удмуртского государственного университета (грант 97-04)

Глава 1. Мерозначные почти периодические функции

В этой главе определены основные пространства п. п. функций, приведены необходимые сведения и доказан ряд свойств п. п. функций, используемых при исследовании задач оптимального управления п. п. движениями. При этом основное внимание уделено мерозначным п. п. по Степанову функциям, которые при изучении задач управления п. п. движениями будут рассматриваться как (обобщенные) управления. В связи с этим, наряду с определением таких функций и доказательством ряда основных их свойств, которые будут использоваться в последующем, в четвертом параграфе введено понятие игольчатой п. п. вариации, отвечающей заданной мерозначной п. п. функции.

§1. Элементы теории п. п. функций

Приведены определения основных функциональных пространств, а также необходимые сведения теории п. п. функций.

1. Пусть $(\mathfrak{Y},\rho)$ — метрическое пространство. Напомним (см., например,[107, 108]), что непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{Y}$, называется *п. п. по Бору*, если для любого $\varepsilon>0$ множество

$$E_B(f,\varepsilon)\doteq\bigl\{\tau\in\mathbb{R}\colon \sup_{t\in\mathbb{R}}\rho\bigl(f_\tau(t),f(t)\bigr)\leqslant\varepsilon\bigr\}$$

ее ε-п. п. *относительно плотно.* Здесь и далее $f_\tau(\cdot)\doteq f(\cdot+\tau)$ — сдвиг функции $f(\cdot)$ на τ. Совокупность п. п. по Бору функций из $C(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ обозначим $B(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$.

Пусть, далее, $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ — совокупность таких измеримых функций $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{Y}$, что при некотором $y\in\mathfrak{Y}$ отображение $t\mapsto\rho(y,f(t))$ принадлежит $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. На множестве таких функций при каждом фиксированном $l>0$ определено d_l-*расстояние* (при $l=1$ полагаем $d_1\doteq d$)

$$d_l(f,g)\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{1}{l}\int_t^{t+l}\rho(f(s),g(s))\,ds,\quad f,g\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}).$$

Поскольку при любых $l_1<l_2$

$$d_{l_1}(f,g)\leqslant\frac{l_2}{l_1}d_{l_2}(f,g),\quad d_{l_2}(f,g)\leqslant 2d_{l_1}(f,g),\tag{1.1}$$

то d_l-расстояния топологически эквивалентны.

По определению [107] функция $f\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ принадлежит пространству $S_l(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ *п. п. по Степанову* функций, если для любого $\varepsilon>0$ множество

$$E_{S_l}(f,\varepsilon)\doteq\{\tau\in\mathbb{R}\colon d_l(f_\tau,f)\leqslant\varepsilon\}$$

ее ε-п. п. относительно плотно.

В силу неравенств (1.1) достаточно ограничиться рассмотрением пространства п. п. по Степанову функций $S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})\doteq S_1(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$.

Напомним [108, с. 48], что последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ называется f- *возвращающей* для $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, если $\lim\limits_{j\to\infty} d(f_{\tau_j}, f) = 0$ (в случае, когда $f \in B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, эта последовательность является f-возвращающей, если и только если справедливо равенство $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \rho(f_{\tau_j}(t), f(t))) = 0$). Множество $\mathrm{Mod}(f)$, состоящее из таких $\lambda \in \mathbb{R}$, что для каждой f-возвращающей последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ $\lim\limits_{j\to\infty} \exp(i\lambda\tau_j) = 1$, называется *модулем функции* $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Имеет место следующая теорема Фавара [108, с. 48]: если $f, g \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, то $\mathrm{Mod}(g) \subset \mathrm{Mod}(f)$ в том и только в том случае, если всякая f-возвращающая последовательность является g-возвращающей.

В дальнейшем, если не оговорено специально, считаем, что $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство. В этом случае [108] для каждой функции $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ существует *среднее значение* $M\{f(t)\} \doteq \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt \in \mathfrak{Y}$, имеет место соответствие: $f(t) \sim a(0) + 2\sum\limits_{\lambda} a(\lambda)\cos\lambda t + b(\lambda)\sin\lambda t$, в котором ряд называется *рядом Фурье функции* f, элементы $\mathrm{a}(\lambda) \doteq M\{f(t)\cos\lambda t\}$, $b(\lambda) \doteq M\{f(t)\sin\lambda t\} \in \mathfrak{Y}$ — *коэффициентами Фурье*, суммирование ведется по λ принадлежащих множеству $\Lambda(f) \doteq \{\lambda \in \mathbb{R} : \|a(\lambda)\| + \|b(\lambda)\| > 0\}$ *показателей Фурье* этого отображения. Отметим, что если $\lambda \in \Lambda(f)$, то и $-\lambda \in \Lambda(f)$. Поэтому указанное выше соответствие можно представлять в комплексном виде $f(t) \sim \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda)e^{i\lambda t}$, где $c(\lambda) \doteq a(\lambda) - ib(\lambda)$, $c(-\lambda) \doteq a(\lambda) + ib(\lambda)$, если $\lambda \in \Lambda(f)$, и $c(\lambda) = 0$, если $\lambda \notin \Lambda(f)$. Кроме того, множество $\Lambda(f)$ не более чем счетно и, если $\mathrm{Mod}(\Lambda(f))$ — модуль множества $\Lambda(f)$, то есть наименьшая группа по сложению [108, с. 46], содержащая $\Lambda(f)$, то $\mathrm{Mod}(\Lambda(f)) = \mathrm{Mod}(f)$.

2. Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство. Через $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначим совокупность отображений

$$(t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathfrak{Y}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \tag{1.2}$$

которые *п. п. по* $t \in \mathbb{R}$ *в смысле Бора равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$. Напомним (см., например, [47, 187]), что непрерывная функция (1.2) принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_B(f(\cdot, x), \varepsilon)$ относительно плотно. Кроме того, $f \in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ в том и только в том случае, если при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $f(\cdot, x) \in B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \omega_\gamma[f(t, \cdot), \mathfrak{X}]) = 0$, где

$$\omega_\gamma[f(t, \cdot), \mathfrak{X}] \doteq \sup\{\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| : x_1, x_2 \in \mathfrak{X},\ \rho(x_1, x_2) < \gamma\}. \tag{1.3}$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Отображение (1.2) называется *п. п. по* $t \in \mathbb{R}$ *в смысле Степанова равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$, если оно удовлетворяет условиям: при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] = 0$, где

$$\mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] \doteq \sup\{d(f(\cdot, x_1), f(\cdot, x_2)) :\ x_1, x_2 \in \mathfrak{X},\ \rho(x_1, x_2) < \gamma\}. \tag{1.4}$$

Совокупность функций п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ обозначим через $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. *Тогда*

1) *для любого $\varepsilon > 0$ множество*

$$\bigcap_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot,x),\varepsilon) \tag{1.5}$$

относительно плотно;

2) *имеет место равенство* $\lim\limits_{h\to 0}(\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} d(f_h(\cdot,x),f(\cdot,x)))=0$, *где* $f_h(\cdot,x)\doteq f(\cdot+h,x)$, *и* $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} d(f(\cdot,x),0)<\infty$;

3) *равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$ *существует среднее* $M\{f(t,x)\}\doteq\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,x)dt$;

4) *для всякой функции* $g\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *при любом* $\varepsilon>0$ *пересечение множеств* $\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot,x),\varepsilon)$ *и* $\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(g(\cdot,x),\varepsilon)$ *непусто и относительно плотно.*

Доказательство. Так как $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, то, в силу определения 1.1, для заданного $\varepsilon>0$ найдется такое $\gamma>0$, что $\mathfrak{d}_\gamma[f,\mathfrak{X}]<2\varepsilon/3$ и, для фиксированных точек $x_1,\ldots,x_p\in\mathfrak{X}$, образующих γ-сеть компакта $\mathfrak{X}$, $f(\cdot,x_j)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. Следовательно [107], множество $\bigcap\limits_{j=1}^{p} E_S(f(\cdot,x_j),\varepsilon/3)$ относительно плотно, кроме того, при каждом $j\in\{1,\ldots,p\}$ $\lim\limits_{h\to 0} d(f_h(\cdot,x_j),f(\cdot,x_j))=0$ и $d(f(\cdot,x_j),0)<\infty$. Используя соответствующим образом неравенства

$$d(f_\xi(\cdot,x),f(\cdot,x))\leqslant 2d(f(\cdot,x),f(\cdot,x_j))+d(f_\xi(\cdot,x_j),f(\cdot,x_j)),$$
$$d(f(\cdot,x),0))\leqslant d(f(\cdot,x),f(\cdot,x_j))+d(f(\cdot,x),0)),\quad (\xi,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X},$$

учитывая выбор константы $\gamma>0$ и точек $x_1,\ldots,x_p\in\mathfrak{X}$, получим первое и второе утверждения теоремы 1.1.

Далее, так как при каждом $x\in\mathfrak{X}$ функция $f(\cdot,x)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, то среднее значение $M\{f(t,x)\}$ существует. Сейчас зафиксируем τ из относительно плотного множества (здесь см. первое утверждение) $\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot,x),\varepsilon/8)$, и пусть L — число, входящее в определение относительной плотности этого множества. Тогда для любых $p,q\in N$, следуя схеме доказательства существования среднего [47, 107], получим, что

$$\|\frac{1}{p+q}\int_0^{p+q} f(s,x)ds-\frac{1}{p}\int_0^p f(s,x)ds\|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{x\in\mathfrak{X}} d(f_\tau(\cdot,x),f(\cdot,x))+\frac{8L}{p}\sup_{x\in\mathfrak{X}} d(f(\cdot,x),0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{8L}{p}\sup_{x\in\mathfrak{X}} d(f(\cdot,x),0).$$

Из указанных соотношений вытекает третье утверждение.

Приведем, далее, схему доказательства последнего утверждения теоремы 1.1. С этой целью отметим, что используя первое и второе утверждения этой теоремы, можно показать, что, если $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, то для произвольно заданного $\varepsilon>0$ существуют такие числа $L,\eta>0$, что каждый отрезок $[a,a+L]$, $a\in R$, содержит подотрезок длины η, все точки которого принадлежат множеству (1.5). Учитывая указанное свойство, для функций $f,g\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ надо практически повторить доказательство теоремы существования [107, с. 48] общего ε-п. п. для двух функций из пространства $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\square$

Определим ряд Фурье для функций из $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Из теоремы 1.1 получаем, что для любых $f \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ и $g \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ отображение $(t,x) \mapsto g(t)f(t,x)$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ и, следовательно, для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in \mathfrak{X}$, существует $M\{f(t,x)e^{-i\lambda t}\} \doteq F(\lambda,x)$, причем отображение $x \mapsto F(\lambda,x)$, $x \in \mathfrak{X}$ равномерно непрерывно. Теперь рассмотрим множество $\Lambda(f) \doteq \{\lambda \in \mathbb{R}\colon \max\limits_{x\in\mathfrak{X}} \|F(\lambda,x)\| > 0\}$, и пусть $\Lambda(f(\cdot,x))$ — множество показателей Фурье отображения $f(\cdot,x) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ при фиксированном $x \in \mathfrak{X}$. Из непрерывности при каждом λ на компактном множестве $\mathfrak{X}$ функции $x \mapsto \|F(\lambda,x)\|$, по теореме Вейерштрасса [2, с. 251], получим равенство:

$$\Lambda(f) = \bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda\big(f(\cdot,x)\big). \tag{1.6}$$

Кроме того, используя непрерывность функции $x \mapsto \|F(\lambda,x)\|$, несложно показать, что для любого фиксированного не более чем счетного всюду плотного в $\mathfrak{X}$ множества $\{x_1, x_1 \dots\} \subset \mathfrak{X}$ имеет место равенство

$$\Lambda(f) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda\big(f(\cdot,x_j)\big), \tag{1.7}$$

а так как множество $\Lambda(f(\cdot,x_j))$ не более чем счетно, то таковым же является и $\Lambda(f)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть $f \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Тогда ряд в правой части соответствия $f(t,x) \sim \sum\limits_{\lambda} F(\lambda,x)\exp(i\lambda t)$ называется рядом Фурье отображения f, $\Lambda(f)$ — множеством его показателей Фурье, а $F(\lambda,x)$ — коэффициентами Фурье; $\mathrm{Mod}(f) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(f))$ — модуль функции f.

Введем, далее, в рассмотрение ряд функциональных пространств, а затем укажем некоторые подмножества пространства $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

Для фиксированного отрезка $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ совокупность отображений $f\colon \mathbb{T}\times\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, удовлетворяющих условиям: $f(t,\cdot) \in C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ при п. в. $t \in \mathbb{T}$, для каждого $x \in \mathfrak{X}$ отображение $t \mapsto f(t,x) \in \mathfrak{Y}$, $t \in T$, измеримо, и существует такая функция $\psi_f \in L_1(\mathbb{T},\mathbb{R}_+)$, что при п. в. $t \in \mathbb{T}$ $\max\limits_{x\in\mathfrak{X}} \|f(t,x)\| \leqslant \psi_f(t)$. В [22, с. 158] показано, что на $\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ определена норма

$$\|f\|_{\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})} \doteq \int_{\mathbb{T}} \max_{x\in\mathfrak{X}} \|f(t,x)\|dt, \quad f \in \mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y}). \tag{1.8}$$

Указанное нормированное пространство изометрически изоморфно банахову пространству $L_1\big(\mathbb{T}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$ и имеет счетное всюду плотное множество

$$\Upsilon(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) \doteq \Big\{\sum_{j=1}^{N} a_j(\cdot)b_j(\cdot),\ N\in\mathbb{N},\, a_j \in C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}),\, b_j \in C(\mathbb{T},\mathbb{R}),\ j=1,\dots,N\Big\}. \tag{1.9}$$

З а м е ч а н и е 1.1. В дальнейшем $\mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ — совокупность отображений $f\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, удовлетворяющих условиям, аналогичным для функций из пространства $\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, в которых надо заменить $\mathbb{T}$ на $\mathbb{R}$. Используя свойства пространств $L_1(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ и $L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см., например, [14, 27, 46, 94]), можно показать, что отображение $f \mapsto \|f\|_{\mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})}$, определенное равенством (1.8) при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, задает норму на $\mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ и полученное нормированное пространство сепарабельно и изометрически изоморфно $L_1\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$.

Далее, через $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ обозначим совокупность функций $f:\mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, принадлежащих, для каждого отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ пространству $\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Поскольку $\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ изометрически изоморфно $L_1\big(\mathbb{T},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$, то в дальнейшем каждую функцию из $L_1^{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$, и в частности, его подмножества $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))$, представляем в виде отображения (1.2), считая ее элементом пространства $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

Укажем ряд свойств п. п. по Степанову функций из $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))$, то есть таких функций $f\in\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, что для любого $\varepsilon>0$ множество

$$E_S(f,\varepsilon)\doteq\Big\{\tau\in\mathbb{R}\colon\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in\mathfrak{X}}\|f(s+\tau,x)-f(s,x)\|ds\leqslant\varepsilon\Big\}$$

относительно плотно.

О п р е д е л е н и е 1.3. Функция $f\in\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ удовлетворяет *условию* А), если для всякого $\sigma>0$

$$\lim_{\gamma\downarrow0}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}(\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]\colon\ \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]\geqslant\sigma\})\Big)=0. \tag{1.10}$$

Непосредственно из данного определения 1.3 вытекает следующая

Л е м м а 1.1. *Пусть $f\in\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ удовлетворяет условию* А) *и*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}(\max_{x\in\mathfrak{X}}\|f(t,x)\|)<\infty. \tag{1.11}$$

Тогда $\lim\limits_{\gamma\downarrow0}\mathfrak{d}_\gamma[f,\mathfrak{X}]=0$.

Л е м м а 1.2. *Пусть функция f из $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ такая, что при каждом $\varepsilon>0$ множество* (1.5) *относительно плотно. Тогда* $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение первого условия в определении 1.1 для указанной функции f очевидно. Далее, для заданного $\varepsilon>0$, в силу условий наложенных на f, множество $\mathcal{E}(\varepsilon)\doteq\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}}E_S(f(\cdot,x),\varepsilon/3)$ относительно плотно. Пусть $l=l(\varepsilon/3)$ — число, входящее в определение относительной плотности этого множества. Так как множество $\Upsilon([0,l+1]\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ (см. (1.9) при $\mathbb{T}=[0,l+1]$) всюду плотно в пространстве $\mathfrak{V}([0,l+1]\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, то $\lim\limits_{\gamma\downarrow0}\mathfrak{f}(\gamma)=0$, где

$$\mathfrak{f}(\gamma)\doteq\int_0^{l+1}\omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds. \tag{1.12}$$

Теперь выбираем такое $\gamma_0>0$, что $\mathfrak{f}(\gamma)<\varepsilon/3$ для всякого $\gamma\in(0,\gamma_0]$, и произвольного $t\in\mathbb{R}$ фиксируем $\tau\in[-t,-t+l]\bigcap\mathcal{E}(\varepsilon)$. Поэтому для всех $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma$, получаем:

$$\int_t^{t+1}\|f(s,x_1)-f(s,x_2)\|ds\leqslant2\sup_{x\in\mathfrak{X}}d(f_\tau(\cdot,x),f(\cdot,x))+\mathfrak{f}(\gamma)<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3},$$

то есть (см. обозначение (1.4)) $\mathfrak{d}_\gamma[f,\mathfrak{X}]\leqslant\varepsilon$ при $\gamma\in(0,\gamma_0]$.

С л е д с т в и е 1.1. *Имеет место включение* $S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)\subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

Л е м м а 1.3. *Пусть* $f \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$. *Тогда*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds\Big)=0. \qquad (1.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$, то для заданного $\varepsilon>0$ множество $E_S(f,\frac{\varepsilon}{3})$ ее $\frac{\varepsilon}{3}$-п. п. относительно плотно. Поэтому найдется такое $l>0$, что при каждом $t\in\mathbb{R}$ существует точка $\tau\in[-t,-t+l]\bigcap E_S(f,\frac{\varepsilon}{3})$ и, следовательно,

$$\int_t^{t+1}\omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in\mathfrak{X}}\|f_\tau(s,x)-f(s,x)\|ds+\mathfrak{f}(\gamma)<\frac{2\varepsilon}{3}+\mathfrak{f}(\gamma),$$

где $\mathfrak{f}(\gamma)$ задано равенством (1.12). Отсюда, поскольку $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{f}(\gamma)=0$, получаем (1.13).

С л е д с т в и е 1.2. *Всякая функция, принадлежащая* $S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$ *удовлетворяет условию* А).

Л е м м а 1.4. *Пусть* $f\in\mathfrak{V}^{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *удовлетворяет условиям* А) *и* (1.11). *Тогда, если при каждом* $x\in\mathfrak{X}$ $f(\cdot,x)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, *то* $f \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция f удовлетворяет условиям А) и (1.11), то для заданного $\varepsilon>0$ найдется, отвечающее $\sigma\doteq\varepsilon/2$, такое $\gamma>0$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]:\omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]\geqslant\sigma/3\})<\varepsilon/16\varkappa$, где $\varkappa$ — значение выражения в левой части неравенства (1.11). По этому γ строим конечную γ-сеть $x_1,\dots,x_p$ компакта $\mathfrak{X}$ и зафиксируем точку τ из относительно плотного множества $\bigcap\limits_{j=1}^{p}E_S(f(\cdot,x_j),\varepsilon\sigma/24p)$. Далее, по теореме о максимуме [18, с. 27], для каждого $t\in\mathbb{R}$ найдется такая измеримая функция $x:[t,t+1]\to\mathfrak{X}$, что при п. в. $s\in[t,t+1]$ $\max\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|f_\tau(s,x)-f(s,x)\|=\|f_\tau(s,x(s))-f(s,x(s))\|$. Теперь при каждом $j=1,\dots,p$ рассмотрим множество $\mathcal{M}_j(t)\doteq\{s\in[t,t+1]\colon\ \rho(x(s),x_j)<\gamma\}$ и положим $T_1(t)\doteq\mathcal{M}_1(t)$, $T_j(t)\doteq\mathcal{M}_j(t)\diagdown\bigcup\limits_{k=1}^{j-1}\mathcal{M}_k(t)$, $2\leqslant j\leqslant p$. Тогда (напомним, что $\sigma=\varepsilon/2$)

$$\begin{gathered}\int_t^{t+1}\max_{x\in\mathfrak{X}}\|f_\tau(s,x)-f(s,x)\|ds\leqslant\\ \leqslant 2\varkappa\,\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]\colon\ \|f_\tau(s,x(s))-f(s,x(s))\|\geqslant\sigma\}+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\\ \leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\varkappa\sum_{j=1}^{p}\mathrm{mes}\{s\in T_j(t)\colon\ \|f_\tau(s,x(s))-f(s,x(s))\|\geqslant\sigma\}\leqslant\\ \leqslant\frac{\varepsilon}{2}+4\varkappa\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]\colon\ \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]\geqslant\frac{\sigma}{3}\}\Big)+\\ +2\varkappa\sum_{j=1}^{p}\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]\colon\|f_\tau(s,x_j)-f(s,x_j)\|\geqslant\frac{\sigma}{3}\}\leqslant\\ \leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{6\varkappa}{\sigma}\sum_{j=1}^{p}d\big(f_\tau(\cdot,x_j),f(\cdot,x_j)\big)<\varepsilon,\end{gathered}$$

и, тем самым, лемма 1.4 доказана.

Далее, в силу свойств стекловских усреднений для п. п. по Степанову функций со значениями в банаховом пространстве, получаем, что для каждой п. п. по Степанову функции $t \mapsto \mathfrak{f}[t](\cdot) \in C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ найдется такая п. п. по Бору функция $t \mapsto \mathfrak{f}_h[t](\cdot) \in C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ $(h > 0)$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \| \mathfrak{f}[s](\cdot) - \mathfrak{f}_h[s](\cdot)\|_{C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})} ds = 0$. Соответствующий результат справедлив, конечно, и при представлении функции из $S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\big)$ в виде отображения (1.2). Для удобства ссылок приведем это утверждение.

Т е о р е м а 1.2. *Для каждой функции $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$, отвечающее ей при каждом $h > 0$ отображение $(t, x) \mapsto f(t, x; h) \doteq \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} f(s, x) ds \in \mathfrak{Y}$ п. п. по t в смысле Бора равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ и $\lim\limits_{h\downarrow 0}\big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max\limits_{x\in\mathfrak{X}} \|f(s, x) - f(s, x; h)\| ds\big) = 0$.*

3. Укажем связь между п. п. функциями и *п. п. последовательностями.*

Л е м м а 1.5. *Пусть $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Тогда для каждого $a > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ множество*

$$a\mathbb{Z} \bigcap \Big(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}} E_S\big(f(\cdot, x), \varepsilon\big)\Big) \tag{1.14}$$

относительно плотно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную измеримую a-периодическую функцию $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$ такую, что $\mathfrak{g} \doteq \|M\{g(t) \exp(-\frac{2\pi i}{a} t)\}\| > 0$, и покажем, что для произвольного $\varepsilon_1 \in (0, 2\mathfrak{g})$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_1, a) > 0$, что

$$E_S(g, \varepsilon_1) \subset \{\tau \in \mathbb{R}\colon |\tau| < \delta \,(\mathrm{mod}\ a)\}.$$

Действительно, если $\tau \in E_S(g, \varepsilon_1)$, то из неравенств $\mathfrak{g} \cdot |e^{\frac{2\pi i}{a}\tau} - 1| \leqslant d\big(g_\tau(\cdot), g(\cdot)\big) \leqslant \varepsilon_1$ и выбора ε_1 получим, что $|\sin(\frac{\pi\tau}{a})| < \sin(\frac{\pi\varepsilon_1}{4\mathfrak{g}})$. Откуда, выбирая $l \in \mathbb{Z}$ таким, что $|\pi\tau/a - \pi l| \leqslant \pi/2$, будем иметь неравенство $|\tau - la| < \delta \doteq (\varepsilon_1 a/4\mathfrak{g})$, означающее, что τ принадлежит множеству $\{\tau \in \mathbb{R}\colon |\tau| < \delta\ (\mathrm{mod}\ a)\}$.

Далее, так как f принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то в силу теоремы 1.1, найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon/2) > 0$, что $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} d\big(f_h(\cdot, x), f(\cdot, x)\big) \leqslant \varepsilon/2$ при $|h| \leqslant \eta$. Поэтому для всякого $\tau \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S\big(f(\cdot, x), \varepsilon/2\big)$ отрезок $[\tau - \eta, \tau + \eta]$ содержится в $\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S\big(f(\cdot, x), \varepsilon\big)$. Теперь выбираем $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon/2)$ так, чтобы для функции g отвечающее ему $\delta = \delta(\varepsilon_1, a) \in (0, \eta)$. Так как $g \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, то множество $\mathcal{E}(\varepsilon_1) \doteq \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot, x), \varepsilon_1) \bigcap E_S(g, \varepsilon_1)$ относительно плотно. Покажем, что оно содержится в множестве (1.14). В самом деле, как было показано выше, для каждого τ, принадлежащего $\mathcal{E}(\varepsilon_1)$, найдется такое $l \in \mathbb{Z}$, что $|\tau - la| < \delta$, а так как $\delta < \eta$, то $la \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot, x), \varepsilon)$. Нужное включение доказано, а вместе с ним и лемма 1.5.

С л е д с т в и е 1.3. *Пусть $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Тогда для каждого $a > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ множество $aZ \cap E_S(f, \varepsilon)$ непусто и относительно плотно.*

По аналогии с определением числовой п. п. последовательности [139, 159], скажем, что последовательность $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ банахова пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ п. п., если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\mathcal{E}(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}\colon \sup_{m\in\mathbb{Z}} \|x_{m+\mathfrak{n}} - x_m\|_X < \varepsilon\}$$

ее ε-п. п. относительно плотно. Отметим, что для каждой п. п. последовательности $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset X$ существует среднее $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum\limits_{m=0}^{q-1} x_m \in X$, и для любых двух п. п. последовательностей $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \{y_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset X$ при всяком $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{E}(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon) \bigcap \mathcal{E}(\{y_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon) \neq \varnothing$ и относительно плотно.

О п р е д е л е н и е 1.4. Последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ отображений

$$(t, x) \mapsto \mathfrak{f}_m(t, x) \in \mathfrak{Y}, \quad (t, x) \in [0, a] \times \mathfrak{X} \tag{1.15}$$

называется *п. п. равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$, если при каждом $x \in \mathfrak{X}$ последовательность $\{\mathfrak{f}_m(\cdot, x)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ содержится в $L_1([0, a], \mathfrak{Y})$, является п. п.[2] и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \mathfrak{X}] = 0$, где

$$\mathfrak{d}_\gamma[\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \mathfrak{X}] \doteq \sup\Big\{\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^a \|\mathfrak{f}_m(t, x_1) - \mathfrak{f}_m(t, x_2)\| dt : x_1, x_2 \in \mathfrak{X},\ \rho(x_1, x_2) \leqslant \gamma\Big\}.$$

Л е м м а 1.6. *Пусть последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *отображений* (1.15) *п. п. равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$. *Тогда функция* $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, *определенная на каждом множестве* $[ma, (m+1)a] \times \mathfrak{X}$, $m \in \mathbb{Z}$, *равенством*

$$f(t + ma, x) \doteq \mathfrak{f}_m(t, x), \quad (t, x) \in [0, a] \times \mathfrak{X} \tag{1.16}$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathfrak{X}$ справедливо неравенство $d_a\big(f(\cdot + \mathfrak{n}a, x), f(\cdot, x)\big) \overset{(1.16)}{\leqslant} \frac{2}{a} \sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^a \|\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(s, x) - \mathfrak{f}_m(s, x))\| ds$. Кроме того, если $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ и $\rho(x_1, x_2) \leqslant \gamma$, то $d_a\big(f(\cdot, x_1), f(\cdot, x_2)\big) \leqslant \frac{2}{a} \mathfrak{d}_\gamma[\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \mathfrak{X}]$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться неравенствами (1.1).

Из лемм 1.5, 1.6 и теоремы 1.1 получаем

С л е д с т в и е 1.4. *Функция* $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *в том и только в том случае, если последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *отображений* (1.15), *определенная при каждом* $m \in \mathbb{Z}$ *равенством* (1.16) *является п. п. равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$.

С л е д с т в и е 1.5. *Пусть последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *функций* (1.15) *п. п. равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$. *Тогда при каждом* $\varepsilon > 0$ *множество*

$$\bigcap_{x\in\mathfrak{X}} \mathcal{E}\big(\{\mathfrak{f}_m(\cdot, x)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon\big) \tag{1.17}$$

относительно плотно и $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} \Big(\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^a \|\mathfrak{f}_m(t, x)\| dt\Big) < \infty$.

---

[2] То есть для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot, x)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}\colon \sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^a \|\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t, x) - \mathfrak{f}_m(t, x)\| dt < \varepsilon\}$ относительно плотно.

Л е м м а 1.7. *Пусть последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{V}([0,a]\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *такая, что для любого* $\varepsilon > 0$ *множество* (1.17) *непусто и относительно плотно. Тогда эта последовательность п. п. равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}\times\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, заданную равенством (1.16). Несложно показать, что $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ и при каждом $\varepsilon > 0$ множество (1.5) непусто и относительно плотно. Поэтому, по лемме 1.2, $f \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, а в силу следствия 1.4, отвечающая ей последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ будет п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$. □

Сейчас укажем связь множества показателей Фурье п. п. функции и отвечающей ей последовательности.

Л е м м а 1.8. *Если последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ *п. п., то найдется такая последовательность* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$, *что для п. в.* $t \in [0,a]$ *существует* $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{q_l}\sum\limits_{m=0}^{q_l-1}\mathfrak{f}_m(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку данная последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ является п. п., то существует $\lim\limits_{\substack{q\to\infty\\ q\in\mathbb{N}}}\frac{1}{q}\sum\limits_{m=0}^{q-1}\mathfrak{f}_m \in L_1([0,a],\mathfrak{Y})$. Поэтому последовательность отображений $t \mapsto \frac{1}{q}\sum\limits_{m=0}^{q-1}\mathfrak{f}_m(t) \in \mathfrak{Y}$, $t \in [0,a]$ будет фундаментальной по мере, а значит, по теореме Рисса [22, с. 86] найдется такая последовательность $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$, что для п. в. $t \in [0,a]$ существует указанный в лемме 1.8 предел.

С л е д с т в и е 1.6. *Пусть последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ *п. п. Тогда для каждого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *существует такая последовательность* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$, *что для п.в.* $t \in [0,a]$ *существует*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l}\sum_{m=0}^{q_l-1}\mathfrak{f}_m(t)e^{-i\lambda m} \doteq \mathcal{F}_\lambda(t). \tag{1.18}$$

О п р е д е л е н и е 1.5. Пусть последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ является п. п. Тогда множество $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$, состоящее из таких $\lambda \in \mathbb{R}$, что для п.в. $t \in [0,a]$ $\quad\|\mathcal{F}_\lambda(t)\| > 0$, называется множеством показателей Фурье этой последовательности, а множество $\mathrm{Mod}(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) \doteq \mathrm{Mod}\big(\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})\big)$ — ее модулем.

Далее приведем практически элементарное доказательство следующей теоремы И. Я. Шнейберга [50].

Т е о р е м а 1.3. *Пусть функция* $f \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ *и* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$, *где* $\mathfrak{f}_m(t) \doteq f(t+ma)$, $t \in [0,a]$ — *отвечающая ей п. п. последовательность. Тогда*

$$\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) = a\,\Lambda(f) + 2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(t) \sim \sum\limits_{\lambda} A(\lambda)e^{i\lambda t}$. Тогда (см. (1.18)), при каждом $k \in \mathbb{Z}$

$$A(\frac{\lambda}{a}+\frac{2\pi k}{a}) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\int_0^a \mathfrak{f}_m(t)e^{-i\lambda m}e^{-i\frac{\lambda}{a}t}e^{-i\frac{2\pi k}{a}t}dt = \frac{1}{a}\int_0^a \mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t}e^{-i\frac{2\pi k}{a}t}dt,$$

то есть $A(\frac{\lambda}{a}+\frac{2\pi k}{a})$ совпадает с k-ым коэффициентом Фурье отображения (см. (1.18)) $t\mapsto \mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t}$. Кроме того, $\mathfrak{A}\doteq\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\{\lambda\in\mathbb{R}\colon\ A(\frac{\lambda}{a}+\frac{2\pi k}{a})\neq 0\}=a\,\Lambda(f)+2\pi\mathbb{Z}$. Поэтому для доказательства равенства (1.19) достаточно показать, что $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})=\mathfrak{A}$. С этой целью заметим сначала, что $\mathcal{F}_\lambda(t)=0$ для п.в. $t\in[0,a]$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t}$ при п.в. $t\in[0,a]$. Теперь, из определения 1.5 и доказанного выше равенства $A(\frac{\lambda}{a}+\frac{2\pi k}{a})=\frac{1}{a}\int\limits_0^a\mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t}e^{-i\frac{2\pi k}{a}t}dt$, получаем, что $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})\subset\mathfrak{A}$. Далее, если λ не принадлежит $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$, то для п.в. $t\in[0,\mathrm{a}]$ $\mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t}=0$. Следовательно, по теореме о единственности разложения функций в ряд Фурье [51, с. 419] $A(\frac{\lambda}{a}+\frac{2\pi k}{a})=0$ для всех $k\in\mathbb{Z}$. Поэтому $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})=\mathfrak{A}$. $\square$

Рассмотрим далее п. п. равномерно по $x\in\mathfrak{X}$ последовательность отображений (1.15). По определению 1.4 последовательность $\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ является п. п. при каждом $x\in\mathfrak{X}$. Обозначим (см. определение 1.5) через $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ множество ее показателей Фурье.

О п р е д е л е н и е 1.6. Пусть последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ отображений (1.15) п. п. равномерно по $x\in\mathfrak{X}$. Тогда множество

$$\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})\doteq\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda\big(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}\big) \tag{1.20}$$

называется множеством показателей Фурье этой последовательности.

Т е о р е м а 1.4. *Пусть функция* $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *и* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — *отвечающая ей п. п. равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$ *последовательность отображений, определенных при каждом* $m\in\mathbb{Z}$ *равенством* (1.16). *Тогда множество* $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$ *показателей Фурье этой последовательности связано с множеством* $\Lambda(f)$ *показателей Фурье функции* f *равенством* (1.19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы 1.4 вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})&\overset{(1.20)}{=}\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda\big(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}\big)\overset{(1.19)}{=}\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\big(a\,\Lambda\big(f(\cdot,x)\big)+2\pi\mathbb{Z}\big)=\\&=a\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda\big(f(\cdot,x)\big)+2\pi\mathbb{Z}\big)\overset{(1.6)}{=}a\,\Lambda(f)+2\pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

С л е д с т в и е 1.7. *Пусть последовательность отображений* (1.15) *п. п. равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$. *Тогда множество* $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$ *не более чем счетно и для любого фиксированного счетного всюду плотного в* $\mathfrak{X}$ *множества* $\{x_1,x_2,\dots\}\subset\mathfrak{X}$ *имеет место равенство* $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\Lambda\big(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x_j)\}_{m\in\mathbb{Z}}\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим (см. лемму 1.6) отвечающую заданной п. п. последовательности функцию $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Тогда из соотношений

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\Lambda\big(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x_j)\}_{m\in\mathbb{Z}}\big)\overset{(1.19)}{=}a\bigcup_{j=1}^{\infty}\Lambda\big(f(\cdot,x_j)\big)+2\pi\mathbb{Z}\overset{(1.7)}{=}a\,\Lambda(f)+2\pi\mathbb{Z}=\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$$

и теоремы 1.4 получаем утверждение следствия 1.7.

4. Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.5. *Пусть функция f принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ и $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$, где $\mathfrak{f}_m(t)\doteq f_{ma}(t)$, $t\in[0,a]$, — отвечающая этой функции п. п. последовательность. Пусть также задан положительный сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$. Тогда из любого неограниченного множества $Q\subset\mathbb{N}$ можно выделить такую последовательность $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$, что из всякой стремящейся к нулю при $j\to\infty$ последовательности $\{\eta_j'\}_{j=1}^{\infty}\subset[0,a]$ можно выделить такую подпоследовательность $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{j\to\infty}\eta_j=0$, что для п.в. $\vartheta\in[0,a]$ будут выполнены равенства:*

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_j}\int_0^{\eta_j}\|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta)-\mathfrak{f}_m(\vartheta)\|dt\Big)=0, \tag{1.21}$$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\eta_j}\int_0^{\eta_j}\|\mathfrak{f}_{m+k}(t+\vartheta)-\mathfrak{f}_{m+k}(\vartheta)\|dt\Big)=0. \tag{1.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $k\in\mathbb{Z}_+$ рассмотрим последовательность функций $\{g_{m+k}\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset(\mathcal{L},\|\cdot\|_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{L}\doteq L_1\big([0,a],C([0,a],\mathbb{R})\big)$, определенную равенством

$$g_{m+k}(\vartheta,\eta)\doteq\int_0^{\eta}\|\mathfrak{f}_{m+k}(t+\vartheta)-\mathfrak{f}_{m+k}(\vartheta)\|dt,\quad 0\leqslant\vartheta,\eta\leqslant a.$$

Поскольку при всех $k\in\mathbb{Z}_+$ и $\mathfrak{n}\in\mathbb{Z}$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\|g_{m+k+\mathfrak{n}}-g_{m+k}\|_{\mathcal{L}}\doteq\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^a\max_{\eta\in[0,a]}\|g_{m+k+\mathfrak{n}}(\vartheta,\eta)-g_{m+k}(\vartheta,\eta)\|d\vartheta\leqslant$$
$$\leqslant 3\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^a\|\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t)-\mathfrak{f}_m(t)\|dt,$$

то последовательность $\{g_{m+k}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является равностепенно п. п. относительно $k\in\mathbb{Z}_+$ и для любого $\varepsilon>0$ при каждом $k\in\mathbb{Z}_+$ $\mathcal{E}(\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon/3)\subset\mathcal{E}(\{g_{m+k}\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon)$. Поэтому, из определения этой последовательности, следуя схеме доказательства соответствующего утверждения для числовых п. п. последовательностей [139, с.178], можно показать, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $L=L(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что при всех $j\in\mathbb{N}$

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\|\sum_{m=k}^{j+k-1}g_m-\sum_{m=0}^{j-1}g_m\|_{\mathcal{L}}\leqslant 4a^2LF+\frac{\varepsilon}{4}j,$$

где $F\doteq\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\frac{1}{a}\int\limits_t^{t+1}\|f(s)\|ds$. В свою очередь, используя последнее неравенство, можно доказать, что для

$$c_{q+k}(\vartheta,\eta)\doteq\frac{1}{qa}\sum_{m=0}^{q-1}g_{m+k}(\vartheta,\eta)$$

при всех $q \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|c_{q+k} - c_k\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{8a^2 LF}{q}.$$

Следовательно, последовательность $\{c_q\}_{q \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ является фундаментальной. В силу полноты пространства $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$, найдется такая функция $c \in \mathcal{L}$, что

$$\lim_{q \to \infty} \|c_q - c\|_{\mathcal{L}} \doteq \lim_{q \to \infty} \int_0^a \max_{\eta \in [0,a]} \|c_q(\vartheta, \eta) - c(\vartheta, \eta)\| d\vartheta = 0, \tag{1.23}$$

и так как $\lim\limits_{q \to \infty} \big(\sup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \|c_{q+k} - c_q\|_{\mathcal{L}}\big) = 0$, то $\lim\limits_{q \to \infty} \big(\sup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \|c_{q+k} - c\|_{\mathcal{L}}\big) = 0$. Полагая $A \doteq \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $b_q(\vartheta, \eta) \doteq \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c_{q+k}(\vartheta, \eta)$, $q \in Q \subset \mathbb{N}$, $0 \leqslant \vartheta, \eta \leqslant a$, получаем $\lim\limits_{q \to \infty} \|b_q - Ac\|_{\mathcal{L}} = 0$. Учитывая определение $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, из (1.23) и последнего предельного равенства получаем, что найдется такая последовательность $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset Q$, $\lim\limits_{l \to \infty} q_l = \infty$, для которой при п.в. $\vartheta \in [0, a]$ будут иметь место при $l \to \infty$ следующие предельные соотношения:

$$\begin{cases} \frac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l - 1} g_m(\vartheta, \eta) \underset{\eta \in [0,a]}{\rightrightarrows} c(\vartheta, \eta), \\ \frac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l - 1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k g_{m+k}(\vartheta, \eta) \underset{\eta \in [0,a]}{\rightrightarrows} Ac(\vartheta, \eta). \end{cases} \tag{1.24}$$

Рассмотрим далее множество $\{\zeta_\eta, \eta \in (0, a]\} \subset L_1([0, a], \mathbb{R})$, где $\zeta_\eta(\vartheta) \doteq c(\vartheta, \eta)$ при $\vartheta \in [0, a]$. Покажем, что

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \int_0^a \zeta_\eta(\vartheta) d\vartheta = 0. \tag{1.25}$$

Действительно, при каждом $\eta \in (0, a]$ имеем следующие соотношения:

$$\int_0^a \zeta_\eta(\vartheta) d\vartheta \overset{(1.24)}{=} \frac{1}{\eta} \int_0^a \Big(\lim_{l \to \infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l - 1} \int_0^\eta \|\mathfrak{f}_m(t + \vartheta) - \mathfrak{f}_m(\vartheta)\| dt \Big) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\eta} \lim_{l \to \infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l - 1} \int_0^a \Big(\int_0^\eta \|\mathfrak{f}_m(t + \vartheta) - \mathfrak{f}_m(\vartheta)\| dt \Big) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\eta} \lim_{l \to \infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l - 1} \int_0^\eta \Big(\int_0^a \|\mathfrak{f}_m(t + \vartheta) - \mathfrak{f}_m(\vartheta)\| d\vartheta \Big) dt \leqslant \sup_{t \in [0, \eta]} d_a(f_t, f).$$

Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{\eta \downarrow 0} \big(\sup\limits_{t \in [0, \eta]} d_a(f_t, f) \big) = 0$, получаем равенство (1.25), из которого, в свою очередь, следует, что из любой стремящейся к нулю на $(0, a]$ последовательности можно выделить такую подпоследовательность $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$, стремящуюся к нулю при $j \to \infty$, что для п.в. $\vartheta \in [0, a]$ $\lim\limits_{j \to \infty} \zeta_{\eta_j}(\vartheta) = 0$. Теперь из (1.25) получаем равенства (1.21) и (1.22).

С л е д с т в и е 1.8. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$, $\{\mathfrak{f}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ — *отвечающая ей п. п. последовательность отображений, заданных при каждом* $m \in \mathbb{Z}$ *равенством* (1.15). *Пусть задана также последовательность* $\{q_l'\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\lim\limits_{l \to \infty} q_l' = \infty$.

Тогда найдутся подпоследовательность $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{q'_l\}_{l=1}^{\infty}$ и измеримое множество $\Xi \subset [0,a]$, $\mathrm{mes}\,\Xi = a$, такие, что в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ и любой заданной п. п. последовательности $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{X}$ существует $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta, x_m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольную последовательность $\{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$, $\lim\limits_{j\to\infty} \eta'_j = \infty$. В силу теоремы 1.5 найдутся такие подпоследовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{q'_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty}$ и измеримое множество $\Xi \subset [0,a]$, $\mathrm{mes}\,\Xi = a$, что в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ будет выполняться равенство

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \frac{1}{\eta_j} \int_0^{\eta_j} \max_{x\in\mathfrak{X}} \|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta, x) - \mathfrak{f}_m(\vartheta, x)\| dt\Big) = 0. \tag{1.26}$$

Далее, так как отвечающее при каждом $h > 0$ функции f стекловское усреднение (см. теорему 1.2) принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то отвечающая ему последовательность отображений

$$(\vartheta, x) \mapsto \mathfrak{f}_m(\vartheta, x; h) \doteq \frac{1}{h}\int_0^h \mathfrak{f}_m(t+\vartheta, x)dt,\ (\vartheta, x) \in [0,a]\times\mathfrak{X},$$

принадлежит $C([0,a]\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и является п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$. Следовательно, в каждой точке $\vartheta \in [0,a]$ при любой заданной п. п. последовательности $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{X}$ будет существовать

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta, x_m; h) \doteq \mathfrak{p}(\vartheta, h) \in \mathfrak{Y}.$$

Покажем сейчас, что в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ последовательность $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{Y}$, в которой

$$v_m \doteq \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta, x_m),$$

будет фундаментальной. Действительно, в силу (1.26) для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и $l_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $l \geqslant l_1$ будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}} \int_0^{\eta_{j_\varepsilon}} \max_{x\in\mathfrak{X}} \|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta, x) - \mathfrak{f}_m(\vartheta, x)\| dt < \varepsilon/3. \tag{1.27}$$

Далее, из существования предела $\mathfrak{p}(\vartheta, h)$ при $h = \eta_{j_\varepsilon}$ вытекает, что найдется такое $l_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $l \geqslant l_2$ и каждом $p \in \mathbb{N}$

$$\|\frac{1}{q_{l+p} a} \sum_{m=0}^{q_{l+p}-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta, x_m; \eta_{j_\varepsilon}) - \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta, x_m; \eta_{j_\varepsilon})\| < \varepsilon/3. \tag{1.28}$$

Теперь, поскольку при $l \geqslant \widehat{l} \doteq \max(l_1, l_2)$ и каждом $p \in \mathbb{N}$

$$\|v_{l+p} - v_l\| \leqslant \frac{1}{q_{l+p} a} \sum_{m=0}^{q_{l+p}-1} \frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}} \int_0^{\eta_{j_\varepsilon}} \|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta, x_m) - \mathfrak{f}_m(\vartheta, x_m)\| dt +$$

$$+\|\frac{1}{q_{l+p}a}\sum_{m=0}^{q_{l+p}-1}\mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m;\eta_{j_\varepsilon})-\frac{1}{q_l a}\sum_{m=1}^{q_l-1}\mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m;\eta_{j_\varepsilon})\|+$$

$$+\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}}\|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x_m)-\mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m)\|dt\overset{(1.28)}{<}$$

$$<\varepsilon/3+\frac{1}{q_{l+p}a}\sum_{m=0}^{q_{l+p}-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}}\max_{x\in\mathfrak{X}}\|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x)-\mathfrak{f}_m(\vartheta,x)\|dt+$$

$$+\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}}\max_{x\in\mathfrak{X}}\|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x)-\mathfrak{f}_m(\vartheta,x)\|dt\overset{(1.27)}{<}\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon,$$

то последовательность $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является фундаментальной, а значит, в силу полноты пространства $\mathfrak{Y}$, указанный в следствии 1.8 предел существует.

§2. Пространство мерозначных п. п. функций

Введено пространство мерозначных п. п. отображений и исследованы основные свойства этого пространства.

1. Для фиксированного $\mathcal{U}\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ определим (см., например, [22]) следующие множества:

$$\operatorname{frm}(\mathcal{U})\doteq\{\nu\in\operatorname{frm}(\mathbb{R}^m)\colon\ \operatorname{supp}(\nu)\subset\mathcal{U}\},\quad \operatorname{rpm}(\mathcal{U})\doteq\{\nu\in\operatorname{rpm}(\mathbb{R}^m)\colon\ \operatorname{supp}(\nu)\subset\mathcal{U}\},$$

где $\operatorname{frm}(\mathbb{R}^m)$ — линейное пространство мер Радона на $\mathbb{R}^m$, $\operatorname{rpm}(\mathbb{R}^m)$ — его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона, и $\operatorname{supp}(\nu)$ — носитель меры ν. Через $\operatorname{DIR}(\mathcal{U})$ обозначим совокупность мер Дирака δ_u, сосредоточенных в точках $u\in\mathcal{U}$.

В дальнейшем, в силу теоремы Рисса [22, с. 138], каждую меру $\nu\in\operatorname{frm}(\mathcal{U})$ рассматриваем как отображение $c(\cdot)\mapsto\langle\nu,c(u)\rangle\doteq\int\limits_{\mathcal{U}}c(u)\nu(du)$, $c(\cdot)\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$, принадлежащее $\big(C(\mathcal{U},\mathbb{R})\big)^*$, и в связи с этим ее вариацию $|\nu|(\mathcal{U})$ определяем равенством: $|\nu|(\mathcal{U})\doteq\sup\limits_{\|c\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})}\leqslant 1}|\langle\nu,c(u)\rangle|$. На $\operatorname{frm}(\mathcal{U})$ определена (слабая) норма [22, с. 138]

$$|\nu|_w\doteq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{-j}}{1+\|c_j\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})}}\cdot|\langle\nu,c_j(u)\rangle|,\ \ \nu\in\operatorname{frm}(\mathcal{U}),$$

где функции c_j принадлежат счетному всюду плотному в $C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ множеству $\mathfrak{C}(\mathcal{U},\mathbb{R})$ из $C(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Нормированное пространство $(\operatorname{frm}(\mathcal{U}),|\cdot|_w)$ сепарабельно, и если

$$\rho_w(\nu_1,\nu_2)\doteq|\nu_1-\nu_2|_w,\ \ \nu_1,\nu_2\in\operatorname{frm}(\mathcal{U}),$$

то метрическое пространство $(\operatorname{rpm}(\mathcal{U}),\rho_w)$ является компактным и отображение $u\mapsto\delta_u\in\operatorname{DIR}(\mathcal{U})\subset(\operatorname{rpm}(\mathcal{U}),\rho_w)$, $u\in\mathcal{U}$, является [158, с. 147] гомеоморфизмом.

Обозначим, далее, через $\mathbb{M}\doteq\mathbb{M}\big(\mathbb{R},\operatorname{frm}(\mathcal{U})\big)$ совокупность таких измеримых отображений $\mu\colon\ \mathbb{R}\to(\operatorname{frm}(\mathcal{U}),|\cdot|_w)$, что $\|\mu\|\doteq\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}}|\mu(t)|(\mathcal{U})<\infty$. Можно показать, что $\mu \in \mathbb{M}$ в том и только в том случае, если для всякой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u) \rangle$, $t \in \mathbb{R}$ измеримо. Кроме того, если $\mu \in \mathbb{M}$, то для любой функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1 \doteq \mathfrak{V}(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$ (см. замечание 1.1) отображение

$$t \mapsto \langle \mu(t), \varphi(t,u) \rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} \varphi(t,u)\mu(t)(du) \tag{2.1}$$

принадлежит $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Следуя схеме доказательства теоремы Данфорда — Петтиса [22, с. 299] о структуре пространства $\big(\mathfrak{V}(\mathbb{T} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})\big)^*$ для случая, когда $\mathbb{T}$ — отрезок прямой, можно показать, что $\mathbb{M} \cong \mathfrak{V}_1^*$. Поэтому каждое $\mu \in \mathbb{M}$ рассматриваем как функцию $\varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \mu(t), \varphi(t,u) \rangle dt \overset{(2.1)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\int\limits_{\mathfrak{U}} \varphi(t,u)\mu(t)(du) \big) dt$, $\varphi \in \mathfrak{V}_1$, принадлежащую пространству $\mathfrak{V}_1^*$. Далее, отображение

$$\mu \mapsto \|\mu\|_w \doteq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1 + \|\varphi_j\|_{\mathfrak{V}_1}} \cdot \Big| \int_{\mathbb{R}} \langle \mu(t), \varphi_j(t,u) \rangle dt \Big|, \ \mu \in \mathbb{M},$$

где $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathfrak{V}_1$ — счетное всюду плотное множество в $\mathfrak{V}_1$, задает норму в $\mathbb{M}$. Нормированное пространство $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_w)$ является сепарабельным, и два его подмножества $\mathcal{M} \doteq \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, $\mathfrak{S}_1 \doteq \{\mu \in \mathbb{M} \colon \ \|\mu\| \leqslant 1\}$ компактны, причем, если $\mu_j, \mu \in \mathfrak{S}_1$, $j \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{j \to \infty} \|\mu_j - \mu\|_w = 0$ в том и только в том случае, если для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1$ справедливо равенство

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \langle \mu_j(t), \varphi(t,u) \rangle dt = \int_{\mathbb{R}} \langle \mu(t), \varphi(t,u) \rangle dt. \tag{2.2}$$

Пусть, далее,

$$\mathcal{M}^{(1)} \doteq \big\{ \mu \in \mathcal{M} \colon \ \mu(t) = \delta_{u(t)} \text{ при п.в. } t \in \mathbb{R} \text{ и некотором } u \colon \ \mathbb{R} \to \mathfrak{U} \big\}$$

и $\mathcal{U}$ — совокупность всех измеримых отображений $u \colon \ \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$. Тогда, во-первых, если $\mu(\cdot) = \delta_{u(\cdot)} \in \mathcal{M}^{(1)}$, то $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, а во-вторых, отображение $u(\cdot) \mapsto \delta_{u(\cdot)} \in \mathcal{M}^{(1)}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ биективно. Следовательно, каждое $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ можно рассматривать как элемент из $\mathcal{M}^{(1)} \subset \mathcal{M}$, отождествляя его с отображением $t \mapsto \delta_{u(t)}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Определим *мерозначные п. п. функции.*

О п р е д е л е н и е 2.1. Отображение $\mu \in \mathbb{M} \doteq \mathbb{M}\big(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$ называется п. п. по Степанову, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u) \rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Совокупность п. п. по Степанову отображений из $\mathbb{M}$ обозначим $\mathrm{APM} = \mathrm{APM}(\mathfrak{U})$ и через $\mathrm{APM}_1 = \mathrm{APM}_1(\mathfrak{U})$ — множество $\mathrm{APM} \cap \mathcal{M}$.

З а м е ч а н и е 2.1. Несложно показать, что $\mu \in \mathrm{APM}$ в том и только в том случае, если для каждой функции $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ (напомним, что $\mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ — счетное всюду плотное в $C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ множество функций из $C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$) отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u) \rangle$ принадлежит $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

З а м е ч а н и е 2.2. Аналогично определению 2.1 можно задать п. п. мерозначные функций и в смысле Бора. Отображение $\mu \in C\big(\mathbb{R}, (\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)\big)$ будет называться п. п. по Бору (пишем $\mu \in B(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, если для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ (или $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$) отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u) \rangle$ принадлежит $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

З а м е ч а н и е 2.3. Из определения пространства $\mathbb{M}(\mathbb{R},(\mathrm{frm}(\mathcal{U}),|\cdot|_w))$ следует возможность задания на нем d_{ρ_w}- расстояния

$$d_{\rho_w}(\mu,\nu)\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\mu(s)-\nu(s)|_w ds,\quad \mu,\nu\in\mathbb{M}. \tag{2.3}$$

Поэтому почти периодичность μ из $\mathbb{M}$ можно определить в смысле пространства $S(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$, то есть (см. п. 1 из § 1) $\mu\in S(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$, если для любого $\varepsilon>0$ множество $E_S(\mu,\varepsilon)\doteq\{\tau\in\mathbb{R}\colon\ d_{\rho_w}(\mu_\tau,\mu)\leqslant\varepsilon\}$ относительно плотно.

Л е м м а 2.1. *Отображение μ принадлежит $S(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ в том и только в том случае, если оно п.п. по Степанову в смысле определения* 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mu\in\mathrm{APM}$, то, используя неравенство

$$d_{\rho_w}(\mu_\tau,\mu)\leqslant\sum_{j=1}^{j_0}\frac{2^{-j}}{1+\|c_j\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu_\tau(s)-\mu(s),c_j(u)\rangle|ds+\|\mu\|\cdot\sum_{j=j_{0+1}}^{\infty}2^{-j+1},$$

выполненное при каждом $j\in\mathbb{N}$, несложно показать, что $\mu\in S(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$. Обратно, если $\mu\in S(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$, то для доказательства того, что $\mu\in\mathrm{APM}$ достаточно воспользоваться неравенством

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu_\tau(s)-\mu(s),c(u)\rangle ds\leqslant 2\|\mu\|\cdot\|c-c_{j_0}\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})}+2^{j_0}(1+\|c_{j_0}\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})})d_{\rho_w}(\mu_\tau,\mu),$$

выполненным для всякой функции $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ и любых $j_0\in\mathbb{N}$, $\tau\in\mathbb{R}$. $\square$

Таким образом, почти периодичность отображения $\mu\in\mathbb{M}$ в смысле определения 2.1 равносильна его почти периодичности в смысле пространства $S(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$. Однако, при исследовании структуры пространства мерозначных п. п. отображений удобнее пользоваться определением 2.1. Отметим также, что доказанная лемма 2.1 обосновывает некоторые определения пространства APM, например, следующее

О п р е д е л е н и е 2.2. Множество $\mathfrak{A}\subset\mathrm{APM}$ называется равностепенно п. п., если совокупность отображений $\big\{t\mapsto\langle\mu(t),c(u)\rangle,\ \mu(\cdot)\in\mathfrak{A}\big\}\subset S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, отвечающая каждой функции $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$, равностепенно п. п.

Пусть, далее,

$$\mathrm{APM}_1^{(1)}\doteq\{\mu\in\mathrm{APM}_1\colon\ \mu(t)=\delta_{u(t)}\ \text{при п. в. } t\in\mathbb{R}\text{ и некотором } u:\mathbb{R}\to\mathcal{U}\}. \tag{2.4}$$

Л е м м а 2.2. *Функция $u(\cdot)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ в том и только в том случае, если отображение $\delta_{u(\cdot)}\in\mathrm{APM}_1^{(1)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_{u(\cdot)}\in\mathrm{APM}_1^{(1)}$. Так как $\mathrm{APM}_1^{(1)}\subset\mathcal{M}^{(1)}$, то функция $u\colon\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ измерима и отображение $t\mapsto\langle\delta_{u(t)},c(u)\rangle\doteq c(u(t))$ принадлежит $S(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ для каждой функции $c(\cdot)\in C(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$. В частности, при $c(u)\equiv u$ получаем, что $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$. Пусть, сейчас, $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$. Покажем, что $\delta_{u(\cdot)}\in\mathrm{APM}_1^{(1)}$. Действительно, так как $\mathcal{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, то каждая функция из $C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ равномерно непрерывна. Следовательно, если $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $|c(u_1)-c(u_2)|<\varepsilon/2$, если $|u_1-u_2|\leqslant\delta$, $u_1,u_2\in\mathcal{U}$. Докажем, что относительно плотное множество $E_S(u,\delta\varepsilon/4\gamma)$, где $\gamma\doteq\|c\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})}$, содержится в $E_S(c\circ u,\varepsilon)$. В самом деле, пусть $\tau \in E_S(u, \delta\varepsilon/4\gamma)$ и $\mathcal{F}(t) \doteq \{s \in [t, t+1] : |u_\tau(s) - u(s)| > \delta\}$. Тогда из соотношений:

$$d(c \circ u_\tau, c \circ u) \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathcal{F}(t)} |c(u(s+\tau)) - c(u(s))| ds + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{2\gamma}{\delta} d(u_\tau, u) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

получаем нужное включение. Для завершения доказательства леммы 2.2 осталось воспользоваться равенством $\langle \delta_{u(t)}, c(u) \rangle = c(u(t))$, $t \in \mathbb{R}$ и определением 2.1.

Таким образом, лемма 2.2 показывает, что существует взаимно однозначное соответствие между $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ и $\mathrm{APM}_1^{(1)}$. Поэтому каждую функцию $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ будем рассматривать также как элемент множества $\mathrm{APM}_1^{(1)} \subset \mathrm{APM}_1$, отождествляя его с отображением $\delta_{u(\cdot)}$. В этом смысле $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ вкладывается в $\mathrm{APM}_1 \subset \mathrm{APM}$.

Далее, через $S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$, где $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство, обозначаем совокупность отображений $(t, x) \mapsto \mu(t, x) \in \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$, которые п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$, то есть (см. определение 1.1 при $\mathfrak{Y} = \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$): для каждого $x \in \mathfrak{X}$ $\ \mu(\cdot, x) \in S\big(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$ и $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[\mu, \mathfrak{X}] = 0$, где (см. обозначение (2.3))

$$\mathfrak{d}_\gamma[\mu, \mathfrak{X}] \doteq \sup\{d_{\rho_w}\big(\mu(\cdot, x_1), \mu(\cdot, x_2)\big) \colon x_1, x_2 \in \mathfrak{X},\ \rho(x_1, x_2) \leqslant \gamma\}.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением, важного для задач оптимального управления п. п. движениями выпуклого подмножества $S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$ пространства $S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$, то есть отображений $\mu \colon \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \to \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, удовлетворяющих условиям: при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $\ \mu(\cdot, x) \in S\big(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$ и $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[\mu, \mathfrak{X}] = 0$.

Л е м м а 2.3. *Для того чтобы* $\mu \in S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции* $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ *отображение*

$$(t, x) \mapsto \langle \mu(t, x), c(u) \rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} c(u) \mu(t, x)(du)$$

принадлежало пространству $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu \in S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$. Тогда (см. лемму 2.1) при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $\ \mu(\cdot, x) \in \mathrm{APM}_1$. Поэтому, по определению 2.1, для всякой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto f_c(t, x) \doteq \langle \mu(t, x), c(u) \rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Далее, из неравенства (см. (2.3), (1.4) и определение нормы $|\cdot|_w$) $\mathfrak{d}_\gamma[f_c, \mathfrak{X}] \leqslant 2\|c - c_{j_0}\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})} + 2^{j_0}\big(1 + \|c_{j_0}\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}\big)^{-1} \mathfrak{d}_\gamma[\mu, \mathfrak{X}]$, выполненного при каждом $j_0 \in \mathbb{N}$ и $c_{j_0} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, в силу равенства $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[\mu, \mathfrak{X}] = 0$, получаем, что $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[f_c, \mathfrak{X}] = 0$ и, значит (см. определение 1.1), $f_c \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathbb{R})$. Пусть, теперь, для всякой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ $\ f_c \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathbb{R})$. Тогда из определений 1.1, 2.1 (см. также лемму 2.1) получаем, что при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $\ \mu(\cdot, x) \in S\big(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$. Кроме того, поскольку $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[f_c, \mathfrak{X}] = 0$ и при каждом $j_0 \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{d}_\gamma[\mu, \mathfrak{X}] \leqslant \sum_{j=1}^{j_0} \frac{2^{-j}}{1 + \|c_j\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}} \cdot \mathfrak{d}_\gamma[f_c, \mathfrak{X}] + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{-j+1},$$

то $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[\mu, \mathfrak{X}] = 0$. То есть $\mu \in S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$.

З а м е ч а н и е 2.4. Утверждение леммы 2.3 можно принять за определение пространства $S\bigl(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\operatorname{rpm}(\mathcal{U})\bigr)$, и в дальнейшем аналогичным образом определяем его подмножество (здесь см. следствие 1.1) $S\bigl(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\operatorname{rpm}(\mathcal{U})\bigr)$, состоящее из таких отображений $(t,x)\mapsto\mu(t,x)\in\operatorname{rpm}(\mathcal{U})$, что для каждой функции $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ отображение $(t,x)\mapsto\langle\mu(t,x),c(u)\rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$. Отметим также, что аналогичное лемме 2.3 утверждение верно и для $\mu\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\operatorname{frm}(\mathcal{U}))$, если $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|\mu(\cdot,x)\|<\infty$.

3. Определим ряд Фурье для $\mu\in\mathrm{APM}$. По определению 2.1 для каждой функции $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ отображение $t\mapsto\langle\mu(t),c(u)\rangle$ принадлежит $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и, следовательно, имеет место соответствие: $\langle\mu(t),c(u)\rangle\sim\mathbb{A}_\mu[c,0]+2\sum\limits_{\lambda}\mathbb{A}_\mu[c,\lambda]\cos\lambda t+\mathbb{B}_\mu[c,\lambda]\sin\lambda t$, в котором

$$\mathbb{A}_\mu[c,\lambda]\doteq M\bigl\{\langle\mu(t),c(u)\rangle\cos\lambda t\bigr\},\ \mathbb{B}_\mu[c,\lambda]\doteq M\bigl\{\langle\mu(t),c(u)\rangle\sin\lambda t\bigr\},\tag{2.5}$$

а суммирование ведется по λ принадлежащих множеству

$$\Lambda(\mu,c)\doteq\bigl\{\lambda\in\mathbb{R}\colon\ |\mathbb{A}_\mu[c,\lambda]|+|\mathbb{B}_\mu[c,\lambda]|>0\bigr\}$$

показателей Фурье этого отображения. Так как $\mu\in\mathbb{M}$, то из (2.5) получаем, что при каждом заданном $\lambda\in\mathbb{R}$ $\mathbb{A}_\mu[\cdot,\lambda]$, $\mathbb{B}_\mu[\cdot,\lambda]\in\bigl(C(\mathcal{U},\mathbb{R})\bigr)^*$. Поэтому, в силу теоремы Рисса [22, с. 138], существуют такие меры $\alpha_\lambda,\beta_\lambda\in\operatorname{frm}(\mathcal{U})$, что для всех $c\in C(\mathcal{U},R)$

$$\mathbb{A}_\mu[c,\lambda]=\langle\alpha_\lambda,c(u)\rangle,\ \mathbb{B}_\mu[c,\lambda]=\langle\beta_\lambda,c(u)\rangle.\tag{2.6}$$

Теперь рассмотрим множество

$$\Lambda(\mu)\doteq\bigl\{\lambda\in\mathbb{R}\colon\ |\alpha_\lambda|(\mathcal{U})+|\beta_\lambda|(\mathcal{U})|>0\bigr\}.\tag{2.7}$$

Из определения вариации меры, а также множеств $\Lambda(\mu)$ и $\Lambda(\mu,c)$ вытекает равенство

$$\Lambda(\mu)=\bigcup_{c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})}\Lambda(\mu,c).\tag{2.8}$$

Л е м м а 2.4. *Множество $\Lambda(\mu)$ не более чем счетно и для любого фиксированного счетного всюду плотного в $C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ множества $\mathfrak{C}(\mathcal{U},\mathbb{R})\subset C(\mathcal{U},\mathbb{R})$*

$$\Lambda(\mu)=\bigcup_{c\in\mathfrak{C}(\mathcal{U},\mathbb{R})}\Lambda(\mu,c).\tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение

$$\bigcup_{c\in\mathfrak{C}(\mathcal{U},\mathbb{R})}\Lambda(\mu,c)\doteq\mathfrak{A}\subset\Lambda(\mu)$$

очевидно. Теперь, если $\lambda\notin\mathfrak{A}$, то в силу (2.6) $\langle\alpha_\lambda,c(u)\rangle=0$, $\langle\beta_\lambda,c(u)\rangle=0$ для всех функций $c\in\mathfrak{C}(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Отсюда, по теореме Хана–Банаха [94], получаем, что $|\alpha_\lambda|(\mathcal{U})=|\beta_\lambda|(\mathcal{U})|=0$ и, значит, $\lambda\notin\Lambda(\mu)$. Тем самым равенство (2.9) доказано, и так как множество $\Lambda(\mu,c)$ не более чем счетное множество, то в силу этого равенства множество $\Lambda(\mu)$ также не более чем счетно. $\square$

В следующем определении см. (2.6)–(2.9).

О п р е д е л е н и е 2.3. Пусть $\mu \in \mathrm{APM}$. Тогда ряд в правой части следующего соответствия:

$$\mu(t) \sim \alpha_0 + \sum_{\lambda} \alpha_\lambda \cos \lambda t + \beta_\lambda \sin \lambda t, \tag{2.10}$$

называется *рядом Фурье отображения* μ, меры $\alpha_\lambda, \beta_\lambda \in \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ — коэффициентами Фурье, не более чем счетное множество $\Lambda(\mu)$ — множеством его показателей Фурье.

З а м е ч а н и е 2.5. В дальнейшем соответствие (2.10) для $\mu \in \mathrm{APM}$ записываем в комплексном виде $\mu(t) \sim \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \nu_\lambda \exp(i\lambda t)$, где $\nu_\lambda \doteq \alpha_\lambda - i\beta_\lambda$, $\nu_{-\lambda} \doteq \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$, если $\lambda \in \Lambda(\mu)$, и считаем меры ν_λ нулевыми, если $\lambda \notin \Lambda(\mu)$.

Далее, если $\mu \in \mathrm{APM}$, то $\mathrm{Mod}(\mu) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(\mu))$ — модуль отображения μ. Из этого определения и равенства (2.8) вытекает

Л е м м а 2.5. *Пусть* $\mu, \nu \in \mathrm{APM}$ *и* $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu, c)) \subset \mathrm{Mod}(\Lambda(\nu, c))$ *для всех* $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$. *Тогда* $\mathrm{Mod}(\mu) \subset \mathrm{Mod}(\nu)$.

Рассмотрим, далее, $\mu \in S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$. По лемме 2.3 (см. также определение 1.1), при каждом $x \in \mathfrak{X}$ отображение $\mu(\cdot, x) \in \mathrm{APM}_1$. Поэтому, если $\Lambda\big(\mu(\cdot, x), c\big)$ — множество показателей Фурье п. п. по Степанову функции $t \mapsto \langle \mu(t, x), c(u)\rangle$, то

$$\Lambda\big(\mu(\cdot, x)\big) = \bigcup_{c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})} \Lambda(\mu(\cdot, x), c). \tag{2.11}$$

Принимая во внимание, что $S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big) \subset S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$, и определение 1.2 при $\mathfrak{Y} \doteq \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ (см. также равенство (1.6) при $f = \mu$), следующее множество:

$$\Lambda(\mu) \doteq \bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda\big(\mu(\cdot, x)\big) \overset{(2.11)}{=} \bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \bigcup_{c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})} \Lambda(\mu(\cdot, x), c) \tag{2.12}$$

называем множеством показателей Фурье отображения $\mu \in S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$.

Отметим, что множество $\Lambda(\mu)$, отвечающее $\mu \in S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$, не более чем счетно. Это следует из равенства $\Lambda(\mu) = \bigcup\limits_{c\in\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R})} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Lambda(\mu(\cdot, x_j), c)$, где $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathfrak{X}$ — счетное всюду плотное множество в $\mathfrak{X}$, которое можно получить, если воспользоваться последовательно равенством (2.9) для отображения $t \mapsto \mu(t, x)$, а затем (1.7) для функции $(t, x) \mapsto f(t, x) \doteq \langle \mu(t, x), c(u)\rangle$.

В дальнейшем будут рассматриваться также п. п. последовательности $\{\nu_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w)$, которые удобно записывать в виде $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$. В соответствии со сказанным в §1 (см. п. 3), последовательность $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w)$ является п. п., если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\mathcal{E}\big(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon\big) \doteq \Big\{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}\colon \sup_{m\in\mathbb{Z}} |\nu(m + \mathfrak{n}) - \nu(m)|_w \leqslant \varepsilon\Big\}$$

ее ε-п. п. относительно плотно. Используя лемму 2.1, следствия 1.3 и 1.4, легко видеть, что последовательность $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ п. п. в том и только в том случае, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ (или (см. замечание 2.1) $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$) числовая последовательность $\{\langle \nu(m), c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. Следовательно, если

$\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — п. п. последовательность, то для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ определено множество $\Lambda(\{\langle\nu(m),c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}})\doteq\big\{\lambda\in\mathbb{R}\colon \lim\limits_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum\limits_{m=0}^{q-1}\langle\nu(m),c(u)\rangle e^{-i\lambda m}\neq 0\big\}$ — множество показателей Фурье п. п. последовательности $\{\langle\nu(m),c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}$. При этом, если $\nu\colon\ \mathbb{R}\to\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ — отвечающее п. п. последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ отображение, то есть $\nu(t)=\nu(m)$ при всех $t\in[ma,(m+1)a]$ $(a>0)$, то $\nu\in\mathrm{APM}_1$ и по теореме 1.3, для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$

$$\Lambda\big(\{\langle\nu(m),c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}\big)=a\Lambda(\nu,c)+2\pi\mathbb{Z},$$

где $\Lambda(\nu,c)$ — множество показателей Фурье отображения $t\mapsto\langle\nu(t),c(u)\rangle$. Полагая

$$\Lambda(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\doteq\bigcup_{c\in\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R})}\Lambda\big(\{\langle\nu(m),c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}\big),$$

по лемме 2.4 получим, что

$$\Lambda(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})=a\Lambda(\nu)+2\pi\mathbb{Z},$$

и в дальнейшем так определенное (не более чем счетное) множество $\Lambda(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ называем *множеством показателей Фурье п. п. последовательности* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ и $\mathrm{Mod}\big(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\big)\doteq\mathrm{Mod}\big(\Lambda(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big)$ — модулем этой последовательности.

Из данного определения вытекает, что, если $\frac{2\pi}{a}$ принадлежит $\mathrm{Mod}(\Delta)$, отвечающего фиксированному подмножеству $\Delta\subset\mathbb{R}$, то $\mathrm{Mod}\big(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\big)\subset a\,\mathrm{Mod}(\Delta)$ в том и только в том случае, если $\mathrm{Mod}(\nu)\doteq\mathrm{Mod}(\Lambda(\nu))\subset\mathrm{Mod}(\Delta)$.

4. Покажем, что каждое $\mu\in\mathrm{APM}$ можно проаппроксимировать мерозначным тригонометрическим полиномом. Действительно, рассмотрим (см. замечание 2.5) соответствие: $\mu(t)\sim\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}}\nu_\lambda\exp(i\lambda t)$. В множестве $\Lambda(\mu)$ фиксируем рациональный базис $\{\beta_1,\beta_2,\dots\}$, и при каждом $m\in\mathbb{N}$ рассмотрим меру

$$\sigma_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(t)\doteq\sum_{\substack{|k_p|\leqslant(m!)^2\\ p=1,\dots,m}}\prod_{j=1}^{m}\big(1-\frac{|k_j|}{(m!)^2}\big)\nu_{\frac{k_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{k_m}{m!}\beta_m}\times\exp\big(i(\frac{k_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{k_m}{m!}\beta_m)t\big),$$

являющуюся мерозначным тригонометрическим полиномом.

Рассмотрим, далее, при функции [107, с.33] $K_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, заданные равенством

$$K_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(t)\doteq K_{(m!)^2}\left(\frac{\beta_1}{m!}t\right)\cdot\ldots\cdot K_{(m!)^2}\left(\frac{\beta_m}{m!}t\right)=$$

$$=\sum_{\substack{|k_p|\leqslant(m!)^2\\ p=1,\dots,m}}\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{|k_j|}{(m!)^2}\right)\exp\big(-i(\frac{k_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{k_m}{m!}\beta_m)t\big),\quad t\in\mathbb{R},$$

где $K_p(\cdot)$ — ядро Фейера порядка p.

Из равенств (2.6) (см. также замечание 2.5) получаем, что для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ $\langle\nu_{\frac{k_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{k_m}{m!}\beta_m},c(u)\rangle=M\big\{\langle\mu(t),c(u)\rangle\exp\big(-i(\frac{k_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{k_m}{m!}\beta_m)t\big)\big\}$. Поэтому

$$\langle\sigma_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(t),c(u)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\langle\mu(\xi+t),c(u)\rangle K_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(\xi)d\xi,\ t\in\mathbb{R}.\tag{2.13}$$

В свою очередь, из (2.13), в силу свойств функции $K_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(t)$, следует, что для всякой функции $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ и произвольного $\tau\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\sigma_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(s+\tau)-\sigma_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(s),c(u)\rangle|ds\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu_\tau(s)-\mu(s),c(u)\rangle|ds,\quad(2.14)$$

и, значит (см. определение 2.2), множество $\{\sigma_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ равностепенно п. п.

Т е о р е м а 2.1. *Для каждой функции $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ имеет место равенство*

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s)-\sigma_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(s),c(u)\rangle|ds\Big)=0.\quad(2.15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой функции $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ имеем соответствие: $\langle\mu(t),c(u)\rangle\sim\sum\limits_{\lambda}\langle\nu_\lambda,c(u)\rangle\exp(i\lambda t)$. Используя равенство (2.13), следуя схеме доказательства соответствующего утверждения для п. п. по Бору функций [108, с.48], получим, что

$$\lim_{m\to\infty}M\big\{|\langle\mu(s)-\sigma_{m;\beta_1,\dots,\beta_m}(s),c(u)\rangle|\big\}=0.\quad(2.16)$$

Покажем, что последнее равенство влечет (2.15). Допустим противное. Тогда найдутся $\alpha>0$ и последовательности $\{t_j\}_{j=1}^\infty$, $\{m_j\}_{j=1}^\infty$, такие, что при каждом $j\in\mathbb{N}$

$$\int_{t_j}^{t_j+1}f_{m_j}(s)ds>\alpha,$$

где $f_{m_j}(s)\doteq|\langle\mu(s)-\sigma_{m_j;\beta_1,\dots,\beta_{m_j}}(s),c(u)\rangle|$. Далее, в силу (2.14), последовательность $\{f_{m_j}\}_{j=1}^\infty\subset S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ равностепенно п. п., поэтому найдется такое $l>0$, что в каждом отрезке $[k\tilde{l}-t_j,k\tilde{l}-t_j+l]$, где $\tilde{l}\doteq l+1$, существует $\tau_{kj}\in\bigcap\limits_{p=1}^{\infty}E_S(f_{m_p},\alpha/2)$. Следовательно, в силу предыдущего неравенства, $\int\limits_{t_j}^{t_j+1}f_{m_j}(s+\tau_{kj})ds>\alpha/2$, а так как $k\tilde{l}\leqslant t_j+\tau_{kj}<t_j+\tau_{kj}+1\leqslant k\tilde{l}+\tilde{l}$, то при каждом $q\in\mathbb{N}$ и всяком $j\in\mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{q\tilde{l}}\int_0^{q\tilde{l}}f_{m_j}(s)ds=\frac{1}{q\tilde{l}}\sum_{k=0}^{q-1}\int_{k\tilde{l}}^{k\tilde{l}+1}f_{m_j}(s)ds\geqslant\frac{1}{q\tilde{l}}\sum_{k=0}^{q-1}\int_{t_j}^{t_j+1}f_{m_j}(s+\tau_{kj})ds>\frac{\alpha}{2\tilde{l}},$$

и следовательно, $\lim\limits_{j\to\infty}M\{f_{m_j}(s)\}\geqslant\alpha/(2\tilde{l})$, что противоречит (2.16).

С л е д с т в и е 2.1. *Для каждого $\mu\in$ APM соответствие (2.10) однозначно.*

5. Известно (см., например [52], [97, 187]), что если $g\in B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$, то для любой функции $u\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ отображение $t\mapsto g(t,u(t))$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Следующая теорема дополняет указанное утверждение.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть* $(\mathfrak{X},\rho)$ — *компактное метрическое пространство, множество* $\mathfrak{A} \doteq \{\mu(\cdot,x), x\in\mathfrak{X}\}$ *содержится в* APM, *является равностепенно п. п. и* $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|\mu(\cdot,x)\|<\infty$. *Тогда для любой функции* $g\in S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)$ *совокупность отображений* $t\mapsto f(t,x)\doteq\langle\mu(t,x),g(t,u)\rangle$, $x\in\mathfrak{X}$, *где*

$$\langle\mu(t,x),g(t,u)\rangle=\int_{\mathfrak{U}} g(t,u)\mu(t,x)(du), \tag{2.17}$$

равностепенно п. п. по Степанову. Кроме того, если $\mu\in S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$, *то функция* $(t,x)\mapsto f(t,x)$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$ *и ее модуль содержится в* $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu)\cup\Lambda(g))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $g\in S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)$, то по лемме 1.3 для заданного $\varepsilon>0$ найдется такое $\gamma>0$, что будет выполнено неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[g(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds<\frac{\varepsilon}{3\xi},$$

в котором $\xi\doteq\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|\mu(\cdot,x)\|$. Пусть, далее, $\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_p$ — открытое покрытие компакта $\mathfrak{U}$, такое, что $\operatorname{diam}\mathcal{U}_j\leqslant\gamma$, $j=1,\dots,p$, и через $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Теперь для каждого $j=1,\dots,p$ фиксируем точку $u_j\in\mathfrak{U}\bigcap\mathcal{U}_j$ в которой $\alpha_j(u_j)>0$, и при $x\in\mathfrak{X}$ рассмотрим отображение

$$t\mapsto\lambda_j(t,x)\doteq\langle\mu(t,x),\alpha_j(u)\rangle,\ t\in\mathbb{R}.$$

Поскольку множество $\mathfrak{A}\subset$ APM и равностепенно п. п., то (см. определение 2.2) при каждом $j=1,\dots,p$ множество функций $\{\lambda_j(\cdot,x),\ x\in\mathfrak{X}\}$ содержится в $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и равностепенно п. п. Кроме того, при п. в. $t\in\mathbb{R}$ и всех $x\in\mathfrak{X}$

$$\sum_{j=1}^p|\lambda_j(t,x)|\leqslant\sum_{j=1}^p\int_{\mathfrak{U}}\alpha_j(u)|\mu(t,x)|(du)=|\mu(t,x)|(\mathfrak{U})\leqslant\xi.$$

Рассмотрим, далее, при $x\in\mathfrak{X}$ отображение

$$t\mapsto\Delta(t,x)\doteq\sum_{j=1}^p\lambda_j(t,x)\delta_{u_j}\in\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),$$

принадлежащее APM, и для $(\tau,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ полагаем

$$I(\tau,x)\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\Delta(s+\tau,x),g(s+\tau,u)\rangle-\langle\Delta(s,x),g(s,u)\rangle|ds.$$

Кроме того, для каждой функции $g(\cdot,u_j)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j=1,\dots,p$, возьмем (здесь см. [107, с. 231]) такую функцию $\mathfrak{g}_j\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, что $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}}|\mathfrak{g}_j(t)|\doteq k_j<\infty$ и $d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{g}_j(\cdot))<\varepsilon/18p$. Теперь, полагая $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p}k_j\doteq k$, имеем при всех $(\tau,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ следующие соотношения:

$$I(\tau,x)\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\sum_{j=1}^p|\lambda_j(s+\tau,x)-\lambda_j(s,x)|\cdot|g(s,u_j)|ds+$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\sum_{j=1}^{p}|\lambda_j(s+\tau,x)|\cdot|g(s+\tau,u_j)-g(s,u_j)|ds\leqslant 2\xi\sum_{j=1}^{p}d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{g}_j(\cdot))+$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\sum_{j=1}^{p}|\lambda_j(s+\tau,x)-\lambda_j(s,x)|\cdot|\mathfrak{g}_j(s)|ds+\xi\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(s+\tau,u)-g(s,u)|ds<$$

$$<\frac{\varepsilon}{9}+k\cdot\sum_{j=1}^{p}\sup_{x\in\mathfrak{X}}d\big(\lambda_j(\cdot+\tau,x),\lambda_j(\cdot,x)\big)+\xi\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(s+\tau,u)-g(s,u)|ds,$$

из которых для всякого τ, принадлежащего относительно плотному множеству [3]

$$\mathcal{E}\doteq\Big(\bigcap_{u\in\mathfrak{U}}E_S(g(\cdot,u),\mathfrak{y})\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}}\bigcap_{j=1}^{p}E_S\big(\lambda_j(\cdot,x),\mathfrak{y}\big)\Big),\quad \mathfrak{y}\doteq\min\{\varepsilon/9\xi,\varepsilon/9kp\},$$

получаем неравенство $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}I(\tau,x)\leqslant\varepsilon/3$. Поэтому, если $\tau\in\mathcal{E}$, то при всех $x\in\mathfrak{X}$

$$d(f_\tau(\cdot,x),f(\cdot,x))\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,x)-\Delta(s,x),g(s,u)\rangle|+\sup_{x\in\mathfrak{X}}I(\tau,x)\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,x),g(s,u)\rangle-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j(s,x)g(s,u_j)|ds+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\Big(\sum_{j=1}^{p}\int_{u\in\mathfrak{U}}\alpha_j(u)|g(s,u)-g(s,u_j)|\cdot|\mu(s,x)|(du)\Big)ds+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant$$

$$\leqslant 2\xi\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[g(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,$$

то есть $\tau\in\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}}E_S(f(\cdot,x),\varepsilon)$, и, тем самым, первое утверждение теоремы 2.2 доказано.

Пусть, теперь, $\mu\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$. Тогда, при каждом $j=1,\ldots,p$, по лемме 2.3 $\lambda_j\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$. Следовательно, найдется такое $\widehat{\gamma}\in(0,\gamma)$, что при всех $\beta\in(0,\widehat{\gamma})$ $\mathfrak{d}_\beta[\lambda_j,\mathfrak{X}]<\varepsilon/9pk$. Поэтому при этих β, принимая во внимание, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$ и всех $x\in\mathfrak{X}$ $\mu(t,x)$, $\Delta(t,x)\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, а также $\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j(t,x)=1$, получим, что

$$\mathfrak{d}_\beta[f,\mathfrak{X}]\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[g(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds+2\sum_{j=1}^{p}d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{g}_j(\cdot))+k\sum_{j=1}^{p}\mathfrak{d}_\beta[\lambda_j,\mathfrak{X}]<\varepsilon,$$

то есть (см. определение 1.1 и лемму 2.2), $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$.

Далее, при каждом $x\in\mathfrak{X}$ имеем следующие соотношения:

$$\Lambda(f(\cdot,x))\subset\mathrm{Mod}\big(\Lambda(f(\cdot,x))\big)\subset\mathrm{Mod}\Big(\Big(\bigcup_{u\in\mathfrak{U}}\Lambda(g(\cdot,u))\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\bigcup_{j=1}^{p}\Lambda(\lambda_j(\cdot,u))\Big)\Big)\subset$$

---

[3] Здесь мы пользуемся следующим несложно доказываемым утверждением: если множества $\{\mathfrak{f}^1_\alpha,\ \alpha\in\mathbb{A}\},\{\mathfrak{f}^2_\beta,\ \beta\in\mathbb{B}\}\subset S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и равностепенно п. п., то для любого $\varepsilon>0$ множество $\big(\bigcap\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}E_S(\mathfrak{f}^1_\alpha,\varepsilon)\big)\bigcap\big(\bigcap\limits_{\beta\in\mathbb{B}}E_S(\mathfrak{f}^2_\beta,\varepsilon)\big)$ не пусто и относительно плотно.

$$\subset \operatorname{Mod}\bigl(\Lambda(g)\bigcup\bigl(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(\mu(\cdot,x),c)\bigr)\bigr) \overset{(2.12)}{=} \operatorname{Mod}\bigl(\Lambda(g)\bigcup\Lambda(f)\bigr).$$

Следовательно, $\operatorname{Mod}(f) \doteq \operatorname{Mod}\bigl(\bigcup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(f(\cdot,x))\bigr) \subset \operatorname{Mod}\bigl(\Lambda(g)\cup\Lambda(\mu)\bigr)$, и, тем самым, теорема 2.2 доказана.

З а м е ч а н и е 2.6. Точно так же, используя (см. замечание 2.4) определение пространства $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})))$, доказывается [59], что для каждого отображения $\mu \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})))$ и любой функции $g \in S\bigl(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})\bigr)$ указанное в теореме 2.2 отображение $(t,x) \mapsto \langle\mu(t,x), g(t,u)\rangle$ принадлежит пространству п. п. функций $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}))$ и его модуль содержится в $\operatorname{Mod}\bigl(\Lambda(g)\cup\Lambda(\mu)\bigr)$.

Л е м м а 2.6. *Функция $u \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ ($u \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}))$) в том и только в том случае, если отображение $(t,x) \mapsto \delta_{u(t,x)}$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))$ $\bigl(S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})))\bigr)$ и их модули совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условий леммы 2.6 очевидно следует из леммы 2.3 и определения (см. замечание 2.4) пространства $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})))$.
В случае, если $u \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$, то из определения 1.1, утверждения лемм 2.2 и 2.3, используя неравенство (здесь см. обозначение (1.4))

$$\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}}\Bigl(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|c(u(s,x_1)) - c(u(s,x_2))|ds\Bigr) \leqslant \frac{2}{\sigma}\|c\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}\mathfrak{d}_\gamma[u,\mathfrak{X}] + \omega_\sigma[c,\mathfrak{U}],$$

справедливое для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ и фиксированных констант $\sigma, \gamma > 0$, получим, что отображение $(t,x) \mapsto \delta_{u(t,x)}$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))$.

Если $u \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}))$, то по теореме о максимуме [18, с 19] для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется такое измеримое отображение $x : [t, t{+}1] \to \mathfrak{X}$, что для п. в. $s \in [t, t{+}1]$ будет выполнено равенство: $\max\limits_{x\in\mathfrak{X}}|c(u(s{+}\tau, x)) - c(u(s,x))| = |c(u(s{+}\tau, x(s))) - c(u(s, x(s)))|$. Поэтому в силу соотношений:

$$\int_t^{t+1}\max_{x\in\mathfrak{X}}|c(u(s+\tau,x)) - c(u(s,x))|ds = \int_t^{t+1}|c(u(s+\tau,x(s))) - c(u(s,x(s)))|ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\sigma}\|c\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in\mathfrak{X}}|u(s+\tau,x)) - u(s,x))|ds + \omega_\sigma[c,\mathfrak{U}],$$

выполненных для любого $\sigma > 0$ получим, что отображение $(t,x) \mapsto \delta_{u(t,x)}$ принадлежит $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})))$. □

Из леммы 2.6 и теоремы 2.2 (см. также замечание 2.6) вытекает

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ и функция $u(\cdot)$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ или $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}))$. Тогда отображение $(t,x) \mapsto g(t, u(t,x))$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathbb{R})$, соответственно — $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}))$, и его модуль содержится в $\operatorname{Mod}\bigl(\Lambda(g)\cup\Lambda(u)\bigr)$.*

С л е д с т в и е 2.3. *Пусть отображение $g : \mathbb{R}\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ принадлежит либо пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, либо $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$. Тогда для всякого $\mu \in \mathrm{APM}_1$ и $u \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ отображения $t \mapsto \langle\mu(t), g(t,u)\rangle$, $t \mapsto g(t, u(t))$ принадлежат пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, и их модули содержатся в $\operatorname{Mod}\bigl(\Lambda(\mu)\cup\Lambda(g)\bigr)$ и $\operatorname{Mod}\bigl(\Lambda(g)\cup\Lambda(u)\bigr)$, соответственно.*

6. Укажем еще ряд необходимых в дальнейшем утверждений и определений, связанных с мерозначными п. п. функциями.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть* $(\mathfrak{X}, \rho)$ — *компактное метрическое пространство, множество отображений* $\mathfrak{A} \doteq \{\mu(\cdot, x),\ x \in \mathfrak{X}\}$ *из* APM_1 *равностепенно п. п. и* $\lim\limits_{x\to\widehat{x}} \|\mu(\cdot, x) - \mu(\cdot, \widehat{x})\|_w = 0$. *Тогда для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$

$$\lim_{x\to\widehat{x}}\bigl(\sup_{t\in\mathbb{R}} \bigl|\int_t^{t+1} \langle \mu(s,x) - \mu(s,\widehat{x}), g(s,u)\rangle ds\bigr|\bigr) = 0, \tag{2.18}$$

$$\lim_{x\to\widehat{x}} M\bigl\{\langle \mu(t,x), g(t,u)\rangle\bigr\} = M\bigl\{\langle \mu(t,\widehat{x}), g(t,u)\rangle\bigr\}. \tag{2.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (2.19) вытекает из равенства (2.18). Поэтому докажем лишь (2.18). Допустив противное, получим, что найдутся такая константа $\alpha > 0$ и последовательности $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{X}$, $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = \widehat{x}$, $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, что при всех $j \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$\bigl|\int_{t_j}^{t_j+1} (f_j(s) - \widehat{f}(s)) ds\bigr| > \alpha, \tag{2.20}$$

где $f_j(s) \doteq \langle \mu(s,x_j), g(s,u)\rangle$, $\widehat{f}(s) \doteq \langle \mu(s,\widehat{x}), g(s,u)\rangle$. По теореме 2.2 множество функций (см. (2.17)) $\{t \mapsto f(t,x) \doteq \langle \mu(t,x), g(t,u)\rangle,\ x \in \mathfrak{X}\}$ равностепенно п. п. Поэтому существует такое $l > 0$, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдется точка τ_j, принадлежащая $[-t_j, -t_j + l] \bigcap \bigl(\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot,x), \alpha/16)\bigr)$. Так как $\{t_j + \tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0, l]$, то без ограничения общности можно считать, что $\lim\limits_{j\to\infty}(t_j + \tau_j) = \widehat{t} \in [0, l]$. Далее, поскольку функция $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, то (см. п. 1 из § 1) отображение $t \mapsto \mathfrak{g}(t) \doteq \max\limits_{u\in\mathfrak{U}} |g(t,u)|$ принадлежит $L_1([0, l+2], \mathbb{R})$. Поэтому, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега [14, с. 101] для константы $\alpha/24$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества $E \subset [0, l+2]$ будет выполнено неравенство $|\int\limits_E \mathfrak{g}(t) dt| < \alpha/24$, если $\operatorname{mes} E \leqslant \delta$, а поскольку $\mathfrak{y}_j \doteq (t_j + \tau_j - \widehat{t}) \to 0$ при $j \to \infty$, то найдется такое $j_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $j \geqslant j_1$ $|\mathfrak{y}_j| \leqslant \delta$. Следовательно, при этих j будут выполнены неравенства

$$\bigl|\int_{\widehat{t}+\mathfrak{y}_j}^{\widehat{t}} \mathfrak{g}(s) ds\bigr| < \alpha/24,\ \bigl|\int_{\widehat{t}+1}^{\widehat{t}+1+\mathfrak{y}_j} \mathfrak{g}(s) ds\bigr| < \alpha/24.$$

Далее, в силу равенства $\lim\limits_{j\to\infty} \|\mu(\cdot, x_j) - \mu(\cdot, \widehat{x})\|_w = 0$, найдется такое $j_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $k, j \geqslant j_2$ $\quad |\int\limits_{\widehat{t}}^{\widehat{t}+1} (f_k(s) - f_j(s)) ds| < \alpha/12$ и для всякого фиксированного $j \in \mathbb{N}$ существует такое $k(j) \in \mathbb{N}$, начиная с которого $|\int\limits_{t_j}^{t_j+1} (\widehat{f}(s) - f_k(s)) ds| < \alpha/12$. Теперь, если $j \geqslant j_0 \doteq \max(j_1, j_2)$ и $k \geqslant \max(k(j), j_0)$, то, учитывая выбор точек τ_j, получаем следующие соотношения:

$$\bigl|\int_{t_j}^{t_j+1} (\widehat{f}(s) - f_j(s)) ds\bigr| \leqslant \bigl|\int_{t_j}^{t_j+1} (\widehat{f}(s) - f_k(s)) ds\bigr| + d(f_k(\cdot + \tau_j), f_k(\cdot)) +$$

$$+2\Big|\int_{\widehat{t}+\mathfrak{y}_j}^{\widehat{t}}\mathfrak{g}(s)ds\Big|+\Big|\int_{\widehat{t}}^{\widehat{t}+1}(f_k(s)-f_j(s))ds\Big|+2\Big|\int_{\widehat{t}+1}^{\widehat{t}+1+\mathfrak{y}_j}\mathfrak{g}(s)ds\Big|+d(f_j(\cdot+\tau_j),f_j(\cdot))<\alpha/2,$$

из которых получаем неравенства, противоречащие неравенствам (2.20). Тем самым, равенство (2.18) доказано. $\square$

Введем, сейчас, для отображения $\mu(\cdot)\in \mathrm{APM}_1$ при фиксированном $h>0$ его стекловское усреднение. С этой целью, при каждом $t\in\mathbb{R}$ рассмотрим функционал

$$c(\cdot)\mapsto \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle\mu(s),c(u)\rangle ds,\ \ c(\cdot)\in C(\mathcal{U},\mathbb{R}),$$

который, как легко видеть, принадлежит $\big(C(\mathcal{U},\mathbb{R})\big)^*$. Поэтому по теореме Рисса [22], учитывая, что $\mu(\cdot)\in \mathrm{APM}_1\subset\mathcal{M}$, вытекает существование меры $\mu(t,h)\in \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, такой, что для всех $c(\cdot)\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ будет выполняться равенство

$$\langle\mu(t,h),c(u)\rangle=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle\mu(s),c(u)\rangle ds,\ \ t\in\mathbb{R}. \tag{2.21}$$

О п р е д е л е н и е 2.4. Пусть $\mu(\cdot)\in \mathrm{APM}_1$. Тогда непрерывное отображение $t\mapsto\mu(t,h)\in \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, удовлетворяющее при каждом $t\in\mathbb{R}$ и всякой функции $c(\cdot)\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ равенству (2.21) называется *стекловским усреднением для* $\mu(\cdot)$.

Л е м м а 2.7. *Пусть* $\mu(\cdot)\in \mathrm{APM}_1$. *Тогда при каждом* $h\in(0,1]$ *отображение* $\mu(\cdot,h)\in B(\mathbb{R},\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ *и* $\mathrm{Mod}(\mu(\cdot,h))\subset\mathrm{Mod}(\mu(\cdot))$. *Кроме того, множество* $\mathcal{F}\doteq\{\mu(\cdot,h),\ h\in(0,1]\}$ *равностепенно п. п. по Степанову и*

$$\lim_{h\downarrow 0}\|\mu(\cdot)-\mu(\cdot,h)\|_w=0. \tag{2.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $\tau\in\mathbb{R}$ и любой функции $c\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ из (2.21) вытекает неравенство $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(t+\tau,h;c)-f(t,h;c)|\leqslant d_h(f(\cdot+\tau;c),f(\cdot;c))$, где

$$f(t;c)\doteq\langle\mu(t),c(u)\rangle,\ \ f(t,h;c)\doteq\langle\mu(t,h),c(u)\rangle,$$

из которого (см. определение 2.1, лемму 2.5, равенство (2.8) и замечание 2.2) получаем, что $\mu(\cdot,h)\in B(\mathbb{R},\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ и его модуль содержится в $\mathrm{Mod}(\mu)$. Непосредственно из определений 2.1 и 2.4 получаем, что п. п. по Бору функция $f(\cdot,h;c)$ является стекловским усреднением [107, с. 206] для $f(\cdot;c)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Поэтому [107, с. 206, 207] для каждой функции $c(\cdot)\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$

$$\lim_{h\downarrow 0}d(f(\cdot,h;c),f(\cdot;c))=0, \tag{2.23}$$

и для всякого $\tau\in\mathbb{R}$ $\sup\limits_{h\in(0,1]}d(f(\cdot+\tau,h;c),f(\cdot,h;c))\leqslant 2d(f(\cdot+\tau;c),f(\cdot;c))$. Из этого неравенства вытекает равностепенная п. п. множества $\mathcal{F}$. В свою очередь, из предельного равенства (2.23), определения $\|\cdot\|_w$, учитывая, что при каждом $\mathbb{T}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R})$ множество $\Upsilon(\mathbb{T}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$ (см. (1.9)) всюду плотно в $\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$, получаем равенство (2.22).

Из теоремы 2.3 и леммы 2.7 вытекает

Т е о р е м а 2.4. *Пусть отображение* $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ *и* $\mu(\cdot,h) \in B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *— его стекловское усреднение. Тогда для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$

$$\lim_{h\downarrow 0}\bigl(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_t^{t+1} \langle \mu(s,h)-\mu(s), g(s,u)\rangle ds|\bigr) = 0, \tag{2.24}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{h\downarrow 0} M\{\langle \mu(t,h), g(t,u)\rangle\} = M\{\langle \mu(t), g(t,u)\rangle\}$.

§3. Аппроксимационная теорема

Доказано, что всякая функция $\mu \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована по норме $\|\cdot\|_w$ равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ функциями вида $(t,x) \mapsto \delta_{u(t,x)}$, в которых отображение $u : \mathbb{R}\times\mathfrak{X} \to \mathfrak{U}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$.

1. В этом параграфе доказана важная для дальнейшего изложения аппроксимационная теорема для мерозначных почти периодических функций.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $(\mathfrak{X},\rho)$ *— компактное метрическое пространство. Тогда для каждого отображения* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *существует такая последовательность функций* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *из пространства* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$, *что* $\mathrm{Mod}(u_j) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$ *для всех* $j \in \mathbb{N}$, *и обладающая также следующими свойствами:*

1) *имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty}\bigl(\sup_{x\in\mathfrak{X}} \|\mu(\cdot,x) - \delta_{u_j(\cdot,x)}\|_w\bigr) = 0; \tag{3.1}$$

2) *при каждом* $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Bigl(\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}} \bigl(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\delta_{u_j(s,x_1)} - \delta_{u_j(s,x_2)}|(\mathfrak{U})ds\bigr)\Bigr) = 0; \tag{3.2}$$

3) *для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$

$$\begin{cases} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\displaystyle\int_t^{t+1} \langle \mu(s,x) - \delta_{u_j(s,x)}, g(s,u)\rangle ds| \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{при } j\to\infty, \\ M\{g(t,u_j(t,x))\} \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} M\{\langle \mu(t,x), g(t,u)\rangle\} \qquad \text{при } j\to\infty. \end{cases} \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы 3.1 разобьем на четыре пункта.

(a) В этом пункте доказательства приведем построение указанной в теореме 3.1 последовательности функций $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ строим такое открытое покрытие $\mathcal{U}_1^{(j)}, \dots, \mathcal{U}_{p_j}^{(j)}$ компакта $\mathfrak{U}$, что $\max\{\mathrm{diam}\,\mathcal{U}_k^{(j)}, k=1,\dots,p_j\} \leqslant \frac{1}{j}$, и через $\{\alpha_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j}$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Теперь, для каждого $k=1,\dots,p_j$ фиксируем точку $u_k^{(j)} \in \mathfrak{U}\bigcap\mathcal{U}_k^{(j)}$, в которой $\alpha_k^{(j)}(u_k^{(j)}) > 0$, и рассмотрим отображение

$$(t,x) \mapsto \lambda_k^{(j)}(t,x) \doteq \langle \mu(t,x), \alpha_k^{(j)}(u)\rangle \in [0,1], \ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X}. \tag{3.4}$$

Поскольку $\mu \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, то по лемме 2.3 $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j} \subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathbb{R})$, причем

$$\sum_{k=1}^{p_j} \lambda_k^{(j)}(t,x) = 1,\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X}. \tag{3.5}$$

Выбираем, далее, число $a > 0$ таким, чтобы $\frac{4\pi}{a} \in \mathrm{Mod}(\mu)$, и отрезок $[0,a]$ разбиваем на j отрезков $I_l^{(j)} \doteq \left[\frac{l-1}{j}a, \frac{l}{j}a\right]$, $l = 1,\ldots,j$. В свою очередь, каждый отрезок $I_l^{(j)}$ разбиваем на p_j подотрезков $I_{l_k}^{(j)}(\xi,x)$, $k = 1,\ldots,p_j$, зависящих от $(\xi,x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X}$, определенных равенствами

$$\begin{cases} I_{l_1}^{(j)}(\xi,x) \doteq \frac{l-1}{j}a + \big[0, \int_{I_l^{(j)}} \lambda_1^{(j)}(t+\xi,x)dt\big], \\ I_{l_k}^{(j)}(\xi,x) \doteq \frac{l-1}{j}a + \big[\sum\limits_{s=1}^{k-1} \int_{I_l^{(j)}} \lambda_s^{(j)}(t+\xi,x)dt, \sum\limits_{s=1}^{k} \int_{I_l^{(j)}} \lambda_s^{(j)}(t+\xi,x)dt\big],\ 2 \leqslant k \leqslant p_j. \end{cases} \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что отрезки $I_{l_1}^{(j)}(\xi,x),\ldots,I_{l_{p_j}}^{(j)}(\xi,x)$ примыкают друг к другу, и при каждом $l = 1,\ldots,j$ в силу (3.5)

$$I_l^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{p_j} I_{l_k}^{(j)}(\xi,x),\ (\xi,x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим, далее, последовательность отображений $w_m^{(j)} : [0,a]\times\mathfrak{X} \to \mathfrak{U}$, $m \in \mathbb{Z}$, каждое из которых определено равенством

$$w_m^{(j)}(t,x) \doteq \sum_{l=1}^{j} \chi_{I_l^{(j)}}(t) \sum_{k=1}^{p_j} \chi_{I_{l_k}^{(j)}(ma,x)}(t) u_k^{(j)}, \tag{3.8}$$

где отрезки $I_{l_k}^{(j)}(ma,x)$, задаются равенством (3.5) при $\xi = ma$.

Л е м м а 3.1. *При каждом $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ отображений, заданных равенством* (3.8), *является п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ и*

$$\mathrm{Mod}(\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset a\,\mathrm{Mod}(\mu) + 2\pi\mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j} \subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathbb{R})$, то по теореме 1.1 и лемме 1.5 для заданного $\varepsilon > 0$ множество $a\mathbb{Z}\bigcap(\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}}\bigcap\limits_{k=1}^{p_j} E_{S_a}(\lambda_k^{(j)}(\cdot,x),\delta)$, в котором $\delta \doteq \varepsilon/2\gamma a p_j^2$, и где, в свою очередь, $\gamma \doteq \max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|u|$, относительно плотно. Пусть $\mathfrak{n}a$

принадлежит этому множеству. Тогда для всех $x \in \mathfrak{X}$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^a |w^{(j)}_{m+\mathfrak{n}}(t,x) - w^{(j)}_m(t,x)|dt \overset{(3.8)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \gamma \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{j} \sum_{k=1}^{p_j} \int_{I^{(j)}_l} |\chi_{I^{(j)}_{l_k}((m+\mathfrak{n})a,x)}(t) - \chi_{I^{(j)}_{l_k}(ma,x)}(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{j} \sum_{k=1}^{p_j} \operatorname{mes}(I^{(j)}_{l_k}((m+\mathfrak{n})a,x) \triangle I^{(j)}_{l_k}(ma,x)) \overset{(3.6)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 2\gamma p_j \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{p_j} \sum_{l=1}^{j} \int_{I^{(j)}_l} |\lambda^{(j)}_k(t+(m+\mathfrak{n})a,x) - \lambda^{(j)}_k(t+ma,x)|dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma p_j \sum_{k=1}^{p_j} \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{ma}^{(m+1)a} |\lambda^{(j)}_k(t+\mathfrak{n}a,x) - \lambda^{(j)}_k(t,x)|dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma p_j a \sum_{k=1}^{p_j} d_a(\lambda^{(j)}_k(\cdot+\mathfrak{n}a,x), \lambda^{(j)}_k(\cdot,x)) < \varepsilon,$$

то есть $\mathfrak{n} \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathcal{E}(\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon)$. Следовательно, если $\{\lambda^{(j)}_{k,m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ последовательность отображений, отвечающая функции $\lambda^{(j)}_k \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$ (см. следствие 1.4), то справедливо включение

$$\bigcap_{k=1}^{p_j} \bigcap_{x\in\mathfrak{X}} \mathcal{E}(\{\lambda^{(j)}_{k,m}(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \delta) \subset \bigcap_{x\in\mathfrak{X}} \mathcal{E}(\{w^{(j)}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon). \tag{3.10}$$

Аналогично, используя 3.8, показываем, что при каждом $r > 0$

$$\mathfrak{d}_r[\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \mathfrak{X}] \leqslant 2\gamma p_j \varkappa(a) \sum_{k=1}^{p_j} \mathfrak{d}_r[\lambda^{(j)}_k, \mathfrak{X}],$$

где (см. неравенства (1.1))

$$\varkappa(a) = \begin{cases} 1, \text{если } \ a \leqslant 1, \\ 2a, \text{если } \ a > 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{r\downarrow 0} \mathfrak{d}_r[\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \mathfrak{X}] = 0$. Таким образом, по определению 1.4, последовательность $\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$.

Из (3.4) и (2.12) следует, что

$$\bigcup_{k=1}^{p_j} \Lambda(\lambda^{(j)}_k) \subset \Lambda(\mu). \tag{3.12}$$

Наконец, в силу (3.10), а также теоремы 1.4 и равенства (1.6), примененных к функциям $\lambda^{(j)}_k$, $k = 1, \ldots, p_j$, получаем

$$\operatorname{Mod}(\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) \doteq \operatorname{Mod}\big(\Lambda(\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})\big) \doteq \operatorname{Mod}\big(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda(\{w^{(j)}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big) \subset$$

$$\subset \operatorname{Mod}\big(\bigcup_{k=1}^{p_j}\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(\{\lambda^{(j)}_{k,m}(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big) \doteq \operatorname{Mod}\big(\bigcup_{k=1}^{p_j}\Lambda(\{\lambda^{(j)}_{k,m}\}_{m\in\mathbb{Z}})\big) =$$

$$= \operatorname{Mod}\big(a\bigcup_{k=1}^{p_j}\Lambda(\lambda^{(j)}_k) + 2\pi\mathbb{Z}\big) \subset a\operatorname{Mod}(\Lambda(\mu)) + 2\pi\mathbb{Z}. \ \square$$

Теперь при каждом $j \in \mathbb{N}$ по последовательности $\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, составленной из отображений (3.8), строим функцию $u_j\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{U}$, которая при каждом $m\in\mathbb{Z}$ на множестве $[ma,(m+1)a]\times\mathfrak{X}$ задается следующим образом:

$$u_j(t+ma,x) \doteq w^{(j)}_m(t,x), \quad (t,x)\in[0,a]\times\mathfrak{X}. \tag{3.13}$$

Из лемм 3.1 и 1.6 получаем включение $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{U})$. Кроме того, при каждом $j\in\mathbb{N}$ $\operatorname{Mod}(u_j)\subset\operatorname{Mod}(\mu)$. В самом деле, учитывая выбор числа $a>0$ и включение (3.9), имеем следующие соотношения:

$$\operatorname{Mod}(u_j) = a^{-1}\operatorname{Mod}(\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) + 2\pi a^{-1}\mathbb{Z} \subset$$
$$\subset a^{-1}(a\operatorname{Mod}(\mu)+2\pi\mathbb{Z}) + 2\pi a^{-1}\mathbb{Z} = \operatorname{Mod}(\mu) + 4\pi a^{-1}\mathbb{Z} = \operatorname{Mod}(\mu).$$

Покажем, далее, что построенная последовательность функций $\{u\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет также условиям 1) – 3), приведенным в теореме 3.1.

(b) Рассмотрим последовательность $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящую из отображений (здесь см. (3.4), (3.5))

$$(t,x)\mapsto\Delta_j(t,x) \doteq \sum_{k=1}^{p_j}\lambda^{(j)}_k(t,x)\delta_{u^{(j)}_k} \in \operatorname{rpm}(\mathfrak{U}), \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}. \tag{3.14}$$

Л е м м а 3.2. *При каждом* $j\in\mathbb{N}$ $\Delta_j\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))$ *и* $\operatorname{Mod}(\Delta_j)$ *содержится в* $\operatorname{Mod}(\mu)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$, $\mathfrak{c}\doteq\|c\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}$ и при каждом j полагаем $f^{(j)}_c(t,x)\doteq\langle\Delta_j(t,x),c(u)\rangle$. Принимая во внимание (3.14) получаем неравенства

$$d(f^{(j)}_c(\cdot+\tau,x),f^{(j)}_c(\cdot,x)) \leqslant \mathfrak{c}\sum_{k=1}^{p_j} d(\lambda^{(j)}_k(\cdot+\tau,x),\lambda^{(j)}_k(\cdot,x)), \quad \tau\in\mathbb{R},\ x\in\mathfrak{X},$$

$$\mathfrak{d}_\gamma[f^{(j)}_c,\mathfrak{X}] \leqslant \mathfrak{c}\sum_{k=1}^{p_j}\mathfrak{d}_\gamma[\lambda^{(j)}_k,\mathfrak{X}].$$

Используя эти неравенства, а также лемму 2.3 и включение $\{\lambda^{(j)}_k\}_{k=1}^{p_j}\subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$, получим, что $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}\subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))$. Далее, в силу первого из указанных неравенств, получаем, что для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и всякого $x\in\mathfrak{X}$

$$\operatorname{Mod}\big(f^{(j)}_c(\cdot,x)\big) \subset \operatorname{Mod}\big(\bigcup_{k=1}^{p_j}\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(\lambda^{(j)}_k(\cdot,x))\big) \doteq \operatorname{Mod}\big(\bigcup_{k=1}^{p_j}\Lambda(\lambda^{(j)}_k)\big) \overset{(3.12)}{\subset} \operatorname{Mod}(\mu),$$

откуда по лемме 2.5 имеем включение $\operatorname{Mod}(\Delta_j(\cdot,x))\subset\operatorname{Mod}(\mu)$, и, следовательно, при каждом $j\in\mathbb{N}$ $\operatorname{Mod}(\Delta_j)\doteq\operatorname{Mod}(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Delta_j(\cdot,x))\subset\operatorname{Mod}(\mu)$.

Л е м м а 3.3. *Имеет место равенство* $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|\mu(\cdot,x)-\Delta_j(\cdot,x)\|_w)=0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства (см. п. 1 из § 2) достаточно показать, что для каждой функции φ, принадлежащей $\mathfrak{V}_1 \doteq \mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ (см. (2.17)),

$$\Big|\int_{\mathbb{R}}\langle\Delta_j(t,x)-\mu(t,x),\varphi(t,u)\rangle dt\Big| \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } j\to\infty. \tag{3.15}$$

Действительно, так как $\mu(t,x)\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, то

$$\Big|\int_{\mathbb{R}}\langle\Delta_j(t,x)-\mu(t,x),\varphi(t,u)\rangle dt\Big| \overset{(3.14)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}}\Big|\sum_{k=1}^{p_j}\lambda_k^{(j)}(t,x)\varphi(t,u_k^{(j)})-\int_{\mathfrak{U}}\varphi(t,u)\mu(t,x)(du)\Big|dt \overset{(3.4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{k=1}^{p_j}\int_{\mathfrak{U}}\alpha_k^{(j)}(u)\big|\varphi(t,u_k^{(j)})-\varphi(t,u)\big|\mu(t,x)(du)\Big)dt \leqslant \int_{\mathbb{R}}\omega_{\frac{1}{j}}[\varphi(t,\cdot),\mathfrak{U}]dt.$$

Так как $\varphi\in\mathfrak{V}_1$, то для п. в. $t\in\mathbb{R}$ $\omega_{\frac{1}{j}}[\varphi(t,\cdot),\mathfrak{U}]\downarrow 0$ при $j\to\infty$ и, кроме того, $|\omega_{\frac{1}{j}}[\varphi(t,\cdot),\mathfrak{U}]|\leqslant 2\psi_\varphi(t)$, где $\psi_\varphi(\cdot)\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знак интеграла [191, с.112] $\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\omega_{\frac{1}{j}}[\varphi(t,\cdot),\mathfrak{U}]dt=0$, и, следовательно, в силу вышеприведенных соотношений, справедливо предельное соотношение (3.15).

Л е м м а 3.4. *Имеет место равенство* $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|\Delta_j(\cdot,x)-\delta_{u_j(\cdot,x)}\|_w)=0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем

$$\eta_j(t,x)\doteq\Delta_j(t,x)-\delta_{u_j(t,x)}.$$

Поскольку $\|\eta_j(t,x)\|\leqslant 2$ при $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$, то для произвольно фиксированной функции $\varphi\in\mathfrak{V}_1$ и заданного $\varepsilon>0$, найдется такое $n=n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что для всех $j\in\mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_{\mathbb{R}}\langle\eta_j(t,x),\varphi(t,u)\rangle dt\Big|\leqslant\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_{-na}^{na}\langle\eta_j(t,x),\varphi(t,u)\rangle dt\Big|+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.16}$$

Покажем, что

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_{-na}^{na}\langle\eta_j(t,x),\varphi(t,u)\rangle dt\Big|\Big)=0. \tag{3.17}$$

С этой целью отметим, что так как множество $\Upsilon([-na,na]\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ (см.(1.9)) всюду плотно в пространстве $\mathfrak{V}_1([-na,na]\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то для доказательства равенства (3.17) достаточно показать, что для любых $g\in C([-na,na],\mathbb{R})$ и $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_{-na}^{na}g(t)\langle\eta_j(t,x),c(u)\rangle dt\Big|\Big)=0. \tag{3.18}$$

В свою очередь, для доказательства равенства (3.18) и в дальнейшем понадобится

Л е м м а 3.5. *Пусть точки* $t_l^{(j)} \in I_l^{(j)} \doteq \left[\frac{l-1}{j}a, \frac{l}{j}a\right]$, $l = 1, \ldots, j$ *и функция* φ *принадлежит пространству* $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathcal{U}, \mathbb{R})$. *Тогда для всех* $(m, x) \in \mathbb{Z} \times \mathfrak{X}$

$$\sum_{l=1}^{j} \int_{I_l^{(j)}} \langle \eta_j(t + ma, x), \varphi(t_l^{(j)} + ma, u)\rangle dt = 0. \tag{3.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (3.7), а также определения отображения $(t, x) \mapsto \eta_j(t, x)$ (см. также (3.8), (3.13) и (3.14)) получаем, что при каждом $x \in \mathfrak{X}$

$$\sum_{l=1}^{j} \int_{I_l^{(j)}} \langle \eta_j(t + ma, x), \varphi(t_l^{(j)} + ma, u)\rangle dt =$$

$$= \sum_{l=1}^{j} \Big(\int_{I_l^{(j)}} \sum_{k=1}^{p_j} \lambda_k^{(j)}(t + ma, x)\varphi(t_l^{(j)} + ma, u_k^{(j)})dt - \sum_{k=1}^{p_j} \int_{I_{l_k}^{(j)}(ma,x)} \varphi(t_l^{(j)} + ma, u_k^{(j)})dt\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{j} \sum_{k=1}^{p_j} \Big(\int_{I_l^{(j)}} (\lambda_k^{(j)}(t + ma, x) - \operatorname{mes} I_{l_k}^{(j)}(ma, x))dt\Big)\varphi(t_l^{(j)} + ma, u_k^{(j)}) \overset{(3.6)}{=} 0. \ \square$$

Используя лемму 3.5 для $\varphi(t, u) \doteq g(t)c(u)$, получаем

$$\int_0^{na} g(t)\langle \eta_j(t, x), c(u)\rangle dt = \sum_{m=0}^{n-1} g(t + ma)\langle \eta_j(t + ma, x), c(u)\rangle dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{j} \int_{I_l^{(j)}} (g(t + ma) - g(t_l^{(j)} + ma))\langle \eta_j(t + ma, x), c(u)\rangle dt.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\operatorname{mes} I_l^{(j)} = a/j$ и функция $g \in C([-na, na], \mathbb{R})$ (значит, ее колебание $\omega_{\frac{a}{j}}[g, [0, na]]$ на $[0, na]$ стремится к нулю при $j \to \infty$) имеем следующее предельное соотношение

$$\sup_{x \in \mathfrak{X}} \Big| \int_0^{na} g(t)\langle \eta_j(t, x), c(u)\rangle dt\Big| \leqslant 2na\|c\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})} \cdot \omega_{\frac{a}{j}}[g, [0, na]] \to 0 \quad \text{при } j \to \infty.$$

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} |\int\limits_0^{na} g(t)\langle \eta_j(t, x), c(u)\rangle dt|) = 0$. Аналогично показываем, что $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} |\int\limits_{-na}^{0} g(t)\langle \eta_j(t, x), c(u)\rangle dt|) = 0$. Из последних двух равенств получаем равенство (3.18), а стало быть, как отмечалось, и (3.17). Теперь из (3.17) и неравенства (3.16) вытекает, что при всех j, начиная с некоторого $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} |\int\limits_{\mathbb{R}} \langle \eta_j(t, x), \varphi(t, u)\rangle dt| \leqslant \varepsilon$, и, следовательно, доказано, что для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1$ справедливо предельное равенство:

$$\lim_{j\to\infty}(\sup_{x\in\mathfrak{X}} \Big| \int_{\mathbb{R}} \langle \eta_j(t, x), \varphi(t, u)\rangle dt\Big|) = 0,$$

что и завершает доказательство леммы 3.4. $\square$

Из доказанных лемм 3.3 и 3.4 вытекает равенство (3.1).

(c) Для доказательства равенства (3.2), для всех $(j,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ и $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$, введем в рассмотрение измеримое множество

$$\Xi_j^{(m)}(x_1,x_2)\doteq\big\{t\in[0,a]\colon\ |u_j(t+ma,x_1)-u_j(t+ma,x_2)|>0\big\},$$

совпадающее с

$$\big\{t\in[0,a]\colon\ |\delta_{u_j(t+ma,x_1)}-\delta_{u_j(t+ma,x_2)}|(\mathcal{U})>0\big\}.$$

Далее, при всех $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma$ и $m\in\mathbb{Z}$, имеем следующие соотношения:

$$\operatorname{mes}\Xi_j^{(m)}(x_1,x_2)=\sum_{l=1}^{j}\operatorname{mes}\big(\Xi_j^{(m)}(x_1,x_2)\cap I_l^{(j)}\big)\overset{(3.7)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{p_j}\operatorname{mes}\big(I_{l_k}^{(j)}(ma,x_1)\triangle I_{l_k}^{(j)}(ma,x_2)\big)\overset{(3.6)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 2p_j\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{p_j}\int_{I_l^{(j)}}|\lambda_k^{(j)}(s+ma,x_1)-\lambda_k^{(j)}(s+ma,x_2)|ds\leqslant$$

$$\leqslant 2p_j\sum_{k=1}^{p_j}\big(\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}}\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}|\lambda_k^{(j)}(s+ma,x_1)-\lambda_k^{(j)}(s+ma,x_2)|ds\big)\big).$$

Поэтому (см. неравенства (1.1) и обозначения (3.11)) получаем, что

$$\big(\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}}\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}|\delta_{u_j(t+ma,x_1)}-\delta_{u_j(t+ma,x_2)}|(\mathcal{U})ds\big)\leqslant 8p_j\varkappa(a)\sum_{k=1}^{p_j}\mathfrak{d}_\gamma[\lambda_k^{(j)},\mathfrak{X}].$$

Теперь равенство (3.2) вытекает из эквивалентности d_l-расстояний и включения $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j}\subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$.

(d) Фиксируем произвольную функцию $g\in S(\mathbb{R},C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$.

Л е м м а 3.6. *Имеет место следующее предельное соотношение*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,x)-\Delta_j(s,x),g(s,u)\rangle|ds\underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows}0\quad\text{при } j\to\infty.\tag{3.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mu(t,x)\in\operatorname{rpm}(\mathcal{U})$, то для всех $x\in\mathfrak{X}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,x)-\Delta_j(s,x),g(s,u)\rangle|ds\overset{(3.14)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\big(\sum_{k=1}^{p_j}\int_{\mathcal{U}}\alpha_k^{(j)}(u)|g(s,u_k^{(j)})-g(s,u)|\mu(s,x)(du)\big)ds\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_{\frac{1}{j}}[g(s,\cdot),\mathcal{U}]ds.$$

Откуда, используя равенство (1.13) леммы 1.3, получаем соотношение (3.20).

Л е м м а 3.7. *Имеет место следующее предельное соотношение*

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\Big|\int_{ma}^{(m+1)a}\langle\Delta_j(s,x)-\delta_{u_j(s,x)},g(s,x)\rangle ds\Big|\underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows}0\quad\text{при } j\to\infty.\tag{3.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\eta_j(t,x) \doteq \Delta_j(t,x) - \delta_{u_j(t,x)},$$

и при каждом $l = 1,\dots,j$ зафиксируем точку $t_l^{(j)} \in I_l^{(j)} \doteq \left[\frac{l-1}{j}a, \frac{l}{j}a\right]$. Докажем сначала соотношение (3.21) в предположении, что $g \in B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$. В самом деле, используя равенство (3.19) леммы 3.5 и неравенство $|\eta_j(t,x)|(\mathcal{U}) \leqslant 2$, получаем, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ и всех $(m,x) \in \mathbb{Z}\times\mathfrak{X}$, имеют место следующие соотношения:

$$\Big|\int_{ma}^{(m+1)a} \langle \eta_j(s,x), g(s,u)\rangle ds\Big| = \Big|\sum_{l=1}^{j}\int_{I_l^{(j)}} \langle \eta_j(s+ma), g(s+ma,u)\rangle ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{j}\int_{I_l^{(j)}} \big|\langle \eta_j(s+ma,x), g(s+ma,u) - g(t_l^{(j)}+ma,u)\rangle\big| ds \leqslant 2aq_j,$$

где $q_j \doteq \sup\bigl\{|g(t_1,u)-g(t_2,u)|,\ (t_1,u),(t_2,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{U},\ |t_1-t_2|\leqslant \frac{a}{j}\bigr\}$. Теперь соотношение (3.21) в случае, когда $g \in B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$, вытекает из того, что $\lim\limits_{j\to\infty} q_j = 0$.

Для доказательства соотношения (3.21) в случае, когда функция g принадлежит $S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$, достаточно рассмотреть при каждом $h>0$ ее стекловское усреднение

$$(t,u) \mapsto g(t,u;h) \doteq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} g(s,u)ds,\ (t,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{U}, \tag{3.22}$$

воспользоваться неравенством

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\Big|\int_{ma}^{(m+1)a} \langle \eta_j(s,x), g(s,u)\rangle\, ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{m\in\mathbb{Z}}\Big|\int_{ma}^{(m+1)a} \langle \eta_j(s,x), g(s,u;h)\rangle ds\Big| + 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a} \max_{u\in\mathcal{U}}|g(s,u)-g(s,u;h)|\, ds,$$

а также теоремой 1.2 о свойствах стекловских усреднений.

Л е м м а 3.8. *Справедливо следующее предельное соотношение*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big|\int_t^{t+a} \langle \Delta_j(s,x) - \delta_{u_j(s,x)}, g(s,u)\rangle\, ds\Big| \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } j\to\infty. \tag{3.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала соотношение (3.23) в предположении, что

$$\mathfrak{g} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\bigl(\max_{u\in\mathcal{U}}|g(t,u)|\bigr) < \infty. \tag{3.24}$$

Допустим противное. Тогда найдутся такая константа $\alpha>0$ и последовательности $\{j_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, $\{t_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{X}$, что при всех $k\in\mathbb{N}$ для функции

$$s \mapsto f_{j_k}(s,x_k) \doteq \langle \eta_{j_k}(s,x_k), g(s,u)\rangle,$$

где $\eta_{j_k}(s,x) \doteq \Delta_{j_k}(s,x) - \delta_{u_{j_k}(s,x_k)}$, будет выполнено неравенство

$$\Big|\int_{t_k}^{t_k+a} f_{j_k}(s,x_k)\, ds\Big| \geqslant \alpha. \tag{3.25}$$

Сейчас каждое t_k представим в виде $t_k = m_k a + \theta_k a$, где $m_k \in \mathbb{Z}$, $\theta_k \in [0,1)$, и будем считать, чтобы не осложнять обозначений, что $\theta_k \to \widehat{\theta} \in [0,1]$ при $k \to \infty$. Полагаем, далее, $\xi_k \doteq |\theta_k - \widehat{\theta}|$ и на $\mathbb{R} \times \mathfrak{U}$ рассмотрим отображения

$$(t,u) \mapsto g_l(t,u) \doteq \psi_l(t) g(t,u), \ l = 1,2,$$

в которых

$$\psi_1(t) \doteq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi_{ma+[\widehat{\theta}a,a]}(t), \ \psi_2(t) \doteq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi_{ma+[0,\widehat{\theta}a]}(t).$$

Поскольку $g \in S(\mathbb{R}, C(U,\mathbb{R}))$, а измеримые функции $\psi_l : \mathbb{R} \to [0,1]$, $l = 1,2$, являются a-периодическими, то отображения $g_l \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ и, стало быть, по лемме 3.7

$$\lim_{k\to\infty} \bigl(\sup_{x\in\mathfrak{X}} \bigl(\sup_{m\in\mathbb{Z}} \bigl| \int_{ma}^{(m+1)a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g_l(s,u)\rangle \, ds\bigr)\bigr) = 0, \quad l = 1,2. \tag{3.26}$$

Принимая во внимание принятые обозначения, имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Bigl|\int_{t_k}^{t_k+a} f_{j_k}(s,x_k)\, ds\Bigr| &\leqslant 4\xi_k\, \mathfrak{g} + \Bigl|\int_{m_k a+\widehat{\theta}a}^{m_k a+\widehat{\theta}a+a} f_{j_k}(s,x_k)\, ds\Bigr| \leqslant \\ &\leqslant 4\xi_k\, \mathfrak{g} + \sum_{l=1}^{2} \bigl(\sup_{x\in\mathfrak{X}} \bigl(\sup_{m\in\mathbb{Z}} \Bigl| \int_{ma}^{(m+1)a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g_l(s,u)\rangle \, ds\Bigr|\bigr)\bigr), \end{aligned}$$

из которых, учитывая (3.26) и то, что $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$, получаем равенство

$$\lim_{k\to\infty} \Bigl| \int_{t_k}^{t_k+a} f_{j_k}(s,x_k)\, ds\Bigr| = 0, \tag{3.27}$$

противоречащее неравенству (3.25). Тем самым, соотношение (3.23) доказано, если выполнено условие (3.24).

Теперь для функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ при каждом $h > 0$ рассмотрим ее стекловское усреднение (3.22), указанные в теореме 1.2 свойства которого позволяют свести доказательство соотношения (3.23) к рассмотренному выше случаю.

Л е м м а 3.9. *Справедливо следующее предельное соотношение:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Bigl| \int_t^{t+1} \langle \Delta_j(s,x) - \delta_{u_j(s,x)}, g(s,u)\rangle \, ds\Bigr| \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } j \to \infty. \tag{3.28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечалось при доказательстве леммы 3.8, достаточно рассматривать случай, когда функция g удовлетворяет условию (3.24). Докажем соотношение (3.28) также методом от противного. В этом случае найдется константа $\alpha > 0$ и последовательности $\{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{X}$ такие, что будет выполнено неравенство (3.25) при $a = 1$. Представим, далее, каждое t_k в виде $t_k = m_k a + \theta_k a$, где $m_k \in \mathbb{Z}$, $\theta_k \in [0,1)$, и считаем, что $\theta_k \to \widehat{\theta}$ при $k \to \infty$. Полагаем $\xi_k \doteq |\theta_k - \widehat{\theta}|$ и вводим (см. доказательство леммы 3.8) в рассмотрение функции ψ_2, g_2. Кроме того, пусть $1 = m'a + \theta' a$, где $m' \in \mathbb{Z}_+$, $\theta' \in [0,1)$, и считаем для определенности, что $m' \geqslant 1$ и $\widehat{\theta} + \theta' \in [0,1)$ (в остальных возможных случаях доказательство аналогично). Введем, наконец, в рассмотрение a-периодическую измеримую функцию

$$\psi_3(t) \doteq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi_{ma+[(\widehat{\theta}+\theta')a,a]}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

и рассмотрим также отображение

$$(t,u) \mapsto g_3(t,u) \doteq \psi_3(t) g(t,u),$$

принадлежащее пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$. Теперь, обозначив $m_k' \doteq m_k + m'$, имеем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\Big|\int_{t_k}^{t_k+1} f_{j_k}(s,x_k)\,ds\Big| \leqslant 4a\,\mathfrak{g}\,\xi_k + (m'+1)\cdot \sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big|\int_t^{t+a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g(s,u)\rangle\,ds\Big|\Big) + \\
+\Big|\int_{(m_k'+1)a}^{(m_k'+1)a+\widehat{\theta}a} \langle \eta_{j_k}(s,x_k), g(s,u)\rangle\,ds\Big| + \Big|\int_{(m_k'+1)a}^{m_k' a+(\widehat{\theta}+\theta')a} \langle \eta_{j_k}(s,x_k), g(s,u)\rangle\,ds\Big| \leqslant \\
\leqslant 4a\,\mathfrak{g}\,\xi_k + (m'+1)\cdot \sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big|\int_t^{t+a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g(s,u)\rangle\,ds\Big|\Big) + \\
+\sum_{l=2}^{3} \sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big|\int_t^{t+a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g_l(s,u)\rangle\,ds\Big|\Big),
\end{gathered}$$

из которых, в силу леммы 3.8, примененной к функциям $g, g_2, g_3 \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, и того, что $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$, получаем равенство (3.27) при $a = 1$, противоречащее сделанному предположению. $\Box$

Из доказанных лемм 3.6 и 3.9 вытекает первое предельное соотношение в (3.3), из которого, в свою очередь (здесь см. теорему 2.2 и следствие 2.2), получаем второе предельное соотношение в (3.3). Тем самым теорема 3.1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Из приведенного доказательства леммы 3.9 видно, что соотношение (3.28) будет иметь место, если 1 заменить на любое фиксированное число $l > 0$. Этот факт, в силу топологической эквивалентности, имеет место и для соотношения (3.20) леммы 3.6. Таким образом, соотношение (3.3) справедливо, если вместо единицы взять любое фиксированное число $l > 0$.

З а м е ч а н и е 3.2. В теореме 3.1 указаны лишь те свойства аппроксимирующей $\mu \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ последовательности функций $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$, которые будут использованы далее. Помимо этих свойств, например в [56], используя приведенную в доказательстве конструкцию этой последовательности, показано, что, если для заданной функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ интеграл

$$F(t,x) = \int_0^t \langle \mu(s,x), c(u)\rangle ds$$

при каждом x, принадлежащем $\mathfrak{X}$, ограничен на $\mathbb{R}$ (что равносильно п. п. функции $t \mapsto F(t,x)$), то найдется такая подпоследовательность $\{u_{j(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, что при каждом $x \in \mathfrak{X}$ и всяком $i \in \mathbb{N}$ отображение

$$t \mapsto F_i(t,x) = \int_0^t c(u_{j(i)}(s,x))ds$$

п. п. в смыле Бора и $\lim\limits_{i\to\infty}\big(\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} M\{|F(s,x) - F_i(s,x)|\}\big) = 0$.

§4. Игольчатые вариации мерозначных п. п. отображений

В этом параграфе введены конус п. п. наборов, а также игольчатые вариации элементов пространства APM_1 и доказаны их основные свойства.

1. Для фиксированного множества $\Delta \subset \mathbb{R}$ полагаем

$$\mathfrak{M}(\Delta) \doteq \{\mu \in \mathrm{APM}_1 = \mathrm{APM}_1(\mathfrak{U}) : \mathrm{Mod}(\mu) \subset \mathrm{Mod}(\Delta)\} \tag{4.1}$$

(ясно, что $\mathfrak{M}(\mathbb{R}) = \mathrm{APM}_1$). Фиксируем также такую константу $a > 0$, что $\frac{2\pi}{a}$ принадлежит $\mathrm{Mod}(\Delta)$, натуральное число N и произвольный упорядоченный набор точек $0 \leqslant \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_N < a$, который отождествляем с вектором $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$. В дальнейшем для каждого $p \in \mathbb{N}$ полагаем

$$(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p \doteq \{\vec{\mu} = (\mu_j)_{j=1}^p : \mu_j \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}),\ j = 1, \ldots, p\}$$

и последовательность $\{\vec{\mu}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p$, $\vec{\mu}(m) = (\mu_j(m))_{j=1}^p$, $m \in \mathbb{Z}$, называем п. п., если при каждом $j = 1, \ldots, p$ последовательность $\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ является п. п., то есть (см. п. 3 из § 2) при каждом $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{E}(\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z} : \sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} |\mu_j(m+\mathfrak{n}) - \mu_j(m)|_w \leqslant \varepsilon\}$ ее ε-п. п. относительно плотно. Кроме того, если не оговорено специально, рассматриваем лишь такие п. п. последовательности $\{\vec{\mu}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p$, $\vec{\mu}(m) = (\mu_j(m))_{j=1}^p$, $m \in \mathbb{Z}$, что при каждом $j = 1, \ldots, p$

$$\mathrm{Mod}(\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset a\,\mathrm{Mod}(\Delta),$$

и называем их *допустимыми п. п. последовательностями.*

Сейчас каждому $i \in \{1, ..., N\}$ поставим в соответствие число $k_i \in \mathbb{N}$ и пару $(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$, в которой $\vec{\beta}_{k_i} \doteq (\beta_{ij})_{j=1}^{k_i}$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k_i$, а $\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $\vec{\nu}_{k_i}(m) \doteq (\nu_{ij}(m))_{j=1}^{k_i}$, — допустимая п. п. последовательность из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i}$. В дальнейшем $|\vec{\beta}_{k_i}| \doteq \sum\limits_{j=1}^{k_i} \beta_{ij}$ и, если

$$\vec{\beta}^p_{k_i^p} \doteq (\beta^p_{ij})_{j=1}^{k_i^p},\ \vec{\nu}^p_{k_i^p}(m) \doteq (\nu^p_{ij}(m))_{j=1}^{k_i^p},\ p = 1, 2,$$

то полагаем

$$\begin{cases} (\vec{\beta}^1_{k_i^1}, \vec{\beta}^2_{k_i^2}) \doteq (\beta^1_{i1}, \ldots, \beta^1_{ik_i^1}, \beta^2_{i1}, \ldots, \beta^2_{ik_i^2}) \\ (\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m), \vec{\nu}^2_{k_i^2}(m)) \doteq (\nu^1_{i1}(m), \ldots, \nu^1_{ik_i^1}(m), \nu^2_{i1}(m), \ldots, \nu^2_{ik_i^2}(m)), \end{cases} \tag{4.2}$$

где $m \in \mathbb{Z}$ и, следовательно, если $\{\vec{\nu}^p_{k_i^p}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — допустимые п. п. последовательности из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i^p}$, $p = 1, 2$, то $\{(\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m), \vec{\nu}^2_{k_i^2}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — допустимая п. п. последовательность из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i^1+k_i^2}$.

Введем, далее, в рассмотрение множество

$$\mathcal{V} \doteq \Big\{\{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \doteq \{(\vec{\beta}_{k_1}, \{\vec{\nu}_{k_1}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}), \ldots, (\vec{\beta}_{k_N}, \{\vec{\nu}_{k_N}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}\Big\}, \tag{4.3}$$

в котором $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$, и полагаем: если $\iota = \big\{(\vec\beta_{k_i}, \{\vec\nu_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big\}_{i=1}^N \in \mathcal{V}$, то для всякого $\lambda > 0$

$$\lambda\iota \doteq \big\{(\lambda\vec\beta_{k_i}, \{\vec\nu_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big\}_{i=1}^N \quad (\lambda\vec\beta_{k_i} \doteq (\lambda\beta_{ij})_{j=1}^{k_i}), \tag{4.4}$$

и, если $\iota_p = \{(\vec\beta^p_{k_i^p}, \{\vec\nu^p_{k_i^p}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \in \mathcal{V},\ p = 1, 2$, то (см. (4.2))

$$\iota_1 + \iota_2 \doteq \big\{\big((\vec\beta^1_{k_i^1}, \vec\beta^2_{k_i^2}), \{(\vec\nu^1_{k_i^1}(m), \vec\nu^2_{k_i^2}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}}\big)\big\}_{i=1}^N, \tag{4.5}$$

то есть $\mathcal{V}$ — конус, называемый *конусом п. п. (допустимых) наборов.*

Пусть, далее,

$$\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \big\{\vec\iota = (\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \quad \iota_1, \ldots, \iota_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \mathcal{V}\big\}, \tag{4.6}$$

$$\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \big\{\vec{\mathfrak{y}} = (\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \quad \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in [0, \rho]\big\}, \tag{4.7}$$

где $\rho > 0$, и для любых $\vec\iota \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \quad \vec{\mathfrak{y}} \in \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ полагаем

$$\vec{\mathfrak{y}}\,\vec\iota \doteq \mathfrak{y}_1\iota_1 + \ldots + \mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\iota_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}. \tag{4.8}$$

Поэтому, если при $\mathfrak{q} = 1, \ldots, \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ заданы $\iota_{\mathfrak{q}} \doteq \{(\vec\beta^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}, \{\vec\nu^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \in \mathcal{V}$, то из (4.2)–(4.5) вытекает, что $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec\iota \in \mathcal{V}$ и при этом

$$\vec{\mathfrak{y}}\,\vec\iota = \big\{\big((\mathfrak{y}_1\vec\beta^1_{k_i^1}, \ldots \mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\vec\beta^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}_{k_i^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}), \{(\vec\nu^1_{k_i^1}(m), \ldots, \vec\nu^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}_{k_i^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}}\big)\big\}_{i=1}^N. \tag{4.9}$$

Далее, с каждым набором $\iota = \{(\vec\beta_{k_i}, \{\vec\nu_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \in \mathcal{V}$, в котором

$$\beta(\iota) \doteq \sum_{i=1}^N |\vec\beta_{k_i}| > 0,$$

свяжем положительное число

$$\varepsilon(\iota) \doteq \min_{1\leqslant i\leqslant N} (\vartheta_{i+1} - \vartheta_i)/\beta(\iota),\ \vartheta_{N+1} \doteq a$$

и при (ε, m) из $(0, \varepsilon(\iota)] \times \mathbb{Z}$ рассмотрим для каждого $i = 1, \ldots, N$ дизъюнктную систему примыкающих друг к другу полуинтервалов

$$T_{m,i,j}(\varepsilon, \iota) \doteq \begin{cases} ma + [\vartheta_i, \vartheta_i + \varepsilon\beta_{i1}), \\ ma + [\vartheta_i + \varepsilon\sum\limits_{l=1}^{j-1}\beta_{il}, \vartheta_i + \varepsilon\sum\limits_{l=1}^{j}\beta_{il}), \quad 2 \leqslant j \leqslant k_i. \end{cases} \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует, что $\operatorname{mes} T_{m,i,j}(\varepsilon, \iota) = \varepsilon\beta_{ij}$ и при каждом $i = 1, \ldots, N$ имеют место соотношения:

$$\bigcup_{j=1}^{k_i} T_{m,i,j}(\varepsilon, \iota) = ma + [\vartheta_i, \vartheta_i + \varepsilon|\vec\beta_{k_i}|) \subset ma + [\vartheta_i, \vartheta_{i+1}].$$

Теперь, если рассматривается набор (см. (4.9)) $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec\iota \in \mathcal{V}$, в котором

$$\beta(\vec\iota) \doteq \sum_{i=1}^N \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} |\vec\beta^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}| > 0, \tag{4.11}$$

то с ним свяжем положительное число

$$\varepsilon(\rho,\vec{\iota}) \doteq \min_{1\leqslant i\leqslant N}(\vartheta_{i+1}-\vartheta_i)/\rho\beta(\vec{\iota}),\ \vartheta_{N+1}=a. \tag{4.12}$$

Для такого набора из (4.9) и (4.10) получаем, что при каждом $i\in\{1,\dots,N\}$ и всех (ε,m), принадлежащих $(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$,

$$T_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = \begin{cases} T_{m,i,j}(\varepsilon\mathfrak{y}_1,\iota_1),\ 1\leqslant j\leqslant k_i^1,\\ \varepsilon(\mathfrak{y}_1|\vec{\beta}^{1}_{k_i^1}|+\ldots+\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}-1}|\vec{\beta}^{\mathfrak{q}-1}_{k_i^{\mathfrak{q}-1}}|)+T_{m,i,j}(\varepsilon\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}},\iota_{\mathfrak{q}}),\end{cases} \tag{4.13}$$

где $2\leqslant\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{k}+\mathfrak{m},\ 1\leqslant j\leqslant k_i^{\mathfrak{q}}$. Поэтому, если

$$\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) \doteq \bigcup_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} T_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\ m\in\mathbb{Z},\ 1\leqslant i\leqslant N,\ 1\leqslant\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \tag{4.14}$$

то так определенная система полуинтервалов $\left\{\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\right\}_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ дизъюнктна,

$$\operatorname{mes}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = \varepsilon\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}|\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}|,\ \mathfrak{q}=1,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \tag{4.15}$$

и, кроме того, для любых $m\in\mathbb{Z}$, $i=1,\dots,N$

$$\bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = ma+\left[\vartheta_i,\vartheta_i+\varepsilon\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}|\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}|\right)\subset ma+[\vartheta_i,\vartheta_{i+1}]. \tag{4.16}$$

2. Введем игольчатые вариации для элементов множества $\mathfrak{M}(\Delta)$, определенного равенством (4.1).

О п р е д е л е н и е 4.1. Пусть набор $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$, принадлежащий конусу $\mathcal{V}$, такой, что $\beta(\iota)>0$, и пусть $\varepsilon\in[0,\varepsilon(\iota))$. Тогда отображение $t\mapsto\mu(t;\varepsilon,\iota)\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$, $t\in\mathbb{R}$, определенное равенством

$$\mu(t;\varepsilon,\iota) \doteq \begin{cases}\widehat{\mu}(t),\ t\in\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\big([ma,(m+1)a]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{N}\bigcup\limits_{j=1}^{k_i}T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota)\big),\\ \nu_{ij}(m),\ t\in T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota),\ m\in\mathbb{Z},\,1\leqslant i\leqslant N,\,1\leqslant j\leqslant k_i,\end{cases} \tag{4.17}$$

называется *игольчатой вариацией* отображения $\widehat{\mu}\in\mathfrak{M}(\Delta)$, отвечающей набору ι.

З а м е ч а н и е 4.1. При $\varepsilon=0$ считаем $\mu(t;0,\iota)\equiv\widehat{\mu}(t)$ при всех $\iota\in\mathcal{V}$.

З а м е ч а н и е 4.2. Игольчатая вариация отображения $\widehat{\mu}\in\mathfrak{M}(\Delta)$, отвечающая заданному $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N\in\mathcal{V}$, определена в предположении, что в фиксированном наборе $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$ точки $\vartheta_i\in[0,a],\ i=1,...,N$ удовлетворяют условию $0\leqslant\vartheta_1<\ldots<\vartheta_N<a$.

Определим, сейчас, игольчатую вариацию отображения $\widehat{\mu}\in\mathfrak{M}(\Delta)$ когда рассматривается вектор $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$, в котором $0\leqslant\vartheta_1\leqslant\ldots\leqslant\vartheta_N<a$. В этом случае

построим $\vec{\vartheta}' = (\vartheta'_i)_{i=1}^{N'}$, $N' \leqslant N$, такой, что $0 \leqslant \vartheta'_1 < \ldots < \vartheta'_{N'} < a$, где

$$\vartheta'_1 \doteq \vartheta_1 = \ldots = \vartheta_{1+p_1},$$
$$\vartheta'_2 \doteq \vartheta_{2+p_1} = \ldots = \vartheta_{2+p_1+p_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vartheta'_{N'} \doteq \vartheta_{N'+p_1+\ldots+p_{N'-1}} = \ldots = \vartheta_{N'+p_1+\ldots+p_{N'-1}+p_{N'}}$$

и набору ι поставим в соответствие набор $\iota' \doteq \{(\vec{\beta}'_{k'_i}, \{\vec{\nu}'_{k'_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N'}$, в котором (здесь см. (4.2))

$$\vec{\beta}_{k'_i} \doteq \begin{cases} (\vec{\beta}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}}, \ldots, \vec{\beta}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}+p_i}), \text{ если } p_i > 0 \\ \vec{\beta}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}}, \text{ если } p_i = 0, \end{cases}$$

$$\vec{\nu}'_{k'_i}(m) \doteq \begin{cases} (\vec{\nu}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}}(m), \ldots, \vec{\nu}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}+p_i}(m)), \text{ если } p_i > 0 \\ \vec{\nu}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}}(m), \text{ если } p_i = 0. \end{cases}$$

Отметим, что $\beta(\iota) = \beta(\iota')$. Теперь для указанных $\vec{\vartheta}' = (\vartheta'_i)_{i=1}^{N'}$ и ι' строим, аналогично (4.10), при каждом $m \in \mathbb{Z}$ и $i = 1, \ldots, N'$ дизъюнктную систему полуинтервалов $\{T_{m,i,j}(\varepsilon, \iota')\}_{j=1}^{k'_i} \subset ma + [\vartheta'_i, \vartheta'_{i+1}]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\iota')]$, и определим аналогично (4.17), игольчатую вариацию $\mu(\cdot; \varepsilon, \iota')$ отображения $\widehat{\mu}$, которую и будем считать игольчатой вариацией $\widehat{\mu}$, отвечающей набору ι и вектору $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^{N}$, в котором $0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_N < a$. Таким образом, согласно данному определению, при исследовании свойств игольчатых вариаций элементов множества $\mathfrak{M}(\Delta)$, достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда фиксируется вектор $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^{N}$, составленный из точек ϑ_i, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_N < a$.

З а м е ч а н и е 4.3. В случае, если отображение $\widehat{\mu}(\cdot)$, принадлежащее $\mathcal{M}$, является a-периодическим, то рассмотрев $\mu(t; \varepsilon, \iota)$, определенное равенством (4.17) с иголкой $\iota = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$, в которой при каждом $i = 1, \ldots, N$ последовательности $\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \big(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)^{k_i}$, $\vec{\nu}_{k_i}(m) = (\nu_{ij}(m))_{j=1}^{k_i}$ a-периодичны (то есть $\nu_{ij}(m+a) = \nu_{ij}(m)$ для всех $m \in \mathbb{Z}$ и $j = 1, \ldots, k_i$) получим a-периодическую игольчатую вариацию для a-периодического отображения $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathcal{M}$.

Далее, из равенств (4.9), (4.13) и (4.14), а также определения 4.1 вытекает

Л е м м а 4.1. *Пусть* $\widehat{\mu} \in \mathfrak{M}(\Delta)$, $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota} \in \mathcal{V}$ *и* $\beta(\vec{\iota}) > 0$. *Тогда при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota}))$ *и всех* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$\mu(t; \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) =$$
$$= \begin{cases} \widehat{\mu}(t), \; t \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} \Big([ma, (m+1)a] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} \bigcup\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\Big) \\ \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m), \; t \in T_{m,i,j}(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \; m \in \mathbb{Z}, \, 1 \leqslant i \leqslant N, \, 1 \leqslant \mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \, 1 \leqslant j \leqslant k_i^{\mathfrak{q}}, \end{cases} \tag{4.18}$$

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* $\vec{\iota} = (\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *где* $\iota_{\mathfrak{q}} \doteq \{(\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}, \{\vec{\nu}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$, $\mathfrak{q} = 1, \ldots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ *и* $\beta(\vec{\iota}) > 0$. *Тогда для каждой функции* $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathfrak{M}(\Delta)$ *множество*

$\mathfrak{A} \doteq \{\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\ (\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{X}\}$, *где* $\mathfrak{X} \doteq [0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})] \times \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *содержится в множестве* $\mathfrak{M}(\Delta)$, *является равностепенно п. п., и*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(\cdot)\|_w\big) = 0. \tag{4.19}$$

Кроме того, выполнено равенство

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\underset{\substack{(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'),(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}'')\in\mathfrak{X}\\ |\varepsilon'-\varepsilon''|+|\vec{\mathfrak{y}}'-\vec{\mathfrak{y}}''|\leqslant\gamma}}{\text{supremum}}\ \big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\big|\big(\mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}) - \mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota})\big)\big|(\mathcal{U})ds\big)\Big) = 0. \tag{4.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную функцию $c \in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$, которой поставим в соответствие отображения

$$t \mapsto \widehat{f}(t) \doteq \langle\widehat{\mu}(t), c(u)\rangle,\ t \mapsto f(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq \langle\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), c(u)\rangle = \int_{\mathcal{U}} c(u)\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})(du),$$

где $(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{X}$, и рассмотрим также отвечающие им последовательности $\{\widehat{\mathfrak{f}}_m(\cdot)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $L_1([0,a],\mathbb{R})$, определенные при каждом $m \in \mathbb{Z}$ равенствами

$$\widehat{\mathfrak{f}}_m(t) \doteq \widehat{f}(t+ma),\ \mathfrak{f}_m(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq f(t+ma,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}),$$

соответственно. Поскольку $\widehat{\mu} \in \mathfrak{M}(\Delta)$, то $\widehat{f} \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и, значит, последовательность $\{\widehat{\mathfrak{f}}_m(\cdot)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. Кроме того, так как $\iota_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{V}$, то при всех $i = 1,\ldots,N$, $\mathfrak{q} = 1,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ и $j = 1,\ldots,k_i^{\mathfrak{q}}$ числовые последовательности $\{\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, где

$$\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m) \doteq \langle\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m), c(u)\rangle,$$

будут также п. п. Поэтому для каждого $\epsilon > 0$ множество

$$\mathcal{E}(\sigma) \doteq \mathcal{E}(\{\widehat{\mathfrak{f}}_m(\cdot)\}_{m\in\mathbb{Z}},\sigma)\bigcap\big(\bigcap_{i=1}^{N}\bigcap_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\bigcap_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}},\sigma)\big), \tag{4.21}$$

где $\sigma \doteq \min(\epsilon/2,\epsilon/2a)$, непусто и относительно плотно. Покажем, что это множество содержится в $\bigcap_{(\epsilon,\vec{\mathfrak{y}})\in\mathfrak{X}}\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\epsilon,\vec{\mathfrak{y}})\}_{m\in\mathbb{Z}},\sigma)$. Действительно, пусть $\mathfrak{n} \in \mathcal{E}(\sigma)$. Обозначив при каждом $m \in \mathbb{Z}$

$$A_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq \bigcup_{i=1}^{N} A_{m,i}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}),\ A_{m,i}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq \bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \tag{4.22}$$

получаем следующие соотношения:

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^a |\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) - \mathfrak{f}_m(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})|dt \overset{(4.18)}{=} \sup_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\int_{[0,a]\setminus A_0(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})}|\widehat{\mathfrak{f}}_{m+\mathfrak{n}}(t) - \widehat{\mathfrak{f}}_m(t)|dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}|\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+\mathfrak{n}) - \mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)|\cdot\operatorname{mes}T_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\Big) \overset{(4.15)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sup_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\int_0^a|\widehat{\mathfrak{f}}_{m+\mathfrak{n}}(t) - \widehat{\mathfrak{f}}_m(t)|dt + a\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{k}+\mathfrak{m}\\ 1\leqslant j\leqslant k_i^{\mathfrak{q}}}}\big(\sup_{m\in\mathbb{Z}}|\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+\mathfrak{n}) - \mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)|\big)\Big) \overset{(4.21)}{\leqslant} \epsilon,$$

из которых вытекает нужное включение. Следовательно, множество последовательностей $\mathfrak{P} = \{\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\}_{m\in\mathbb{Z}},\ (\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{X}\}$ равностепенно п. п. и для всех $(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{X}$ справедливо включение

$$\operatorname{Mod}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset \operatorname{Mod}\big(\Lambda(\{\widehat{\mathfrak{f}}_m(\cdot)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \bigcup \big(\bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \bigcup_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \Lambda(\{\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big)\big). \tag{4.23}$$

В свою очередь, из равностепенной п. п. множества $\mathfrak{P}$ вытекает равностепенная п. п. множества функций $\{f(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}),\ (\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{X}\}$. Отсюда, в силу произвольности выбора функции $c \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$, получаем (см. определение 2.2), что множество $\mathfrak{A}$ равностепенно п. п. Далее, из (4.23) и теоремы 1.3, принимая во внимание, что $\widehat{\mu} \in \mathfrak{M}(\Delta)$ и $\iota_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{V}$ (а значит, $\operatorname{Mod}(\{\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset a\operatorname{Mod}(\Delta)$), получаем, что при всех $(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})$ из $\mathfrak{X}$ $\operatorname{Mod}(\{\mathfrak{f}(\cdot,m,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset a\operatorname{Mod}(\Delta)+2\pi\mathbb{Z}$. Следовательно, учитывая, что $\frac{2\pi}{a} \in \operatorname{Mod}(\Delta)$, имеем

$$\operatorname{Mod}(f(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})) \subset \frac{1}{a}(a\operatorname{Mod}(\Delta)+2\pi\mathbb{Z}) + \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z} \subset \operatorname{Mod}(\Delta).$$

Теперь, из леммы 2.5 следует, что $\operatorname{Mod}(\mu(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})) \subset \operatorname{Mod}(\Delta)$ для всех $(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{X}$. Тем самым, первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

Далее, фиксируем произвольную функцию $\varphi \in \mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и пусть (см. замечание 1.1) функция $\psi_\varphi \in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ такая, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|\varphi(t,u)| \leqslant \psi_\varphi(t)$. Поскольку (см. (4.7), (4.11) и (4.16)) $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} A_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \leqslant \varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})$, то по теореме Лебега об абсолютной непрерывности интеграла [14] справедливо предельное соотношение

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{A_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})} \psi_\varphi(t)dt \underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0.$$

Поэтому (см. (4.18) и (4.22)), в силу неравенства

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{ma}^{(m+1)a} |\langle\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(t),\varphi(t,u)\rangle|dt \leqslant 2\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{A_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})} \psi_\varphi(t)dt,$$

получаем, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{t}^{t+a} |\langle\mu(s,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(s),\varphi(s,u)\rangle|dt \underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0.$$

Отсюда, в свою очередь, поскольку $\psi_\varphi \in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, получаем равенство

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \big|\int_{\mathbb{R}} \langle\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(t),\varphi(t,u)\rangle dt\big|\big) = 0,$$

которое по определению нормы $\|\cdot\|_w$ (см. п. 1 из § 2) влечет равенство (4.19).

Докажем предельное равенство (4.20). Заметим (здесь см. (4.18) и (4.12)), что если точка

$$t \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [ma,(m+1)a] \setminus \bigcup_{i=1}^{N}\big(A'_{m,i} \bigcup A''_{m,i}\big),$$

где

$$A'_{m,i} \doteq A_{m,i}(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'),\ A''_{m,i} \doteq A_{m,i}(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''),$$

то $\mu(t;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}) = \mu(t;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}) = \widehat{\mu}(t)$ и, в случае если

$$t \in T_{m,i,j}(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}) \bigcap T_{m,i,j}(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}),$$

то $\mu(t;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}) = \mu(t;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}) = \nu^{\mathfrak{q}}_{ij}(m)$. Поэтому при каждом $m \in \mathbb{Z}$

$$\int_{ma}^{(m+1)a} |(\mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}) - \mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}))|(\mathcal{U})ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{A'_{m,i}\cup A''_{m,i}} |(\mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}) - \mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}))|(\mathcal{U})ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \operatorname{mes}\bigl(T_{m,i,j}(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota})\Delta T_{m,i,j}(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota})\bigr) \overset{(4.14)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 4\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} k_i^{\mathfrak{q}} \sum_{l=1}^{\mathfrak{q}} |\varepsilon'\mathfrak{y}'_l - \varepsilon''\mathfrak{y}''_l|\cdot|\vec{\beta}^{\,l}_{k_i^l}|.$$

Отсюда получаем равенство (4.20).

С л е д с т в и е 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда отображение* $(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \mapsto \mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$, *где* $\mathfrak{X} \doteq [0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]\times\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *и для любой функции* $g \in S(\mathbb{R},C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{t}^{t+1} |\langle\mu(s;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(s), g(s,u)\rangle|ds \underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0. \tag{4.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что отображение $(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}) \mapsto \mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ принадлежит (см. определение в § 2) пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$, следует очевидно из равностепенной п. п. множества $\mathfrak{A}$, предельного равенства (4.20) и неравенства

$$|\mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}) - \mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota})|_w \leqslant |(\mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}) - \mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}))|(\mathcal{U}).$$

Предельное соотношение (4.24), в предположении, что $\mathfrak{g} \doteq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|g(t,\cdot)\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})} < \infty$, следует (см. (4.18) и (4.16)) из неравенства

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{ma}^{(m+1)a} |\langle\mu(s;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(s), g(s,u)\rangle|ds \leqslant 2\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})\mathfrak{g}$$

и топологической эквивалентности d_l-расстояний. Для доказательства в общем случае, для функции g надо рассмотреть ее стекловское усреднение и воспользоваться утверждением теоремы 1.2.

3. Приведем еще ряд необходимых свойств элементов множества $\mathcal{V}$.

Л е м м а 4.2. *Допустим, что последовательность непрерывных отображений* $(t,u) \mapsto \mathfrak{f}_m(t,u)$, $(t,u) \in [0,a]\times\mathcal{U}$, $m \in \mathbb{Z}$ *является п. п. равномерно по*

$u \in \mathcal{U}$[4]. *Тогда для любой п. п. последовательности* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$ *последовательность* $\{\langle\nu(m), \mathfrak{f}_m(\cdot, u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset C([0,a],\mathbb{R})$ *будет п. п.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как последовательность отображений $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $C([0,a]\times\mathcal{U},\mathbb{R})$ п. п. равномерно по $u \in \mathcal{U}$, то $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} \|\mathfrak{f}_m\|_{C([0,a]\times\mathcal{U},\mathbb{R})} \doteq \varkappa < \infty$ и для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что $\sup\limits_{(t,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}} \omega_\gamma[\mathfrak{f}_m(t,\cdot),\mathcal{U}] < \varepsilon/3$. Пусть, далее, $\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_p$ — открытое покрытие компакта $\mathcal{U}$ такое, что $\mathrm{diam}\,\mathcal{U}_j \leqslant \gamma$, $j = 1,\dots,p$, и через $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Теперь для каждого $j = 1,\dots,p$ фиксируем точку $u_j \in \mathcal{U}\bigcap\mathcal{U}_j$, в которой $\alpha_j(u_j) > 0$, и рассмотрим числовую п. п. последовательность $\{\lambda_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset [0,1]$, в которой $\lambda_j(m) \doteq \langle\nu(m),\alpha_j(u)\rangle$. Поскольку $\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j(m) = 1$ при всех $m \in \mathbb{Z}$, то последовательность $\{\Delta(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, где $\Delta(m) \doteq \sum\limits_{j=1}^p \lambda_j(m)\delta_{u_j}$, содержится в $\mathrm{rpm}(\mathcal{U})$ и является п. п. Сейчас для любого $\mathfrak{n}$, принадлежащего относительно плотному множеству $\mathcal{E}(\mathfrak{y}) \doteq \big(\bigcap\limits_{u\in\mathcal{U}} \mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\}_{m\in\mathbb{Z}},\mathfrak{y})\big)\bigcap\big(\bigcap\limits_{j=1}^p \mathcal{E}(\{\lambda_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}),\mathfrak{y}\big)$, где $\mathfrak{y} \doteq \min(\frac{\varepsilon}{6p\varkappa},\frac{\varepsilon}{6})$, имеют место (см. доказательство теоремы 2.2) следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\sup_{m\in\mathbb{Z}}\big(\max_{t\in[0,a]} |\langle\nu(m+\mathfrak{n}),\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,u)\rangle - \langle\nu(m),\mathfrak{f}_m(t,u)\rangle|\big) \leqslant \\
\leqslant 2 \sup_{(t,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}} |\langle\nu(m)-\Delta(m),\mathfrak{f}_m(t,u)\rangle| + \\
+\varkappa\sum_{j=1}^p \sup_{m\in\mathbb{Z}} |\lambda_j(m+\mathfrak{n})-\lambda_j(m)| + \sup_{m\in\mathbb{Z}}\big(\max_{t\in[0,a]} |\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,u)-\mathfrak{f}_m(t,u)|\big) \leqslant \\
\leqslant 2 \sup_{(t,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}} \omega_\gamma[\mathfrak{f}_m(t,\cdot),\mathcal{U}] + (p\varkappa+1)\mathfrak{y} \leqslant 2\varepsilon/3 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon,
\end{gathered}
$$

из которых вытекает, что $\mathcal{E}(\mathfrak{y}) \subset \mathcal{E}(\{\langle\nu(m),\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon)$. □

Сейчас, используя лемму 4.2, следуя схеме доказательства следствия 1.8, докажем следующее утверждение.

Л е м м а 4.3. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$. *Тогда для любой последовательности* $\{q'_l\}_{l=1}^\infty \subset [0,\infty)$, $\lim\limits_{l\to\infty} q'_l = \infty$, *найдутся* $\{q_l\}_{l=1}^\infty \subset \{q'_l\}_{l=1}^\infty$ *и измеримое множество* $\Xi \subset [0,a]$, $\mathrm{mes}\,\Xi = a$, *такие, что в каждой точке* $\vartheta \in \Xi$ *для любой п. п. последовательности* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$ *существует* $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a}\sum\limits_{m=0}^{q_l-1} \langle\nu(m), f(\vartheta+ma,u)\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим (см. (1.16)), отвечающую заданной функции $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$ п. п. последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a], C(\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$, которой, в свою очередь, при каждом $h > 0$ поставим в соответствие, определенную на $[0,a]\times\mathcal{U}$, последовательность непрерывных отображений

$$
(t,u) \mapsto \mathfrak{f}_m(t,u;h) \doteq \frac{1}{h}\int_0^h \mathfrak{f}_m(s,u)ds,\ m \in \mathbb{Z}.
$$

[4]То есть для любого $\varepsilon > 0$ множество $\bigcap\limits_{u\in\mathcal{U}} \mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon)$, в котором

$$
\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n}\in\mathbb{Z}\colon \max_{t\in[0,a]} |\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,u)-\mathfrak{f}_m(t,u)| \leqslant \varepsilon\},
$$

относительно плотно.

В силу теоремы 1.2 эта последовательность п. п. равномерно по $u \in \mathfrak{U}$. Поэтому по лемме 4.2 при каждом $h > 0$ для произвольно заданной п. п. последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ последовательность непрерывных на $[0,a]$ отображений

$$t \mapsto \langle \nu(m), \mathfrak{f}(t,t;h)\rangle, \ m \in \mathbb{Z}$$

будет п. п. Зафиксируем, далее, произвольную последовательность $\{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$, стремящуюся, при $j \to \infty$, к нулю. В силу теоремы 1.5 найдутся такие подпоследовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{q'_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty}$ и измеримое множество $\Xi \subset [0,a]$, $\mathrm{mes}\,\Xi = a$, что в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ будет выполняться равенство (1.26) при $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}$. Поэтому в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и $l_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $l \geqslant l_1$ будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}} \max_{u\in\mathfrak{U}} |\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,u) - \mathfrak{f}_m(\vartheta,u)|dt < \varepsilon/3.$$

Далее, из существования предела $\lim\limits_{l\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{q_l-1}\langle\nu(m), \mathfrak{f}_m(\vartheta,u;\eta_{j_\varepsilon})\rangle$ вытекает, что найдется такое $l_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $l \geqslant l_2$ и каждом $p \in \mathbb{N}$

$$\Big|\frac{1}{q_{l+p}a}\sum_{m=0}^{q_{l+p}-1}\langle\nu(m), \mathfrak{f}_m(\vartheta,u;\eta_{j_\varepsilon})\rangle - \frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\langle\nu(m), \mathfrak{f}_m(\vartheta,u;\eta_{j_\varepsilon})\rangle\Big| < \varepsilon/3.$$

Поэтому, используя указанные неравенства при $l \geqslant \max(l_1,l_2)$ и каждом $p \in \mathbb{N}$, как и при доказательстве следствия 1.8, получим, что

$$\Big|\frac{1}{q_{l+p}a}\sum_{m=0}^{q_{l+p}-1}\langle\nu(m), \mathfrak{f}_m(\vartheta,u)\rangle - \frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\langle\nu(m), \mathfrak{f}_m(\vartheta,u)\rangle\Big| < \varepsilon,$$

и лемма 4.3 доказана.

4. В этом пункте определим последовательность п. п. вариаций, отвечающую заданной паре (см. 4.1) $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{M}(\Delta)$, где $\mathfrak{S}$ — фиксированное подмножество банахова пространства $(B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k), \|\cdot\|_C)$ (здесь $\|\cdot\|_C \doteq \|\cdot\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)}$). С этой целью рассмотрим касательный конус Кларка $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ к множеству $\mathfrak{S}$ в точке $\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S}$. В соответствии с определением [93], в данном случае $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ состоит из таких и только таких $h(\cdot) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$, что для любой последовательности функций $\{v_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}$, $\lim\limits_{p\to\infty}\|v_p(\cdot) - \widehat{v}(\cdot)\|_C = 0$, и всякой числовой последовательности $\{\lambda_p\}_{p=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$, $\lim\limits_{p\to\infty}\lambda_p = 0$ отвечает последовательность $\{h_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ такая, что $\lim\limits_{p\to\infty}\|h_p(\cdot) - h(\cdot)\|_C = 0$ и $v_p(\cdot) + \lambda_p h_p(\cdot) \in \mathfrak{S}$ при всех $p \in \mathbb{N}$.

Ниже приведем необходимое далее свойство конуса $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ сразу в виде, удобном для ссылок.

Введем в рассмотрение симплекс

$$\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \Big\{\vec{\lambda} = (\lambda_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \colon\ \lambda_{\mathfrak{q}} \geqslant 0, \mathfrak{q} = 1,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m},\ \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\lambda_{\mathfrak{q}} = 1\Big\} \subset \mathbb{R}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \tag{4.25}$$

и с фиксированными $\tilde{\mathfrak{y}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in [0, \rho]$, $h_1(\cdot), \ldots, h_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ свяжем два отображения

$$\begin{cases} \vec{\lambda} \mapsto \mathfrak{g}(\vec{\lambda}) \doteq (\lambda_{\mathfrak{q}}\tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \ \vec{\lambda} \in \Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \\ \vec{\mathfrak{y}} \mapsto h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}) \doteq \sum\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{q}}\tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}} h_{\mathfrak{q}}(\cdot), \ \vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \mathfrak{g}(\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}). \end{cases} \tag{4.26}$$

Полагаем также

$$V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{v}) + O_{\varrho}[0], \ \varrho \doteq \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}} \|h_{\mathfrak{q}}(\cdot)\|_C + 1. \tag{4.27}$$

Л е м м а 4.4. *Пусть заданы* $h_1(\cdot), \ldots, h_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *и последовательность* $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$. *Тогда найдутся последовательность* $\{v_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}$, *содержащаяся в множестве* $\mathfrak{S}$, $\lim\limits_{p\to\infty} \|v_p(\cdot) - \widehat{v}(\cdot)\|_C = 0$ *и совокупность функций* $\big\{h(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \ p \in \mathbb{N}, \ \vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\big\} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, *такие что* (*см.* (4.26))

$$\lim_{p\to\infty} \big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|h(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})\|_C \big) = 0, \tag{4.28}$$

$$w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) \doteq v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{S}, \ (p, \vec{\mathfrak{y}}) \in \mathbb{N} \times \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}. \tag{4.29}$$

Кроме того,

$$\lim_{p\to\infty} \Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\varepsilon_p^{-1}\big(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - \widehat{v}(\cdot)\big) - h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})\|_C \Big) = 0, \tag{4.30}$$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \Big(\operatorname*{supremum}_{\substack{(p, \vec{\lambda}_l) \in \mathbb{N} \times \Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \\ l=1,2, |\vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_2| \leqslant \gamma}} \|h(\cdot, \varepsilon_p, \mathfrak{g}(\vec{\lambda}_1)) - h(\cdot, \varepsilon_p, \mathfrak{g}(\vec{\lambda}_2))\|_C \Big) = 0. \tag{4.31}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S}$, то расстояние $\rho_{\mathfrak{S}}(\widehat{v}(\cdot))$ в $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ от $\widehat{v}(\cdot)$ до $\mathfrak{S}$ равно нулю. Следовательно, для каждого $p \in \mathbb{N}$ найдется такая функция $v_p(\cdot) \in \mathfrak{S}$, что

$$\|\widehat{v}(\cdot) - v_p(\cdot)\|_C \leqslant \varepsilon_p^2.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{p\to\infty} \|\widehat{v}(\cdot) - v_p(\cdot)\|_C = 0$. Далее, так как $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ — выпуклый замкнутый конус с вершиной в нуле [93], то (см. (4.25), (4.26)) при каждом $\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \mathfrak{g}(\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}})$ $h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и, значит [93],

$$\rho^0_{\mathfrak{S}}(\widehat{v}(\cdot), h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})) \doteq \limsup_{\substack{v(\cdot)\to\widehat{v}(\cdot) \\ \varepsilon\downarrow 0}} \frac{\rho_{\mathfrak{S}}(v(\cdot) + \varepsilon h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})) - \rho_{\mathfrak{S}}(v(\cdot))}{\varepsilon} = 0.$$

Откуда, учитывая, что $\{v_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}$, получаем при каждом $\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ равенство $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p^{-1} \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})) = 0$, и так как $\rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})) \leqslant \sum\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}} h_{\mathfrak{q}}(\cdot))$, а $\tilde{\mathfrak{y}}_1 h_{\mathfrak{q}}(\cdot), \ldots, \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} h_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\cdot)$ принадлежат $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, то

$$\lim_{p\to\infty} \big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \varepsilon_p^{-1} \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})) \big) = 0. \tag{4.32}$$

Далее, в силу определения расстояния, для каждого $p \in \mathbb{N}$ и $\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ найдется такое $w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{S}$, что $\|v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}) - w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}})\|_C < \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})) + \frac{\varepsilon_p}{p}$. Полагая теперь

$$h(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) \doteq \varepsilon_p^{-1}(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - v_p(\cdot)),$$

получаем, что

$$\|h(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - h(\cdot, , \vec{\mathfrak{y}})\|_C = \varepsilon_p^{-1}\|w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - v_p(\cdot) - \varepsilon_p h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})\|_C < \varepsilon_p^{-1}\rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})) + p^{-1}.$$

Отсюда, в силу (4.32), получаем равенство (4.28) и что заданная равенством (4.29) последовательность $\{w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}})\}_{p=1}^{\infty}$ содержится в $\mathfrak{S}$ и удовлетворяет равенству

$$\lim_{p\to\infty}\big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - \widehat{v}(\cdot)\|_C\big) = 0. \tag{4.33}$$

Кроме того, из (4.28) и неравенства

$$\|\varepsilon_p^{-1}(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - \widehat{v}(\cdot)) - h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})\|_C \leqslant \varepsilon_p + \|h(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})\|_C$$

получаем (4.30).

Теперь допустим, что равенство (4.31) неверно. Тогда найдется $\varkappa > 0$ и последовательности $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = 0$, $\{(p_i, \vec{\lambda}_l^{(i)})\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \times \Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $l = 1, 2$, такие, что при всех $i \in \mathbb{N}$ $|\vec{\lambda}_1^{(i)} - \vec{\lambda}_2^{(i)}| \leqslant \gamma_i$, и будет выполнено неравенство

$$\varkappa < H_i \doteq \|h(\cdot, \varepsilon_{p_i}, \vec{\mathfrak{y}}_1^{(i)}) - h(\cdot, \varepsilon_{p_i}, \vec{\mathfrak{y}}_2^{(i)})\|_C,$$

в котором $\mathfrak{y}_l^{(i)} \doteq \mathfrak{g}(\vec{\lambda}_l^{(i)})$ и где, в свою очередь, $\vec{\lambda}_l^{(i)} \doteq (\lambda_{l\mathfrak{q}}^{(i)})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $l = 1, 2$. С другой стороны, из соотношений (здесь см. (4.29))

$$H_i \leqslant \sum_{l=1}^{2} \varepsilon_{p_i}^{-1}\|w(\cdot, \varepsilon_{p_i}, \vec{\mathfrak{y}}_l^{(i)}) - v_{p_i}(\cdot) - h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}_l^{(i)})\|_C + \|h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}_1^{(i)}) - h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}_2^{(i)})\|_C <$$

$$< 2 \sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \varepsilon_{p_i}^{-1}\rho_{\mathfrak{S}}(v_{p_i}(\cdot) + \varepsilon_{p_i} h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})) + \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} |\lambda_{1\mathfrak{q}}^{(i)} - \lambda_{2\mathfrak{q}}^{(i)}|\, \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}}\|h_{\mathfrak{q}}(\cdot)\|_C,$$

в силу (4.32) и равенства $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = 0$, вытекает, что $\lim\limits_{i\to\infty} H_i = 0$. Последнее противоречит тому, что $\varkappa < H_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. $\square$

В дальнейшем набор $\big(\vec{\iota}, \vec{h}(\cdot), \{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\big)$, в котором $\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ такое, что $\beta(\vec{\iota}) > 0$, $\vec{h}(\cdot) \doteq (h_{\mathfrak{l}}(\cdot))_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $h_{\mathfrak{l}}(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, и последовательность $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota})]$, $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$, называем *допустимым.*

О п р е д е л е н и е 4.2. Совокупность последовательностей

$$\big\{\{(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \mu(\cdot; \varepsilon_p \vec{\mathfrak{y}}\, \vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty},\ \vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\big\} \subset \mathfrak{S} \times \mathfrak{M}(\Delta),$$

в которых $w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}})$, принадлежащее множеству $\mathfrak{S}$, определено в лемме 4.4 равенством (4.29), отображение $\mu(\cdot; \varepsilon_p \vec{\mathfrak{y}}\, \vec{\iota}) \in \mathfrak{M}(\Delta)$ — равенством (4.25) при $\varepsilon = \varepsilon_p$, называется *последовательностью п.п. вариаций* для $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{M}(\Delta)$, отвечающей заданному допустимому набору $\big(\vec{\iota}, \vec{h}(\cdot), \{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\big)$.

Глава 2. О свойствах функции максимума для почти периодических отображений

Приводятся достаточные условия почти периодичности по Степанову измеримого отображения $t \mapsto \mathcal{N}(t) \doteq \{x \in \mathfrak{X} : f(t,x) = 0\}$, отвечающего заданной функции $(t,x) \mapsto f(t,x)$, которая при каждом $x \in \mathfrak{X}$ является п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова. Используя эти условия, указана связь между п. п. по Бору решениями дифференциального включения $\dot{x} = \mathrm{co}\, f(t,x,\mathfrak{U})$ и системы уравнений $\dot{x} = \langle \mu(t), f(t,x,u)\rangle$, $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$. Кроме того, приведен ряд свойств функции максимума $t \mapsto \max\limits_{u\in\mathfrak{U}} g(t,u)$, отвечающей отображению $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$.

§5. Лемма Филиппова для п. п. отображений

Для п. п. отображений доказан аналог известной леммы Филиппова [22, с. 176] и указана связь между п. п. решениями дифференциального включения $\dot{x} \in \mathrm{co} f(t,x,\mathfrak{U})$ и решениями системы уравнений $\dot{x} = \langle \mu(t), f(t,x,u)\rangle$, отвечающих $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$.

1. Пусть $(\mathfrak{X},\rho)$ — компактное метрическое пространство, $\mathfrak{x} \doteq \mathrm{diam}\mathfrak{X}$ и $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство; $\mathrm{comp}(\mathfrak{X})$ — совокупность всех непустых компактных подмножеств из $\mathfrak{X}$ с метрикой Хаусдорфа dist_ρ. Отметим [18, 180], что $(\mathrm{comp}(\mathfrak{X}), \mathrm{dist}_\rho)$ — компактное метрическое пространство. Далее, на множестве $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathfrak{X}))$ (см. п. 1 из § 1) зададим d_{dist_ρ}-расстояние

$$d_{\mathrm{dist}_\rho}(F_1,F_2) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \mathrm{dist}_\rho(F_1(s),F_2(s))ds,\ \ F_1,F_2 \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathrm{comp}(\mathfrak{X})), \tag{5.1}$$

и рассмотрим пространство $S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathfrak{X}))$. Напомним, что если $F \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathfrak{X}))$, то $\mathrm{Mod}(F)$ состоит из таких точек $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \exp(i\lambda\tau_j) = 1$ $(i^2 = -1)$ для всякой F-возвращающей последовательности $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Рассмотрим, далее, такую функцию $f \in \mathfrak{V}^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, что при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $f(\cdot,x) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, и для нее построим отображение

$$t \mapsto \mathcal{N}(t) \doteq \{x \in \mathfrak{X} : f(t,x) = 0\}. \tag{5.2}$$

Если $\mathcal{N}(t) \neq \varnothing$, то $\mathcal{N}(t) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$ и, кроме того [22, 180], отображение $t \mapsto \mathcal{N}(t)$ измеримо и существует такая измеримая функция $x : \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$, что $x(t) \in \mathcal{N}(t)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$. Но эта функция может не принадлежать пространству $S(\mathbb{R},\mathfrak{X})$. Чтобы показать это, приведем сначала пример функции $\mathfrak{f} \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ у которой множество нулей совпадает с $\mathbb{Z}$ и отображение $t \mapsto \mathrm{sign}\,\mathfrak{f}(t)$ (считаем $\mathrm{sign}\ 0 = 0$) не принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

П р и м е р 5.1. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим множества

$$A_j \doteq \{z \in \mathbb{Z} : z \equiv \frac{1}{3}((-2)^j - 1)(\mathrm{mod}\, 2^{j+1})\}, \quad B_j \doteq 2^j + A_j,$$

непосредственно из определения которых вытекает, что $A_k \bigcap A_j = \varnothing$ при $k \neq j$, $B_j = A_{j+1} \bigcup B_{j+1}$ для всякого $j \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} A_j$. Далее, фиксируем функцию

$\psi \in C(\mathbb{R},[0,1])$ такую, что $\psi(t) \in (0,1]$ при $t \in (0,1)$ и $\psi(t)=0$ при $t \in \mathbb{R}\setminus(0,1)$, и полагаем $f_j(t) \doteq (-2)^{-j} \sum\limits_{i\in A_j} \psi(t-i), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку f_j — непрерывная 2^{j+1}-периодическая функция и $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f_j(t)| \leqslant 2^{-j},\ j \in \mathbb{Z}_+$, то функция

$$\mathfrak{f}(t) \doteq \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

принадлежит $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\,\mathfrak{f}(t)| \leqslant 1$. Кроме того, множество нулей этой функции совпадает с $\mathbb{Z}$. Покажем теперь, что отображение $t \mapsto \operatorname{sign}\mathfrak{f}(t)$ не принадлежит $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Действительно, пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ и $k > m$. Тогда $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{l=0}^{k-1} A_l \bigcap B_{k-1}$. Далее, берем $a_1 \in A_k$ и $a_2 \in A_{k-1}$. Отметим, что $A_k \subset B_{k-1}$ и $A_{k+1} \subset B_k \subset B_{k-1}$. Для этих чисел найдется такое $l \in \{0,\dots,k-1\}$, что $a_1 + 2^k - 2^m \in A_l$ и $a_2 + 2^k - 2^m \in A_l$. Теперь из соотношений

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\operatorname{sign}\mathfrak{f}(s+2^m) - \operatorname{sign}\mathfrak{f}(s+2^k)|ds \geqslant$$
$$\geqslant \max_{i=1,2}\{\int_0^1 |\operatorname{sign}\mathfrak{f}(s+a_i+2^k-2^m) - \operatorname{sign}\mathfrak{f}(s+a_i)|ds\} = 2,$$

следует, что множество функций $\{\operatorname{sign}\mathfrak{f}(\cdot+2^j), j \in \mathbb{Z}_+\}$ не имеет конечной (относительно метрики d) 2-сети и, значит [107, с. 219], функция $t \mapsto \operatorname{sign}\,\mathfrak{f}(t)$ не принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (отметим, что пример функции $\mathfrak{f} \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, обращающейся в нуль на счетном множестве точек из $\mathbb{R}$ и для которой отображение $\operatorname{sign}\mathfrak{f} \notin S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ приведен также в работе [38]).

П р и м е р 5.2. Рассмотрим функцию $\mathfrak{f}$ из примера 5.1 и по ней построим отображение $(t,x) \mapsto f(t,x) \doteq |\,\mathfrak{f}(t)| - \mathfrak{f}(t)x,\ (t,x) \in \mathbb{R}\times[-1,1]$, которое принадлежит $B(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathbb{R})$. Для этого отображения $\mathcal{N}(t) = \{\operatorname{sign}\,\mathfrak{f}(t)\}$, $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ (см. (5.2) при $\mathfrak{X} \doteq [-1,1]$, $\mathfrak{Y} \doteq \mathbb{R}$), а так как $\operatorname{sign}\mathfrak{f} \notin S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то не существует такой функции $x \in S(\mathbb{R},[-1,1])$, что $f(t,x(t)) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$.

В связи со сказанным, возникает вопрос о существовании п п. по Степанову сечений введенного отображения $t \mapsto \mathcal{N}(t)$. Чтобы указать достаточные условия существования таких сечений, предполагаем, далее, что $\mathcal{N}(t) \neq \varnothing$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$, и при $\alpha > 0$ рассмотрим отображение

$$t \mapsto \mathcal{W}(t,\alpha) \doteq \{x \in \mathfrak{X}\colon\ \|f(t,x)\| \leqslant \alpha\}. \tag{5.4}$$

Введенное отображение измеримо, и при п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\ \mathcal{W}(t,\alpha) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{X})$. Отметим также, что при каждом $t \in \mathbb{R}$ $\ \lim\limits_{\alpha\downarrow 0} \int\limits_t^{t+1} \operatorname{dist}_\rho(\mathcal{W}(s,\alpha),\mathcal{N}(s))ds = 0$, и напомним, что в соответствии с определением 1.5), функция $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ удовлетворяет условию A), если при каждом $\sigma > 0$ $\ \lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\bigl(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(\operatorname{mes}\{s \in [t,t+1] : \omega_\gamma[f(s,\dot{}),\mathfrak{X}] \geqslant \sigma\})\bigr) = 0$.

Т е о р е м а 5.1. *Пусть функция* $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *удовлетворяет условию A) и при каждом* $x\in\mathfrak{X}$ $\ f(\cdot,x)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. *Тогда, если*

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha),\mathcal{N}(\cdot))=0, \tag{5.5}$$

то $\mathcal{N}\in S(\mathbb{R},\mathrm{comp}(\mathfrak{X}))$ *и* $\mathrm{Mod}(\mathcal{N})\subset\mathrm{Mod}\big(\bigcup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(f(\cdot,x))\big)$. *Кроме того, существует такая функция* $x\in S(\mathbb{R},\mathfrak{X})$, *что* $x(t)\in\mathcal{N}(t)$ *при п.в.* $t\in\mathbb{R}$ *и* $\mathrm{Mod}(x)\subset\mathrm{Mod}(\mathcal{N})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ полагаем

$$\Delta_\alpha(t_1,t_2)\doteq\max\{\max_{x\in\mathcal{N}(t_1)}\rho(x,\mathcal{W}(t_2,\alpha)),\max_{x\in\mathcal{N}(t_2)}\rho(x,\mathcal{W}(t_1,\alpha))\}.$$

Поскольку $\rho(x,A)\leqslant\rho(x,B)+\mathrm{dist}_\rho(A,B)$ для любых $x\in\mathfrak{X}$ и $A,B\in\mathrm{comp}(\mathfrak{X})$, то из определения $\Delta_\alpha(t_1,t_2)$ получаем, что при $t_1,t_2\in\mathbb{R}$

$$\Delta_\alpha(t_1,t_2)\geqslant\mathrm{dist}_\rho(\mathcal{N}(t_1),\mathcal{N}(t_2))-\mathrm{dist}_\rho(\mathcal{W}(t_1,\alpha),\mathcal{N}(t_1))-\mathrm{dist}_\rho(\mathcal{W}(t_2,\alpha),\mathcal{N}(t_2)).$$

Отсюда вытекает, что для каждого $\tau\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{N}_\tau(\cdot),\mathcal{N}(\cdot))\leqslant 2d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha),\mathcal{N}(\cdot))+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\Delta_\alpha(s,s+\tau)ds. \tag{5.6}$$

Далее, для заданного $\varepsilon>0$, в силу (5.5), найдется такое $\alpha\in(0,\varepsilon)$, что

$$d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha),\mathcal{N}(\cdot))<\varepsilon/4. \tag{5.7}$$

В свою очередь, для этого α, используя равенство (1.10), входящее в определение 1.5, выбираем $\gamma>0$ таким, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\big(\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]\colon\,\omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]\geqslant\frac{\alpha}{3}\}\big)<\frac{\varepsilon}{8\,\mathfrak{x}}. \tag{5.8}$$

По этому γ строим конечную γ-сеть $\{x_1,\dots,x_p\}\subset\mathfrak{X}$ компакта $\mathfrak{X}$ и фиксируем произвольное τ, принадлежащее относительно плотному множеству

$$\bigcap_{j=1}^{p}E_S\big(f(\cdot,x_j),\frac{\alpha^2}{12p\,\mathfrak{x}}\big). \tag{5.9}$$

Кроме того, для каждого $t\in\mathbb{R}$ на $[t,t+1]$ фиксируем такое измеримое отображение $s\mapsto x(s)\in\mathcal{N}(s)$, что при п. в. $s\in[t,t+1]$

$$\max_{x\in\mathcal{N}(s)}\rho(x,\mathcal{W}(s+\tau,\alpha))=\rho(x(s),\mathcal{W}(s+\tau,\alpha)),$$

и полагаем

$$\mathfrak{T}(t,\alpha)\doteq\{s\in[t,t+1]:x(s)\in\mathcal{W}(s+\tau,\alpha)\}.$$

В силу (5.4) очевидно, что $[t,t+1]\setminus\mathfrak{T}(t,\alpha)=\{s\in[t,t+1]:\|f(s+\tau,x(s))\|>\alpha)\}$. Введем, наконец, в рассмотрение множества

$$\mathcal{M}_j(t)\doteq\{s\in[t,t+1]:\rho(x_j,x(s))<\gamma\},\ j=1,\dots,p$$

и построим дизъюнктную систему множеств

$$T_1(t) \doteq \mathcal{M}_1(t),\ T_j(t) \doteq \mathcal{M}_j(t) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{M}_k(t),\ j = 2, \ldots, p,$$

объединение которых есть $[t, t+1]$. Теперь, принимая во внимание, что $x(s) \in \mathcal{N}(s)$, а значит $f(s, x(s)) = 0$, неравенство (5.8) и выбор τ, получаем следующие соотношения:

$$\int_t^{t+1} \max_{x \in \mathcal{N}(s)} \rho(x, \mathcal{W}(s+\tau, \alpha))\, ds = \int_t^{t+1} \rho(x(s), \mathcal{W}(s+\tau, \alpha))\, ds =$$

$$= \int_{[t,t+1]\setminus \mathfrak{T}(t,\alpha)} \rho(x(s), \mathcal{W}(s+\tau,\alpha))\, ds \leqslant \mathfrak{r}\ \mathrm{mes}([t, t+1] \setminus \mathfrak{T}(t,\alpha)) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{r} \sum_{j=1}^{p} \mathrm{mes}\big\{s \in T_j(t) : \|f(s, x_j) - f(s, x(s))\| +$$

$$+ \|f(s+\tau, x_j) - f(s, x_j)\| + \|f(s+\tau, x(s)) - f(s+\tau, x_j)\| > \alpha\big\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{r} \sum_{j=1}^{p} \Big(\mathrm{mes}\big\{s \in T_j(t) : \omega_\gamma[f(s+\tau, \cdot), \mathfrak{X}] \geqslant \frac{\alpha}{3}\big\} +$$

$$+ \mathrm{mes}\big\{s \in T_j(t) : \|f(s+\tau, x_j) - f(s, x_j)\| > \frac{\alpha}{3}\big\} + \mathrm{mes}\big\{s \in T_j(t) : \omega_\gamma[f(s, \cdot), \mathfrak{X}] \geqslant \frac{\alpha}{3}\big\}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathfrak{r} \sup_{t \in \mathbb{R}} \big(\mathrm{mes}\{s \in [t, t+1] : \omega_\gamma f(s, \cdot), \mathfrak{X}] \geqslant \frac{\alpha}{3}\}\big) +$$

$$+ \frac{3\mathfrak{r}}{\alpha} \sum_{j=1}^{p} d(f(\cdot + \tau, x_j), f(\cdot, x_j)) < 2\mathfrak{r} \cdot \frac{\varepsilon}{8\,\mathfrak{r}} + \frac{3p\,\mathfrak{r}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{12p\,\mathfrak{r}} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\alpha}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда, в свою очередь, в силу произвольности выбора точки $t \in \mathbb{R}$, получаем, что $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max\limits_{x \in \mathcal{N}(s)} \rho(x, \mathcal{W}(s+\tau, \alpha)) ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Аналогично доказывается, что $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max\limits_{x \in \mathcal{N}(s+\tau)} \rho(x, \mathcal{W}(s, \alpha)) ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Из последних двух неравенств получаем, что $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \Delta_\alpha(s, s+\tau) ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, и, следовательно (см. неравенства (5.6), (5.7)), $d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{N}_\tau(\cdot), \mathcal{N}(\cdot)) < \varepsilon$. Тем самым, доказано, что для каждого $\varepsilon > 0$ относительно плотное множество (5.9) содержится в

$$E_S(\mathcal{N}, \varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{N}_\tau(\cdot), \mathcal{N}(\cdot)) < \varepsilon\},$$

то есть $\mathcal{N} \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathfrak{X}))$ и при этом

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Mod}\Big(\bigcup_{j=1}^{p} \Lambda(f(\cdot, x_j))\Big) \subset \mathrm{Mod}\Big(\bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \Lambda(f(\cdot, x))\Big).$$

Первое утверждение теоремы 5.1 доказано. Второе утверждение есть следствие первого утверждения и результатов работ [38, 50].

Замечание 5.1. Каждое множество $\mathfrak{K} \in \mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ далее рассматриваем как подпространство компактного метрического пространства $(\mathrm{rpm}(\mathcal{U}), \rho_w)$ и $\mathrm{comp}(\mathfrak{K})$ — как подпространством метрического пространства $(\mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathcal{U})), \mathrm{dist}_w)$, где $\mathrm{dist}_w \doteq \mathrm{dist}_{\rho_w}$. Аналогично, множество $\mathcal{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ рассматриваем как компактное метрическое пространство $(\mathcal{U}, \rho_m)$ и $(\mathrm{comp}(\mathcal{U}), \mathrm{dist})$ — подпространство метрического пространства $(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m), \mathrm{dist})$, где $\mathrm{dist} \doteq \mathrm{dist}_{\rho_m}$. С учетом сказанного рассматриваем и множества функций $S(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$, $S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathcal{U}))$.

Ниже, для удобства ссылок, приведем в виде следствий теорему 5.1 при конкретном выборе $\mathfrak{X}$.

Следствие 5.1. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n))$, $\mathfrak{K} \in \mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ *и*

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t; \mathfrak{K}) \doteq \{\nu \in \mathfrak{K} \colon \langle \nu, g(t,u) \rangle = 0\}, \tag{5.10}$$

$$\mathcal{W}(t,\alpha) = \mathcal{W}(t,\alpha; \mathfrak{K}) \doteq \{\nu \in \mathfrak{K} \colon |\langle \nu, g(t,u) \rangle| \leqslant \alpha\}. \tag{5.11}$$

Тогда, если при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{N}(t) \neq \varnothing$ *и* $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} d_{\mathrm{dist}_w}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha), \mathcal{N}(\cdot)) = 0$, *то* $\mathcal{N} \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$, *существует такое* $\mu \in APM_1$, *что* $\mu(t) \in \mathcal{N}(t)$ *для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *и выполняются включения* $\mathrm{Mod}(\mu) \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Mod}(g)$.

Доказательство. На $\mathbb{R} \times \mathfrak{K}$ введем в рассмотрение отображение $(t,\nu) \mapsto h(t,\nu) \doteq \langle \nu, g(t,u) \rangle$. Так как $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n))$, то из неравенства

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{\nu \in \mathfrak{K}} |h(s+\tau,\nu) - h(s,\nu)| ds \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u \in \mathcal{U}} |g(s+\tau,u) - g(s,u)| ds$$

вытекает, что $\mathfrak{g} \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{K}, \mathbb{R}^n))$ и (см. следствие 1.1 и равенство (1.6) при $\mathfrak{X} = \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{X} = \mathcal{U}$) $\mathrm{Mod}(\bigcup\limits_{\nu \in \mathfrak{K}} \Lambda(\mathfrak{g}(\cdot,\nu))) = \mathrm{Mod}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Mod}(g) = \mathrm{Mod}(\bigcup\limits_{u \in \mathcal{U}} \Lambda(g(\cdot,u)))$. Кроме того, по следствию 1.2, функция h будет удовлетворять условию A). Поэтому из теоремы 5.1 при $(\mathfrak{X}, \rho) = (\mathfrak{K}, \rho_w)$, $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ и $f = h$ получим утверждение следствия 5.1.

Следствие 5.2. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n))$ *и*

$$N(t) = N(t; \mathcal{U}) \doteq \{u \in \mathcal{U} \colon g(t,u) = 0\}, \tag{5.12}$$

$$W(t,\alpha) \doteq \{u \in \mathcal{U} \colon |g(t,u)| \leqslant \alpha\}. \tag{5.13}$$

Тогда, если при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $N(t) \neq \varnothing$ *и* $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot,\alpha), N(\cdot)) = 0$, *то отображение* $N \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathcal{U}))$, *существует такая функция* $u \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, *что для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ $u(t) \in N(t)$, *и выполняются включения* $\mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(N) \subset \mathrm{Mod}(g)$.

Замечание 5.2. По лемме 2.1 наличие у отображения $t \mapsto N(t)$, определенного равенством (5.12), п. п. по Степанову сечений равносильно существованию у отображения $t \mapsto \mathcal{N}_1(t) \doteq \mathcal{N}(t; \mathrm{DIR}(\mathcal{U}))$ (см. (5.10) при $\mathfrak{K} = \mathrm{DIR}(\mathcal{U})$) сечений, принадлежащих (см. (2.4)) $\mathrm{APM}_1^{(1)}$ (отметим также, что $N \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathcal{U}))$ в том и только в том случае, если $\mathcal{N}_1 \in S(\mathbb{R}, \mathrm{DIR}(\mathcal{U}))$). Поэтому, поскольку $\mathrm{APM}_1^{(1)} \subset \mathrm{APM}_1$, то существование у отображения $t \mapsto N(t)$ п. п. по Степанову сечения обеспечивает существование п. п. сечения у отображения $t \mapsto \mathcal{N}(t; \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ (см. (5.10) при

$\mathfrak{K} = \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$). Следующий пример показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, то есть отображение $\mathcal{N}(\cdot\,; \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ может иметь сечения, принадлежащие APM_1, тогда как $N(\cdot)$ (а значит и $\mathcal{N}_1(\cdot)$) может и не иметь п. п. по Степанову сечений.

Пример 5.3. Пусть $\mathfrak{U} \doteq \{(u_1, u_2): \ |u_1| = 1, |u_2| \leqslant 1\}$, $\mathfrak{f} \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ определена равенством (5.3) из примера 5.1 и $g(t, u) \doteq u_1(|\,\mathfrak{f}(t)| - \mathfrak{f}(t)u_2)$, $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U}$. Функция $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$ и для нее (см. (5.12)) $N(t) = \{(\pm 1, \mathrm{sign}\,\mathfrak{f}(t))\}$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $\mathrm{sign}\,\mathfrak{f} \notin S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то у $N(\cdot)$ нет п. п. по Степанову сечений. С другой стороны, отображение $t \mapsto \mathcal{N}(t; \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ содержит, по крайней мере, сечение $t \mapsto \mu(t) = \frac{1}{2}(\delta_{u_1(t)} + \delta_{u_2(t)})$, где $u_k(t) = ((-1)^k, u(t))$, $k = 1, 2$, и где, в свою очередь, $u(\cdot)$ — любая фиксированная функция из $S(\mathbb{R}, [-1, 1])$.

В заключение этого пункта, используя следствие 5.2, приведем достаточное условие почти периодичности по Степанову функции $\mathrm{sign}\,\mathfrak{f}$, эквивалентное σ-свойству функции f [106, с. 504].

Лемма 5.1. *Пусть $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $I(\beta) \doteq \{t \in \mathbb{R}\colon \ |f(t)| \leqslant \beta\}$. Тогда, если*

$$\lim_{\beta \downarrow 0} \bigl(\sup_{t \in \mathbb{R}} (\mathrm{mes}([t, t+1] \cap I(\beta)) \bigr) = 0, \tag{5.14}$$

то $\mathrm{sign}\, f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и* $\mathrm{Mod}(\mathrm{sign}\, f) \subset \mathrm{Mod}(f)$.

Доказательство. Положим $g(t, u) \doteq |f(t)| - f(t)u$, $(t, u) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$. Так как $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то $g \in S(\mathbb{R}, C([-1, 1], \mathbb{R}))$ и $\mathrm{Mod}(g) \subset \mathrm{Mod}(f)$. Далее, для функции g, в силу (5.12), (5.13), имеем

$$N(t) = \{\mathrm{sign}\, f(t)\}, \ W(t, \alpha) = \{u \in [-1, 1]\colon \ |f(t)| - f(t)u \leqslant \alpha\}.$$

Следовательно, если $u_\alpha(t) \in W(t, \alpha)$, то

$$u_\alpha(t) \in \begin{cases} [1 - \frac{\alpha}{f(t)}, 1], & \text{если } f(t) > 0, \\ [-1, -1 - \frac{\alpha}{f(t)}], & \text{если } f(t) < 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Теперь для заданного $\varepsilon > 0$, в силу (5.14), найдется такое $\beta > 0$, что будет выполнено неравенство $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \bigl(\mathrm{mes}([t, t+1] \bigcap I(\beta))\bigr) < \frac{\varepsilon}{4}$. Поэтому

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |u_\alpha(s) - \mathrm{sign}\, f(s)| ds \leqslant 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} \bigl(\mathrm{mes}([t, t+1] \bigcap I(\beta))\bigr) +$$
$$+ \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{[t, t+1] \setminus I(\beta)} |u_\alpha(s) - \mathrm{sign}\, f(s)| ds < \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{[t, t+1] \setminus I(\beta)} |u_\alpha(s) - \mathrm{sign}\, f(s)| ds.$$

Далее, если $s \in [t, t+1] \setminus I(\beta)$, то $|f(s)| > \beta$. Следовательно $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} u_\alpha(s) \overset{(5.15)}{=} \mathrm{sign}\, f(s)$. Поэтому из полученного выше соотношения вытекает, что при всех достаточно малых $\alpha > 0$ $\ d(u_\alpha(\cdot), \mathrm{sign}\ f(\cdot)) < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{al \downarrow 0} d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot, \alpha), N(\cdot)) = 0$. По следствию 5.2 отображение $t \mapsto N(t) = \{\mathrm{sign}\ f(t)\}$ п. п., а значит и функция $\mathrm{sign}\ f(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, и относительно функции $f : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ предполагаем, что для любого заданного $K \in \mathrm{comp}(G)$ $\quad f \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$.

Л е м м а 5.2. *Для всякого* $K \in \mathrm{comp}(G)$ *и* $\mu \in \mathrm{APM}_1$ *отображение*

$$(t,x) \mapsto \langle \mu(t), f(t,x,u)\rangle \doteq \int_{\mathcal{U}} f(t,x,u)\mu(t)(du) \tag{5.16}$$

принадлежит $S(\mathbb{R}, C(K,\mathbb{R}^n))$. *Кроме того, для любого* $\mu \in \mathrm{APM}_1$ *и всякой функции* $x \in B(\mathbb{R}, G)$, *такой, что* $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$, *отображение* $t \mapsto \langle \mu(t), f(t,x(t),u)\rangle$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции f рассмотрим, при каждом $h > 0$, ее стекловское усреднение $(t,x,u) \mapsto f_h(t,x,u) \doteq \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(s,x,u)$, принадлежащее (см. теорему 1.2) пространству $B(\mathbb{R}\times K\times\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ и, стало быть, ограниченное на $\mathbb{R}\times K\times\mathcal{U}$. Фиксируем, далее, произвольное $\mu \in \mathrm{APM}_1$ и обозначим

$$\mathfrak{f}_h(t,x) \doteq \langle \mu(t), f_h(t,x,u)\rangle, \ \mathfrak{f}(t,x) \doteq \langle \mu(t), f(t,x,u)\rangle.$$

Поскольку при каждом $\sigma > 0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl(\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]\colon \omega_\gamma[\mathfrak{f}_h(s,\cdot),K] > \sigma\}\bigr) <$$
$$< \frac{1}{\sigma}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[\mathfrak{f}_h(s,\cdot),K]ds \leqslant \frac{1}{\sigma}\sup_{t\in\mathbb{R}}\Bigl(\int_t^{t+1}\omega_\gamma[f(s,\cdot,\cdot),K\times\mathcal{U}]ds\Bigr),$$

а по условию $f \in S(\mathbb{R}, C(K\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$, то (см. лемму 1.3) ограниченное на $\mathbb{R}\times K$ отображение $(t,x) \mapsto \mathfrak{f}_h(t,x)$ удовлетворяет условию A) и, кроме того (см. следствие 2.3), при каждом $x \in K$ $\mathfrak{f}_h(\cdot,x) \in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Отсюда, по лемме 1.4, при всяком $h > 0$ $\mathfrak{f}_h \in S(\mathbb{R}, C(K,\mathbb{R}^n))$. Теперь, поскольку при каждом $h > 0$ и любом $\tau \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in K}|\,\mathfrak{f}(s+\tau,x) - \mathfrak{f}(s,x)|ds \leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{(x,u)\in K\times\mathcal{U}}|f(s,x,u) - f_h(s,x,u)|ds + \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in K}|\mathfrak{f}_h(s+\tau,x) - \mathfrak{f}_h(s,x)|ds,$$

то из теоремы 1.2 и доказанного выше включения $\{\mathfrak{f}_h,\ h > 0\} \subset S(\mathbb{R}, C(K,\mathbb{R}^n))$, получим первое утверждение леммы 5.1.

Далее, так как $x \in B(\mathbb{R}, G)$, то $K \doteq \overline{\mathrm{orb}}(x) \in \mathrm{comp}(G)$. Поэтому п. п. отображения $t \mapsto \langle \mu(t), f(t,x(t),u)\rangle$ следует из первого утверждения леммы 5.1 и следствия 2.3.

З а м е ч а н и е 5.3. Отметим, что на самом деле утверждение леммы 5.2 справедливо и в случае, если в качестве K рассмотреть компактное подмножество заданного метрического пространства. Поэтому, если $K \doteq X\times V$, где множество $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, а $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$, то получим, что при каждом $\mu \in \mathrm{APM}_1$ отображение $(t,x,v) \mapsto \boldsymbol{f}(t,x,v) \doteq \langle \mu(t), f(t,x,v,u)\rangle = \int_{\mathcal{U}} f(t,x,v,u)\mu(t)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(X\times V,\mathbb{R}^n))$. Теперь, если задана функция $v \in S(\mathbb{R}, V)$, то используя утверждение леммы 5.2 для $\nu(\cdot) = \delta_{v(\cdot)} \in \mathrm{APM}_1(V)$ и $\boldsymbol{f} \in S(\mathbb{R}, C(X\times V,\mathbb{R}^n))$, получим, что отображение $(t,x) \mapsto \langle \nu(t), \boldsymbol{f}(t,x,v)\rangle = \int_V \boldsymbol{f}(t,x,v)\nu(t)(dv)$ принадлежит $S(\mathbb{R}, C(X,\mathbb{R}^n))$. Тем самым, показано, что если $f \in S(\mathbb{R}, C(X\times V\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$, где $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$, то для всякой функции $v \in S(\mathbb{R}, V)$ и любого $\mu \in \mathrm{APM}_1$ отображение

$$(t,x) \mapsto \langle \mu(t), f(t,x,v(t),u) \rangle = \int_{\mathfrak{U}} f(t,x,v(t),u)\mu(t)(du)$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(X, \mathbb{R}^n))$.

Л е м м а 5.3. *Пусть функция $x \in B(\mathbb{R}, G)$ и $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$. Тогда отображения $t \mapsto f(t, x(t), \mathfrak{U})$, $t \mapsto \mathrm{co}\, f(t, x(t), \mathfrak{U})$ принадлежат пространствам $S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n))$ и $S(\mathbb{R}, \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n))$, соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $K \doteq \overline{\mathrm{orb}}(x)$. Поскольку $x \in B(\mathbb{R}, G)$, то $K \in \mathrm{comp}(G)$ и, так как f принадлежит $S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, то по лемме 1.3 для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что

$$I(\gamma) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \omega_\gamma[f(s,\cdot,\cdot), K \times \mathfrak{U}]ds < \frac{\varepsilon}{2}$$

и множество $E_B(x, \mathfrak{y}) \bigcap (\bigcap\limits_{(z,u) \in K \times \mathfrak{U}} E_S(f(\cdot, z, u), \mathfrak{y}))$, где $\mathfrak{y} \doteq \min(\frac{\varepsilon}{2}, \gamma)$, относительно плотно. Пусть τ принадлежит этому множеству. Теперь для каждого $t \in \mathbb{R}$ фиксируем такую измеримую функцию $u \colon [t, t+1] \to \mathfrak{U}$, что при п.в. $s \in [t, t+1]$

$$\max_{v \in f(s,x(s),\mathfrak{U})} \rho_n(v, f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U})) = \rho_n(f(s,x(s),u(s)), f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U})).$$

Тогда из соотношений:

$$\begin{gathered}
\int_t^{t+1} \rho_n(f(s,x(s),u(s)), f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U}))ds \leqslant \\
\leqslant \int_t^{t+1} \big| f(s,x(s),u(s)) - f(s+\tau, x(s+\tau), u(s) \big| ds + \\
+ \int_t^{t+1} \big| f(s+\tau, x(s), u(s)) - f(s+\tau, x(s+\tau), u(s) \big| ds \leqslant \\
\leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{(x,u) \in K \times \mathfrak{U}} \big| f(s+\tau, x(s+\tau), u(s) - f(s, x(s), u(s)) \big| ds + I(\gamma) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{gathered}$$

вытекает, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{v \in f(s,x(s),\mathfrak{U})} \rho_n\big(v, f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U})\big) ds \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично показываем, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{v \in f(s+\tau,x(s+\tau),\mathfrak{U})} \rho_n\big(\mathfrak{f}, f(s, x(s), \mathfrak{U})), \mathfrak{U})\big) ds \leqslant \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств вытекает, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \mathrm{dist}\big(f(s,x(s),\mathfrak{U}), f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U})\big) ds \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым первая часть леммы 5.3 доказана. Второе утверждение этой леммы следует из первого и неравенства $\mathrm{dist}(\mathrm{co}A, \mathrm{co}B) \leqslant \mathrm{dist}(A, B)$, $A, B \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Рассмотрим сейчас п. п. по Степанову (см. лемму 5.2) систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t,x,u) \rangle,\ \mu(\cdot) \in APM_1,\ (t,x) \in \mathbb{R} \times G, \tag{5.17}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \mathrm{co} f(t,x,\mathfrak{U}),\ (t,x) \in \mathbb{R} \times G, \tag{5.18}$$

с п. п. по Степанову (см. лемму 5.3) правой частью.

Т е о р е м а 5.2. *Пусть функция* $x \in B(\mathbb{R}, G)$ *является решением системы* (5.17), *отвечающим некоторому* $\mu \in APM_1$ *и* $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$. *Тогда она является также и решением включения* (5.18).

Доказательство теоремы 5.2 практически совпадает с доказательством соответствующего утверждения (см.,например, [22]) для системы (5.18), определенной на некотором отрезке $[t_0, t_1]$ с обобщенными управлениями из $\mathbb{M}([t_0,t_1], \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, и мы его опускаем.

Отметим, далее, что в отличие от случая, когда дифференциальное включение (5.18) определено на заданном отрезке $[t_0, t_1]$, вообще говоря, нельзя утверждать, что в рассматриваемом случае п. п. по Бору решению $x(\cdot)$ включения (5.18) отвечает $\mu \in APM_1$, при котором $x(\cdot)$ будет решением системы (5.17).

П р и м е р 5.4. Пусть $f(t,x,u) \doteq x + |\,\mathfrak{f}(t)| - \mathfrak{f}(t)u$, $(t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-1,1]$, где функция $\mathfrak{f} \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ определена равенством (5.3). Тогда очевидно, что $x(t) \equiv 0$ есть решение дифференциального включения $\dot{x} \in x + |\,\mathfrak{f}(t)| - \mathfrak{f}(t) \cdot [-1,1]$. С другой стороны, равенство $|\,\mathfrak{f}(t)| - \langle \mu(t), \mathfrak{f}(t)u \rangle = 0$ возможно лишь при $\mu(t) = \delta_{\mathrm{sign}\, \mathfrak{f}(t)}$, а так как $\mathrm{sign}\, \mathfrak{f} \notin S(\mathbb{R}, [-1,1])$, то по лемме 2.1 и $\mu \notin \mathrm{APM}_1$.

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{C} \doteq \{ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \delta_{u_j},\ 0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1,\ u_j \in \mathfrak{U},\ j = 1, \ldots, n+1,\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \},$$

принадлежащее $\mathrm{conv}(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$.

Т е о р е м а 5.3. *Пусть* $x \in B(\mathbb{R}, G)$ *— такое решение дифференциального включения* (5.18), *что* $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$ *и* $\dot{x} \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. *Пусть, далее, отображения* $t \mapsto \mathcal{N}(t)$, $t \mapsto \mathcal{W}(t,\alpha)$ *определены равенствами* (5.10) *и* (5.11), *соответственно, при* $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}$ *и* $g(t,u) \doteq \dot{x}(t) - f(t, x(t), u)$. *Тогда, если выполнено равенство* $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} d_{\mathrm{dist}_w}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha), \mathcal{N}(\cdot)) = 0$, *то существует такое* $\widehat{\mu} \in APM_1$, *что* $\widehat{\mu}(t) \in \mathfrak{C}$ *для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *и* $x(\cdot)$ *будет решением системы уравнений* (5.17) *при* $\mu(t) = \widehat{\mu}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, где $K \doteq \overline{\mathrm{orb}}(x)$, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что (здесь см. принятое при доказательстве леммы 5.3 обозначение) $I(\gamma) < \varepsilon/3$, и при $\mathfrak{y} \doteq \min(\varepsilon/3, \gamma)$ множество

$$E_B(x, \mathfrak{y}) \bigcap E_S(\dot{x}, \mathfrak{y}) \bigcap (\bigcap_{(z,u) \in K \times \mathfrak{U}} E_B(f(\cdot, z, u), \mathfrak{y}))$$

относительно плотно. Далее, так как для каждого τ из этого множества

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(s+\tau,u)-g(s,u)|ds\leqslant d(\dot{x}_\tau,\dot{x})+$$
$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{(z,u)\in K\times\mathfrak{U}}|f(s+\tau,z,u)-f(s,z,u)|ds+I(\gamma)<\varepsilon,$$

то $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. Теперь утверждение теоремы 5.3 вытекает из следствия 5.1 при $\mathfrak{K}=\mathfrak{C}$. $\square$

Рассмотрим, далее, п. п. по Степанову систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t,x,u(t)),\ u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U}),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G, \tag{5.19}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x}\in f(t,x,\mathfrak{U}),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G, \tag{5.20}$$

с п. п. по Бору (см. лемму 5.3) правой частью.

Очевидно, что всякое п. п. по Бору решение системы (5.19) является решением включения (5.20). Обратное утверждение (см. пример 5.4), вообще говоря, неверно. В связи с этим приведем следующую теорему, вытекающую из следствия 5.2.

Т е о р е м а 5.4. *Пусть $x(\cdot)\in B(\mathbb{R},G)$ — такое решение дифференциального включения* (5.20), *что $\overline{\mathrm{orb}}(x)\subset G$ и $\dot{x}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Пусть, далее, отображения $t\mapsto N(t)$, $t\mapsto W(t,\alpha)$ определены равенствами* (5.12) *и* (5.13), *соответственно, при $g(t,u)\doteq\dot{x}(t)-f(t,x(t),u)$. Тогда, если выполнено равенство $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}d_{\mathrm{dist}_w}(W(\cdot,\alpha),N(\cdot))=0$, то существует такое $\widehat{u}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, что $x(\cdot)$ будет являться решением системы уравнений* (5.19) *при $u(t)=\widehat{u}(t)$.*

§6. О поточечном максимуме для п. п. отображений

Приведен ряд свойств функции максимума, отвечающей отображению из пространства п. п. по Степанову функций $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$.

1. С функцией g, принадлежащей пространству $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ (или $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$) свяжем два измеримых отображения [18, 180]

$$t\mapsto\varphi(t)\doteq\max_{u\in\mathfrak{U}}g(t,u)\in\mathbb{R}, \tag{6.1}$$

$$t\mapsto F(t)\doteq\{u\in\mathfrak{U}\colon\ g(t,u)=\varphi(t)\}\in\mathrm{comp}(\mathfrak{U}). \tag{6.2}$$

В силу неравенства $|\varphi_\tau(t)-\varphi(t)|\leqslant\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|g(t+\tau,u)-g(t,u)|$ функция $\varphi\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (и $\varphi\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, если $g\in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$) и для каждого $\varepsilon>0$ $\bigcap\limits_{u\in\mathfrak{U}}E_S(g(\cdot,u),\varepsilon)\subset E_S(\varphi,\varepsilon)$ (следовательно, $\mathrm{Mod}(\varphi)\subset\mathrm{Mod}(g)$).

В этом пункте исследуем вопрос о наличии у отображения F п. п. по Степанову сечений, то есть таких функций $u\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, что $u(t)\in F(t)$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие возможные ситуации в этой задаче.

Приведем пример отображения $F\notin S(\mathbb{R},\mathrm{comp}(\mathfrak{U}))$, но имеющего п. п. сечения.

П р и м е р 6.1. Пусть $g(t,u) = f(t)u$, $(t,u) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$, где

$$f(t) = \sum_{m=2}^{\infty} 2^{-m} f_m(t), \ f_m(t) \doteq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi(t - m - 2mj),$$

и где, в свою очередь, ψ — такая непрерывная функция, что $\psi(t) > 0$ при $|t| < 1$ и $\psi(t) = 0$, если $|t| \geqslant 1$. Поскольку f является суммой равномерно сходящегося на $\mathbb{R}$ ряда, состоящего из $2m$-периодических функций, то $f \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и, следовательно, функция $g \in B(\mathbb{R} \times [-1,1], \mathbb{R})$. Так как в этом случае $F(t) = [-1,1]$, если $|t| < 1$ и $F(t) = \{1\}$ при $|t| \geqslant 1$, то $F \notin S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}([-1,1]))$, но имеет п. п. по Бору сечение $u(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

П р и м е р 6.2. Пусть $g(t,u) = \mathfrak{f}(t)u$, $(t,u) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$, где п. п. по Бору функция $\mathfrak{f}$ определена равенством (5.3). В этом случае $F(t) = \{\operatorname{sign} \mathfrak{f}(t)\}$ для всех $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Поэтому отображение $F \notin S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}([-1,1]))$ и всякое его измеримое сечение, совпадающее почти всюду с $\operatorname{sign} \mathfrak{f}$, не принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Приведем достаточные условия существования п. п. по Степанову сечений у отображения F. С этой целью введем для каждого фиксированного $\alpha > 0$ отображение

$$t \mapsto W(t,\alpha) \doteq \{u \in \mathcal{U} \colon \ g(t,u) \geqslant \varphi(t) - \alpha\} \in \mathrm{comp}(\mathcal{U}), \ t \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Т е о р е м а 6.1. *Пусть функция* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$ *и для отвечающих ей отображений* $F(\cdot)$ *и* $W(\cdot,\alpha)$, *определенных равенствами* (6.2) *и* (6.3), *соответственно, выполнено равенство* $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot,\alpha), F(\cdot)) = 0$. *Тогда* $F \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathcal{U}))$, *существует такая функция* $u \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, *что* $u(t) \in F(t)$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$, *и* $\mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(F) \subset \mathrm{Mod}(g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции $-\varphi(t) + g(t,u)$, $(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}$, принадлежащей $S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$, достаточно применить следствие 5.2. □

Рассмотрим, далее, вопрос о поточечном максимуме в компактном метрическом пространстве $(\mathrm{rpm}(\mathcal{U}), \rho_w)$.

Для функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$, по аналогии с отображением φ, определим отображение

$$t \mapsto \psi(t) \doteq \max_{\nu \in \mathrm{rpm}(\mathcal{U})} \langle \nu, g(t,u) \rangle. \tag{6.4}$$

Поскольку $g(t,\cdot) \in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ и [21, 158] $\mathrm{rpm}(\mathcal{U}) = \mathrm{cl}_w(\mathrm{co}\,\mathrm{DIR}(\mathcal{U}))$, где cl_w — замыкание в метрике ρ_w множества $\mathrm{co}\,\mathrm{DIR}(\mathcal{U})$, то $\psi(t) = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, отображением в пространстве мер, аналогичным (6.2), будет следующее отображение

$$t \mapsto \mathfrak{F}(t) \doteq \{\nu \in \mathrm{rpm}(\mathcal{U}) \colon \ \langle \nu, g(t,u) \rangle = \varphi(t)\} \in \mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathcal{U})), \tag{6.5}$$

содержащее при каждом $t \in \mathbb{R}$ множество $\{\delta_u, \ u \in F(t)\}$. В отличие от рассмотренных в § 5 (см. замечание 5.2) отображений $\mathcal{N}(\cdot\,; \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ и $N(\cdot\,; \mathcal{U})$, между отображениями $F(\cdot)$ и $\mathfrak{F}(\cdot)$, при исследовании их почти периодичности, существует тесная связь. Чтобы показать это, приведем ряд вспомогательных утверждений.

Рассмотрим систему множеств

$$\Pi \doteq \{\mathrm{rpm}(K), \ K \in \mathrm{comp}(\mathcal{U})\} \tag{6.6}$$

метрического пространства $(\mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathcal{U})), \mathrm{dist}_w)$.

Л е м м а 6.1. *Отображение* $\Gamma : (\mathrm{comp}(\mathcal{U}), \mathrm{dist}) \to (\Pi, \mathrm{dist}_w)$, *определенное равенством*

$$\Gamma(K) \doteq \mathrm{rpm}(K), \ K \in \mathrm{comp}(\mathcal{U}), \tag{6.7}$$

является гомеоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для каждого $K \in \mathrm{comp}(\mathcal{U})$ выполнено равенство $\mathrm{rpm}(K) = \mathrm{cl}_w(\mathrm{co}\,\mathrm{DIR}(K))$, то (см. п. 1 из § 2) из неравенств

$$\mathrm{dist}_w(\Gamma(K_1), \Gamma(K_2)) \leqslant \mathrm{dist}_w(\mathrm{DIR}(K_1), \mathrm{DIR}(K_2) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1 + \|c_j\|_{C(\mathcal{U},\mathbb{R})}} \cdot \omega_{\mathrm{dist}(K_1,K_2)}(c_j, \mathcal{U}), \ K_1, K_2 \in \mathrm{comp}(\mathcal{U})$$

получаем биективность и непрерывность отображения Γ. Поэтому [173], в силу компактности пространства $(\mathrm{comp}(\mathcal{U}), \mathrm{dist})$, это отображение будет гомеоморфизмом.

С л е д с т в и е 6.1. *Метрическое пространство* (Π, dist_w) *компактно.*

С л е д с т в и е 6.2. *Отображение* $\mathcal{K} : \mathbb{R} \to \mathrm{comp}(\mathcal{U})$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathcal{U}))$ *в том и только том случае, если* $\Gamma \circ \mathcal{K} \in S(\mathbb{R}, \Pi)$ *и при этом* $\mathrm{Mod}(\mathcal{K}) = \mathrm{Mod}(\Gamma \circ \mathcal{K})$.

Л е м м а 6.2. *Пусть отображения* $F, \mathfrak{F}$ *и* Γ *заданы равенствами* (6.2), (6.5) *и* (6.7), *соответственно. Тогда* $\mathfrak{F}(t) = (\Gamma \circ F)(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\nu \in (\Gamma \circ F)(t) \overset{(6.7)}{=} \mathrm{rpm}(F(t))$, то (см. (6.6)) $\mathrm{supp}\,\nu \subset F(t)$. Откуда получаем равенство $\langle \nu, g(t,u) \rangle = \int\limits_{\mathrm{supp}\,\nu} g(t,u)\nu(du) = \varphi(t)$, которое (см. (6.5)) означает, что $\nu \in \mathfrak{F}(t)$. Пусть теперь $\nu \in \mathfrak{F}(t)$. Предположим, что $\mathrm{supp}\,\nu$ не содержится в $F(t)$. Тогда найдется точка $v \in (\mathrm{supp}\,\nu) \setminus F(t)$. Так как $\varphi(t) - g(t,v) > 0$ и отображение $u \mapsto (\varphi(t) - g(t,u))$ непрерывно, то имеют место следующие соотношения: $0 = \int\limits_{\mathcal{U}} (\varphi(t) - g(t,u))\nu(du) = \int\limits_{(\mathrm{supp}\ \nu)\setminus F(t)} (\varphi(t) - g(t,u))\nu(du) > 0$. Полученное противоречие означает, что, действительно, $\mathrm{supp}\,\nu \subset F(t)$ и, значит, $\nu \in (\Gamma \circ F)(t)$. $\square$

Заметим, что из леммы 6.2 и следствия 6.2 вытекает, что $\mathfrak{F} \in S(\mathbb{R}, \Pi)$ в том и только в том случае, если $F \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,(\mathcal{U}))$ и их модули совпадают.

Т е о р е м а 6.2. *Отображение* F *имеет сечение* $u \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *в том и только в том случае, когда отображение* $\mathfrak{F}$ *имеет сечение* $\mu \in APM_1$ *и при этом* $\mathrm{Mod}(u)$ *содержится в* $\mathrm{Mod}(\mu)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий теоремы 6.2 вытекает из леммы 2.1. Пусть теперь $\mathfrak{F}$ имеет сечение $\mu \in APM_1$. Тогда [38] найдется такое $u \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, что $u(t) \in \mathrm{supp}\,\mu(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$. Покажем, что $u(t) \in F(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В самом деле, из соотношений

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(t, u(t)) = \langle \delta_{u(t)}, \varphi(t) - g(t,u) \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathrm{supp}\ \mu(t)} (\varphi(t) - g(t,u))\mu(t)(du) = \langle \mu(t), \varphi(t) - g(t,u) \rangle = 0$$

вытекает, что $\varphi(t) = g(t,u)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$.

2. Используя результаты предыдущего пункта, рассмотрим ряд задач в классе п. п. функций, имеющих важное значение при описании свойств функции Понтрягина в задачах оптимального управления п. п. движениями. Их исследованию предпошлем следующее утверждение.

Т е о р е м а 6.3. *Пусть $g \in B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$ и функция φ определена равенством* (6.1). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $u \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, что $g(t,u(t)) > \varphi(t) - \varepsilon$ и $\mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(g)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и для $\alpha \in (0,\varepsilon)$ рассмотрим отображение

$$(t,u) \mapsto \psi(t,u) \doteq \max\{0, g(t,u) - \varphi(t) + \alpha\},\ (t,u) \in \mathbb{R}\times\mathcal{U}.$$

Поскольку $g \in B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$, а (см. п. 1) $\varphi \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то $\psi \in B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R}_+)$. Кроме того, так как $\psi(t,u) = \alpha$, если $u \in F(t)$ и (см. (6.3)) $\{u \in \mathcal{U}\colon\ g(t,u) - \varphi(t) + \alpha > 0\} \subset W(t,\alpha)$, то

$$F(t) \subset \mathrm{supp}\ \psi(t,\cdot) \subset W(t,\alpha),\ t \in \mathbb{R}. \tag{6.8}$$

Фиксируем, далее, такую меру $\eta \in \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, что $\mathrm{supp}\ \eta = \mathcal{U}$, и при каждом $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим отображение $c \mapsto \langle \eta, \psi(t,u)c(u)\rangle,\ c \in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Так как $\psi(t,\cdot) \in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$, то введенное отображение принадлежит $(C(\mathcal{U},\mathbb{R}))^*$, и, значит [22, с. 138], найдется такая мера $\mu_t \in \mathrm{frm}(\mathcal{U})$, что $\langle \mu_t, c(u)\rangle = \langle \eta, \psi(t,u)c(u)\rangle$ для всех $c \in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ и при этом отображение $t \mapsto \langle \mu_t, c(u)\rangle$ принадлежит $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Далее, для всех $t \in \mathbb{R}$ полагаем $\xi(t) \doteq \langle \eta, \psi(t,u)\rangle$. Так как $\psi \in B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R}_+),\ \eta \in \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, то $\xi \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$. Покажем, что $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} \xi(t) > 0$. Действительно, пусть $\gamma > 0$ такое, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \omega_\gamma[\psi(t,\cdot),\mathcal{U}] < \frac{\alpha}{4}$ и точки $u_1,\dots,u_p \in \mathcal{U}$ образуют γ -сеть компакта $\mathcal{U}$. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ выбираем точки $u_t \in F(t)$ (поэтому $\psi(t,u_t) = \alpha$) и u_j такие, что $|u_t - u_j| < \gamma$. Теперь, учитывая, что $\psi(t,u) \geqslant 0,\ (t,u) \in \mathbb{R}\times\mathcal{U}$ и $\eta \in \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, имеем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\xi(t) = \int_{\mathcal{U}} (\psi(t,u) - \alpha)\eta(du) + \alpha = \int_{\mathcal{U}\cap O_\gamma[u_j]} (\psi(t,u) - \psi(t,u_j))\eta(du) + \\
+ \int_{\mathcal{U}\cap O_\gamma[u_j]} (\psi(t,u_j) - \psi(t,u_t))\eta(du) + \int_{\mathcal{U}\setminus O_\gamma[u_j]} (\psi(t,u) - \psi(t,u_t))\eta(du) + \alpha \geqslant \\
\geqslant (-2\sup_{t\in\mathbb{R}} \omega_\gamma[\psi(t,\cdot),\mathcal{U}] + \alpha)\eta(\mathcal{U}\cap O_\gamma[u_j]) > \frac{\alpha}{2} \min_{1\leqslant j\leqslant p} \eta(\mathcal{U}\cap O_\gamma[u_j]) \doteq \beta.
\end{gathered}$$

Поскольку $u_1,\dots,u_p \in \mathrm{supp}\ \eta$, то [158, с. 153] $\eta(\mathcal{U}\cap O_r[u_j]) > 0,\ j = 1,\dots,p$. Поэтому из приведенных выше соотношений получаем, что $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} \xi(t) \geqslant \beta > 0$ и, следовательно, функция $\frac{1}{\xi} \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим, далее, отображение $t \mapsto \nu(t) \doteq \frac{1}{\xi(t)}\mu_t \in \mathrm{rpm}(\mathcal{U}),\ t \in \mathbb{R}$, которое (см. замечание 2.2) принадлежит $B(\mathbb{R},\mathrm{rpm}(\mathcal{U})) \subset APM_1$ и $\mathrm{supp}\ \nu(t) = \mathrm{supp}\ \psi(t,\cdot),\ t \in \mathbb{R}$. Поэтому [36], существует такая функция $u \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, что $u(t) \in \mathrm{supp}\ \psi(t,\cdot)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$, а, значит, (см. (6.8)) $u(t) \in W(t,\alpha)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$. Теперь, так как $\alpha \in (0,\varepsilon)$, то (см. (6.3)) $\psi(t) \geqslant g(t,u(t)) > \varphi(t) - \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$.

З а м е ч а н и е 6.1. Из приведенного доказательства видно, что утверждение теоремы 6.3 справедливо для всякой функции $g \in \mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$ такой, что $g(\cdot,u)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ при каждом $u\in\mathcal{U}$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}(\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}}\omega_\gamma[g(t,\cdot),\mathcal{U}])=0$.

Пусть, далее, $g\in S(\mathbb{R},C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$. По следствию 2.3, для всякой функции $u(\cdot)$ из $S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ отображение $t\mapsto g(t,u(t))$ принадлежит $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и, значит, определено среднее значение $M\{g(t,u(t))\}$. Поэтому корректно определена следующая задача:

$$I(u(\cdot))\doteq M\{g(t,u(t))\}\to\sup,\ \ u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathcal{U}), \tag{6.9}$$

в которой функция $\widehat{u}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ называется решением, если $I(\widehat{u}(\cdot))\geqslant I(u(\cdot))$ для всех $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$.

Т е о р е м а 6.4. *Функция $\widehat{u}\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ является решением задачи (6.9) в том и только том случае, если для п. в. $t\in\mathbb{R}$*

$$\max_{u\in\mathcal{U}} g(t,u)=g(t,\widehat{u}(t)). \tag{6.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условий теоремы 6.4 очевидна. Докажем необходимость условий. С этой целью при $h>0$ для функции g рассмотрим ее стекловское усреднение $g(t,u;h)$, принадлежащее пространству $B(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R})$, и отвечающую ему функцию максимума $\varphi(t;h)\doteq\max\limits_{u\in\mathcal{U}} g(t,u;h)$. Из неравенства (здесь см. обозначение (6.1)) $M\{|\varphi(t)-\varphi(t;h)|\}\leqslant\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\max\limits_{u\in\mathcal{U}}|g(s,u)-g(s,u;h)|ds$, в силу теоремы 1.2 получаем, что

$$\lim_{h\downarrow 0} M\big\{|\varphi(t)-\varphi(t;h)|\big\}=0. \tag{6.11}$$

По этой же теореме для каждого $j\in\mathbb{N}$ найдется такое $h_j>0$ ($\lim\limits_{j\to\infty}h_j=0$), что будет выполнено неравенство

$$M\big\{\max_{u\in\mathcal{U}}|g(t,u)-g(t,u;h_j)|\big\}<1/j. \tag{6.12}$$

Теперь, по теореме 6.3, примененной к функциям $g(t,u;h_j)$ и $\varphi(t;h_j)$, найдется такое $u_j(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$ $\ g(t,u_j(t);h_j)>\varphi(t;h_j)-1/j$. Учитывая, что $\widehat{u}(\cdot)$ является решением задачи (6.9), получим цепочку неравенств:

$$M\big\{\varphi(t;h_j)\big\}-1/j<M\big\{g(t,u_j;h_j)\big\}\overset{(6.12)}{<}I(u_j(\cdot))+1/j\leqslant I(\widehat{u}(\cdot))+1/j<M\big\{\varphi(t)\big\}+1/j,$$

из которых, устремляя j к бесконечности, в силу (6.11) получим для $f\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, заданной равенством $f(t)\doteq\varphi(t)-g(t,\widehat{u}(t))$, $t\in\mathbb{R}$, что $M\{f(t)\}=0$. Теперь равенство (6.10) вытекает из следующего, несложно доказываемого утверждения [59].

Л е м м а 6.3. *Пусть функция $f\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ и $M\{f(t)\}=0$. Тогда $f(t)=0$ для п.в. $t\in\mathbb{R}$.*

Из теорем 6.1 и 6.4 вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е 6.3. *Пусть функция* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U}, \mathbb{R}))$ *и отвечающие ей отображения* $F(\cdot), W(\cdot, \alpha)\colon \mathbb{R} \to \mathrm{comp}(\mathcal{U})$, *заданные равенствами* (6.2) *и* (6.3), *соответственно, такие, что* $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot,\alpha), F(\cdot)) = 0$. *Тогда решение задачи* (6.9) *существует.*

З а м е ч а н и е 6.2. Заметим, что наряду с задачей (6.9) можно рассмотреть задачу

$$I(u(\cdot)) \doteq M\{g(t, u(t))\} \to \sup, \ u(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta), \tag{6.13}$$

определенную на множестве

$$\mathbb{U}(\Delta) \doteq \{u \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})\colon \mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(\Delta)\}, \tag{6.14}$$

отвечающем фиксированному подмножеству $\Delta \subset \mathbb{R}$ (в частности, при $\Delta = \{\frac{2\pi}{\omega}\}$, это множество состоит из ω-периодических измеримых функций $u : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$). Ясно, что всякая функция $\widehat{u}(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta)$, удовлетворяющая условию (6.10) будет решением задачи (6.13), то есть для всех $u(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta) \quad I(u(\cdot)) \leqslant I(\widehat{u}(\cdot))$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

П р и м е р 6.3. Рассмотрим п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{U} \doteq [-1,1] \times [-1,1]$ отображение $g(t,u) = u_1 \sin \omega_1 t + u_2 \sin \omega_2 t$, где числа $\omega_1, \omega_2 > 0$ и несоизмеримы. Далее, так как для любых несоизмеримых $\beta > 0$ и $\omega > 0$ и всякой измеримой ω-периодической функции $u\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ имеет место равенство: $M\{u(t) \sin \beta t\} = 0$, то

$$\sup_{u(\cdot) \in \mathbb{U}(\omega)} M\{u_1(t) \sin \omega_1 t + u_2(t) \sin \omega_2 t\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \text{ несоизмеримо с } \omega_1 \text{ и } \omega_2, \\ \frac{2}{\pi}, & \text{если } \omega \text{ соизмеримо либо с } \omega_1, \text{ либо с } \omega_2. \end{cases}$$

Будем считать для определенности, что $\omega = \omega_1$. Тогда, в силу вышеприведенного равенства, решением задачи $M\{u_1(t)\sin\omega_1 t + u_2(t)\sin\omega_2 t\} \to \sup, \ u(\cdot) \in \mathbb{U}(\omega_1)$ будет любая $\frac{2\pi}{\omega_1}$- периодическая функция $\widehat{v}(t) = (\mathrm{sign}(\sin\omega_1 t), u_2(t))$, где $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}(\omega_1)$. С другой стороны, так как $\max\limits_{|u_1| \leqslant 1, |u_2| \leqslant 1} (u_1 \sin\omega_1 t + u_2 \sin\omega_2 t) = |\sin\omega_1 t| + |\sin\omega_2 t|$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то п. п. по Степанову функция $\widehat{u}(t) = (\mathrm{sign}(\sin\omega_1 t), \mathrm{sign}(\sin\omega_2 t))$ будет решением задачи $I(u(\cdot)) = M\{u_1(t)\sin\omega_1 t + u_2(t)\sin\omega_2 t\} \to \sup, \ u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ и при этом $I(\widehat{v}(\cdot)) = \frac{2}{\pi} < \frac{4}{\pi} I(\widehat{u}(\cdot))$. Кроме того, $g(t, \widehat{v}(t)) < g(t, \widehat{u}(t))$ на множестве положительной меры.

Приведенный пример 6.3 показывает также, что в теореме 6.4 для выполнения равенства (6.10) существенно, что функция $\widehat{u}(\cdot)$ является решением задачи (6.9), определенной на всем пространстве $S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Вместе с тем, (здесь см. доказательство теоремы 6.4), если $\mathrm{Mod}(g) \subset \mathrm{Mod}(\Delta)$, то функция $\widehat{v}(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta)$ будет решением задачи (6.13) в том и только в том случае, если при п.в. $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство (6.10).

Далее, по следствию 2.3 (напомним, что $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U}, \mathbb{R})))$ для каждого $\mu(\cdot)$ из APM_1 функция $t \mapsto \langle \mu(t), g(t,u) \rangle$ п. п. по Степанову, поэтому определена задача

$$\mathfrak{T}(\mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), g(t,u) \rangle\} \to \sup, \ \mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1, \tag{6.15}$$

являющаяся овыпукленной для задачи (6.9), и в которой функция $\widehat{\mu}(\cdot) \in APM_1$ называется решением задачи (6.15), если $\mathfrak{T}(\mu(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}(\widehat{\mu}(\cdot))$ для всех $\mu(\cdot) \in APM_1$.

Т е о р е м а 6.5. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *функция* $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ *является решением задачи* (6.15) *в том и только том случае, если для п. в.* $t \in \mathbb{R}$

$$\max_{u \in \mathfrak{U}} g(t,u) = \langle \widehat{\mu}(t), g(t,u) \rangle; \tag{6.16}$$

2) *решение* $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ *задачи* (6.15) *существует в том и только в том случае, если существует решение* $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ *задачи* (6.9) *и при этом* $I(\widehat{u}(\cdot)) = \mathfrak{T}(\widehat{\mu}(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство (6.16). Тогда из равенства функций максимумов φ и ψ, определенных равенствами (6.1) и (6.4), соответственно, вытекает, что $\widehat{\mu}(\cdot)$ будет решением задачи (6.15).

Пусть, теперь, $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ — решение задачи (6.15). Тогда, как и при доказательстве теоремы 6.4, для функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ рассмотрим при $h > 0$ ее стекловское усреднение $(t,u) \mapsto g(t,u;h)$ и для $j \in \mathbb{N}$ зафиксируем $h_j > 0$, при котором будет выполнено неравенство (6.12). Далее, применив теорему 6.3 для функции $(t,u) \mapsto g(t,u;h_j)$, принадлежащей пространству $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$, и отвечающей ей функции максимума $t \mapsto \varphi(t;h_j) \doteq \max\limits_{u \in \mathfrak{U}} g(t, u_j(t); h_j)$, найдем такое $u_j(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$

$$g(t, u_j(t); h_j) > \varphi(t; h_j) - 1/j.$$

Учитывая, что (см. лемму 2.1) $\delta_{u_j(\cdot)} \in \mathrm{APM}_1^{(1)} \subset \mathrm{APM}_1$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$, получим соотношения:

$$M\{\varphi(t;h_j)\} - 1/j < M\{g(t, u_j(t); h_j)\} = M\{\langle \delta_{u_j(t)}, g(t,u;h_j) \rangle\} \overset{(6.12)}{<}$$

$$< M\{\langle \delta_{u_j(t)}, g(t,u) \rangle\} + 1/j \leqslant M\{\langle \widehat{\mu}(t), g(t,u) \rangle\} + 1/j \leqslant M\{\varphi(t)\} + 1/j,$$

из которых, в силу (6.11), для функции $t \mapsto f(t) \doteq \varphi(t) - \langle \widehat{\mu}(t), g(t,u) \rangle$ следует равенство $M\{f(t)\} = 0$. Поскольку $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, то из леммы 6.3 вытекает, что при п.в. $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство (6.16), и, тем самым, первое утверждение теоремы 6.5 доказано.

Второе утверждение этой теоремы является следствием доказанного первого утверждения, а также теорем 6.2 и 6.4.

З а м е ч а н и е 6.3. Доказанные теоремы 6.4 и 6.5 позволяют привести достаточные условия локального решения задач с указанными в (6.9) и (6.15) функционалами, определенными на пространствах (см. [59]) п. п. функций $B(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ и $\mathrm{APM}_1(\mathbb{R}^m)$, соответственно. Эти условия приведены в [59], и так как в данной работе такие задачи не рассматриваются, то их формулировку опускаем. Отметим лишь, что эти утверждения могут быть использованы при изучении задач вариационного исчисления в классе п. п. функций [26].

В заключение этого пункта докажем еще одно свойство функции максимума.

Л е м м а 6.4. *Пусть функция* $g\in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ *такая, что при каждом* $u\in\mathfrak{U}$ *отображение* $t\mapsto g(t,u)$ *абсолютно непрерывно,* $g'_t\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ *и*

$$\mathfrak{g}\doteq\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}(\max_{u\in\mathfrak{U}}|g'_t(t,u)|)<\infty.$$

Пусть, далее, функция φ *определена равенством* (6.1) *и существует такое отображение* $\widetilde{\mu}(\cdot)\in\mathrm{APM}_1$, *что при всех* $t\in\mathbb{R}$

$$\varphi(t)=\langle\widetilde{\mu}(t),g(t,u)\rangle. \tag{6.17}$$

Тогда функция $\varphi(\cdot)$ *абсолютно непрерывна,* $\dot{\varphi}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и при п. в.* $t\in\mathbb{R}$

$$\dot{\varphi}(t)=\langle\widetilde{\mu}(t),g'_t(t,u)\rangle. \tag{6.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (6.17) и отмеченного в п. 1 равенства $\varphi(t)=\psi(t)\overset{(6.4)}{=}\max\limits_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}\langle\nu,g(t,u)\rangle$, $t\in\mathbb{R}$ вытекает, что при всех $t,h\in\mathbb{R}$

$$\langle\widetilde{\mu}(t),g(t+h,u)-g(t,u)\rangle\leqslant\varphi(t+h)-\varphi(t)\leqslant\langle\widetilde{\mu}(t+h),g(t+h,u)-g(t,u)\rangle$$

или, в силу абсолютной непрерывности функции $t\mapsto g(t,u)$,

$$\langle\widetilde{\mu}(t),\int_t^{t+h}g'_t(s,u)ds\rangle\leqslant\varphi(t+h)-\varphi(t)\leqslant\langle\widetilde{\mu}(t+h),\int_t^{t+h}g'_t(s,u)ds\rangle. \tag{6.19}$$

Откуда получаем, что $|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\mathfrak{g}\cdot|h|$, и, стало быть, п. п. по Бору функция $\varphi(\cdot)$ является абсолютно непрерывной.

Покажем, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\max_{u\in\mathfrak{U}}|g'_t(s,u)-g'_t(t,u)|ds=0. \tag{6.20}$$

Поскольку $g'_t\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, то (см. лемму 1.3) найдется такая последовательность $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j=0$, что при всех $t\in\mathbb{R}$, за исключением, может быть, множества $\mathcal{N}_1$ нулевой меры $\lim\limits_{j\to\infty}I_t(\gamma_j)=0$, где

$$I_t(\gamma_j)\doteq\omega_{\gamma_j}[g'_t(t,\cdot),\mathfrak{U}],$$

и при каждом $j\in\mathbb{N}$ при всех $t\in\mathbb{R}$, за исключением, может быть, множества $\mathcal{N}_2$ также нулевой меры,

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|\omega_{\gamma_j}[g'_s(s,\cdot),\mathfrak{U}]-\omega_{\gamma_j}[g'_t(t,\cdot),\mathfrak{U}]|ds=0. \tag{6.21}$$

Кроме того, если $\mathfrak{U}_\infty\doteq\{\mathfrak{u}_1,\mathfrak{u}_1,\dots\}$ — счетное всюду плотное подмножество множества $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, то при всех $t\in\mathbb{R}$, за исключением, может быть, множества $\mathcal{N}_3$ нулевой меры, и всяком $\mathfrak{u}_l\in\mathfrak{U}_\infty$

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|g'_t(s,\mathfrak{u}_l)-g'_t(t,\mathfrak{u}_l)|ds=0.$$

Фиксируем теперь произвольное $t \in \mathbb{R} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3)$. Тогда в силу вышесказанного для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $j(\varepsilon)$, что будет выполнено неравенство

$$I_t(\gamma_{j(\varepsilon)}) < \varepsilon/6.$$

Для этого $\gamma_{j(\varepsilon)}$ (см. (6.21)) выберем такое $\delta > 0$, что при всех $h \in (-\delta, \delta)$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |\omega_{\gamma_j}[g'_s(s,\cdot),\mathfrak{U}] - \omega_{\gamma_j}[g'_t(t,\cdot),\mathfrak{U}]|ds < \varepsilon/3.$$

Наконец, рассмотрим точки $u_l \dots u_p \in \mathfrak{U}_\infty$, образующие $\gamma_{j(\varepsilon)}$-сеть для $\mathfrak{U}$, и для константы $\varepsilon/3p$ подберем $\widehat{\delta} \in (0,\delta)$ так, чтобы при $h \in (-\widehat{\delta}, \widehat{\delta})$ имели место неравенства

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |g'_t(s,u_l) - g'_t(t,u_l)|ds < \varepsilon/3p, \;\; l = 1\dots p.$$

Зафиксируем сейчас измеримое отображение $u\colon\ [t,t+1] \to \mathfrak{U}$, такое, что при п. в. $s \in [t,t+1]$

$$\max_{u\in\mathfrak{U}} |g'_t(s,u) - g'_t(t,u)| = |g'_t(s,u(s)) - g'_t(t,u(s))|$$

и рассмотрим дизъюнктную систему измеримых множеств

$$T_l(t) \doteq \{s \in [t,t+1]\colon\ |u(s) - u_l| < \gamma_{j(\varepsilon)}\}, \;\; l = 1\dots p,$$

образующую покрытие $[t,t+1]$. Теперь, полагая $T_l(t,h) \doteq [t,t+h] \cap T_l(t)$, $l = 1\dots p$, и учитывая выбор $\widehat{\delta}$, получим при всех $h \in (-\widehat{\delta}, \widehat{\delta})$ следующие соотношения:

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \max_{u\in\mathfrak{U}} |g'_t(s,u) - g'_t(t,u)|ds = \frac{1}{h}\sum_{l=1}^{p}\int_{T_l(t,h)} |g'_t(s,u(s)) - g'_t(t,u(s))|ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\sum_{l=1}^{p}\int_{T_l(t,h)} (|g'_t(s,u(s)) - g'_t(s,u_l)| + |g'_t(s,u_l) - g'_t(s,u_l)| + |g'_t(s,u_l) - g'_t(t,u(s))|)ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \omega_{\gamma_j}[g'_s(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds + \sum_{l=1}^{p}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |g'_t(s,u_l) - g'_t(t,u_l)|ds + I(\gamma_{j(\varepsilon)}) <$$

$$< \varepsilon/3 + 2I(\gamma_{j(\varepsilon)}) + p\cdot\varepsilon/3p = \varepsilon.$$

Тем самым равенство (6.20) доказано. Из него, в свою очередь, получаем, что левая из оценок (6.19) обеспечивает при п. в. $t \in \mathbb{R}$ неравенство $\dot{\varphi}(t) \geqslant \langle\widetilde{\mu}(t), g'_t(t,u)\rangle$. Теперь, поскольку отображение $t \mapsto \widetilde{\mu}(t) \in (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w)$ измеримо, то п. в. точка t, принадлежащая $\mathbb{R}$, будет его точкой аппроксимативной непрерывности [121], и значит, для всякой такой точки t и отвечающего ей измеримого множества E (здесь см. оценки, указанные при доказательстве леммы 2.1) будет выполнено равенство

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t+h\in E}} \langle\widetilde{\mu}(t+h) - \widetilde{\mu}(t), g(t,u)\rangle = 0,$$

учитывая которое, а также равенство (6.20), из правой оценки в (6.19) получаем, что $\dot{\varphi}(t) \leqslant \langle\widetilde{\mu}(t), g'_t(t,u)\rangle$. Тем самым доказано, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство (6.18), из которого, в свою очередь, в силу следствия 2.3 вытекает, что функция $\dot{\varphi}(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. Напомним, что один из аспектов целесообразности рассмотрения в задачах оптимального управления обобщенных управлений (мер) связан с существованием оптимальных процессов. С этой точки зрения расширение рассмотренной выше задачи (6.9) до задачи (6.15), как показано в теореме 6.5, вообще говоря, не является целесообразным. Вместе с тем, если оптимальное значение целевого функционала в задаче (6.9) искать не на всем пространстве $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, а на некотором его подмножестве $\mathfrak{D}$, определяемом некоторыми ограничениями, то процедура овыпукления, то есть расширение п. п. по Степанову управлений из $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ до мерозначных п. п. отображений, в ряде случаев становится целесообразной.

Пример 6.4. Пусть $\mathfrak{U} \doteq \{u = (u_1,u_2) : |u_1|,|u_2| \leqslant 1\}$ и множество $\mathfrak{D} \doteq \{u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U}) : I_1(u(\cdot)) = M\{u_1(t)+u_2(t)\} = 0\}$. Теперь рассмотрим задачу $I_0(u(\cdot)) = M\{u_1(t)u_2(t)f(t)\} \to \inf$, $u(\cdot) \in \mathfrak{D}$, где знакопеременная функция f из $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такая, что (здесь см. лемму 5.1) $\operatorname{sign} f \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $M\{\operatorname{sign} f(t)\} \neq 1$. Легко видеть, что $I_0(u(\cdot)) \geqslant -M\{|f(t)|\}$ для всех $u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ и равенство достигается на функции $\widehat{u}(t) = (-1, \operatorname{sign} f(t))$ или $\widehat{v}(t) = -\widehat{u}(t)$, которые, в силу наложенных ограничений на f, не принадлежат $\mathfrak{D}$. Покажем, что $I_0(u(\cdot)) > -M\{|f(t)|\}$ для всех $u(\cdot)$ из $\mathfrak{D}$. В самом деле, допустим, что существует такое $u(\cdot) \in D$, что $I_0(u(\cdot)) = -M\{|f(t)|\}$. Тогда при п. в. $t \in \mathbb{R}$ необходимо равенство $u_1(t)u_2(t) = -\operatorname{sign} f(t)$, из которого вытекает, что для п. в. $t \in \mathbb{R}$ $u_1(t) = -\operatorname{sign} f(t)u_2(t)$ и $u_2(t) = -\operatorname{sign} f(t)u_1(t)$. Стало быть, $u_1(t)+u_2(t) = -\operatorname{sign} f(t)(u_1(t)+u_2(t))$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Из последнего равенства получаем, что п. п. по Степанову функция $t \mapsto (u_1(t)+u_2(t))$ неотрицательна. Поскольку $M\{u_1(t)+u_2(t)\} = 0$, то по лемме 6.3 $u_1(t) = -u_2(t)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$. Откуда, учитывая, что $u_2^2(t) = 1$, получим следующие противоречивые соотношения $I_0(u(\cdot)) = -M\{u_2^2(t)f(t)\} = -M\{f(t)\} > -M\{|f(t)|\}$, показывающие, что рассматриваемая задача решения не имеет. С другой стороны, овыпукленной задачей для исходной будет следующая задача: $\mathfrak{I}_0(\mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), u_1u_2f(t)\rangle\} \to \inf$, $\mu(\cdot) \in \mathfrak{D}_c$, где $\mathfrak{D}_c \doteq \{\mu(\cdot) \in APM_1(\mathfrak{U}) : \mathfrak{I}_1(\mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), u_1+u_2\rangle\} = 0\}$. Легко видеть, что отображение $t \mapsto \widehat{\mu}(t) = \frac{1}{2}(\delta_{\widehat{u}(t)} + \delta_{\widehat{v}(t)})$ принадлежит $\mathfrak{D}_c$, и так как $\mathfrak{I}_0(\widehat{\mu}(\cdot)) = -M\{|f(t)|\} = \inf\{\mathfrak{I}_0(\mu(\cdot)),\ \mu(\cdot) \in \mathfrak{D}_c\}$, то оно является решением овыпукленной задачи.

Отметим, что необходимые и достаточные условия оптимальности управления в задаче с целевым функционалом вида (6.9) при наличии ограничений приведены в [74]. Задача в более общей постановке исследована в работе [59]. В этой же работе показано, что к задачам такого вида может быть редуцирована задача оптимального управления п п. движениями линейная по фазовой переменной.

Глава 3. Непрерывная зависимость п. п. решения от управления

Одним из основных вопросов при получении необходимых условий оптимальности допустимого процесса в задаче оптимального управления п. п. движениями является вопрос о существовании и поведении п. п. по Бору решения системы уравнений $\dot{x} = \langle \mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f(t,x,w(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),u)\rangle$, отвечающего игольчатой вариации $\big(w(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\big)$ заданной пары $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$. Исследованию свойств игольчатых вариаций $\big(x(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), w(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\big)$ заданного управляемого процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ посвящен § 9 настоящей главы. При этом, достаточные условия существования п. п. по Бору решения $t\mapsto x(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ системы $\dot{x} = \langle \mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f(t,x,w(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),u))\rangle$ и его зависимости от параметров $(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)$ выводятся из соответствующих утверждений, приведенных в § 8 для более общей ситуации. В седьмом параграфе рассматривается вопрос об аппроксимации допустимых процессов $(x(\cdot,\omega),\mu(\cdot,\omega))$ системы уравнений, содержащей функциональный параметр, допустимыми процессами этой системы вида $(\mathfrak{x}(\cdot,\omega),\delta_{u_j(\cdot,\omega)})$. Приведенные там утверждения играют важную роль при обосновании корректности процедуры овыпукления задач оптимального управления п. п. движениями, а также при получении необходимых условий решения в задаче оптимального управления п. п. движениями.

§7. Непрерывная зависимость п. п. решения от параметра

Исследован вопрос о непрерывной зависимости п. п. решения нелинейной системы управления от функционального параметра, принадлежащего пространству п. п. по Степанову функций, и мерозначного п. п. управления.

1. Приведем ряд необходимых в дальнейшем утверждений, связанных с понятием экспоненциальной дихотомичности (э. д.) системы

$$\dot{x} = A(t)x,\ \ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \tag{7.1}$$

в которой $A\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ и (см. § 1) $d(A,0)\doteq\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}|A(s)|ds<\infty$. Напомним (см., например, [35, 112]), что система (7.1) называется э. д. на $\mathbb{R}$, если существует пара взаимно дополнительных проекторов $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ и положительные константы $\mathfrak{r}_j$, σ_j, $j=1,2$ такие, что

$$\begin{cases}|\Phi(t)\mathfrak{P}_1\Phi^{-1}(s)|\leqslant\mathfrak{r}_1e^{-\sigma_1(t-s)},\ -\infty<s\leqslant t<\infty,\\ |\Phi(t)\mathfrak{P}_2\Phi^{-1}(s)|\leqslant\mathfrak{r}_2e^{-\sigma_2(s-t)},\ -\infty<t\leqslant s<\infty,\end{cases}\tag{7.2}$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (7.1), и в этом случае функция $(t,s)\mapsto\mathcal{G}(t,s)\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, определенная для всех $t,s\in\mathbb{R}$ равенством

$$\mathcal{G}(t,s)\doteq\chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t,s)-\chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t,s),\quad P_j(t,s)\doteq\Phi(t)\mathfrak{P}_j\Phi^{-1}(s),\ j=1,2,\tag{7.3}$$

называется (главной) функцией Грина системы (7.1).

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 7.1. [35, 112] *Пусть система* (7.1) *э. д. Тогда*

1) *существует такое* $\delta > 0$, *что для всякой функции* $B \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \text{Hom}(\mathbb{R}^n))$, *такой, что* $d(B, 0) \leqslant \delta$, *система* $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ *будет э. д. При этом существуют такие положительные константы* $\tilde{\mathfrak{r}}_j = \tilde{\mathfrak{r}}_j(\delta)$, $\tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j(\delta)$, $j = 1, 2$, *что если* $\mathcal{G}(t, s; B) \doteq \chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t, s; B) - \chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t, s; B)$ — *функция Грина этой системы, то для* $P_j(t, s; B)$, $j = 1, 2$ *справедливы оценки, аналогичные* (7.2), *с константами* $\tilde{\mathfrak{r}}_j, \tilde{\sigma}_j$, $j = 1, 2$;

2) *для всякой функции* $b \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $d(b, 0) < \infty$ *система* $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ *имеет единственное ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* $x(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s)b(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, *при этом, если* $A \in S(\mathbb{R}, \text{Hom}(\mathbb{R}^n))$ *и* $b \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *то* $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Из второго утверждения теоремы 7.1 получаем, что для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и каждого $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $\mathcal{G}_\tau(t, s) - \mathcal{G}(t, s) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, \xi)(A_\tau(\xi) - A(\xi))\mathcal{G}_\tau(\xi, s)d\xi$, в котором $\mathcal{G}_\tau(\cdot, \cdot) \doteq \mathcal{G}(\cdot + \tau, \cdot + \tau)$ и, следовательно, если

$$\mathfrak{r} \doteq \max(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2), \ \sigma \doteq \min(\sigma_1, \sigma_2), \tag{7.4}$$

то при каждом $\tau \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t,s \in \mathbb{R}} |\mathcal{G}_\tau(t, s) - \mathcal{G}(t, s)| \leqslant \frac{2\mathfrak{r}^2}{1 - e^{-\sigma}} d(A_\tau, A). \tag{7.5}$$

Отсюда, в силу (7.2) и (7.3), получаем, что для всякого $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sup\limits_{-\infty < s \leqslant t < \infty} |P_{1,\tau}(t, s) - P_1(t, s)| \leqslant \frac{2\mathfrak{r}^2}{1 - e^{-\sigma}} d(A_\tau, A), \\ \sup\limits_{-\infty < t \leqslant s < \infty} |P_{2,\tau}(t, s) - P_2(t, s)| \leqslant \frac{2\mathfrak{r}^2}{1 - e^{-\sigma}} d(A_\tau, A), \end{cases} \tag{7.6}$$

где $P_{j,\tau}(\cdot, \cdot) \doteq P_j(\cdot + \tau, \cdot + \tau)$, $j = 1, 2$.

Доказательству основных теорем данного параграфа, приведенных в четвертом и пятом пунктах, предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

2. Всюду далее в этом параграфе через $X(t, s)$ обозначаем матрицу Коши системы (7.1), $X_\tau\big(t, s\big) \doteq X_\tau\big(t + \tau, s + \tau\big)$, и будем предполагать, что эта система обладает свойством экспоненциальной дихотомии.

Из (7.6) и (1.1), в силу теоремы 2.2 (см. также определение 2.2), вытекает

Л е м м а 7.1. *Пусть* $\mu \in \text{APM}$ *и* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n))$. *Тогда для любых фиксированных* $v \in \mathbb{R}_+$ *и* $\varsigma > 0$ *отображения*

$$t \mapsto \psi^{(1)}(t; \mu, v, \varsigma) \doteq \int_{t-v-\varsigma}^{t-v} P_1(t, s)\langle\mu(s), g(s, u)\rangle ds, \tag{7.7}$$

$$t \mapsto \psi^{(2)}(t; \mu, v, \varsigma) \doteq \int_{t+v}^{t+v+\varsigma} P_2(t, s)\langle\mu(s), g(s, u)\rangle ds \tag{7.8}$$

принадлежат пространству $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. *Кроме того, если множество* $Q \subset \text{APM}$ *равностепенно п. п. и ограничено, то при каждом* $j = 1, 2$ *подмножество функций* $\big\{\psi^{(j)}(\cdot; \mu, v, \varsigma),\ \mu \in Q\big\}$ *из* $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *будет также равностепенно п. п.*

Фиксируем, далее, множество параметров Ω, а также направленное множество $(\mathbb{A},\prec)$, содержащее конфинальное подмножество, и рассмотрим множество

$$Q = Q(\mathbb{A}\times\Omega,\xi) \doteq \bigl\{\nu(\cdot,\alpha,\omega)\subset\mathrm{APM},\ (\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega\colon \sup_{(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega}\|\nu(\cdot,\alpha,\omega)\|\leqslant\xi\bigr\} \tag{7.9}$$

и направленность

$$\alpha\mapsto\eta(\alpha)\doteq\sup_{\omega\in\Omega}\|\nu(\cdot,\alpha,\omega)\|_w,\ \alpha\in\mathbb{A}. \tag{7.10}$$

Л е м м а 7.2. *Пусть $g\in S(\mathbb{R},C(\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$ и $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha)=0$. Тогда, если направленность $\{\eta(h(\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$, где $h\colon(\Lambda,\ll)\to(\mathbb{A},\prec)$, является поднаправленностью направленности* (7.10), *а направленность $\{t_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathbb{R}$ такая, что $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda=\widehat{t}$, то для любых фиксированных $v\in\mathbb{R}$ и $\varsigma>0$ (здесь см.* (7.7) *и* (7.8)) *справедливы равенства:*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\bigl(\sup_{\omega\in\Omega}|\psi^{(k)}(t_\lambda;\nu(\cdot,h(\lambda),\omega),v,\varsigma)|\bigr)=0,\ k=1,2 \tag{7.11}$$

и, кроме того,

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\bigl(\sup_{\omega\in\Omega}|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t_\lambda,s)\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),g(s,u)\rangle ds|\bigr)=0. \tag{7.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\boldsymbol{g}(t)\doteq\sup\limits_{u\in\mathcal{U}}|g(t,u)|$ и $\theta_\lambda\doteq|t_\lambda-\widehat{t}\,|$. Поскольку $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda=\widehat{t}$, то найдется такое $\lambda_0\in\Lambda$, что $\theta_\lambda\leqslant 1$ для всех $\lambda\in\Lambda$, удовлетворяющих условию $\lambda_0\ll\lambda$. Поэтому при этих λ, полагая

$$\mathfrak{a}\doteq d(A,0),$$

получим следующие соотношения:

$$|\psi^{(2)}(t_\lambda;\nu(\cdot,h(\lambda),\omega),v,\varsigma)|\overset{(7.2),(7.4)}{\leqslant}\mathfrak{r}\,|\int_{t_\lambda+v}^{t_\lambda+v+\varsigma}|X(t_\lambda,s)\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),g(s,u)\rangle ds|\overset{(7.9)}{\leqslant}$$

$$\leqslant e^{\mathfrak{a}}\bigl(\xi\int_v^{v+\theta_\lambda}\bigl(|X_{\widehat{t}}(0,s)|\boldsymbol{g}_{\widehat{t}}(s)+|X_{\widehat{t}+\varsigma}(0,s)|\boldsymbol{g}_{\widehat{t}+\varsigma}(s)\bigr)ds+\sup_{\omega\in\Omega}|\int_{\mathbb{R}}\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),\varphi(s,u)\rangle ds|\bigr),$$

где $\varphi(s,u)\doteq\chi_{[\widehat{t}+v,\widehat{t}+v+\varsigma]}(s)X(\widehat{t},s)g(s,u)$. Так как $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha)=0$ и $\{\eta(h(\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$ — поднаправленность направленности (7.10), то $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\eta(h(\lambda))=0$. Поэтому из приведенных выше неравенств, учитывая, что $\boldsymbol{g}\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, $\varphi\in\mathfrak{V}_1(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ и $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda=0$, получаем равенство (7.11) при $k=2$. При $k=1$ доказательство аналогично.

Далее (см. (7.2), (7.3)), так как функция $(s,u)\mapsto\widehat{\varphi}(s,u)\doteq\mathcal{G}(\widehat{t},s)g(s,u)$ принадлежит $\mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$, то $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}p(\lambda)=0$, где $p(\lambda)\doteq\sup\limits_{\omega\in\Omega}|\int\limits_{\mathbb{R}}\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),\widehat{\varphi}(s,u)\rangle ds|$. Отсюда, в силу неравенства

$$|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t_\lambda,s)\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),g(s,u)\rangle ds|\leqslant e^{\mathfrak{a}}\bigl(2\xi\mathfrak{r}\int_{\widehat{t}}^{\widehat{t}+\theta_\lambda}|X(\widehat{t},s)|\boldsymbol{g}(s)ds+p(\lambda)\bigr),$$

получаем равенство (7.12).

Л е м м а 7.3. *Пусть $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, множество Q, определенное равенством* (7.9), *является равностепенно п. п. и* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}} \eta(\alpha)=0$. *Тогда (см.* (7.7), (7.8)) *для любых фиксированных* $v \in \mathbb{R}_+$ *и* $\varsigma > 0$

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\Big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\psi^{(k)}(t;\nu(\cdot,\alpha,\omega),v,\varsigma)|\Big) = 0,\ \ k = 1,2, \tag{7.13}$$

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\Big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \Big|\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega),g(s,u)\rangle ds\Big|\Big) = 0. \tag{7.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что одно из равенств в (7.13) неверно. Тогда найдутся константа $\gamma > 0$, конфинальное в $\mathbb{A}$ множество $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \ldots$ точек $\alpha_j \in \mathbb{A}$, $j \in \mathbb{N}$ и последовательности $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, такие, что при всех $j \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$|\psi^{(k)}(t_j;\alpha_j,\omega_j)| \doteq |\psi^{(k)}(t_j;\nu(\cdot,\alpha_j,\omega_j),v,\varsigma)| > \gamma. \tag{7.15}$$

Так как множество Q равностепенно п. п. и ограничено, то по лемме 7.1 последовательность $\{\psi^{(k)}(\cdot;\alpha_j,\omega_j)\}_{j=1}^{\infty} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ также равностепенно п. п. Поэтому для $\gamma/4 > 0$ найдется такое $L > 0$, что в каждом отрезке $[-t_j, -t_j + L]$, $j \in \mathbb{N}$ существует

$$\tau_j \in \bigcap_{l=1}^{\infty} E_B(\psi^{(k)}(\cdot;\alpha_l,\omega_l),\gamma/4).$$

Так как $\{t_j + \tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0,L]$, то можно считать, что $\lim\limits_{j\to\infty}(t_j + \tau_j) = \widehat{t} \in [0,L]$. Далее, поскольку образ монотонно возрастающего отображения $j \mapsto \alpha_j \in (\mathbb{A},\prec)$, $j \in (\mathbb{N},\leqslant)$ является конфинальным множеством в $(\mathbb{A},\prec)$, то [1] $\{\eta(\alpha_j)\}_{j=1}^{\infty}$ — поднаправленность направленности $\{\eta(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$. По лемме 7.2 при $(\Lambda,\ll) = (\mathbb{N},\leqslant)$, $h(j) \doteq \alpha_j$, найдется такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geqslant j_0$ будет выполнено неравенство $\sup\limits_{\omega\in\Omega} |\psi^{(k)}(t_j + \tau_j;\alpha_j,\omega_j)| < \gamma/4$. При этих j, в силу выбора точек τ_j, имеем следующие соотношения:

$$|\psi^{(k)}(t_j;\alpha_j,\omega_j)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi^{(k)}(t+\tau_j;\alpha_j,\omega_j) - \psi^{(k)}(t;\alpha_j,\omega_j)| +$$

$$+|\psi^{(k)}(t_j+\tau_j;\alpha_j,\omega_j)| < \gamma/4 + \sup_{\omega\in\Omega}|\psi^{(k)}(t_j+\tau_j;\alpha_j,\omega)| < \gamma/4 + \gamma/4 = \gamma/2,$$

из которых получаем противоречие с неравенством (7.15). Точно так же методом от противного, используя равенство (7.12) леммы 7.2, доказывается равенство (7.14).

Далее понадобится следующая

Л е м м а 7.4. *Пусть* $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|$ — *банахово пространство и* $f \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для каждого измеримого множества* $E \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} E \leqslant \delta$ *выполняется неравенство* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int_E \|f_t(s)\| ds \leqslant \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, то (так же, как для случая [107, с. 237], когда $f \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$) для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая п. п. по Степанову функция $g:\ \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$, что $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| \doteq \boldsymbol{g} < \infty$ и $d(g(\cdot),f(\cdot)) \leqslant \varepsilon/2$. Теперь, взяв $\delta = \varepsilon/2\boldsymbol{g}$, получаем, что для каждого измеримого подмножества E отрезка [0,1], мера Лебега которого не превосходит δ, будут выполнены следующие соотношения: $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_E \|f_t(s)\| ds \leqslant d(g(\cdot),f(\cdot)) + \boldsymbol{g} \operatorname{mes} E \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Отметим, что утверждение леммы 7.4 при $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}$ анансировано в [140].

Л е м м а 7.5. *Пусть $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, множество Q, определенное равенством* (7.9), *является равностепенно п. п. и $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha)=0$. Тогда для любых фиксированных $i\in\mathbb{Z}_+$ и $\mathfrak{k}\in(0,\infty)$*

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\Big(\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t;\nu(\cdot,\alpha,\omega),i\varsigma,\varsigma)|\big)\Big)=0,\ \ k=1,2. \tag{7.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем равенство (7.16) при $k=2$. Допустим противное. В этом случае найдутся такие константа $\gamma>0$, конфинальное в $\mathbb{A}$ множество $\alpha_1\prec\alpha_2\prec\ldots$ точек $\alpha_j\in\mathbb{A}$, $j\in\mathbb{N}$ и последовательность $\{\varsigma_j\}_{j=1}^{\infty}\subset(0,\mathfrak{k}]$, что при всех $j\in\mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$p_j\doteq\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(2)}(t;\nu(\cdot,\alpha_j,\omega),i\varsigma_j,\varsigma_j)|>\gamma/4. \tag{7.17}$$

Далее, так как $\{\varsigma_j\}_{j=1}^{\infty}\subset(0,\mathfrak{k}]$, то без ограничения общности можно считать, что $\varsigma_j\to\widehat{\varsigma}\in[0,\mathfrak{k}]$ при $j\to\infty$. Теперь, полагая $\boldsymbol{g}(t)\doteq\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|g(t,u)|$, $\vartheta_j\doteq|\varsigma_j-\widehat{\varsigma}|$, при всех $j\in\mathbb{N}$ получим следующие соотношения:

$$p_j\leqslant\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\Big|\int_{t+i\varsigma_j}^{t+i\widehat{\varsigma}}P_2(t,s)\langle\nu(s,\alpha_j,\omega),g(s,u)\rangle ds\Big|+q^{(2)}(\alpha_j)+$$

$$+\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\Big|\int_{t+(i+1)\widehat{\varsigma}}^{t+(i+1)\varsigma_j}P_2(t,s)\langle\nu(s,\alpha_j,\omega),g(s,u)\rangle ds\Big|\overset{(7.2),(7.4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 2\xi\mathfrak{r}e^{\mathfrak{a}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{t}^{t+(i+1)\vartheta_j}\boldsymbol{g}(s)ds+q^{(2)}(\alpha_j),$$

где $q^{(2)}(\alpha_j)=q^{(2)}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_j}$, а $q^{(2)}(\alpha)\doteq\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(2)}(t;\nu(\cdot,\alpha,\omega),i\widehat{\varsigma},\widehat{\varsigma}|$, $\alpha\in\mathbb{A}$. Далее, поскольку образ монотонно возрастающего отображения $j\mapsto\alpha_j$, $j\in(\mathbb{N},\leqslant)$ является конфинальным множеством в $(\mathbb{A},\prec)$, то направленность $\{q^{(2)}(\alpha_j)\}_{j=1}^{\infty}$ — поднаправленность направленности $\{q^{(2)}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$. Следовательно, по равенству (7.13), при $k=2$ и $v=i\widehat{\varsigma}$, $\varsigma=\widehat{\varsigma}$ получаем, что $\lim\limits_{j\to\infty}q^{(2)}(\alpha_j)=0$, и поскольку $\lim\limits_{j\to\infty}\vartheta_j=0$, а $\boldsymbol{g}\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то (здесь см. лемму 7.4) из приведенных выше неравенств вытекает, что $\lim\limits_{j\to\infty}p_j=0$. Последнее несовместно с (7.17). Таким образом, равенство (7.16) при $k=2$ доказано. Доказательство его при $k=1$ аналогично, и мы его опускаем.

3. Рассмотрим отвечающую $(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega$ систему

$$\dot{x}=A(t)x+\langle\nu(t,\alpha,\omega),g(t,u)\rangle z(t),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

где $A\in S(\mathbb{R},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ и $z(\cdot)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. По теоремам 2.2 и 7.1 функция

$$y(t;z(\cdot),\alpha,\omega)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega),g(s,u)\rangle z(s)ds,\ t\in\mathbb{R},$$

является п. п. по Бору решением такой системы.

Т е о р е м а 7.2. *Пусть функция* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ *такая, что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}(\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(t,u)|) \doteq \varkappa < \infty,$$

множество Q, *заданное равенством* (7.9), *равностепенно п. п. и* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha)=0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\alpha_0 \in \mathbb{A}$, *что для всех* $\alpha \in \mathbb{A}$, *удовлетворяющих условию* $\alpha_0 \prec \alpha$, *и каждой функции* $z \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *выполнено неравенство*

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|y(t; z(\cdot), \alpha, \omega)| \leqslant \varepsilon\left(\xi\varkappa(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1} + \frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2}) + \|z\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\right). \tag{7.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную функцию $z \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Так как п. п. по Бору функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая константа $\varsigma = \varsigma(z(\cdot)) \in (0, \mathfrak{k}]$, где $\mathfrak{k} \doteq \varepsilon/\xi\varkappa$, что

$$\omega_\varsigma[z, \mathbb{R}] \doteq \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{R},\\ |t-s|<\varsigma}}|z(t) - z(s)| < \varepsilon. \tag{7.19}$$

Теперь имеем следующие соотношения:

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|y(t; z(\cdot), \alpha, \omega)| \overset{(7.3)}{=} \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\Big|\int_{-\infty}^{t} P_1(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle z(s)ds -$$

$$-\int_t^\infty P_2(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle z(s)ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\sum_{i=0}^{\infty}\Big\{\Big|\int_{t-i\varsigma-\varsigma}^{t-i\varsigma} P_1(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle(z(s)-z(t-i\varsigma-\varsigma))ds +$$

$$+\int_{t-i\varsigma-\varsigma}^{t-i\varsigma} P_1(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle ds\cdot z(t-i\varsigma-\varsigma)$$

$$-\int_{t+i\varsigma}^{t+i\varsigma+\varsigma} P_2(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle(z(s) - z(t+i\varsigma)ds$$

$$-\int_{t+i\varsigma}^{t+i\varsigma+\varsigma} P_2(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle ds\cdot z(t+i\varsigma)\Big|\Big\} \overset{(7.2)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \xi\varkappa(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1} + \frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2})\omega_\varsigma[z, \mathbb{R}] + \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=0}^{\infty}\Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma)\cdot\|z\|_C,$$

где $\|z\|_C \doteq \|z\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}$,

$$\Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma) \doteq \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t; \nu(\cdot,\alpha,\omega), i\varsigma, \varsigma)|,\ k = 1, 2,$$

а отображения $t \mapsto \psi^{(k)}(t; \nu(\cdot,\alpha,\omega), i\varsigma, \varsigma)$, $k = 1, 2$ задаются равенствами (7.7) и (7.8), соответственно, при $\mu(\cdot) = \nu(\cdot,\alpha,\omega)$ и $v = i\varsigma$.

Таким образом, в силу (7.19), для всех $\alpha \in \mathbb{A}$ и $z \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|y(t; z(\cdot), \alpha, \omega)| \leqslant 2\varepsilon\varkappa(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1} + \frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2}) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=0}^{\infty}\Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma)\cdot\|z\|_C. \tag{7.20}$$

Далее, так как для любого $N\in\mathbb{N}$ и каждого $k=1,2$

$$\sum_{i=0}^{N}\sup_{(\alpha,\varsigma)\in\mathbb{A}\times(0,\mathfrak{k}]}\Psi^{(k)}(\alpha,i\varsigma,\varsigma)\leqslant 2\varkappa\frac{\mathfrak{r}_k}{\sigma_k}\cdot\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\Big((1-e^{-\sigma_k\varsigma})\sum_{i=0}^{\infty}e^{-i\sigma_k\varsigma}\Big)=2\varkappa\frac{\mathfrak{r}_k}{\sigma_k},$$

то ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\Psi^{(k)}(\alpha,i\varsigma,\varsigma)$ являются равномерно сходящимися на множестве $\mathbb{A}\times(0,\mathfrak{k}]$. Поэтому найдется такое $i_0=i_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что для всех $(\alpha,\varsigma)\in\mathbb{A}\times(0,\mathfrak{k}]$ будут выполнены неравенства

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Psi^{(k)}(\alpha,i\varsigma,\varsigma)\leqslant\sum_{i=0}^{i_0}\Psi^{(k)}(\alpha,i\varsigma,\varsigma)+\frac{\varepsilon}{4},\ k=1,2. \tag{7.21}$$

Поскольку множество Q равностепенно п. п., $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha)=0$ (см. (7.10)), функция $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ и $\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]$, то по лемме 7.5, учитывая принятое обозначение, при $i=0,\ldots,i_0$ получаем равенства

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\Big(\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\Psi^{(k)}(\alpha,i\varsigma,\varsigma)\Big)=0,\ k=1,2,$$

и, следовательно, найдется такое $\alpha_0=\alpha_0(\varepsilon/4)\in\mathbb{A}$, что для всех $\alpha\in\mathbb{A}$, $\alpha_0\prec\alpha$ будут выполняться неравенства

$$\sum_{i=0}^{i_0}\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\Psi^{(k)}(\alpha,i\varsigma,\varsigma)<\frac{\varepsilon}{4},\ k=1,2.$$

Отсюда, совместно с неравенствами (7.20) и (7.21) получаем, что для всех $\alpha\in\mathbb{A}$, удовлетворяющих условию $\alpha_0\prec\alpha$, и любой функции $z\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство (7.18).

4. В этом пункте, используя полученные выше результаты, приведем ряд свойств решений нелинейных систем управления.

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $V\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ и дифференцируемая по x в каждой точке $(t,x,v,u)\in\mathbb{R}\times G\times V\times\mathfrak{U}$ функция $(t,x,v,u)\mapsto f(t,x,v,u)\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию:

1) для любого фиксированного множества $K\in\mathrm{comp}(G)$ $f\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$, $f'_x\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\Big(\operatorname*{maximum}_{(x,v,u)\in K\times V\times\mathfrak{U}}\big(|f(t,x,v,u)|+|f'_x(t,x,v,u)|\big)\doteq\Bbbk(K)<\infty. \tag{7.22}$$

Зафиксируем далее $\widehat{v}(\cdot)\in S(\mathbb{R},V)$ и при $\mu(\cdot)\in\mathrm{APM}_1$ рассмотрим (см. лемму 5.2) п. п. по Степанову систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\langle\mu(t),f(t,x,\widehat{v}(t),u)\rangle,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G, \tag{7.23}$$

для которой пару $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathrm{APM}_1$ называем допустимой, если $x(\cdot)$ — решение этой системы уравнений, отвечающее $\mu(\cdot)$ и такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x)\subset G$.

Фиксируем направленное множество $(\mathbb{A},\prec)$, содержащее счетное конфинальное подмножество, а также множество параметров Ω.

Т е о р е м а 7.3. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}\times G\times V\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию* 1), *для заданной функции* $\widehat{v}(\cdot)\in S(\mathbb{R},V)$ *пара* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in B(\mathbb{R},G)\times \mathrm{APM}_1$ *допустима для системы* (7.23) *и система уравнений в вариациях*

$$\dot y=\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle y,\ \ (t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \tag{7.24}$$

является э. д. Тогда, если множество $\big\{\mu(\cdot,\alpha,\omega),\,(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega\big\}$ *из* APM_1 *равностепенно п. п. и заданная совокупность отображений* $\big\{v(\cdot,\alpha,\omega),\,(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega\big\}$ *из* $S(\mathbb{R},V)$ *такие, что*

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\big(\sup_{\omega\in\Omega}\|\widehat{\mu}(\cdot)-\mu(\cdot,\alpha,\omega)\|_w+\sup_{\omega\in\Omega}d(\widehat{v}(\cdot),v(\cdot,\alpha,\omega))\big)=0, \tag{7.25}$$

то найдутся такие $\mathcal{K}\in\mathrm{comp(G)}$ *и* $\alpha_0\in\mathbb{A}$, *что для всякого* $\alpha\in\mathbb{A}$, *удовлетворяющего условию* $\alpha_0\prec\alpha$, *при каждом* $\omega\in\Omega$ *система*

$$\dot x=\langle\mu(t,\alpha,\omega),f(t,x,v(t,\alpha,\omega),u)\rangle, \tag{7.26}$$

имеет п. п. по Бору решение $x(\cdot,,\alpha,\omega)$ *такое, что* $\overline{\mathrm{orb}}\,(x(\cdot,\alpha,\omega))\subset\mathcal{K}$. *Это решение единственно и удовлетворяет следующему предельному равенству*

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\big(\sup_{\omega\in\Omega}\|x(\cdot,\alpha,\omega)-\widehat{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\big)=0. \tag{7.27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathrm{APM}_1$ допустима для системы (7.23), то найдется такое $r>0$, что будет выполнено включение $K_r\doteq\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x})+O_r[0]\subset G$. В дальнейшем считаем $\Bbbk\doteq\Bbbk(K_r)$ (см. (7.22) при $K=K_r$) и

$$\begin{cases}\mathfrak{f}(t,x,u)\doteq f(t,x,\widehat{v}(t),u), & \mathfrak{f}'_x(t,x,u)\doteq f'_x(t,x,\widehat{v}(t),u),\\ \mathfrak{f}_\alpha(t,x,u)\doteq f(t,x,v_\alpha(t),u), & \mathfrak{f}'_{\alpha,x}(t,x,u)\doteq f'_x(t,x,v_\alpha(t),u),\\ \nu(t,\alpha,\omega)\doteq\widehat{\mu}(t)-\mu(t,\alpha,\omega), \end{cases} \tag{7.28}$$

Кроме того, для э. д. системы (7.24) сохраняем обозначения, входящие в определение э. д. системы (7.1) с матрицей $A(t)=\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle$ и в качестве множества $Q\subset\mathrm{APM}$ рассматриваем множество (см. (7.9)) $Q(\mathbb{A}\times\Omega,2)$, отвечающее указанному в (7.28) семейству мер $\{\nu(\cdot,\alpha,\omega),\ (\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega\}$. Отметим, что в силу условий теоремы 7.3 множество Q является равностепенно п. п. и (см. лемму 5.2)

$$\mathfrak{f},\mathfrak{f}_\alpha\in S(\mathbb{R},C(K_r\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)),\quad \mathfrak{f}'_x,\mathfrak{f}_{\alpha,x}\in S(\mathbb{R},C(K_r\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))) \tag{7.29}$$

и, следовательно, функции $(t,u)\mapsto\mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t),u),\mathfrak{f}'_x(t,\widehat{x}(t),u)$ принадлежат пространствам $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$ и $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$, соответственно. Поэтому, поскольку множество $Q\subset\mathrm{APM}$ равностепенно п. п., по лемме 7.3

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}I_\alpha(t,\omega)\big)=0,\quad I_\alpha(t,\omega)\doteq\Big|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega),\mathfrak{f}(s,\widehat{x}(s),u))\rangle ds\Big|, \tag{7.30}$$

а по лемме 7.5 (см. обозначения (7.1) и (7.2) при $g(t,u)=\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s),u)$) получаем, что для любых фиксированных $\varsigma>0$, $i\in\mathbb{Z}_+$ и $\mathfrak{k}\in(0,\infty)$ справедливы равенства:

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\big(\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\Big|\int_{\mathfrak{s}_k(t,i)}P_k(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega),\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s),u))\rangle ds\Big|\big)\big)=0,\ k=1,2, \tag{7.31}$$

где, здесь и далее,

$$\mathfrak{s}_1(t,i) \doteq [t-i\varsigma-\varsigma, t-i\varsigma],\ \mathfrak{s}_2(t,i) \doteq [t+i\varsigma, t+i\varsigma+\varsigma].$$

Теперь в системе (7.26) сделаем замену $z = \widehat{x}(t) - x$, которая относительно z запишется в виде

$$\dot{z} = A(t)z + h_1(t,z) + h_2(t;\alpha,\omega,z) + h_3(t;\alpha,\omega,z), \tag{7.32}$$

где $(\alpha,\omega) \in \mathbb{A}\times\Omega$ и (здесь см. обозначения (7.28))

$$h_1(t,z) \doteq \langle\widehat{\mu}(t), \mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t),u) - \mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t)-z,u)\rangle - A(t)z,$$

$$h_2(t;\alpha,\omega,z) \doteq \langle\nu(t,\alpha,\omega), \mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t)-z,u)\rangle,$$

$$h_3(t;\alpha,\omega,z) \doteq \langle\mu(t,\alpha,\omega), \mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t)-z,u) - \mathfrak{f}_\alpha(t,\widehat{x}(t)-z,u)\rangle.$$

Введем в рассмотрение оператор $\mathfrak{F}[\cdot,\alpha,\omega] : B(\mathbb{R}, O_r[0]) \to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, определенный для каждой функции $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ равенством

$$\mathfrak{F}[z(\cdot),\alpha,\omega](t) \doteq \mathcal{P}[z(\cdot),\alpha,\omega](t) + \mathbb{P}[z(\cdot),\alpha,\omega](t),\ t\in\mathbb{R},$$

где, в свою очередь,

$$\mathcal{P}[z(\cdot),\alpha,\omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)[h_1(s,z(s)) + h_2(s;\alpha,\omega,z(s))]ds,$$

$$\mathbb{P}[z(\cdot),\alpha,\omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)h_3(s;\alpha,\omega,z(s))ds.$$

Покажем сначала, что найдутся такие константы $\beta\in(0,r]$, $q\in(0,1)$ и точка $\alpha_0\in\mathbb{A}$, что при всех $(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega$, где $\alpha_0 \prec \alpha$, введенный оператор $\mathfrak{F}[\cdot,\alpha,\omega]$ будет оператором сжатия на $B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ с константой q.

В дальнейшем для функции g, определенной на $\mathbb{R}\times K_r\times V\times\mathfrak{U}$ при $\gamma>0$ и $t\in\mathbb{R}$ полагаем

$$\boldsymbol{w}^{(1)}_\gamma(t;g) \doteq \underset{\substack{(x_k,v,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U},\\ k=1,2,\ |x_1-x_2|\leqslant\gamma}}{\text{maximum}} |g(t,x_1,v,u) - g(t,x_2,v,u)|, \tag{7.33}$$

$$\boldsymbol{w}^{(2)}_\gamma(t;g) \doteq \underset{\substack{(x,v_k,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U},\\ k=1,2,\ |v_1-v_2|\leqslant\gamma}}{\text{maximum}} |g(t,x,v_1,u) - g(t,x,v_2,u)|. \tag{7.34}$$

Из ограничений, наложенных на f, в силу леммы 1.3

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}(\boldsymbol{w}^{(1)}_\gamma(s;f'_x) + \boldsymbol{w}^{(2)}_\gamma(s;f)ds\Big) = 0. \tag{7.35}$$

Покажем, что

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}\Big(\sup\{p_\alpha[z(\cdot)],\ z(\cdot)\in B(\mathbb{R},O_r[0])\}\Big) = 0,\ p_\alpha[z(\cdot)] \doteq \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\mathbb{P}[z(\cdot),\alpha,\omega](t)|. \tag{7.36}$$

В самом деле, для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ (см. (7.35) при $l = 2$) найдется такое $\gamma = \gamma(\varepsilon) \in (0, r]$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_\gamma^{(2)}(s; f)ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2c},$$

здесь в качестве c рассматриваем нижеприведенную константу при $a = 1$:

$$c(a) \doteq \Big(\frac{\mathfrak{r}_1}{1 - e^{-a\sigma_1}} + \frac{\mathfrak{r}_2}{1 - e^{-a\sigma_2}}\Big). \tag{7.37}$$

Поэтому, полагая

$$T_{\alpha,\omega}(t) \doteq \{s \in [t, t+1] : \ |\widehat{v}(s) - v(s, \alpha, \omega)| \geqslant \gamma\}, \quad \mathbb{T}_{\alpha,\omega}(t) \doteq [t, t+1] \setminus T_{\alpha,\omega}(t),$$

получим (см. определения функции h_3 и константы $\Bbbk$ в (7.22)), что для каждой функции $z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$

$$\big|\mathbb{P}[z(\cdot), \alpha, \omega](t)\big| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \Big\{\mathfrak{r}_1 e^{-\sigma_1 i}\Big(\int_{\mathbb{T}_{\alpha,\omega}(t-i)} |h_3(s; \alpha, \omega, z(s))|ds + 2\Bbbk \operatorname{mes} T_{\alpha,\omega}(t-i)\Big) +$$
$$+\mathfrak{r}_2 e^{-\sigma_2 i}\Big(\int_{\mathbb{T}_{\alpha,\omega}(t+i)} |h_3(s; \alpha, \omega, z(s))|ds + 2\Bbbk \operatorname{mes} T_{\alpha,\omega}(t+i)\Big)\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} \mathfrak{r}_k e^{-\sigma_k i}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_\gamma^{(2)}(s; f)ds + \frac{2\Bbbk}{\gamma} d(\widehat{v}(\cdot), v(\cdot, \alpha, \omega))\Big) < \varepsilon/2 + \frac{2c\Bbbk}{\gamma} d(\widehat{v}(\cdot), v(\cdot, \alpha, \omega)). \ \blacksquare$$

Отсюда, в силу (7.25), вытекает равенство (7.36).

Введем, далее, при $(\alpha, \omega) \in \mathbb{A} \times \Omega$, в рассмотрение оператор (см. (7.29), а также теоремы 2.2 и 7.1) $L[\cdot, \alpha, \omega] : \ B(\mathbb{R}, O_r[0]) \to B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, определенный для каждой функции $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ равенством

$$L[z(\cdot), \alpha, \omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s)\langle \nu(s, \alpha, \omega), \mathfrak{f}'_x(s, \widehat{x}(s), u)\rangle z(s)ds, \ t \in \mathbb{R}. \tag{7.38}$$

Используя определение функций h_1 и h_2, учитывая, что $\|\nu(\cdot, \alpha, \omega)\| \leqslant 2$, несложно показать (здесь см. (7.37) и (7.30)), что для всех $z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$

$$\big|\mathcal{P}[z(\cdot), \alpha, \omega](t)\big| \leqslant 3c \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_{\|z\|_C}^{(1)}(s; f'_x)ds \cdot \|z\|_C + \big|L[z(\cdot), \alpha, \omega](t)\big| + I_\alpha(t, \omega).$$

В силу (7.29) и леммы 1.3 найдется $\tilde{\gamma} \in (0, r]$, при котором

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_{\tilde{\gamma}}^{(1)}(s; f'_x)ds \leqslant 1/(20\mathrm{c}). \tag{7.39}$$

Поэтому из предыдущего неравенства (здесь см. обозначение в (7.36)) получаем, что для всех $z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_{\tilde{\gamma}}[0])$ и любых $\alpha \in \mathbb{A}$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \big|\mathfrak{F}[z(\cdot), \alpha, \omega](t)\big| \leqslant \frac{3}{20}\|z\|_C + \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |L[z(\cdot), \alpha, \omega](t)| +$$
$$+ \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |I_\alpha(t, \omega)| + p_\alpha[z(\cdot)]. \tag{7.40}$$

Фиксируем, далее, константу $\beta \in (0, \tilde{\gamma}/2]$. Тогда для любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ (см. определение оператора $\mathcal{P}[z(\cdot), \alpha, \omega]$, функций h_1, h_2 и обозначения (7.28)) получим, что

$$\big|\mathcal{P}[z_1(\cdot), \alpha, \omega](t) - \mathcal{P}[z_2(\cdot), \alpha, \omega](t)\big| \leqslant 3c \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_{\tilde{\gamma}}^{(1)}(s; f'_x) ds \cdot \|z_1 - z_2\|_C +$$

$$+ \sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} \big|L[z_1(\cdot) - z_2(\cdot), \alpha, \omega](t)\big| \overset{(7.39)}{\leqslant} \frac{3}{20}\|z_1 - z_2\|_C + \sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} \big|L[z_1(\cdot) - z_2(\cdot), \alpha, \omega](t)\big|.$$

Сейчас рассмотрим константу $\varepsilon > 0$, удовлетворяющую неравенству

$$\varepsilon < \frac{\beta}{20(2\Bbbk(\mathfrak{r}_1/\sigma_1 + \mathfrak{r}_2/\sigma_2) + \beta)}. \tag{7.41}$$

Учитывая, что для любых функций $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ ($\|z_1 - z_2\|_C \neq 0$) отображение $t \mapsto \beta(z_1(t) - z_2(t))/\|z_1 - z_2\|_C$ принадлежит $B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ и $\beta < r$, используя, для указанного в (7.41) $\varepsilon > 0$, теорему 7.2, получим, что найдется такое $\alpha_1 \in \mathbb{A}$, что при всех $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_1 \prec \alpha$, будут выполнены соотношения:

$$\sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} \big|L[z_1(\cdot) - z_2(\cdot), \alpha, \omega](t)\big| \overset{(7.38)}{=} \frac{1}{\beta}\|z_1 - z_2\|_C \sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} \Big|L[\frac{z_1(\cdot) - z_2(\cdot)}{\|z_1 - z_2\|_C}\beta, \alpha, \omega](t)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\big(2\Bbbk(\mathfrak{r}_1/\sigma_1 + \mathfrak{r}_2/\sigma_2) + \beta\big)\frac{1}{\beta}\|z_1 - z_2\|_C \overset{(7.41)}{\leqslant} \frac{1}{20}\|z_1 - z_2\|_C.$$

Стало быть, при этих α и любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$

$$\big|\mathcal{P}[z_1(\cdot), \alpha, \omega](t) - \mathcal{P}[z_2(\cdot), \alpha, \omega](t)\big| < \frac{1}{5}\|z_1 - z_2\|_C. \tag{7.42}$$

Далее (см. определение оператора $\mathbb{P}$) при $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ имеем следующие соотношения:

$$|\mathbb{P}[z_1(\cdot), \alpha, \omega](t) - \mathbb{P}[z_2(\cdot), \alpha, \omega](t)| \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{ \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)| \cdot |\langle \mu(s, \alpha, \omega), \int_0^1 \big(\mathfrak{f}'_x(s, \widehat{x}(s) - z_2(s) + \theta(z_2(s) - z_1(s)), u) - \mathfrak{f}'_x(s, \widehat{x}(s), u)\big) d\theta \rangle| ds +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)| \cdot |\langle \mu(s, \alpha, \omega), \int_0^1 \big(\mathfrak{f}'_{\alpha,x}(s, \widehat{x}(s) - z_2(s) + \theta(z_2(s) - z_1(s)), u) -$$

$$- \mathfrak{f}'_{\alpha,x}(s, \widehat{x}(s), u)\big) d\theta \rangle| ds +$$

$$+ J_\alpha(t, \omega)\Big\} \cdot \|z_1 - z_2\|_C \leqslant \big(2c \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_{\tilde{\gamma}}^{(1)}(s; f'_x) ds + J_\alpha(t, \omega)\big)\|z_1 - z_2\|_C \overset{(7.39)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \big(1/10 + J_\alpha(t, \omega)\big)\|z_1 - z_2\|_C,$$

где

$$J_\alpha(t, \omega) \doteq \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)| \cdot |\langle \mu(s, \alpha, \omega), \mathfrak{f}'_x(s, \widehat{x}(s), u) - \mathfrak{f}'_{\alpha,x}(s, \widehat{x}(s), u) \rangle| ds.$$

Далее (см. (7.34) при $g = f'_v$), имеем

$$J_\alpha(t,\omega) \leqslant c\big(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_\gamma^{(2)}(s; f'_v)ds + \frac{2\Bbbk}{\gamma} d(\widehat{v}(\cdot), v(\cdot,\alpha,\omega))\big)$$

(напомним, что $c \doteq c(1)$, см. (7.37) при $a = 1$).

Выбирая $\gamma > 0$ так (здесь см. (7.29) и лемму 1.3), что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_\gamma^{(2)}(s; f'_v)ds < 1/(10\mathrm{c}),$$

а $\alpha_2 \in \mathbb{A}$, $\alpha_1 \prec \alpha_2$, такое (см. (7.25)), что при каждом $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_2 \prec \alpha$, справедливо неравенство $\sup\limits_{\omega\in\Omega} d(\widehat{v}(\cdot), v(\cdot,\alpha,\omega)) < \gamma/(20\Bbbk c)$, получим, что

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \big|\mathbb{P}[z_1(\cdot),\alpha,\omega](t) - \mathbb{P}[z_2(\cdot),\alpha,\omega](t)\big| < \frac{1}{5}\|z_1 - z_2\|_C.$$

Объединяя это неравенство с (7.42), получаем, что для всех $\alpha \in \mathbb{A}, \alpha_2 \prec \alpha$ и любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \big|\mathfrak{F}[z_1(\cdot),\alpha,\omega](t) - \mathfrak{F}[z_2(\cdot),\alpha,\omega](t)\big| < \frac{2}{5}\|z_1 - z_2\|_C. \tag{7.43}$$

Тем самым доказано, что для всех $\alpha \in \mathbb{A}$, удовлетворяющих условию $\alpha_2 \prec \alpha$, семейство операторов $\mathfrak{F}[\cdot,\alpha,\omega] : B(\mathbb{R}, O_\beta[0]) \to B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ $(\omega \in \Omega)$ является операторами сжатия с общей константой $q = 2/5$.

Покажем, что, начиная с некоторого $\alpha_0 \in (\mathbb{A}, \prec)$, при всех $\omega \in \Omega$

$$\mathfrak{F}[B(\mathbb{R}, O_\beta[0]), \alpha, \omega] \subset B(\mathbb{R}, O_\beta[0]). \tag{7.44}$$

С этой целью выберем $\alpha_0 \in \mathbb{A}$, $\alpha_2 \prec \alpha_0$ таким, чтобы при всех $\alpha \in \mathbb{A}$, удовлетворяющих условию $\alpha_0 \prec \alpha$, выполнялись неравенства (см. (7.30) и (7.36))

$$\sup\big\{p_\alpha[z(\cdot)],\ z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_r[0])\big\} < 1/(10\beta), \qquad \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \big|I_\alpha(t,\omega)\big| < 1/(10\beta).$$

Тогда, при этих α, в силу (7.40) получаем, что для каждой функции $z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ имеет место неравенство

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{F}[z(\cdot),\alpha,\omega](t)| \leqslant 1/(5\beta) + \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |L[z(\cdot),\alpha,\omega](t)|,$$

и так как

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |L[z(\cdot),\alpha,\omega](t)| \leqslant \varepsilon(2\Bbbk(\mathfrak{r}_1/\sigma_1 + \mathfrak{r}_2/\sigma_2) + \beta) \overset{(7.40)}{<} \beta/20,$$

то при каждом $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$ и всякой функции $z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \big|\mathcal{F}[z(\cdot),\alpha,\omega](t)\big| \leqslant 1/5\beta.$$

Тем самым доказано, что при каждом $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$ и всяком $\omega \in \Omega$ выполнено включение (7.44). Последнее, совместно с (7.43), влечет, по теореме о сжимающем отображении [111], что оператор $\mathfrak{F}[\cdot,\alpha,\omega]$ имеет на замкнутом подмножестве $B(\mathbb{R},O_\beta[0])$ банахова пространства $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ неподвижную точку, то есть для каждого $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$ и любого $\omega \in \Omega$ существует единственная функция $z(\cdot,\alpha,\omega) \in B(\mathbb{R},O_\beta[0])$ такая, что при всех $t \in \mathbb{R}$

$$z(t,\alpha,\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\big[h_1(s,z(s,\alpha,\omega)) + h_2(s;\alpha,\omega,z(s,\alpha,\omega)) + \\ + h_3(s;\alpha,\omega,z(s,\alpha,\omega))\big]ds. \quad (7.45)$$

В свою очередь, последнее равенство означает, что $z(\cdot,\alpha,\omega)$ — п. п. по Бору решение системы уравнений (7.32), а следовательно, функция $x(\cdot,\alpha,\omega) = \widehat{x}(\cdot) - z(\cdot,\alpha,\omega)$ будет п. п. по Бору решением системы (7.26). При этом, поскольку $\|z(\cdot,\alpha,\omega)\|_C \leqslant \beta < r$ при каждом $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$ и любом $\omega \in \Omega$, то $\overline{\operatorname{orb}}(x(\cdot,\omega)) \subset K_r \subset G$. Тем самым, первое утверждение теоремы 7.3 доказано.

Для доказательства второго утверждения этой теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\alpha \in \mathbb{A}} \|z(\cdot,\alpha,\omega)\|_C = 0. \quad (7.46)$$

Для доказательства равенства (7.46) заметим сначала, что если $z(\cdot) \in B(\mathbb{R},O_\beta[0])$, то в силу выбора α_0 будут выполняться следующие соотношения:

$$\big|L[z(\cdot),\alpha,\omega](t)\big| = \frac{1}{\beta}\Big|L[\frac{z(\cdot)}{\|z\|_C},\alpha,\omega](t)\Big| \cdot \|z\|_C \overset{(7.38)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{\beta}\Big(2\Bbbk(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1} + \frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2}) + \beta\Big) \cdot \|z\|_C \overset{(7.40)}{\leqslant} \frac{1}{20}\|z\|_C,$$

из которых, в силу (7.45) и (7.40), получаем неравенство

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |z(t,\alpha,\omega)| \leqslant \frac{5}{4}\Big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |I_\alpha(t,\omega)| + \sup\big\{p_\alpha[z(\cdot)],\ z(\cdot) \in B(\mathbb{R},O_\beta[0])\big\}\Big).$$

Теперь равенство (7.27) вытекает из (7.30) и (7.36).

З а м е ч а н и е 7.1. Покажем, что требование э. д. системы (7.19) в теореме 7.3 для существования п. п. решений, сходящихся равномерно на $\mathbb{R}$ к заданному п. п. решению исходной системы, существенно. С этой целью рассмотрим скалярное уравнение $\dot{z} = a(t)z + b(t)$, в котором функции $a, b \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такие, что каждое ограниченное решение $z(t)$, $t \in \mathbb{R}$ не является п. п. по Бору [108, с. 152]. Далее, в $\mathbb{R}^2$ рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(t)x_1 + b(t)u_1(t), \\ \dot{x}_2 = u_2(t)x_1,\ u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in S(\mathbb{R},[-1,1]), \end{cases} \quad (7.47)$$

для которой пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, где $\widehat{u}(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^2$, $\widehat{x}(t) \equiv (0,1) \in \mathbb{R}^2$, допустима. Отвечающая этой паре система уравнений в вариациях

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(t)y_1, \\ \dot{y}_2 = 0, \end{cases}$$

не является э. д., так как она имеет нетривиальные ограниченные на $\mathbb{R}$ решения. Пусть, далее, $u^{(j)}(t) \equiv (1/j, 0)$, $j \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $u^{(j)} \in S(\mathbb{R}, [-1, 1])$ и $u^{(j)} \to \widehat{u}$ при $j \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{j\to\infty} \|\delta_{u^{(j)}} - \delta_{\widehat{u}}\|_w = 0$. С другой стороны, ограниченные решения $x^{(j)}(t) = (z(t)/j, 1)$, $j \in \mathbb{N}$, системы (7.47), отвечающие функциям $u^{(j)}(\cdot)$, таковы, что $\|\widehat{x} - x^{(j)}\|_C \to 0$ при $j \to \infty$, однако они не принадлежат $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

5. В следующем утверждении приведем еще одно важное свойство п. п. решений $x(\cdot, \alpha, \omega)$ системы (7.26), в формулировке и доказательстве которого принято следующее обозначение

$$\boldsymbol{v}(\alpha, \omega_1, \omega_2) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\mu(s, \alpha, \omega_1) - \mu(s, \alpha, \omega_2)|(\mathfrak{U}) ds. \tag{7.48}$$

Т е о р е м а 7.4. *Пусть в условиях теоремы 7.3 (Ω, ρ) — компактное метрическое пространство. Тогда для всех $\alpha \in \mathbb{A}$, удовлетворяющих условию $\alpha_0 \prec \alpha$, где $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ взято из теоремы 7.3, для которых отображение $(t, \omega) \mapsto v(t, \alpha, \omega)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R} \times \Omega, V)$ и*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \Big(\sup\big\{ \boldsymbol{v}(\alpha, \omega_1, \omega_2),\ \omega_1, \omega_2 \in \Omega,\ \rho(\omega_1, \omega_2) \leqslant \gamma \big\}\Big) = 0, \tag{7.49}$$

функция $(t, \omega) \mapsto x(t, \alpha, \omega)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольное $\alpha \in \mathbb{A}$, удовлетворяющее условию $\alpha_0 \prec \alpha$. Как было показано при доказательстве теоремы 7.3, для каждого $\omega \in \Omega$, п. п. по Бору решение $x(\cdot, \alpha, \omega)$ системы (7.26) представимо в виде[5] $x(\cdot, \alpha, \omega) = \widehat{x}(\cdot) - z(\cdot, \alpha, \omega)$, где функция $z(\cdot, \alpha, \omega) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ и является решением системы (7.26). Поэтому для доказательства теоремы 7.4 достаточно показать, что отображение $(t, \omega) \mapsto z(t, \alpha, \omega)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n)$. С этой целью для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ обозначим

$$\Delta z_\alpha(t, \omega_1, \omega_2) \doteq z(t, \alpha, \omega_1) - z(t, \alpha, \omega_2),\ t \in \mathbb{R}.$$

Теперь, учитывая определение оператора $\mathfrak{F}[\cdot, \alpha, \omega]$ и то, что при всех $\omega \in \Omega$ функция $t \mapsto z(t, \alpha, \omega)$ является неподвижной точкой этого оператора, или, что равносильно, при п. в. $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству (7.40), имеем следующие соотношения:

$$|\Delta z_\alpha(t, \omega_1, \omega_2)| \overset{(7.40)}{\leqslant} |\mathfrak{F}[z(\cdot, \alpha, \omega_1), \alpha, \omega_1](t) - \mathfrak{F}[z(\cdot, \alpha, \omega_2), \alpha, \omega_1](t)| +$$

$$+ |\mathfrak{F}[z(\cdot, \alpha, \omega_2), \alpha, \omega_1](t) - \mathfrak{F}[z(\cdot, \alpha, \omega_2), \alpha, \omega_2](t)| \overset{(7.43)}{<} \frac{2}{5} \|\Delta z_\alpha(\cdot, \omega_1, \omega_2)\|_C +$$

$$+ 2 \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t, s)| \cdot |\langle \mu(s, \alpha, \omega_1) - \mu(s, \alpha, \omega_2), f(s, x(s, \alpha, \omega_2), \widehat{v}(s), u) \rangle| ds +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t, s)| \cdot |\langle \mu(s, \alpha, \omega_1) - \mu(s, \alpha, \omega_2), f(s, x(s, \alpha, \omega_2), v(s, \alpha, \omega_1), u) \rangle| ds +$$

[5] При доказательстве настоящей теоремы сохраняем выводы и константы из доказательства теоремы 7.3.

$$+\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{G}(t,s)|\cdot|\langle\mu(s,\alpha,\omega_1), f(s,x(s,\alpha,\omega_2),v(s,\alpha,\omega_1),u)-$$

$$-f(s,x(s,\alpha,\omega_2),v(s,\alpha,\omega_2),u)\rangle|ds\overset{(7.48)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\frac{2}{5}\|\Delta z_\alpha(\cdot,\omega_1,\omega_2)\|_C+4c\Bbbk\boldsymbol{v}(\alpha,\omega_1,\omega_2)+I_\alpha(t,\omega_1,\omega_2),$$

где $I_\alpha(t,\omega_1,\omega_2)\doteq\int\limits_{\mathbb{R}}|\mathcal{G}(t,s)|\,F_\alpha(s,\omega_1,\omega_2)ds$, а

$$F_\alpha(s,\omega_1,\omega_2)\doteq|f(s,x(s,\alpha,\omega_2),v(s,\alpha,\omega_1),u)-f(s,x(s,\alpha,\omega_2),v(s,\alpha,\omega_2),u)\rangle|ds.$$

Покажем, что

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\mathbb{I}(\gamma)=0,\quad \mathbb{I}(\gamma)\doteq\sup\{\|I_\alpha(\cdot,\omega_1,\omega_2)\|_C,\ \omega_1,\omega_1\in\Omega,\rho(\omega_1,\omega_2)<\gamma\}.\tag{7.50}$$

Действительно, так как $f\in S(\mathbb{R},C(K_r\times V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, то по лемме 1.3 для заданного $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что (см. (7.34) и (7.22))

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\boldsymbol{w}_\delta^{(2)}(s;f)ds<\varepsilon/(2\Bbbk).$$

Далее, так как функция

$$(t,\omega)\mapsto v_\alpha(t,\omega)\doteq v(t,\alpha,\omega)$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\Omega,V)$, то (см. определение 1.1 и обозначение (1.4) при $\mathfrak{X}=\Omega$) $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[v_\alpha,\Omega]=0$, где, напомним,

$$\mathfrak{d}_\gamma[v_\alpha,\Omega]\overset{(1.4)}{=}\sup\{d(v_\alpha(\cdot,\omega_1),v_\alpha(\cdot,\omega_2)):\ x_1,x_2\in\Omega,\ \rho(x_1,x_2)<\gamma\}.$$

Следовательно, найдется такое $\gamma_\varepsilon>0$, что при всех $\gamma\in(0,\gamma_\varepsilon)$ будет выполнено неравенство

$$\mathfrak{d}_\gamma[v_\alpha,\Omega]<\delta\varepsilon/(4\Bbbk).$$

Сейчас, полагая

$$T_\delta(t,\omega_1,\omega_2)\doteq\{s\in[t,t+1]:\ \ \|v(\cdot,\alpha,\omega_1)-v(\cdot,\alpha,\omega_2)\|_C\geqslant\delta\},$$

$$\mathbb{T}_\delta(t,\omega_1,\omega_2)\doteq[t,t+1]\setminus T_\delta(t,\omega_1,\omega_2),$$

при всех $\omega_1,\omega_1\in\Omega$, удовлетворяющих неравенству $\rho(\omega_1,\omega_2)<\gamma$, получаем следующие соотношения:

$$|I_\alpha(t,\omega_1,\omega_2)|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\Big\{\mathfrak{r}_1e^{-\sigma_1 i}\big(\int_{\mathbb{T}_\delta(t-i,\omega_1,\omega_2)}F_\alpha(s;\alpha,\omega,z(s))ds+$$

$$+2\Bbbk\,\mathrm{mes}\,T_\delta(t-i,\omega_1,\omega_2)\big)+\mathfrak{r}_2e^{-\sigma_2 i}\big(\int_{\mathbb{T}_\delta(t+i,\omega_1,\omega_2)}F_\alpha(s;\alpha,\omega,z(s))ds+$$

$$+2\Bbbk\,\mathrm{mes}\,T_\delta(t+i,\omega_1,\omega_2)\big)\Big\}\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}\mathfrak{r}_ke^{-\sigma_k i}\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\boldsymbol{w}_\delta^{(2)}(s;f)ds+$$

$$+\frac{2\Bbbk}{\gamma}d(v_\alpha(\cdot,\omega_1),v_\alpha(\cdot,\omega_2))\big)<\varepsilon/2+\frac{2c\Bbbk}{\delta}\mathfrak{d}_\gamma[v_\alpha,\Omega]<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Тем самым равенство (7.50) доказано, и так как для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $\rho(\omega_1, \omega_2) \leqslant \gamma$,

$$\|\Delta z_\alpha(\cdot, \omega_1, \omega_2)\|_C \leqslant \frac{3}{5}(4c\Bbbk\boldsymbol{v}(\alpha, \omega_1, \omega_2) + \mathbb{I}_\gamma),$$

то из равенств (7.49) и (7.50) получаем, что

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\bigl(\sup\{\|z_\alpha(\cdot, \omega_1) - z(\cdot, \omega_2)\|_C,\ \omega_1, \omega_1 \in \Omega, \rho(\omega_1, \omega_2) < \gamma\}\bigr) = 0.$$

Следовательно, п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора при каждом ω из компакта Ω отображение $(t, \omega) \mapsto z(t, \alpha, \omega)$ является равномерно непрерывным по ω относительно $t \in \mathbb{R}$, а это и означает [187], что $z \in B(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n)$.

З а м е ч а н и е 7.2. В случае, если в теореме 7.3 в качестве $\mathbb{A}$ рассматривается $[0, \infty)$, а Ω является компактным метрическим пространством, то можно привести [61] достаточные условия, когда п. п. по Бору решение $x(\cdot, \alpha, \omega)$ системы (7.26), отвечающее $(\alpha, \omega) \in \Sigma \doteq [0, \alpha_0] \times \Omega$, где $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ взято из утверждения теоремы 7.3, принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \Sigma, \mathbb{R}^n)$. Поскольку указанное свойство решений системы (7.26) в дальнейшем не используется, то формулировка и доказательство таких условий здесь опускаются. По этой же причине опускаем исследования [65], связанные с дифференцируемостью по параметру п. п. решений систем дифференциальных уравнений.

П р и м е р 7.1. Пусть отображение $(x, u) \mapsto f(x, u) \in \mathbb{R}^n$, $(x, u) \in G \times \mathfrak{U}$ непрерывно вместе со своей производной по x. Допустим, далее, что система уравнений

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{7.51}$$

имеет такую ω-периодическую допустимую пару $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, что отвечающая ей система уравнений $\dot{y} = f'_x(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t))y$ э. д. Покажем, что в этом случае для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая допустимая пара $(x(\cdot), u(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ системы (7.51), что

$$\|\widehat{x} - x\|_C + d(\widehat{u}, u) < \varepsilon. \tag{7.52}$$

В самом деле, фиксируем $\vartheta \in [0, \omega)$ и функцию $v \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, такую, что множество $\Lambda(v)$ ее показателей Фурье не пересекается с множеством $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Рассмотрим, далее, семейство отображений $t \mapsto u_\alpha \in \mathfrak{U}$, $\alpha \in \mathbb{A} \doteq (0, \omega - \vartheta)$, определенных при каждом $t \in \mathbb{R}$ равенством

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \widehat{u}(t),\ t \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}[m\omega, (m+1)\omega] \setminus T_{m,\alpha,\vartheta}, \\ v(t),\ t \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} T_{m,\alpha,\vartheta} \doteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}[m\omega + \vartheta, m\omega + \vartheta + \alpha). \end{cases}$$

Используя следствие 1.3, несложно показать, что множество $\{u_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{A}\} \subset S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ и является равностепенно п. п., а стало быть, и множество отображений $\{\delta_{u_\alpha},\ \alpha \in \mathbb{A}\}$

содержится в $\mathrm{APM}_1^{(1)} \subset \mathrm{APM}_1$ и является равностепенно п. п. Кроме того, так как при любом $m \in \mathbb{Z}$

$$\int_{m\omega}^{(m+1)\omega} |u_\alpha(t) - \widehat{u}(t)|dt = \int_{T_{m,\alpha,\vartheta}} |v(t) - \widehat{u}(t)|dt \leqslant 2\alpha \,\mathrm{diam}(\mathcal{U}),$$

то $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} d(u_\alpha, \widehat{u}) = 0$. Из последнего равенства вытекает, что $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} \|\delta_{u_\alpha} - \delta_{\widehat{u}}\|_w = 0$. Теперь, по теореме 7.3 получаем, что существует такое $\alpha_0 \in \mathbb{A}$, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ система $\dot{x} = f(x, u_\alpha(t))$ имеет такое п. п. по Бору решение x_α, что $\overline{\mathrm{orb}}(x_\alpha) \subset G$ и $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} \|x_\alpha - \widehat{x}\|_C = 0$. Из последнего равенства, совместно с равенством — $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} d(u_\alpha, \widehat{u}) = 0$, очевидно получаем, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая допустимая пара $(x(\cdot), u(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ системы (7.51), что будет выполнено неравенство (7.52).

§8. О некоторых свойствах п. п. решения нелинейной системы с управлениями, аппроксимирующими заданное мерозначное п. п. управление, зависящее от параметра

Здесь показано, что всякая допустимая пара $(x(\cdot,\omega), \mu(\cdot,\omega))$ системы (7.18) может быть сколь угодно точно аппроксимирована допустимой парой $(\mathfrak{x}(\cdot,\omega), \delta_{u(\cdot,\omega)})$ этой системы.

1. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, (Ω, ρ) — компактное метрическое пространство, функция $f : \mathbb{R} \times G \times V \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, где $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$, удовлетворяет условию 1), приведенному в § 7, и при заданных $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ и $v \in S(\mathbb{R}, C(\Omega, V))$ рассмотрим п. п. по Степанову (см. теорему 2.2 и лемму 5.2) систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \langle \mu(t,\omega), f(t, x, v(t,\omega), u)\rangle,\ (t, x) \in \mathbb{R} \times G, \tag{8.1}$$

для которой пару $(x(\cdot,\omega)), \mu(\cdot,\omega)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathrm{APM}_1$, отвечающую $\omega \in \Omega$, называем *допустимой,* если $x(\cdot,\omega)$ — решение этой системы уравнений, отвечающее $\mu(\cdot,\omega)$ и такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot,\omega)) \subset G$.

В дальнейшем предполагаем, что выполнены условия:

а) для любого $\omega \in \Omega$ пара $(x(\cdot,\omega), \mu(\cdot,\omega)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathrm{APM}_1$ является допустимой для системы (8.1), при этом отображение $(t,\omega) \mapsto x(t,\omega)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \Omega, G)$;

б) при каждом $\omega \in \Omega$ система уравнений в вариациях

$$\dot{y} = \langle \mu(t,\omega), f'_x(t, x(t,\omega), v(t,\omega), u)\rangle y,\ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{8.2}$$

допускает э.д., причем существуют такие положительные константы $\tilde{\mathfrak{r}}_j, \tilde{\sigma}_j$, $j = 1, 2$, не зависящие от $\omega \in \Omega$, что для функции Грина

$$\mathcal{G}(t, s; \omega) = \chi_{(-\infty,t)}(s) P_1(t, s; \omega) - \chi_{(t,\infty)}(s) P_2(t, s; \omega), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

этой системы выполнены оценки

$$\begin{cases} |P_1(t,s;\omega)| \leqslant \tilde{\mathfrak{r}}_1 e^{-\tilde{\sigma_1}(t-s)}, \ -\infty < s \leqslant t < \infty, \\ |P_2(t,s;\omega)| \leqslant \tilde{\mathfrak{r}}_2 e^{-\tilde{\sigma_2}(s-t)}, \ -\infty < t \leqslant s < \infty. \end{cases} \tag{8.3}$$

Т е о р е м а 8.1. *Пусть для системы* (8.1) *выполнены условия* а), б) *и* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— последовательность функций из* $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$, *указанная в теореме* 3.1 , *аппроксимирующая отображение* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$. *Тогда найдутся такое множество* $\mathcal{K} \in \mathrm{comp}(G)$ *и* $j_0 \in \mathbb{N}$, *что при каждом* $j \geqslant j_0$ *и всяком* $\omega \in \Omega$ *система уравнений*

$$\dot{x} = f(t,x,v(t,\omega),u_j(t,\omega)) \tag{8.4}$$

имеет такое п. п. по Бору решение $x_j(\cdot,\omega)$, *что* $\overline{\mathrm{orb}}(x_j(\cdot,\omega)) \subset \mathcal{K}$ *и*

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{\omega\in\Omega}\|x(\cdot,\omega)-x_j(\cdot,\omega)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\big) = 0. \tag{8.5}$$

З а м е ч а н и е 8.1. Множество $\{u_j(\cdot,\omega),\,(i,\omega)\in\mathbb{N}\times\Omega\} \subset S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, вообще говоря, не является равностепенно п. п. Поэтому здесь нельзя воспользоваться теоремой 7.3. Вместе с тем, доказательство теоремы 7.3 основано на леммах 7.3, 7.5 и теореме 7.2, которые были доказаны, используя свойство равностепенной п. п. множества $Q(\mathbb{A}\times\Omega,2)$. В следующем пункте, используя конструкцию функций u_j, приведем утверждения, аналогичные леммам 7.3, 7.5 и теореме 7.2.

2. В дальнейшем (см. условие а)) $\mathbb{K} \in \mathrm{comp}(G)$ такое, что для всех $\omega \in \Omega$ $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot,\omega)) \subset \mathbb{K}$ и для оператора Коши $X(\cdot,\cdot;\omega)$ системы (8.2) используем оценки

$$\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}|X_{ma}(\alpha,s;\omega)| \leqslant e^{\Bbbk(s+\alpha)}, \ s,\alpha \geqslant 0,$$

$$\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}|X_{ma}(\alpha,s_1;\omega)-X_{ma}(\alpha,s_2;\omega)| \leqslant \Bbbk e^{\Bbbk(a+\alpha)}\cdot|s_1-s_2|, \ s_1,s_2\in[0,a],$$

где константа $\Bbbk > 0$ задается равенством (7.22) при $K_r \doteq \mathbb{K}$. Кроме того, не оговаривая каждый раз, используем при $\mathfrak{X} = \Omega$ конструкцию аппроксимирующей отображение $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ последовательности $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$, приведенную при доказательстве теоремы 3.1 .

Полагаем далее, что при каждом $\omega\in\Omega$ и всех $j\in\mathbb{N}$

$$\nu_j(\cdot,\omega) \doteq \mu(\cdot,\omega)-\delta_{u_j(\cdot,\omega)}, \quad \nu_j^{(1)}(\cdot,\omega) \doteq \mu(\cdot,\omega)-\Delta_j(\cdot,\omega), \quad \nu_j^{(2)}(\cdot,\omega) \doteq \Delta_j(\cdot,\omega)-\delta_{u_j(\cdot,\omega)},$$

где отображения $u_j, \Delta_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ задаются равенствами (3.13) и (3.14), соответственно, при $\mathfrak{X} = \Omega$.

Л е м м а 8.1. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. *Тогда при каждом* $p = 1,2$ *для любого фиксированного* $\alpha\in[0,a]$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha,s;\omega)\langle\nu_j^{(p)}(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big) = 0. \tag{8.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем равенство (8.6) при $p = 2$ в предположении, что функция $g \in B(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$. В этом случае $\mathfrak{g} = \|g\|_{C(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n)} < \infty$ и, если $q_j \doteq \sup\{|g(t_1, \omega, u) - g(t_2, \omega, u)|,\ (t_i, \omega, u) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathcal{U},\ i = 1, 2,\ |t_1 - t_2| \leqslant a/j\}$, то $q_j \downarrow 0$ при $j \to \infty$. Фиксируем далее точки $t_l^{(j)} \in I_l^{(j)} \doteq [\frac{l-1}{j}a, \frac{l}{j}a],\ \ l = 1, \ldots, j$. Если обратиться к доказательству леммы 3.5, то можно заметить, что при каждом $l = 1, \ldots, j$ для всех $(m, \omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega$ справедливо равенство

$$\int_{I_l^{(j)}} \langle \nu_j^{(2)}(s + ma, \omega), g(t_l^{(j)} + ma, \omega, u)\rangle ds = 0,$$

учитывая которое, при всех $j \in \mathbb{N}$ и $(m, \omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega$ имеем

$$|I_j(m,\omega)| \doteq |\int_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha, s; \omega)\langle \nu_j^{(2)}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds| \leqslant$$

$$\leqslant 2\Bbbk \sum_{l=1}^{j} \Big\{ \int_{I_l^{(j)}} |X_{ma}(\alpha, s; \omega) - X_{ma}(\alpha, t_l^{(j)}; \omega)| ds +$$

$$+|X_{ma}(\alpha, t_l^{(j)}; \omega)| \cdot |\int_{I_l^{(j)}} \langle \nu_j^{(2)}(s+ma,\omega), g(s+ma,\omega,u) - g(t_l^{(j)} + ma, \omega, u)\rangle ds| \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant 2ae^{\Bbbk(a+\alpha)}\big(a\,\mathfrak{g}/j + q_j\big).$$

Откуда получаем равенство (8.6) для $p = 2$ при условии, что $g \in B(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$.

Пусть $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n))$. Рассмотрим в этом случае при каждом $h > 0$ стекловское усреднение

$$(t, \omega, u) \mapsto g(t, \omega, u; h) \doteq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} g(s, \omega, u) ds, \tag{8.7}$$

принадлежащее (см. теорему 1.2) пространству $B(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, и при каждом $l > 0$

$$\lim_{h\downarrow 0}\big(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+l} \max_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathcal{U}} |g(s,\omega,u) - g(s,\omega,u;h))| ds\big) = 0. \tag{8.8}$$

Теперь, принимая во внимание, что равенство (8.6) при $p = 2$ верно для любого фиксированного отображения из пространства $B(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, а значит и для отображения (8.7), из неравенства

$$\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega} |I_j(m,\omega)| \leqslant \sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega} |\int_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha, s;\omega)\langle \nu_j^{(2)}(s,\omega), g(s,\omega,u;h)\rangle ds| +$$

$$+2ae^{\Bbbk(\alpha+a)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{a}\int_t^{t+l} \max_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathcal{U}} |g(s,\omega,u) - g(s,\omega,u;h))| ds,$$

получаем его при условии, что $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n))$.

Далее, из неравенств

$$|\int_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha, s;\omega)\langle \nu_j^{(1)}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha, s;\omega)| \cdot \big(\sum_{k=1}^{p_j} \int_{\mathcal{U}} \alpha_k^{(j)}(u) |g(s,\omega,u) - g(s,\omega,u_k^{(j)})| \mu(s,\omega)(du)\big) ds \leqslant$$

$$\leqslant ae^{\Bbbk(\alpha+a)} \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{a}\int_t^{t+a} \omega_{\frac{1}{j}}[g(s,\cdot,\cdot), \Omega\times\mathcal{U}] ds,$$

леммы 1.3 и топологической эквивалентности d_l-расстояний получаем равенство (8.6) ∎ при $p=1$.

С л е д с т в и е 8.1. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. *Тогда*

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\Big|\int_{[\frac{t}{a}]a}^{t} X(t,s;\omega)\langle\nu_j^{(p)}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big)=0,\ p=1,2. \tag{8.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $h_j^{(p)}(t,\omega) \doteq \langle\nu^{(p)}(t,\omega), g(t,\omega,u)\rangle$ и допустим, что при некотором p равенство (8.9) неверно. В этом случае найдутся такая константа $\gamma>0$ и две последовательности $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $\{(t_i,\omega_i)\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}\times\Omega$, что при всех $i\in\mathbb{N}$

$$J_i^{(p)} \doteq \Big|\int_{[\frac{t_i}{a}]a}^{t_i} X(t_i,s;\omega_i)\, h_{j_i}^{(p)}(s,\omega_i)ds\Big| > \gamma.$$

С другой стороны, представим каждое t_i, $i\in\mathbb{N}$ в виде $t_i=m_ia+\theta_ia$, где $m_i\in\mathbb{Z}$ и $\theta_i\in[0,1)$, и будем считать, чтобы не загромождать обозначений, что $\theta_i\to\widehat{\theta}\in[0,1]$ при $i\to\infty$. Следовательно, найдется такое $i_0\in\mathbb{N}$, что для всех $i\geqslant i_0$ $\theta_i\leqslant 1+\widehat{\theta}$. При этих i имеем следующие соотношения:

$$J_i^{(p)} \leqslant \Big|\int_{\theta_ia}^{\hat{\theta}a} X_{m_ia}(\theta_ia,s;\omega_i)h_{j_i}^{(p)}(s+m_ia,\omega_i)ds\Big| +$$

$$+|X_{m_ia}(\theta_ia,\widehat{\theta}a;\omega_i)|\cdot\Big|\int_{m_ia}^{m_ia+\widehat{\theta}a} X(m_ia+\widehat{\theta}a,s;\omega_i)h_{j_i}^{(p)}(s,\omega_i)ds\Big| \leqslant$$

$$+2e^{2a\Bbbk}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\vartheta_ia}\boldsymbol{g}(s)ds + \sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha,s;\omega)\langle\nu_{j_i}^{(p)}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|,$$

где $\boldsymbol{g}(s) \doteq \max\limits_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathfrak{U}}|g(s,\omega,u)|$, $\vartheta_i \doteq |\theta_i-\widehat{\theta}|$, $\varphi(s,\omega,u)\doteq\psi(s)g(s,\omega,u)$ и где, в свою очередь, $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — a-периодическая функция, определенная при $t\in[0,a]$ равенством $\psi(t)=\chi_{[0,\widehat{\theta}a]}(t)$. Так как $\varphi\in S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, то, используя при $\alpha=\widehat{\theta}a$ для этой функции лемму 8.1, принимая во внимание, что $\boldsymbol{g}\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и равенство $\lim\limits_{i\to\infty}\vartheta_i=0$ (здесь см. лемму 7.4), из полученного выше соотношения получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty}J_i^{(p)}=0$, а это противоречит сделанному предположению.

С л е д с т в и е 8.2. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. *Тогда*

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{(m-1)a}^{ma} P_1(ma,s;\omega)\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big)=0,\ p=1,2, \tag{8.10}$$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{ma}^{(m+1)a} P_2(ma,s;\omega)\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big)=0,\ p=1,2. \tag{8.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $P_k(ma,s;\omega)=P_k(ma,ma;\omega)X(ma,s;\omega)$, $k=1,2$, то равенства (8.10), (8.11) вытекают из оценок (8.3) и утверждения леммы 8.1 при $\alpha=0$.

С л е д с т в и е 8.3. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$ *и* $\mathfrak{s}_1(m)\doteq(-\infty,ma]$, $\mathfrak{s}_2(m)\doteq[ma,\infty)$. *Тогда при каждом* $k=1,2$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{\mathfrak{s}_k(m)} P_k(ma,s;\omega)\langle\nu_j^{(p)}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big)=0,\ p=1,2. \tag{8.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку g принадлежит $S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, то $\mathfrak{k} \doteq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max\limits_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathfrak{U}} |g(s,\omega,u)|ds < \infty$. Далее, так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\exp(-ia\tilde{\sigma_2})$ сходится, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое i_0, что $\sum\limits_{i=i_0+1}^{\infty}\exp(-ia\tilde{\sigma_2}) < \varepsilon/4\tilde{\mathfrak{r}}_2\mathfrak{k}$. Сейчас, обозначив $h_j^{(p)}(t,\omega) \doteq \langle \nu_j^{(p)}(t,\omega), g(t,\omega,u)\rangle$, имеем для всех $j\in\mathbb{N}$ и $(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega$ следующие соотношения:

$$J_j^{(p)}(m,\omega) \doteq |\int_{ma}^{\infty} P_2(ma,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds| \leqslant \sum_{i=0}^{i_0} |\int_{(m+i)a}^{(m+i)a+a} P_2(ma,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds| +$$

$$+2\tilde{\mathfrak{r}}_2 \sum_{i_0+1}^{\infty}\int_{(m+i)a}^{(m+i)a+a} e^{-\tilde{\sigma_2}(s-ma)} \max_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathfrak{U}}|g(s,\omega,u)|ds + 2\tilde{\mathfrak{r}}_2\mathfrak{k}\sum_{i_0+1}^{\infty} e^{-ia\tilde{\sigma_2}} +$$

$$+\sum_{i=0}^{i_0} |X_{ma}(0,ia;\omega)|\cdot|\int_{(m+i)a}^{(m+i)a+a} P_2((m+i)a,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + i_0 e^{i_0 a\Bbbk} \sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega} |\int_{ma}^{(m+1)a} P_2(ma,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds|.$$

Отсюда, в силу равенств (8.11), вытекает, что для всех j, начиная с некоторого, $\sup\limits_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega} J_j^{(p)}(m,\omega) \leqslant \varepsilon$. Тем самым равенства (8.12) доказаны при $k=2$. Аналогично, используя (8.10), доказываются равенства (8.12) при $k=1$.

Л е м м а 8.2. *Пусть* $g\in S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. *Тогда*

$$\lim_{j\to\infty}(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle\nu_j(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds|) = 0. \tag{8.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим (см. неравенства (8.3)) $\tilde{\mathfrak{r}} \doteq \max(\tilde{\mathfrak{r}_1},\tilde{\mathfrak{r}_2})$, $h_j^{(p)}(t,\omega) \doteq \langle\nu_j^{(p)}(t,\omega), g(t,\omega,u)\rangle$ и каждое $t\in\mathbb{R}$ представим в виде $t = m_t a + \theta_t a$, где $m_t\in\mathbb{Z}$, $\theta_t\in[0,1)$. Тогда для всех $j\in\mathbb{N}$ и $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$ будут выполнены следующие соотношения:

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds\Big| \leqslant 2\tilde{\mathfrak{r}}\Big|\int_{m_t a}^{t} X(t,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds\Big| +$$

$$+\Big|X_{m_t a}(\theta_t a,0;\omega)\Big|\Big(\Big|\int_{-\infty}^{m_t a} P_1(m_t a,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds\Big| + \Big|\int_{m_t a}^{\infty} P_2(m_t a,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds\Big|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2\tilde{\mathfrak{r}} \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\Big|\int_{[t/a]a}^{t} X(t,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds\Big| + e^{a\Bbbk}\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{\mathfrak{s}_1(m)} P_1(ma,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds\Big| +$$

$$+e^{a\Bbbk}\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{\mathfrak{s}_2(m)} P_2(m_t a,s;\omega)h_j^{(p)}(s,\omega)ds\Big|,$$

из которых, принимая во внимание, что $\nu_j(\cdot,\omega) = \nu_j^{(1)}(\cdot,\omega) + \nu_j^{(2)}(\cdot,\omega)$, в силу (8.9) и (8.12), получим равенство (8.13). □

Далее, для фиксированной функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$ и констант $v, \varsigma > 0$ введем на $\mathbb{R} \times \Omega$, при каждом $p = 1, 2$ и всех $j \in \mathbb{N}$, отображения

$$t \mapsto \psi^{(1)}(t, \nu_j^{(p)}(\cdot, \omega)) = \psi^{(1)}(t, \nu_j^{(p)}(\cdot, \omega), v, \varsigma) \doteq \int_{t-v-\varsigma}^{t-v} P_1(t, s; \omega) \langle \nu_j^{(p)}(s, \omega), g(s, \omega, u) \rangle ds,$$

$$t \mapsto \psi^{(2)}(t, \nu_j^{(p)}(\cdot, \omega)) = \psi^{(2)}(t, \nu_j^{(p)}(\cdot, \omega), v, \varsigma) \doteq \int_{t+v}^{t+v+\varsigma} P_2(t, s; \omega) \langle \nu_j^{(p)}(s, \omega), g(s, \omega, u) \rangle ds.$$

Л е м м а 8.3. *Имеют место следующие равенства:*

$$\lim_{j \to \infty} \big(\sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} |\psi^{(k)}(t, \nu_j^{(2)}(\cdot, \omega))| \big) = 0, \;\; k = 1, 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму 8.3 лишь при $k = 2$ (при $k = 1$ доказательство аналогично). Допустим противное. Тогда найдутся такие константа $\gamma > 0$ и последовательности $\{j_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$, что $|\psi^{(2)}(t_i, \nu_{j_i}^{(2)}(\cdot, \omega_i))| > \gamma$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Представим теперь каждое t_i в виде $t_i = m_i a + \theta_i a$, где $m_i \in \mathbb{Z}$, $\theta_i \in \big(0, 1]$ и будем считать, что $\theta_i \to \widehat{\theta} \in [0, 1]$ при $i \to \infty$. Представим, далее, аналогично точки $\widehat{\theta} a + v$ и ς в виде $\widehat{\theta} a + v = m' a + \theta' a$, $\varsigma = m'' a + \theta'' a$, где m', $m'' \in \mathbb{Z}$ и $\theta', \theta'' \in [0, 1)$, и будем считать для определенности, что $m'' \in \mathbb{N}$ и $\vartheta \doteq \theta' + \theta'' \in [0, 1]$. Сейчас рассмотрим последовательность

$$\xi_i \doteq \Big| \int_{\widehat{m}_i a + v}^{\widehat{m}_i a + v + \varsigma} P_2(\widehat{m}_i a + v, s; \omega_i) \langle \nu_{j_i}^{(2)}(s, \omega_i), g(s, \omega_i, u) \rangle ds \Big|, \;\; i \in \mathbb{N},$$

где $\widehat{m}_i \doteq m_i + \widehat{\theta}$, и покажем, что $\xi_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$. С этой целью введем в рассмотрение измеримые a-периодические функции ψ_1, $\psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенные при $t \in [0, a]$ равенствами $\psi_1(t) \doteq \chi_{[0, \theta' a]}(t)$, $\psi_2(t) \doteq \chi_{[0, \vartheta a]}(t)$. Обозначив, сейчас, $m_i' \doteq m_i + m'$, $m_i'' \doteq m_i' + m''$ и $g_k(t, \omega, u) \doteq \psi_k(t) g(t, \omega, u)$, получим следующие соотношения:

$$\xi_i \leqslant e^{a\Bbbk\theta'} \Big| \int_{m_i' a}^{(m_i'+1)a} P_2(m_i' a, s; \omega_i) \langle \nu_{j_i}^{(2)}(s, \omega_i), g_1(s, \omega_i, u) \rangle ds +$$

$$+ \sum_{l=0}^{m''-1} e^{a\Bbbk(\theta' + l)} \Big| \int_{(m_i'+l)a}^{(m_i'+l+1)a} P_2((m_i' + l)a, s; \omega_i) \langle \nu_{j_i}^{(2)}(s, \omega_i), g(s, \omega_i, u) \rangle \Big| ds +$$

$$+ e^{a\Bbbk\big(\theta' + m''\big)} \Big| \int_{m_i'' a}^{(m_i''+1)a} P_2(m_i'' a, s; \omega_i) \langle \nu_{j_i}^{(2)}(s, \omega_i), g_2(s, \omega_i, u) \rangle ds \Big|,$$

из которых, по следствию 8.2, принимая во внимание, что функции g_k, $k = 1, 2$ принадлежат $S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, получаем, что $\xi_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$.

Пусть, далее, $\boldsymbol{g}(t) \doteq \max\limits_{(\omega, u) \in \Omega \times \mathfrak{U}} |g(t, \omega, u)|$ и $\eta_i \doteq |\widehat{\theta} - \theta_i|$. Тогда при всех i

$$|\psi^{(2)}(t_i, \nu_{j_i}^{(2)}(\cdot, \omega_i))| \leqslant 2 \int_{t_i + v}^{t_i + v + \eta_i a} \boldsymbol{g}(s) |P_2(t_i, s; \omega_i| ds + |X_{m_i a}(\theta_i a, \widehat{\theta} a + v)| \cdot \xi_i +$$

$$+ 2 \int_{t_i + v + \varphi}^{t_i + v + \varphi + \eta_i a} \boldsymbol{g}(s) |P_2(t_i, s; \omega_i| ds \overset{(8.3)}{\leqslant} 2 \tilde{\mathfrak{r}}_2 e^{-\tilde{\sigma_2} v} (1 + e^{-\varsigma \tilde{\sigma_2}}) \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t + a\eta_i} \boldsymbol{g}(s) ds + e^{\Bbbk(2a + v)} \xi_i.$$

Отсюда, учитывая, что $\boldsymbol{g} \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\eta_i \downarrow 0$ и $\xi_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$, получаем (см. лемму 7.4), что $\lim\limits_{i \to \infty} |\psi^{(2)}(t_i, \nu_{j_i}^{(2)}(\cdot, \omega_i))| = 0$. Последнее противоречит сделанному предположению.

Л е м м а 8.4. *Имеют место следующие равенства:*

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t,\nu_j^{(1)}(\cdot,\omega))|\big)=0,\ \ k=1,2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова рассмотрим лишь случай при $k=2$. В этом случае нужное равенство вытекает из приведенных ниже соотношений:

$$|\psi^{(k)}(t,\nu_j^{(1)}(\cdot,\omega))|\overset{(8.3)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\tilde{\mathfrak{r}}_2\int_{t+v}^{t+v+\varsigma}e^{-\tilde{\sigma}_2(s-t)}\Big(\sum_{k=1}^{p_i}\int_{\mathfrak{U}}\alpha_k^{(j)}(u)|\varphi(s,\omega,u)-g(s,\omega,u_k^{(j)})|\mu(s,\omega)(du)\Big)ds\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{\mathfrak{r}}_2\varsigma e^{-\tilde{\sigma}_2 v}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\varsigma}\omega_{\frac{1}{j}}[g(s,\cdot,\cdot),\Omega\times\mathfrak{U}]ds$$

и леммы 1.3. □

Полагаем, далее,

$$\psi^{(k)}(t,\nu_j(\cdot,\omega),v,\varsigma)\doteq\psi^{(k)}(t,\nu_j^{(1)}(\cdot,\omega),v,\varsigma)-\psi^{(k)}(t,\nu_j^{(2)}(\cdot,\omega),v,\varsigma),\ \ k=1,2.$$

Из лемм 8.3 и 8.4 получаем

С л е д с т в и е 8.4. *Пусть функция $g\in S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. Тогда при каждом $k=1,2$* $\lim\limits_{j\to\infty}\big(\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t,\nu_j(\cdot,\omega),v,\varsigma)|\big)=0.$

Л е м м а 8.5. *Пусть $g\in S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$ и $\mathfrak{k}\in(0,\infty)$. Тогда для любого фиксированного $i\in\mathbb{Z}_+$* $\lim\limits_{j\to\infty}\big(\sup\limits_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\big(\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t,\nu_j(\cdot,\omega),i\varsigma,\varsigma)|\big)\big)=0,\quad k=1,2.$

Доказательство леммы 8.5 (здесь см. оценки (8.3) и следствие 8.4) аналогично доказательству леммы 7.5 с направленным множеством $(\mathbb{A},\prec)=(\mathbb{N},\leqslant)$.

Далее, чтобы воспользоваться утверждением леммы 8.5 для доказательства следующей леммы 8.7, и леммой 8.2 при доказательстве теоремы 8.1, понадобится следующее утверждение, дополняющее утверждение, приведенное в замечании 5.3.

Л е м м а 8.6. *Пусть $f\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$ ($K\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$). Тогда для любых заданных функций $x\in B(\mathbb{R}\times\Omega,K)$ и $v\in S(\mathbb{R},C(\Omega,V))$ отображение*

$$(t,\omega,u)\mapsto g(t,\omega,u)\doteq f(t,x(t,\omega),v(t,\omega),u)\tag{8.14}$$

принадлежит $S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1.2 доказательство леммы 8.6 достаточно провести, считая, что f удовлетворяет условию вида (7.22). Сейчас, при произвольно заданном $\tau\in\mathbb{R}$, для каждого $t\in\mathbb{R}$ выберем такое измеримое на $[t,t+1]$ отображение $s\mapsto(\omega(s),u(s))\in\Omega\times\mathfrak{U}$, что при п. в. $s\in[t,t+1]$ $\max\limits_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathfrak{U}}|g(s+\tau,\omega,u)-g(s,\omega,u)|=|g(s+\tau,\omega(s),u(s))-g(s,\omega(s),u(s))|$. Поэтому, обозначив $K \times V \times \mathcal{U} \doteq X$, получим следующее неравенство (здесь см. обозначения (7.33), (7.34) при $\mathbb{K}_r = K$)

$$\int_t^{t+1} \max_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathcal{U}} |g(s+\tau,\omega,u) - g(s,\omega,u)|ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{(x,v,u)\in X} |f(s+\tau,x,v,u) - f(s,x,v,u)|ds +$$
$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_\gamma^{(1)}(s;f)ds + \sup_{t\in\mathbb{R}} \bigl(\max_{\omega\in\Omega} |x(t+\tau,\omega) - x(t,\omega)|\bigr) +$$
$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_\gamma^{(2)}(s;f)ds + \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{\omega\in\Omega} |v(s+\tau,\omega) - v(s,\omega)|ds,$$

справедливое при каждом фиксированном $\gamma > 0$. Используя это неравенство, условия леммы 8.7 и лемму 1.3 получим, что $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n))$. $\square$

Выберем, сейчас, $r > 0$ такое, что компактное множество

$$\mathbb{K}_r \doteq \mathbb{K} + O_r[0] \tag{8.15}$$

содержится в области G, и на множестве $B(\mathbb{R}, O_r[0])$, при каждом $j \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$, определим отображение

$$z(\cdot) \mapsto L_j[z(\cdot),\omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle \nu_j(s,\omega), f_x'(s,x(s,\omega),v(s,\omega),u)\rangle z(s)ds,\ t\in\mathbb{R}, \tag{8.16}$$

в котором, напомним, $x(\cdot,\omega)$ —- такое п. п. по Бору решение системы (8.1), что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot,\omega)) \subset \mathbb{K}$, $\nu_j(\cdot,\omega) \doteq \mu(\cdot,\omega) - \delta_{u_j(\cdot,\omega)}$, и $\mathcal{G}(t,s;\omega)$ — функция Грина экспоненциально дихотомичной системы уравнений (8.2). В силу ограничений, наложенных на f, а также условий а) и б), по лемме 8.6 получаем, что функция

$$(t,\omega,u) \mapsto g_1(t,\omega,u) \doteq f_x'(t,x(t,\omega),v(t,\omega),u) \tag{8.17}$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathcal{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$. Поэтому, по теореме 3.1 и следствию 2.3, отображение $t \mapsto \langle \nu_j(t,\omega), f_x'(t,x(t,\omega),u)\rangle$ п. п. по Степанову. Следовательно (см. теорему 7.1), для любых $j \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$ $\quad L_j[B(\mathbb{R},O_r[0]),\omega] \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Используя утверждение леммы 8.5 для функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathcal{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$, заданной равенством (8.16), и оценки (8.3), в точности повторив доказательство теоремы 7.2 с заменой $\nu(\cdot,\alpha,\omega)$ на $\nu_j(\cdot,\omega)$, с направленным множеством $(\mathbb{A},\prec) = (\mathbb{N},\leqslant)$, получим следующее утверждение, в котором, и всюду далее, $\Bbbk$ — положительная константа, определенная равенством (7.22) при $K_r = \mathbb{K}_r$.

Л е м м а 8.7. *Пусть выполнены условия* а), б). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $j_0 = j_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *что при каждом* $j \geqslant j_o$ *и всех* $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |L_j[z(\cdot),\omega](t)| \leqslant \varepsilon\bigl(2\Bbbk\bigl(\tilde{r_1}/\tilde{\sigma_1} + \tilde{r_2}/\tilde{\sigma_2}\bigr) + \|z\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\bigr). \tag{8.18}$$

3. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 8.1. Леммы 8.2 и 8.6 позволяют перенести схему доказательства теоремы 7.3 на доказательство теоремы 8.1. Поэтому ограничимся лишь краткой схемой ее доказательства.

Поскольку $u_j \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathcal{U})$, то по лемме 2.6 при каждом $j \in \mathbb{N}$ отображение $(t, \omega) \mapsto \delta_{u_j(t,\omega)} \doteq \mu_j(t, \omega)$ принадлежит $S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$, и систему (8.4) можно записать в следующем, эквивалентном, виде:

$$\dot{x} = \langle \mu_j(t, \omega), f(t, x, v(t, \omega), u) \rangle. \tag{8.19}$$

Система (8.19) относительно новой переменной $z \doteq x(t, \omega) - x$ запишется в виде

$$\dot{z} = A(t, \omega)z + a(t, \omega, z) + b_j(t, \omega, z),\ t \in \mathbb{R}, \tag{8.20}$$

где

$$\begin{cases} A(t, \omega) \doteq \langle \mu(t, \omega), f'_x(t, x(t, \omega), v(t, \omega), u) \rangle, \\ a(t, \omega, z) \doteq \langle \mu(t, \omega), f(t, x(t, \omega), v(t, \omega), u) - f(t, x(t, \omega) - z, v(t, \omega), u) \rangle - A(t, \omega)z, \\ b_j(t, \omega, z) \doteq \langle \nu_j(t, \omega), f(t, x(t, \omega) - z, v(t, \omega), u) \rangle. \end{cases} \tag{8.21}$$

Далее, для каждой пары $(j, \omega) \in \mathbb{N} \times \Omega$ рассмотрим (см. ограничения на f, условия теоремы 8.1, теорему 3.1 и утверждения в пятом пункте § 2) оператор $\mathfrak{F}_j[\cdot, \omega]\colon B(\mathbb{R}, O_r[0]) \to B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, определенный равенством

$$\mathfrak{F}_j[z(\cdot), \omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s; \omega)[b_j(s, \omega, z(s)) + a(s, \omega, z(s))]ds,\ t \in \mathbb{R}. \tag{8.22}$$

Теперь, используя предельное равенство (8.13) для функции (см. лемму 8.6) $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathcal{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$, определенной равенством (8.14), лемму 8.7 для оператора $L_j[\cdot, \omega]$, заданного равенством (8.16), а также равенство (7.35), в котором (см. (7.33), (7.34)) $\boldsymbol{w}_\gamma^{(1)}(t; f'_x)$, $\boldsymbol{w}_\gamma^{(2)}(t; f)$ определены при $K_r = \mathbb{K}_r$ (см. (8.15)), в точности следуя схеме доказательства теоремы 7.3 (подробнее см. [59]), заменяя константы $\mathfrak{r}_j$ и σ_j на $\tilde{\mathfrak{r}}_j$ и $\tilde{\sigma}_j$, соответственно, получим, что найдутся индекс j_0, константы $\beta > 0$ и $q \in (0, 1)$ такие, что для любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ и всех $j \geqslant j_0$ для оператора $\mathfrak{F}_j[z_1(\cdot), \omega]$, заданного равенством (8.22), будет выполнено неравенство

$$\sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} |\mathfrak{F}_j[z_1(\cdot), \omega](t) - \mathfrak{F}_j[z_2(\cdot), \omega](t)| \leqslant q\|z_1 - z_2\|_C \tag{8.23}$$

и включение $\mathfrak{F}_j[B(\mathbb{R}, O_\beta[0]), \omega] \subset B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$.

Поэтому, по теореме о сжимающем отображении, при каждом $j \geqslant j_0$ и всяком ω из Ω оператор $\mathfrak{F}_j[\cdot, \omega]$ имеет на замкнутом подмножестве $B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ пространства $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ единственную неподвижную точку, то есть для каждого $j \geqslant j_0$ и любого $\omega \in \Omega$ существует единственная функция $z_j(\cdot, \omega) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ такая, что

$$z_j(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s)[a(s, \omega, z_j(s, \omega)) + b_j(s, \omega, z_j(s, \omega))]ds. \tag{8.24}$$

Полученное равенство означает, что $z_j(\cdot, \omega)$ — п. п. по Бору решение системы уравнений (8.20), но тогда функция

$$x_j(\cdot, \omega) = x(\cdot, \omega) - z_j(\cdot, \omega) \tag{8.25}$$

будет п. п. по Бору решением системы (8.19), или, что то же самое, системы (8.4), и так как $\|z_j(\cdot, \omega)\|_C \leqslant \beta < r$ при каждом $j \geqslant j_0$ и любом $\omega \in \Omega$, то $\overline{\mathrm{orb}}(x_j(\cdot, \omega))$ содержится в $\mathcal{K} \doteq \mathbb{K} + O_\beta[0] \subset G$. Первое утверждение теоремы 8.1 доказано.

Наконец, как и в доказательстве теореме 7.3, воспользовавшись равенствами (8.24) и (8.22), леммой 8.7 и неравенством (8.23), получим, что при всех $j \geqslant j_0$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|z_j(\cdot,\omega)\|_C \leqslant (1-4q) \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |I_j(t,\omega)|,$$

где (здесь см. (8.14)) $I_j(t,\omega) \doteq \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle \nu_j(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds$. Отсюда, в силу (8.13), для функции g, заданной равенством (8.14), получаем равенство (8.5).

4. Следующая теорема дополняет утверждения теоремы 8.1. Поэтому ее доказательство рассматриваем как продолжение доказательства теоремы 8.1.

Т е о р е м а 8.2. *Пусть в теореме* 8.1 *отображение* μ *такое, что*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Bigl(\sup\Bigl\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\mu(s,\omega_1)-\mu(s,\omega_2)|(\mathfrak{U})ds,\ \omega_1,\omega_2\in\Omega,\ \rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma\Bigr\}\Bigr)=0. \quad (8.26)$$

Тогда при каждом $j \geqslant j_0$, *где* j_0 *взято из утверждения теоремы* 8.1, *решение* x_j *системы* (8.4) *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для каждого $j \geqslant j_0$ и всех $\omega\in\Omega$ имеет место равенство (8.25), где функция $z_j(\cdot,\omega)\in B(\mathbb{R},O_\beta[0])$ и является решением системы уравнений (8.20), а решение x системы (8.1) принадлежит $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$, то для доказательства теоремы 8.2 достаточно показать, что $z_j\in B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathfrak{r}} \doteq \max(\tilde{\mathfrak{r}}_1,\tilde{\mathfrak{r}}_2),\ \tilde\sigma \doteq \min(\tilde\sigma_1,\tilde\sigma_2),\ \delta(\omega_1,\omega_2) \doteq \|x(\cdot,\omega_1)-x(\cdot,\omega_2)\|_C,$$

$$\mathfrak{q}_\gamma \doteq \sup\Bigl\{\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s;\omega_1)-\mathcal{G}(t,s;\omega_2)|ds,\ (t,\omega_1),(t,\omega_2)\in\mathbb{R}\times\Omega,\ \rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma\Bigr\}$$

и, для заданного $\eta\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, полагаем

$$\boldsymbol{v}_\gamma[\eta,\Omega] \doteq \sup\Bigl\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\eta(s,\omega_1)-\eta(s,\omega_2)|(\mathfrak{U})ds,\ \omega_1,\omega_2\in\Omega.\ \rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma\Bigr\} \quad (8.27)$$

Напомним также, что $\Bbbk>0$ здесь определяется равенством (7.24) при $K=\mathbb{K}_r$.

Фиксируем, далее, произвольное $j\geqslant j_0$ и точки $\omega_1,\omega_2\in\Omega$, такие, что $\rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma$. Учитывая, что $z_j(\cdot,\omega)$ удовлетворяет при каждом $\omega\in\Omega$ равенству (8.24), и множество $\overline{\mathrm{orb}}(z_j(\cdot,\omega))$ содержится в $O_\beta[0]$, получаем при указанных j и $\omega_1,\omega_2\in\Omega$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} |z_j(t,\omega_1)-z_j(t,\omega_2)| \leqslant |\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_1),\omega_1](t)-\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_1](t)|+ \\ +|\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_1](t)-\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_2](t)| \overset{(8.23)}{\leqslant} q\|z_j(\cdot,\omega_1)-z_j(\cdot,\omega_2)\|_C+ \\ +\Bbbk(4+\beta)\mathfrak{q}_\gamma + I_j^{(1)}(t,\omega_1,\omega_2)+I_j^{(2)}(t,\omega_1,\omega_2), \end{cases} \quad (8.28)$$

где

$$I_j^{(1)}(t,\omega_1,\omega_2) \doteq \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s;\omega_2)|\cdot|b_j(s,\omega_1,z_j(s,\omega_2))-b_j(s,\omega_2,z_j(s,\omega_2))|ds,$$

$$I_j^{(2)}(t,\omega_1,\omega_2) \doteq \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s;\omega_2)| \cdot |a(s,\omega_1,z_j(s,\omega_2)) - a(s,\omega_2,z_j(s,\omega_2))|ds.$$

Сейчас, полагая

$$\varphi_j(t,u;\omega_1,\omega_2) \doteq f(t,x(t,\omega_2)-z_j(t,\omega_2),v(t,\omega_1),u) - f(t,x(t,\omega_2)-z_j(t,\omega_2),v(t,\omega_2),u),$$

получим, что

$$|b_j(t,\omega_1,z_j(t,\omega_2)) - b_j(t,\omega_2,z_j(t,\omega_2))| \overset{(8.21)}{\leqslant} |\langle\nu_j(t,\omega_1), f(t,x(t,\omega_1)-z_j(t,\omega_2),v(t,\omega_1),u)\rangle -$$

$$-\langle\nu_j(t,\omega_2), f(t,x(t,\omega_2)-z_j(t,\omega_2),v(t,\omega_1),u)\rangle| + \langle\nu_j(t,\omega_2),\varphi_j(t,u;\omega_1,\omega_2)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \Bbbk|\nu_j(t,\omega_1)-\nu_j(t,\omega_2)|(\mathcal{U}) + 2\boldsymbol{w}^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(t;f) + \langle\nu_j(t,\omega_2),\varphi_j(t,u;\omega_1,\omega_2)\rangle.$$

Далее, обозначив через $w_\gamma(t;g)$ и $w_\gamma(t;g_1)$ γ-колебание на компактном множестве $\Omega\times\mathcal{U}$ непрерывных функций $(\omega,u)\mapsto g(t,\omega,u)$, $(\omega,u)\mapsto g_1(t,\omega,u)$, определенных равенствами (8.14) и (8.17), соответственно, в силу принятых в (8.21) обозначений, получим, что

$$|a(t,\omega_1,z_j(s,\omega_2)) - a(t,\omega_2,z_j(s,\omega_2))| \leqslant \Bbbk(2+\beta)|\mu(t,\omega_1)-\mu(t,\omega_2)|(\mathcal{U}) +$$

$$+\boldsymbol{w}^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(t;f) + w_\gamma(t;g) + \beta w_\gamma(t;g_1) + |\langle\mu(t,\omega_2),\varphi_j(t,u;\omega_1,\omega_2)\rangle.$$

Поэтому (см. обозначение константы c в (7.37) при $\mathfrak{r}_j=\tilde{\mathfrak{r}}_j$ и $\sigma_j=\tilde\sigma_j$, а также обозначение (8.27) при $\eta=\nu_j$ и $\eta=\mu$)

$$I_j^{(1)}(t,\omega_1,\omega_2) + I_j^{(2)}(t,\omega_1,\omega_2) \overset{(8.27)}{\leqslant} c\,\Bbbk\,\boldsymbol{v}_\gamma[\nu_j,\Omega] + c\Bbbk(2+\beta)\boldsymbol{v}_\gamma[\mu,\Omega] +$$

$$+3c\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\boldsymbol{w}^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_2)}(s;f)ds + c\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\big(w_\gamma(s;g)+\beta w_\gamma(s;g_1)\big)ds + +cp(\gamma),$$

где

$$p(\gamma) \doteq \sup_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega\\ \rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma}} \Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{(x,u)\in\mathbb{K}_r\times\mathcal{U}}|f(s,x,v(s,\omega_1),u) - f(s,x,v(s,\omega_2),u)|ds\Big).$$

Обозначив через $\mathfrak{k}$ максимальный из постоянных сомножителей в слагаемых в последнем неравенстве, из (8.28) получим неравенство

$$(1-q)\|z_j(\cdot,\omega_1)-z_j(\cdot,\omega_2)\|_C \leqslant \Bbbk(4+\beta)\mathfrak{q}_\gamma + \mathfrak{k}\Big(\boldsymbol{v}_\gamma[\nu_j,\Omega] + \boldsymbol{v}_\gamma[\mu,\Omega] +$$

$$+p(\gamma) + \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\big(\boldsymbol{w}^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_2)}(s;f) + w_\gamma(s;g) + \beta w_\gamma(s;g_1)\big)ds\Big). \quad (8.29)$$

Теперь, так как $x\in B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$ и $f\in S(\mathbb{R},C(\mathbb{K}_r\times V\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$, а (см. лемму 8.6) $g\in S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$, $g_1\in S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathcal{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, то по лемме 1.3

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega\\ \rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma}}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\big(\boldsymbol{w}^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s;f) + w_\gamma(s;g) + \beta w_\gamma(s;g_1)\big)ds\Big) = 0. \quad (8.30)$$

Далее, поскольку $\nu_j(\cdot,\omega) \doteq \mu(\cdot,\omega) - \delta_{u_j(\cdot,\omega)}$, то, в силу второго утверждения теоремы 3.1 и равенства $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \boldsymbol{v}_\gamma[\mu,\Omega] = 0$, получаем, что при каждом $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \boldsymbol{v}_\gamma[\nu_j,\Omega] = 0. \tag{8.31}$$

Покажем, далее, что

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} p(\gamma) = 0. \tag{8.32}$$

В самом деле, так как $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{K}_r \times V \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n))$, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha_0 > 0$, что (см. обозначение (7.34)) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \boldsymbol{w}^{(2)}_{\alpha_0}(s;f)ds \leqslant \varepsilon/2$. В свою очередь, поскольку $v \in S(\mathbb{R}, C(\Omega, V))$, а $S(\mathbb{R}, C(\Omega, V)) \subset S(\mathbb{R}\times\Omega, V)$, то (см. определение 1.1 и обозначение (1.4)) для константы $\varepsilon_0 = \varepsilon\alpha_0/(4\Bbbk)$ найдется такое $\gamma_0 > 0$, что при каждом $\gamma \in (0,\gamma_0]$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{d}_\gamma[v,\Omega] \leqslant \varepsilon_0$. Поэтому, в силу неравенства

$$p(\gamma) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}^{(2)}_{\alpha_0}(s;f)ds + \frac{2\Bbbk}{\alpha_0}\mathfrak{d}_\gamma[v,\Omega],$$

получаем, что при всех $\gamma \in (0,\gamma_0]$ $\quad p(\gamma) \leqslant \varepsilon$. Тем самым, равенство (8.32) доказано.

Сейчас докажем, что

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{q}_\gamma = 0. \tag{8.33}$$

Для этого докажем сначала (здесь см. обозначение (1.5)), что если $\omega_1, \omega_1 \in \Omega$ такие, что $\rho(\omega_1,\omega_1) \leqslant \gamma$, то для любых точек $t, s \in \mathbb{R}$

$$|\mathcal{G}(t,s;\omega_1) - \mathcal{G}(t,s;\omega_2)| \leqslant \tilde{c}\mathfrak{d}_\gamma[A,\Omega]e^{-\tilde{\sigma}|t-s|}, \quad \tilde{c} \doteq \frac{2\tilde{\mathfrak{r}}^2}{1-e^{-2\tilde{\sigma}}}. \tag{8.34}$$

Действительно, обозначив $\mathcal{A}(\cdot;\omega_1,\omega_2) \doteq A(\cdot,\omega_1) - A(\cdot,\omega_2)$, при $t \leqslant s$ имеем

$$\int_{-\infty}^t |\mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(\xi,s;\omega_2)|d\xi \overset{(8.3)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}}^2 \sum_{i=0}^\infty \int_{t-i-1}^{t-i} e^{-\tilde{\sigma}|t-\xi|}\cdot|\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)|\cdot e^{-\tilde{\sigma}|\xi-s|}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}}^2 \sum_{i=0}^\infty e^{-\tilde{\sigma}(t+s)} \int_{t-i-1}^{t-i} e^{-2\tilde{\sigma}\xi}|\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)|d\xi \leqslant \tilde{c}\mathfrak{d}_\gamma[A,\Omega]e^{\tilde{\sigma}(t-s)},$$

$$\int_t^\infty |\mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(t,\xi;\omega_2)|d\xi \overset{(8.3)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}}^2 \sum_{i=0}^\infty \int_{t+i}^{t+i+1} e^{-\tilde{\sigma}|t-\xi|}\cdot|\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)|\cdot e^{-\tilde{\sigma}|\xi-s|}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}}^2 \sum_{i=0}^\infty e^{-\tilde{\sigma}(t+s)} \int_{s+i}^{s+i+1} e^{-2\tilde{\sigma}\xi}|\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)|d\xi \leqslant \tilde{c}\mathfrak{d}_\gamma[A,\Omega]e^{\tilde{\sigma}(t-s)}.$$

Таким образом, если $-\infty < t \leqslant s < \infty$, то

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(\xi,s;\omega_2)|d\xi \leqslant \tilde{c}\mathfrak{d}_\gamma[A,\Omega]e^{\tilde{\sigma}(t-s)}.$$

Аналогично показываем, что при $-\infty < s \leqslant t < \infty$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(\xi,s;\omega_2)|d\xi \leqslant \tilde{c}\mathfrak{d}_\gamma[A,\Omega]e^{\tilde{\sigma}(s-t)}.$$

Из последних двух неравенств и равенства (см. [97, с. 40])

$$\mathcal{G}(t,s;\omega_1) - \mathcal{G}(t,s;\omega_2) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(\xi,s;\omega_2)|d\xi,$$

справедливого для всех $t,s\in\mathbb{R}$, вытекает неравенство (8.34).

Далее, так как (см. обозначение (8.27) при $\eta=\mu$)

$$\mathfrak{d}_\gamma[A,\Omega] \leqslant \Bbbk\boldsymbol{v}_\gamma[\mu,\Omega] + \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} w_\gamma(s,g_1)ds,$$

где, напомним, через $w_\gamma(s,g_1)$ обозначено γ-колебание на компактном множестве $\Omega\times\mathfrak{U}$ непрерывной функции $(\omega,u)\mapsto g_1(s,\omega,u)$, определенной равенством (8.17), то из (8.26) и (8.30) следует, что $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[A,\Omega]=0$. Откуда, в свою очередь, в силу (8.34) получаем равенство (8.33), которое, совместно с (8.26) и (8.29)–(8.32), влечет следующее предельное равенство

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\bigl(\sup(\|z_j(\cdot,\omega_1)-z_j(\cdot,\omega_2)\|_C,\ \omega_1,\omega_1\in\Omega,\ \rho_\Omega(\omega_1,\omega_1)\leqslant\gamma)\bigr)=0.$$

Последнее означает [187], что отображение $(t,\omega)\mapsto z_j(t,\omega)$ принадлежит $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$.

§9. О свойствах игольчатых вариаций п. п. решений систем управления

Доказан ряд свойств п. п. по Бору решений $x(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ системы дифференциальных уравнений $\dot{x}=\langle\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f(t,x,w(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,),u)\rangle$, где $(w(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))$ — п. п. вариация, отвечающая заданной паре $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$.

1. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, и дифференцируемое по x и v в каждой точке $(t,x,v,u)\in\mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}$ отображение $(t,x,v,u)\mapsto f(t,x,v,u)\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию:

1) для любых заданных $K\in\mathrm{comp}(G)$ и $V\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ $\quad f\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, $f'_x\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$, $f'_v\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)))$ и выполнено свойство (7.22).

Фиксируем, сейчас, множество $\mathfrak{S}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ и при $(v(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ рассмотрим п. п. по Степанову систему уравнений

$$\dot{x}=\langle\mu(t),f(t,x,v(t),u)\rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} f(t,x,v(t),u)\mu(t)(du),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G. \qquad (9.1)$$

В дальнейшем всякий набор $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, в котором $x(\cdot)$ — такое п. п. по Бору решение системы (9.1), отвечающее паре $(v(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, что $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$, называем *допустимым управляемым процессом.* Совокупность допустимых управляемых процессов системы (9.1) обозначим D_c.

Покажем, что каждому набору из D_c можно поставить в соответствие определенную последовательность допустимых наборов — п. п. вариаций, отвечающих этому набору. В самом деле, пусть $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$. Выберем $r > 0$ такое, что компактное множество $K_r \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_r[0] \subset G$, и далее не оговаривая, предполагаем, что отвечающая этому набору система (7.24) допускает э.д., и для нее сохраняем обозначения, входящие в определение э. д. системы (7.1) с матрицей $A(t) = \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle$. Сейчас, допустимому набору $(\vec{\iota}, \vec{h}(\cdot), \{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty})$, то есть (см. § 4) такому набору, в котором $\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ такое, что $\beta(\vec{\iota}) > 0$, $\vec{h}(\cdot) \doteq (h_{\mathfrak{q}}(\cdot))_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, где $h_{\mathfrak{q}}(\cdot)$ принадлежат касательному конусу Кларка $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, и $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota})]$, $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$, поставим в соответствие (см. определение 4.2) совокупность последовательностей

$$\big\{\{(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty},\ \vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\big\} \subset \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1,$$

состоящую из п. п. вариаций для $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$. По следствию 4.1 отображение $(t, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}) \mapsto \mu(t; \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, определенное равенством (4.1) принадлежит (см. определение (1.1)) множеству функций $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, где $\mathfrak{X} \doteq [0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota})] \times \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ — компактное относительно метрики $\rho_{\mathfrak{X}}((\varepsilon_1, \vec{\mathfrak{y}}_1), (\varepsilon_2, \vec{\mathfrak{y}}_2)) \doteq |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\vec{\mathfrak{y}}_1 - \vec{\mathfrak{y}}_2|$ пространство. Поэтому (см. теорему 1.1) множество $\{\mu(\cdot; \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\ (\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{X}\} \subset \mathrm{APM}_1$ и равностепенно п. п. Далее, так как $d(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \widehat{v}(\cdot)) \leqslant \|w(\cdot, \varepsilon_p) - \widehat{v}(\cdot)\|_C$, то (см. (4.19) и (4.33))

$$\lim_{p\to\infty}\big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} d(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \widehat{v}(\cdot)) + \sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(\cdot)\|_w\big) = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы 7.3, найдется такое $\widehat{p}_1 \in \mathbb{N}$, что при каждом $p \geqslant \widehat{p}_1$ и любом $\vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ п. п. по Степанову система

$$\dot{x} = \langle \mu(t; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f(t, x, w(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), u)\rangle,\ (t, x) \in \mathbb{R} \times G \tag{9.2}$$

имеет п. п. по Бору решение $x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})) \subset K_r$ и

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\vartriangle x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C\Big) = 0,\ \vartriangle x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) \doteq \widehat{x}(\cdot) - x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) \tag{9.3}$$

(здесь $\|\cdot\|_C \doteq \|\cdot\|_{C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}$). При этом, функция $\vartriangle x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ является решением системы уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + h_1(t; z) + h_2(t; \varepsilon_p, z) + h_3(t; \varepsilon_p, z), \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{9.4}$$

где (здесь см. (4.29))

$$\begin{cases} h_1(t; z) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), f(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u) - f(t, \widehat{x}(t) - z, \widehat{v}(t), u)\rangle - A(t)z, \\ h_2(t; \varepsilon_p, z) \doteq \langle \vartriangle\mu(t; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f(t, \widehat{x}(t) - z, \widehat{v}(t), u)\rangle, \\ \vartriangle\mu(t; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) \doteq \widehat{\mu}(t) - \mu(t; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \\ h_3(t; \varepsilon_p, z) \doteq \langle \mu(t; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f(t, \widehat{x}(t) - z, \widehat{v}(t), u) - f(t, \widehat{x}(t) - z, w(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), u)\rangle. \end{cases} \tag{9.5}$$

Таким образом, действительно, каждому набору $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$ при любом $\mathfrak{y}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ отвечает последовательность

$$\big\{\big(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,),w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)\big)\big\}_{p\geqslant\widehat{p}_1}, \tag{9.6}$$

составленная из п. п. вариаций этого набора, содержащуюся в D_c.

В следующих пунктах приведем ряд свойств указанной последовательности (9.6), которую называем *последовательностью п. п. вариаций, отвечающую допустимому набору* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$.

2. Здесь исследуем свойства последовательности $\{\varepsilon_p^{-1}\vartriangle x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)\}_{p\geqslant\widehat{p}_1}$, отвечающей параметру $\vec{\mathfrak{y}}$, принадлежащему (см. (4.26)) множеству $\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$.

Л е м м а 9.1. *Существует такое $\widehat{p}_2\geqslant\widehat{p}_1$, что*

$$\sup\big\{\varepsilon_p^{-1}\|\vartriangle x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)\|_C,\ p\geqslant\widehat{p}_2,\ \vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\big\}\doteq\varkappa<\infty. \tag{9.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при $p\geqslant\widehat{p}_2$ функция $\vartriangle x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)$ является решением системы уравнений (9.4), то (см. обозначения (9.5))

$$\varepsilon_p^{-1}\vartriangle x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)=J^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})+J_1^{(2)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-J_2^{(2)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})+V(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}), \tag{9.8}$$

где

$$J^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s),\int_0^1(f'_x(s,\widehat{x}(s)-\theta\vartriangle x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,),\widehat{v}(s),u)-$$
$$-f'_x(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u))d\theta\rangle\varepsilon_p^{-1}\vartriangle x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)ds,$$

$$J_i^{(2)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\frac{1}{\varepsilon_p}\int_{\mathfrak{s}_i(t)}P_i(t,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,),f(s,x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,),\widehat{v}(s),u)\rangle ds,\ i=1,2,$$

$$V(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,),\int_0^1f'_v(s,x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)d\theta\rangle\eta_p(s,\vec{\mathfrak{y}})ds, \tag{9.9}$$

и где, в свою очередь, $\mathfrak{s}_1(t)\doteq(-\infty,t]$, $\mathfrak{s}_2(t)\doteq[t,\infty)$, а

$$w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\widehat{v}(s)+\theta(w(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-\widehat{v}(s)),\quad\eta_p(s,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\varepsilon_p^{-1}(w(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-\widehat{v}(s)). \tag{9.10}$$

Далее, так как при каждом $m\in\mathbb{Z}$ и всяком $\varepsilon\in[0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota}\,))$ (см. (4.14) и (4.18))

$$\mathbb{I}_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\{t\in[ma,(m+1)a]:\ \widehat{\mu}(t)\neq\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)\}=\bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,), \tag{9.11}$$

то (см. (4.11) и (4.16) при $\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\subset\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$)

$$\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\big(\sup_{m\in\mathbb{Z}}(\operatorname{mes}\mathbb{I}_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}))\big)\leqslant\rho\beta(\vec{\iota}\,)\,\varepsilon. \tag{9.12}$$

Поэтому, представив каждое $t\in\mathbb{R}$ в виде $t=m_ta+\theta_ta$, где $m_t\in\mathbb{Z}$, $\theta_t\in[0,1)$, получим, что при каждом $i=1,2$ для всех $\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$

$$|J_i^{(2)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|\overset{(7.2)}{\leqslant}\frac{4\mathfrak{r}_i\Bbbk}{\varepsilon_p(1-e^{-a\sigma_i})}\sup_{m\in\mathbb{Z}}\big(\operatorname{mes}\mathbb{I}_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\big)\overset{(9.12)}{\leqslant}\frac{4\mathfrak{r}_i\beta(\vec{\iota}\,)}{1-e^{-a\sigma_i}}\,\Bbbk,$$

где (см. (7.22)) здесь и далее, $\Bbbk \doteq \Bbbk(K_r, V)$, а компактное множество $V \subset \mathbb{R}^k$ задано равенством (4.27). При этом V, используя обозначение (7.33) при $g = f'_x$ и неравенства (7.2) получим, что

$$|J^{(1)}(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}})| \leqslant c \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+a} \boldsymbol{w}^{(1)}_{\xi(p)}(s; f'_x)\, ds\, \varepsilon_p^{-1} \|\, \triangle x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C,$$

где

$$\xi(p) \doteq \sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\, \triangle x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C,$$

а константа $c = c(a)$ задается равенством (7.37). Сейчас из (9.8), в силу последних двух неравенств, имеем неравенство

$$\big(1 - c \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+a} \boldsymbol{w}^{(1)}_{\xi(p)}(s; f'_x)\, ds\big)\, \varepsilon_p^{-1} \|\, \triangle x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C \leqslant 4c\Bbbk\beta(\vec{\iota}) + V(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}). \tag{9.13}$$

Далее, докажем равенство

$$\lim_{p\to\infty} \big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} (\|y(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}\,) - V(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,)\|_C\big) = 0, \tag{9.14}$$

в котором (п. п. по Бору) функция $t \mapsto y(t, \vec{\mathfrak{y}}\,)$ совпадает с

$$y(t; h(\cdot)) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s) \langle \widehat{\mu}(s), f'_v(s, \widehat{x}(s), \widehat{v}(s), u)\rangle h(s)\, ds, \tag{9.15}$$

при $h(\cdot) = h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}\,) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, где $h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}\,)$ определено в (4.26). Действительно,

$$V(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,) \overset{(9.9)}{=} \sum_{i=1}^{4} V_i(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}),$$

где (см. обозначения (9.10))

$$V_1(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,) \doteq -\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s) \langle \triangle\mu(s; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \int_0^1 f'_v(s, x(s; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), w(s, \varepsilon_p, \theta, \vec{\mathfrak{y}}), u) d\theta\rangle\, \eta_p(s, \vec{\mathfrak{y}}\,) ds,$$

$$\begin{aligned} V_2(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s) \langle \widehat{\mu}(s), \int_0^1 \big(f'_v(s, \widehat{x}(s) - \triangle x(s; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), w(s, \varepsilon_p, \theta, \vec{\mathfrak{y}}\,), u) - \\ - f'_v(s, \widehat{x}(s), w(s, \varepsilon_p, \theta, \vec{\mathfrak{y}}\,), u)\big)\, d\theta\rangle \eta_p(s, \vec{\mathfrak{y}}\,)\, ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s) \langle \widehat{\mu}(s), \int_0^1 \big(f'_v(s, \widehat{x}(s), w(s, \varepsilon_p, \theta, \vec{\mathfrak{y}}\,), u) - \\ f'_v(s, \widehat{x}(s), \widehat{v}(s), u)\big)\, d\theta\rangle \eta_p(s, \vec{\mathfrak{y}}\,)\, ds, \end{aligned}$$

$$V_4(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s) \langle \widehat{\mu}(s), f'_v(s, \widehat{x}(s), \widehat{v}(s), u)\rangle \eta_p(s, \vec{\mathfrak{y}}\,)\, ds.$$

Покажем, что

$$\lim_{p\to\infty} \big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} (\|V_i(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}})\|_C)\big) = 0,\ \ i = 1, 2, 3. \tag{9.16}$$

Для доказательства (9.16) при $i=1$ докажем, сначала, неравенство (см. (9.11))

$$|V_1(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})| \leqslant 4c\,\|\eta_p(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}_0(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})} F(s+ma)ds,$$

где $F(t) \doteq \underset{(x,v,u)\in K_r\times V\times\mathcal{U}}{\mathrm{maximum}} |f'_v(t,x,v,u)|$. В самом деле, при $l=1,2$ рассмотрим

$$V_1^{(l)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq \int_{\mathfrak{s}_l(t)} P_l(t,s)\langle \triangle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \int_0^1 f'_v(s,x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)d\theta\rangle \eta_p(s,\vec{\mathfrak{y}})ds.$$

Представив каждое t в виде $t=m_ta+\theta_ta$, где $m_t\in\mathbb{Z}$, $\theta_t\in[0,1)$, и обозначив $n_t \doteq m_t+m$, $m\in\mathbb{Z}$, получим следующие соотношения:

$$|V_1^{(2)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})| \overset{(7.2)}{\leqslant} \mathfrak{r}_2\|\eta_p(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\sigma_2 ma}\int_{t+ma}^{t+(m+1)a} |\langle\triangle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \int_0^1 f'_v(s,x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)d\theta\rangle|ds \leqslant$$

$$\overset{(4.18),(9.11)}{\leqslant} 2\mathfrak{r}_2\|\eta_p(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}\,)\|_C \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\sigma_2 ma}\Big\{\int_{\mathbb{I}_{n_t}(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})} F(s)ds +$$

$$+\int_{\mathbb{I}_{n_t+1}(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})} F(s)ds\Big\} \leqslant \frac{4\mathfrak{r}_2\|\eta_p(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}\,)\|_C}{1-e^{-\sigma_2 a}} \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}_0(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})} F(s+ma)ds.$$

Поскольку для $|V_1^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|$ имеют место аналогичные соотношения, то из неравенства $|V_1(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})| \leqslant |V_1^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})| + |V_1^{(2)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|$ получаем нужное неравенство.

Далее, поскольку $\|\widehat{v}-v_p\|_C \leqslant \varepsilon_p^{-2}$, то (см. (9.10), а также (4.26), (4.27))

$$\|\eta_p(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}\,)\|_C \leqslant \varepsilon_p + \|h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\rho,\vec{\iota}) + \sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C + \rho\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \|h_{\mathfrak{q}}(\cdot)\|_C. \quad (9.17)$$

Отсюда, в силу (4.28) и полученной оценки сверху для $|V_1(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|$, принимая во внимание неравенство (9.12), по лемме 7.4 получаем (9.16) при $i=1$.

Используя рассуждения, приведенные для оценки $|V_1(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|$, получим (см. обозначения (7.33) и (7.34) при $g=f'_v$), что

$$|V_l(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})| \leqslant c\|\eta_p(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+a} \boldsymbol{w}^{(l-1)}_{\xi^{(l)}(p)}(s;f'_v)ds,\ \ l=2,3,$$

где $\xi^{(2)}(p)=\xi(p)$, $\xi^{(3)}(p) \doteq \sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - \widehat{v}(\cdot)\|_C$. Из последних двух неравенств, в силу леммы 1.3, учитывая (9.17), (4.33), а также (9.17) получаем (9.16) при $l=2,3$. Наконец, поскольку

$$|V_4(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - y(t,\vec{\mathfrak{y}})| \leqslant c\,d(F(\cdot),0)\|\eta_p(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}\,) - h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C,$$

то (см. (9.10) и (4.30)) $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|V_4(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\big)=0$. Последнее равенство, совместно с (9.16), влечет (9.14).

Завершим доказательство леммы 9.1. Используя лемму 1.3 и доказанное равенство (9.14), найдем такое $\widehat{p}_2\geqslant\widehat{p}_1$, что при всех $p\geqslant\widehat{p}_2$ будут выполняться неравенства

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}\boldsymbol{w}^{(1)}_{\xi(p)}(s;f'_x)ds\leqslant 1/(2c),\quad \sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\big(\|y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})-V(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\big)\leqslant c\,\mathbb{k}.$$

Тогда при всех $p\geqslant\widehat{p}_2$ из (9.13), учитывая, что (см. (4.26), (4.27)) $\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C$ не превосходит $c\rho\,\mathbb{k}$, получим неравенство $\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\varepsilon_p^{-1}\|x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C\leqslant 2c\,\mathbb{k}(5+\rho)\doteq\varkappa$.

С л е д с т в и е 9.1. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ p\geqslant\widehat{p}_2}}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\varepsilon_p^{-1}\triangle x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})-\varepsilon_p^{-1}\!\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(\cdot,s)\langle\triangle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),f(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle ds+y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\Big)=0,$$

где $y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})$ *при всех* $\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ *определено равенством* (9.15) *при* $h(\cdot)=h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при $p\geqslant\widehat{p}_2$ функция $\triangle x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ является решением уравнения (9.4), то (см. (9.8) и принятые там обозначения для $J^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})$ и $V(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})$) имеем

$$|\varepsilon_p^{-1}\triangle x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})-\varepsilon_p^{-1}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\triangle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),f(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle ds+y(t,\vec{\mathfrak{y}})|\leqslant$$

$$\leqslant|J^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|+|I_p(t,\vec{\mathfrak{y}})|+|y(t,\vec{\mathfrak{y}})-V(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|,$$

где

$$I_p(t,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\triangle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\int_0^1 f'_x(s,\widehat{x}(s)-\theta\,\triangle x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{v}(s),u)d\theta\rangle\varepsilon_p^{-1}\triangle x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})ds.$$

Поскольку (см. обозначение (7.33) при $g=f'_x$, а также для $\xi(p)$, принятое при доказательстве леммы 9.1)

$$|J^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|+|I_p(t,\vec{\mathfrak{y}})|\overset{\substack{(9.7)\\(9.12)}}{\leqslant}c\,\varkappa\,\mathbb{k}\Big(2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\boldsymbol{w}^{(1)}_{\xi(p)}(s;f'_x)ds+\rho\beta(\vec{\iota})\varepsilon_p\Big),$$

то из предыдущего неравенства, учитывая (9.3), по лемме 1.3 и равенству (9.14), получаем утверждение следствия 9.1.

2. Фиксируем функции $f_{\mathfrak{l}}:\mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям, аналогичным для функции f, и для заданного набора $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$ полагаем

$$\begin{cases}\widehat{f}(t,u)\doteq f(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u),\ \ \widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\doteq f_{\mathfrak{l}}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u),\quad \mathfrak{l}=0,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m},\\ \triangle f(t,\nu)\doteq\langle\widehat{\mu}(t)-\nu,\widehat{f}(t,u)\rangle,\ \ \triangle f_m(t,\nu)\doteq\triangle f(t+ma,\nu),\\ \triangle f_{\mathfrak{l}}(t,\nu)\doteq\langle\widehat{\mu}(t)-\nu,\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle,\ \ \triangle f_{\mathfrak{l},m}(t,\nu)\doteq\triangle f_{\mathfrak{l}}(t+ma,\nu),\\ \psi_{\mathfrak{l}}(t)\doteq\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle,\ \ \psi_{\mathfrak{l},m}(t)\doteq\ \psi_{\mathfrak{l}}(t+ma),\end{cases}\tag{9.18}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$, и чтобы не усложнять обозначений, в дальнейшем для указанных в начале параграфа $K_r \in \operatorname{comp}(G)$ и $V \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$ обозначим

$$\Bbbk \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\Big(\operatorname*{maximum}_{(x,v,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U}} \{|f(t,x,v,u)| + |f'_x(t,x,v,u)| + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} |f_{\mathfrak{l}}(t,x,v,u)|\}\Big). \qquad (9.19)$$

Далее, по следствию 2.3 и лемме 5.2 отображения $(t,u)\mapsto \widehat{f}(t,u)$, $(t,u)\mapsto \widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)$ принадлежат пространствам $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$ и $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, соответственно. Поэтому из теоремы 1.5 и ее следствия 1.8 (здесь см. замечание 1.1, а также обозначение константы σ в (7.4)) получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 9.1. *Существуют такие последовательности* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *и* $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty} \subset [0,a]$, *а также измеримое множество* $\Xi \subset [0,a]$ *полной меры, что* $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$, $\lim\limits_{p\to\infty}\eta_p = 0$, *при каждом* $\vartheta \in \Xi$ *выполнены равенства*

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_p}\int_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})}|\vartriangle f_m(t+\vartheta,\nu) - \vartriangle f_m(\vartheta,\nu)|\,dt\Big) = 0, \qquad (9.20)$$

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-ka\sigma}}{\eta_p}\int_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})}|\vartriangle f_{m+k}(t+\vartheta,\nu) - \vartriangle f_{m+k}(\vartheta,\nu)|\,dt\Big) = 0, \qquad (9.21)$$

и для любой п. п. последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ *существуют пределы*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\vartriangle f_m(\vartheta,\nu(m)), \quad \lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\vartriangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\nu(m)), \quad \mathfrak{l} = 0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}. \qquad (9.22)$$

Кроме того, при каждом $\mathfrak{l} = 0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ *для функций* $\vartriangle f_{\mathfrak{l}}$ *справедливы предельные соотношения, аналогичные* (9.20) *и* (9.21).

Всюду далее предполагаем, что в зафиксированном наборе $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$, фигурирующем в определении п. п. игольчатой вариации для $\widehat{\mu}(\cdot)$ (см. §4), точки ϑ_i принадлежат множеству $\Xi \subset [0,a]$, указанному в теореме 9.1 .

Сейчас для каждого $\iota = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \in \mathcal{V}$ такого, что $\beta(\iota) > 0$, при всех $m \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathfrak{l} = 0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, полагаем

$$L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\iota) \doteq$$
$$\doteq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k_i}\beta_{ij}\int_0^a \psi_{\mathfrak{l},m}(t)\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\mathcal{G}_m(t,\vartheta_i-(k+1)a)\vartriangle f_m(\vartheta_i-(k+1)a,\nu_{ij}(m-(k+1))) +$$
$$+\,\mathcal{G}_m(t,\vartheta_i+ka)\vartriangle f_m(\vartheta_i+ka,\nu_{ij}(m+k))\Big\}\,dt, \qquad (9.23)$$

где $\mathcal{G}_m(\cdot,\cdot) \doteq \mathcal{G}(\cdot+ma,\cdot+ma)$.

Принимая во внимание выбор точек ϑ_i, используя ограниченность на $\mathbb{R}$ (в существенном) п. п. по Степанову функций $\psi_{\mathfrak{l}}$, а также свойства функции Грина (см. §7) и существование пределов, указанных в (9.22), можно доказать существование следующих пределов:

$$\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota) \doteq \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\iota), \ \mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}. \tag{9.24}$$

Кроме того, из существования пределов, указанных в (9.22), следует также, что существуют следующие пределы:

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota) \doteq \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} \vartriangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu_{ij}(m)), \ \mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}. \tag{9.25}$$

Из (9.23) – (9.25) получаем, что для каждого $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ (см. (4.6) – (4.8)) имеют место равенства

$$\begin{cases} L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = \sum\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\iota_{\mathfrak{q}}), \\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = \sum\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota_{\mathfrak{q}}), \ \mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = \sum\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} \mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota_{\mathfrak{q}}). \end{cases} \tag{9.26}$$

Л е м м а 9.2. *Пусть $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ такое, что $\beta(\vec{\iota})>0$ и $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность, указанная в теореме* 9.1. *Пусть, далее, $\varepsilon_p \doteq \eta_p/\rho\beta(\vec{\iota})$ и отображения $\vec{\mathfrak{y}} \mapsto h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, $\vec{\mathfrak{y}} \mapsto y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ заданы равенствами* (4.26) *и* (9.15), *соответственно. Тогда при каждом $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$*

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} |M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)(\varepsilon_p^{-1}\vartriangle x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})+y(t,\vec{\mathfrak{y}}))\} - \mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|\Big)=0, \tag{9.27}$$

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} |\varepsilon_p^{-1} M\{\langle\vartriangle\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\} - \mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|\Big)=0. \tag{9.28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\iota\in\mathcal{V}$ и всех $m\in\mathbb{Z}_+$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon(\iota)]$ обозначим

$$\begin{cases} g(t;\iota,\varepsilon) \doteq \varepsilon^{-1}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon,\iota),\widehat{f}(s,u)\rangle ds, \\ I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\iota,\varepsilon) \doteq \displaystyle\int_{ma}^{(m+1)a} \psi_{\mathfrak{l}}(t) g(t;\iota,\varepsilon)dt - L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\iota). \end{cases} \tag{9.29}$$

Отметим (здесь см. теоремы 4.1 и 7.1), что $g(\cdot;\iota,\varepsilon)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Поскольку при каждом $\mathfrak{n}\in\mathbb{Z}$ и всех $m\in\mathbb{Z}$

$$|\int_{ma}^{(ma+a} \psi_{\mathfrak{l}}(t) g(t;\iota,\varepsilon)dt - \int_{ma}^{(m+1)a} \psi_{\mathfrak{l}}(t+\mathfrak{n}a) g(t+\mathfrak{n}a;\iota,\varepsilon)dt| \leqslant$$

$$\leqslant a\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t;\iota,\varepsilon)| d_a(\psi_{\mathfrak{l}}(\cdot+\mathfrak{n}a),\psi_{\mathfrak{l}}(\cdot)) + a\, d_a(\psi_{\mathfrak{l}}(\cdot),0)\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t+\mathfrak{n}a;\iota,\varepsilon)-g(t;\iota,\varepsilon)|,$$

а функции $g(\cdot;\iota,\varepsilon)$, $\psi_{\mathfrak{l}}(\cdot)$ п. п. по Бору и Степанову, соответственно, то в силу следствия 1.3 получаем, что числовая последовательность

$$\Big\{\int_{ma}^{(m+1)a} \psi_{\mathfrak{l}}(t) g(t;\iota,\varepsilon)dt\Big\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

является п. п., а значит, для нее существует среднее значение [139]. Поэтому (см. обозначение (9.29)), в силу существования предела, указанного в (9.24), для каждого $\iota \in \mathcal{V}$ существует

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \iota, \varepsilon),$$

и, следовательно, аналогичный предел существует и для каждого $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$.

Сейчас докажем, что при

$$\varepsilon_p \doteq \eta_p/\rho\beta(\vec{\iota})$$

имеет место равенства

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \big| \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, \varepsilon_p)\big|\Big) = 0, \ \mathfrak{l} = 0, \dots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}. \tag{9.30}$$

Действительно, из (9.29), (9.26) и (9.23), учитывая (4.13) и (4.14), получаем, что для каждого $\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ такого (здесь см. (4.11), (4.12)), что $\beta(\vec{\iota}) > 0$, при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\vec{\iota}, \rho)]$ и всех $m \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{l} = 0, \dots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, будет выполнено неравенство

$$|I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, \varepsilon)| \leqslant |I_-^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, \varepsilon)| + |I_0^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, \varepsilon)| + |I_+^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, \varepsilon)|,$$

в котором

$$\begin{gathered} I_-^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, \varepsilon) \doteq \\ \doteq \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \int_0^a \psi_{\mathfrak{l},m}(t) \sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_{-(k+1),i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})} P_{1,m}(t,s) \vartriangle f_m(s, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m-(k+1)))\, ds - \\ - \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} \beta_{ij}^{\mathfrak{q}} P_{1,m}(t, \vartheta_i - (k+1)a) \vartriangle f_m(\vartheta_i - (k+1)a, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m-(k+1)))\Big\} dt, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} I_0^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, \varepsilon) \doteq \\ \doteq \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \int_0^a \psi_{\mathfrak{l},m}(t) \Big\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_{0,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})} \mathcal{G}_m(t,s) \vartriangle f_m(s, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))\, ds - \\ - \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} \beta_{ij} \mathcal{G}_m(t, \vartheta_i) \vartriangle f_m(\vartheta_i, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))\Big\}\, dt, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} I_+^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, \varepsilon) \doteq \\ \doteq -\sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \int_0^a \psi_{\mathfrak{l},m}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_{k,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})} P_{2,m}(t,s) \vartriangle f_m(s, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+k))\, ds - \\ - \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} \beta_{ij}^{\mathfrak{q}} P_{2,m}(t, \vartheta_i + ka) \vartriangle f_m(\vartheta_i + ka, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+k))\Big\}\, dt, \end{gathered}$$

где $P_{l,m}(\cdot,\cdot) \doteq P_l(\cdot + ma, \cdot + ma)$, $l = 1, 2$.

Обозначим, далее,

$$J_+(\varepsilon, \vartheta_i) \doteq \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \int_0^{\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})} |P_{2,m}(t, s+\vartheta_i+ka) - P_{2,m}(t, \vartheta_i+ka)| ds \Big\} dt.$$

Учитывая (см. (9.11)), (9.12)), что $\mathrm{mes}\big(\bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\big)\leqslant\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})$ получим (здесь см. (9.18), (9.19) и (7.2), (7.4)) следующие соотношения:

$$|I_{+}^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|\leqslant\mathbb{k}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\int_0^a\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{T_{k,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})}|P_{2,m}(t,s)\vartriangle f_m(s,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+k))-$$

$$-P_{2,m}(t,\vartheta_i+ka)\vartriangle f_m(\vartheta_i+ka,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+k))|\,ds\Big\}dt\leqslant 2\mathbb{k}^2\sum_{i=1}^{N}k_i\,J_{+}(\varepsilon,\vartheta_i)+$$

$$+\mathfrak{r}\,\mathbb{k}\,a\,e^a\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-ka\sigma}}{\varepsilon}\int_{T_{k,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})}|\vartriangle f_{m+k}(s+\vartheta_i,\nu_{ij}(m+k))-$$

$$-\vartriangle f_{m+k}(\vartheta_i,\nu_{ij}(m+k))|ds\leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbb{k}^2\sum_{i=1}^{N}k_i\,J_{+}(\varepsilon,\vartheta_i)+\mathfrak{r}\,\mathbb{k}\,a\,e^a\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{-ka\sigma}}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})}\sup_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}|\vartriangle f_{m+k}(s+\vartheta_i,\nu)-\vartriangle f_{m+k}(\vartheta_i,\nu)|ds.$$

Далее, в силу оценок (7.2) (см. также обозначения (7.3) и (7.4)) при каждом $i=1,\ldots,N$ имеем

$$J_{+}(\varepsilon,\vartheta_i)\leqslant 2a\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})\mathfrak{r}\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-ka\sigma)<\infty.$$

Поэтому, используя неравенство $|P_{2,\tau}(t,s)|\leqslant|X_\tau(t,s)|$, принимая во внимание, что при каждом фиксированном $q\in\mathbb{N}$ $\quad\underset{(t,s)\in\mathbb{R}\times[0,qa]}{\mathrm{supremum}}|X_t(0,s)|\leqslant\exp(\mathbb{k}qa)$ и

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup\big\{|X_t(0,s_1)-X_t(0,s_2)|,\ (t,s_1),(t,s_2)\in\mathbb{R}\times[0,qa],\ |s_1-s_2|\leqslant\gamma\big\}\Big)=0,$$

получим при каждом $i=1,\ldots,N$ равенство

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}J_{+}(\varepsilon,\vartheta_i)=0, \tag{9.31}$$

учитывая которые, в силу приведенных выше соотношений для $|I_{+}^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|$, при $\varepsilon=\varepsilon_p$, используя (9.21), получим, что

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}I_{+}^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota},\varepsilon_p)|\Big)=0. \tag{9.32}$$

Аналогично показываем, что

$$|I_{-}^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|\leqslant 2\mathbb{k}^2\sum_{i=1}^{N}k_i\,J_{-}(\varepsilon,\vartheta_i)+$$

$$+\mathfrak{r}\,\mathbb{k}\,a\,e^a\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{-ka\sigma}}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})}\sup_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}|\vartriangle f_{m-(k+1)}(s+\vartheta_i,\nu)-\vartriangle f_{m-(k+1)}(\vartheta_i,\nu)|ds,$$

где

$$J_-(\varepsilon,\vartheta_i)\doteq\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^a\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\int_0^{\varepsilon\rho\beta(\vec\iota)}|P_{1,m}(t,s+\vartheta_i-(k+1)a)-P_{1,m}(t,\vartheta_i-(k+1)a)|ds\Big\}dt.$$

Рассуждая как и при доказательстве равенств (9.31), убеждаемся, что при каждом $i=1,\dots,N$ $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}J_-(\varepsilon,\vartheta_i)=0$. Поэтому при $\varepsilon=\varepsilon_p$, используя (9.21), получаем, что

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}I_-^{(m,\mathfrak{l})}(\vec\vartheta,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec\iota,\varepsilon_p)|\Big)=0. \tag{9.33}$$

Далее, обозначив

$$\mathfrak{I}^{(m)}(\vec\vartheta,\varepsilon)\doteq a\mathfrak{r}\mathbb{k}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\rho\beta(\vec\iota)}\sup_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathcal{U})}|\vartriangle f_m(s+\vartheta_i,\nu)-\vartriangle f_m(\vartheta_i,\nu)|ds,$$

$$J_0(\varepsilon,\vartheta_i)\doteq\sum_{l=1}^{2}\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^a\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\rho\beta(\vec\iota)}|P_{l,m}(t,s)-P_{l,m}(t,\vartheta_i)|ds\Big)dt,$$

имеем следующие соотношения (напомним (см. (4.12)), что $\varepsilon\in(0,\varepsilon(\rho,\vec\iota)]$):

$$|I_0^{(m,\mathfrak{l})}(\vec\vartheta,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec\iota,\varepsilon)|\leqslant$$

$$\leqslant\mathbb{k}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\int_0^a\Big\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{T_{0,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec\iota)}|\mathcal{G}_m(t,s)\vartriangle f_m(s,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))-$$

$$-\mathcal{G}_m(t,\vartheta_i)\vartriangle f_m(\vartheta_i,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))|ds\Big\}\,dt\overset{(4.16)}{\leqslant}$$

$$\leqslant2\mathbb{k}^2\sum_{i=1}^{N}\int_0^a\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\vartheta_i}^{\vartheta_i+\varepsilon\rho\beta(\vec\iota)}|\mathcal{G}_m(t,s)-\mathcal{G}_m(t,\vartheta_i)|ds\Big)dt+\mathfrak{I}^{(m)}(\vec\vartheta,\varepsilon)=$$

$$=2\mathbb{k}^2\sum_{i=1}^{N}\Big\{\int_0^{\vartheta_i}\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\vartheta_i}^{\vartheta_i+\varepsilon\rho\beta(\vec\iota)}|P_{1,m}(t,s)-P_{1,m}(t,\vartheta_i)|ds\Big)dt+$$

$$+\int_{\vartheta_i}^{\vartheta_i+\varepsilon\rho\beta(\vec\iota)}\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\vartheta_i}^{\vartheta_i+\varepsilon\rho\beta(\vec\iota)}|\mathcal{G}_m(t,s)-\mathcal{G}_m(t,\vartheta_i)|ds\Big)dt+$$

$$+\int_{\vartheta_i+\varepsilon\rho\beta(\vec\iota)}^{a}\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\vartheta_i}^{\vartheta_i+\varepsilon\beta(\vec\iota)}|P_{2,m}(t,s)-P_{2,m}(t,\vartheta_i)|ds\Big)dt\Big\}+\mathfrak{I}^{(m)}(\vec\vartheta,\varepsilon)\leqslant$$

$$\leqslant2\mathbb{k}^2\sum_{i=1}^{N}J_0(\varepsilon,\vartheta_i)+4\varepsilon\beta(\vec\iota)\mathfrak{r}^2\mathbb{k}^2N+\mathfrak{I}^{(m)}(\vec\vartheta,\varepsilon).$$

Откуда, в силу (9.20) и (см. доказательство равенств (9.31)) того, что $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}J_0(\varepsilon,\vartheta_i)=0$, при $\varepsilon=\varepsilon_p$ следует равенство

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}I_0^{(m,\mathfrak{l})}(\vec\vartheta,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec\iota,\varepsilon_p)|\Big)=0,$$

из которого, совместно с (9.32), (9.33) получаем (9.30).

Теперь из соотношений (здесь см. (9.26) и обозначения (9.24) и (9.18))

$$|M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)\big(\varepsilon_p^{-1}\,\triangle x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})+y(t,\vec{\mathfrak{y}})\big)\}-\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\int_{ma}^{(m+1)a}|\psi_{\mathfrak{l}}(t)|\cdot|\varepsilon_p^{-1}\,\triangle x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})-$$

$$-\varepsilon_p^{-1}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\triangle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{f}(s,u)\rangle ds+y(t,\vec{\mathfrak{y}})|dt+|\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota},\varepsilon_p)|\overset{(9.19)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \Bbbk\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\varepsilon_p^{-1}\,\triangle x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})-\varepsilon_p^{-1}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(\cdot,s)\langle\triangle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{f}(s,u)\rangle ds\|_C+$$

$$+\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota},\varepsilon_p)|,$$

в силу следствия 9.1 и (9.30), получаем, что при $\varepsilon_p\doteq\eta_p/\rho\beta(\vec{\iota})$ справедливо предельное равенство (9.27).

Далее, так как

$$|\varepsilon_p^{-1}M\{\langle\triangle\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}-\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|\overset{(4.18),(9.25)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\frac{1}{\varepsilon_p}\int_{T_{0,i,j}(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})}|\triangle f_{\mathfrak{l},m}(t+\vartheta_i,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))-\triangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))|dt\overset{(4.10)-(4.16)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\rho\beta(\vec{\iota})\sum_{i=1}^{N}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_p}\int_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}|\triangle f_{\mathfrak{l},m}(t+\vartheta_i,\nu)-\triangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu)|dt,$$

то из (9.21) получаем (9.28).□

Сейчас, используя (9.15), (9.24) и (9.25), каждой паре $(\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ поставим в соответствие

$$y_{\mathfrak{l}}(t;h(\cdot))\doteq\langle\widehat{\mu}(t),f'_{\mathfrak{l}v}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle h(t),\tag{9.34}$$

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))\doteq\ -\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota)-\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota)+M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)y(t;h(\cdot)\}+M\{y_{\mathfrak{l}}(t;h(\cdot))\},\tag{9.35}$$

и введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{K}(\vec{\vartheta})\doteq\{(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))),\ (\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\}\subset\mathbb{R}^{1+\mathfrak{l}+\mathfrak{m}}.\tag{9.36}$$

Учитывая, как отмечалось в четвертом параграфе, что $\mathcal{V}$ является выпуклым конусом, а $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ — выпуклый конус с вершиной в нуле, и при этом для каждого $\iota_0\doteq\{(\vec{0}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$ точка $(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\iota_0,0),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\iota_0,0))$ — нуль пространства $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, то получаем, что $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ — выпуклый конус с вершиной в нуле. В следующем параграфе укажем другие свойства конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$. В заключение же настоящего параграфа укажем одно свойство компонент $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))$, входящих в его определение.

3. В силу ограничений, наложенных на функции $f_\mathfrak{l}:\mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, на D_c при каждом $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ корректно определены функционалы

$$(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\mapsto\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\doteq M\{\langle\mu(t),f_\mathfrak{l}(x(t),v(t),u)\rangle\}. \tag{9.37}$$

Напомним, что в D_c определена совокупность последовательностей (9.7) п. п. вариаций, отвечающая заданному набору $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$. В дальнейшем эту совокупность рассматриваем при ε_p, указанном в лемме 9.2.

Л е м м а 9.3. *При каждом* $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$

$$|\varepsilon_p^{-1}(\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}},\vec{\iota}),w(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))-\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))-$$
$$-\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota},h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}))|\underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows}0 \text{ при } p\to\infty. \tag{9.38}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (9.37), при всех $p\geqslant\widehat{p}_2$, $\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ и каждом $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ справедливо равенство

$$\varepsilon_p^{-1}(\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}},\,\vec{\iota}),w(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))-\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))=\mathfrak{T}_\mathfrak{l}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,)+\mathfrak{T}_\mathfrak{l}^{(2)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,),$$

в котором

$$\mathfrak{T}_\mathfrak{l}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,)\doteq M\{\langle\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),f_\mathfrak{l}(t,x(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{v}(t),u)-\widehat{f}_\mathfrak{l}(t,u)\rangle\},$$

$$\mathfrak{T}_\mathfrak{l}^{(2)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,)\doteq M\{\langle\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),f_\mathfrak{l}(t,x(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),u)-f_\mathfrak{l}(t,x(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{v}(t),u)\rangle\}.$$

В свою очередь, используя обозначения (9.3) и (9.18)), имеем

$$\mathfrak{T}_\mathfrak{l}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,)=-\varepsilon_p^{-1}M\{\langle\triangle\,\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{f}_\mathfrak{l}(t,u)\rangle\}-\varepsilon_p^{-1}M\{\psi_\mathfrak{l}(t)\triangle\,x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\}+\mathbb{I}_\mathfrak{l}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,),$$

где

$$\mathbb{I}_\mathfrak{l}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,)\doteq-\varepsilon_p^{-1}M\{\langle\triangle\,\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\;f_\mathfrak{l}(t,x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{v}(t),u)-\widehat{f}_\mathfrak{l}(t,u)\rangle\}-$$
$$-\varepsilon_p^{-1}M\{\langle\widehat{\mu}(t),\int_0^1(f'_{\mathfrak{l}x}(t,\hat{x}(t)-\theta\triangle\,x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{v}(t),u)-\widehat{f}'_{\mathfrak{l}x}(t,u))\,d\theta\rangle\triangle\,x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\}.$$

Так как (см. (4.18), (4.16) и обозначение (7.33) при $g=f'_{\mathfrak{l}x}$, а также (9.7))

$$|\mathbb{I}_\mathfrak{l}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,)|\leqslant\frac{\varkappa}{a}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}\boldsymbol{w}_{\xi(p)}(s;f'_{\mathfrak{l}x})ds+2\varkappa\rho\beta(\vec{\iota})\Bbbk\varepsilon_p,$$

где $\xi(p)\doteq\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\triangle x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C$, то из ограничений на $f_\mathfrak{l}$, в силу леммы 1.3, учитывая (9.3), получаем, что

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\widetilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\mathbb{I}_\mathfrak{l}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,)|)=0,$$

и, значит,

$$|\mathfrak{T}_\mathfrak{l}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,)+\mathfrak{b}_\mathfrak{l}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})+\mathfrak{c}_\mathfrak{l}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})-M\{\psi_\mathfrak{l}(t)y(t;h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}))\}|\underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows}\text{ при } p\to\infty.$$

Далее, так как (см. обозначение в (9.10),

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(2)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,) = M\{\langle\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,), \int_0^1 f'_{\mathfrak{w}}(t, x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,), w(t,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}), u)d\theta\rangle\eta_p(t,\vec{\mathfrak{y}}\,)\},$$

то, в силу леммы 4.4, следуя схеме доказательства равенства (9.14)), получим, что

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(2)}(p,\vec{\mathfrak{y}}\,) \underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} M\{\langle\widehat{\mu}(t), f'_{\mathfrak{w}}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle h(t)\} \text{ при } p\to\infty.$$

Из последних двух предельных соотношений, учитывая (9.34), (9.35), получаем предельное соотношение (9.38).□

Доказанные утверждения, в силу замечания 4.2, справедливы для всякого фиксированного набора $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$ точек $\vartheta_i \in \Xi, \quad i = 1,\ldots,N$, допускающих совпадение. Поэтому в дальнейшем, при ссылке на соответствующий результат, предполагается, что в зафиксированном наборе $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$ точки (см. теорему 9.1) $\vartheta_i \in \Xi, \quad i = 1,\ldots,N$ такие, что $0 \leqslant \vartheta_1 \ldots \leqslant \vartheta_N < a$.

Глава 4. Необходимые условия оптимальности в задаче управления почти периодическими движениями

Здесь доказаны необходимые условия решения в ослабленном смысле задачи оптимального управления п. п. движениями при наличии ограничений на средние значения в виде равенств и неравенств. Доказательству этих условий, их следствий, а также свойствам функции Понтрягина этой задачи посвящен § 11. В этом же параграфе для ряда задач оптимального управления п. п. движениями приводятся достаточные условия оптимальности. Доказательство необходимых условий решения в ослабленном смысле опирается на ряд свойств конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ и вытекающие из них следствия, которые доказаны в § 10. В последнем, двенадцатом параграфе главы рассматривается задача оптимального управления п. п. движениями линейной системы с квадратичным функционалом качества, определена задача оптимального управления периодическими движениями в постановке, которая будет использована в следующей главе, и приведены примеры, иллюстрирующие целесообразность расширения множества допустимых периодических процессов в задаче оптимального управления периодическими движениями до почти периодических процессов.

§10. Задача оптимального управления п. п. движениями

В этом параграфе сформулирована задача оптимального управления п. п. движениями при наличии ограничений на средние значения типа равенств и неравенств. Доказаны важное в дальнейшем свойство конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, а также ряд вытекающих из этого свойства следствий.

1. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющую условию 1), приведенному в начале § 9, а также функции $f_{\mathfrak{l}} : \mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}$, $\mathfrak{l} = 0,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, удовлетворяющие условию, аналогичному для f. Далее, рассмотрим систему (9.1) и при каждом $\mathfrak{l}$ на множестве $D_c \subset B(\mathbb{R}, G)\times\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ управляемых процессов этой системы зададим функционал $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \mapsto \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot))$, определенный равенством (9.37). Теперь в D_c выделим подмножество $\mathfrak{D}_c$, состоящее из таких наборов $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c$, что $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \leqslant 0$ при $\mathfrak{l} = 1,\dots,\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) = 0$ при $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}+1,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$.

О п р е д е л е н и е 10.1. Задача

$$\mathfrak{T}_0(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf,\ (x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c \tag{10.1}$$

называется *задачей оптимального управления п. п. движениями при наличии ограничений на средние значения типа равенств и неравенств.* Набор $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$, принадлежащий $\mathfrak{D}_c$, называется решением этой задачи, если для всех $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot))$ из $\mathfrak{D}_c$ выполнено неравенство $\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}_0(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot))$.

З а м е ч а н и е 10.1. Как было отмечено во втором параграфе, отображение $u(\cdot) \mapsto \delta_{u(\cdot)} \in \mathrm{APM}_1^{(1)}$, $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, где подмножество $\mathrm{APM}_1^{(1)}$ из APM_1 задается равенством (2.4), устанавливает взаимно однозначное соответствие (при котором $\mathrm{Mod}(u(\cdot)) = \mathrm{Mod}(\delta_{u(\cdot)})$) между множествами $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ и $\mathrm{APM}_1^{(1)}$. Поэтому множество

$$D \doteq \{(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) : (x(\cdot), v(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in D_c\}$$

будет множеством управляемых процессов п. п. по Степанову системы уравнений $\dot{x} = f(t, x, v(t), u(t))$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times G$, в которой параметр $v(\cdot) \in \mathfrak{S}$, а управление $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$. Далее, так как для всякого набора $(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in D$

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \overset{(9.37)}{=} M\{f_{\mathfrak{l}}(x(t), v(t), u(t))\} \doteq I_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)), \tag{10.2}$$

то задача (10.1) является расширением (или овыпукленной задачей) следующей задачи оптимального управления п. п. движениями

$$I_0(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \to \inf, \ (x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{D}, \tag{10.3}$$

определенной на множестве

$$\mathfrak{D} \doteq \{(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) : (x(\cdot), v(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in \mathfrak{D}_c\}.$$

Отметим также, что теоремы 3.1 и 8.2 указывают условия, при которых расширение задачи (10.3) до задачи (10.1) корректно, в том смысле, что когда для каждого набора $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ найдется последовательность $\{(x_j(\cdot), v(\cdot), u_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}$, при которой выполняется равенство $\lim\limits_{j\to\infty} I_{\mathfrak{l}}(x_j(\cdot), v(\cdot), u_j(\cdot)) = \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot))$, и следующий несложный пример указывает на целесообразность такого расширения.

П р и м е р 10.1. Пусть $\mathfrak{U} \doteq [-1, 1]$, $a \in C(\mathfrak{U}, (0, \infty))$, $b \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$. Поскольку для каждого $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ $M\{a(u(t))\} > 0$, то (см. [97, с. 43], а также [194]) уравнение $\dot{x} = a(u(t))x - b(u(t))$ имеет единственное п. п. по Бору решение $x(\cdot) = x(\cdot\,; u(\cdot))$ и, значит, множество $D \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ управляемых процессов этого уравнения не пусто. При этом $x(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$ в том и только в том случае, если $b(u(t)) = 0$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Фиксируем, далее, функцию $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ такую, что в некоторой точке $u^* \in \mathfrak{U}$, принадлежащей множеству $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{U}$ ее максимумов, $c(-u^*) = c(u^*)$, и будем предполагать, что $\mathfrak{m} \cap \ker b = \emptyset$ и $b(-u^*) = -b(u^*)$. Рассмотрим, сейчас, следующую задачу: $I_0(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{x(t)b(u(t)) - c(u(t))\} \to \inf$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in D$. Поскольку $\mathfrak{m} \cap \ker b = \emptyset$ и $M\{x(t)b(u(t))\} = M\{x^2(t)a(u(t))\}$ для всех $(x(\cdot), u(\cdot)) \in D$ (здесь мы воспользовались тем, что $M\{\dot{x}(t)x(t)\} = 0$), то $I_0(x(\cdot), u(\cdot)) > -c(u^*)$. Таким образом, данная задача решения не имеет. Овыпуклим эту задачу, то есть рассмотрим задачу: $\mathfrak{T}_0(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), x(t)b(u) - c(u)\rangle\} \to \inf$, в которой $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathrm{APM}_1(\mathfrak{U})$, где $x(\cdot) = x(\cdot\,; \mu(\cdot))$ — п. п. по Бору решение уравнения $\dot{x} = \langle \mu(t), a(u)x - b(u)\rangle$. В силу теоремы 3.1 inf в этой задаче не превосходит $-c(u^*)$, а так как для пары $(0, \widehat{\nu}) \in D_c$, где $\widehat{\nu} \doteq \frac{1}{2}(\delta_{u^*} + \delta_{-u^*})$ (см. ограничения на функции b и c), $\mathfrak{T}_0(0, \widehat{\nu}) = -c(u^*)$, то эта пара является решением овыпукленной задачи для исходной.

В следующем параграфе, используя свойство выпуклости конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ (что составляет одно из преимуществ рассматриваемого множества управлений APM_1 перед управлениями из пространства $S(\mathbb{R},\mathcal{U})$), докажем необходимые условия оптимальности процесса задачи (10.1) в таком виде, чтобы из этих условий следовали необходимые условия для решения задачи (10.3). В связи с этим, по аналогии с определением [31, с. 157] для задачи быстродействия с обобщенными управлениями (мерами), дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 10.2. Набор $(\widehat{x}(\cdot),(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ называется *решением задачи* (10.1) *в ослабленном смысле,* если не существует допустимого процесса $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))$ задачи (10.3), при котором $I_0(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Отметим, что всякое решение задачи (10.1) является одновременно ее решением в ослабленном смысле, и для задачи (10.3) оба этих понятия совпадают.

Далее приведем свойства конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, отвечающего заданному допустимому набору $(\widehat{x}(\cdot),(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ задачи (10.1).

2. Фиксируем набор $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$, составленный из точек $\vartheta_i\in\Xi$, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant\vartheta_1\leqslant\ldots\leqslant\vartheta_N<a$, где измеримое множество $\Xi\subset[0,a]$ указано в теореме 9.1, а также допустимый набор $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$, и рассмотрим отвечающий им конус $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, заданный равенством (9.37). Введем, далее, в рассмотрение проектор $P:\ \mathcal{K}(\vec{\vartheta})\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, определенный для каждой точки $(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\varsigma),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma))\in\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, где, здесь и далее, $\varsigma\doteq(\iota,h(\cdot))$, равенством

$$P\big((\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\varsigma),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}(\vec{\vartheta},\varsigma),\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta},\varsigma),\ldots\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)\big)\doteq\big(\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta},\varsigma),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)\big),\quad(10.4)$$

и рассмотрим также выпуклый в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ конус

$$\mathcal{H}\doteq\{(x_0,\ldots,x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}})\colon\ x_0,\ldots,x_{\mathfrak{k}}<0,\ x_{\mathfrak{k}+1}=\ldots=x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}=0\}.\qquad(10.5)$$

Следующая теорема отражает свойство конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, отвечающее случаю, когда $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$ при всех $\mathfrak{l}=1,\ldots,\mathfrak{k}$.

Т е о р е м а 10.1. *Пусть п. п. по Степанову система уравнений* (7.24), *отвечающая набору* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$, *допускает э. д.*[6]. *Тогда, если* $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})\cap\mathcal{H}\neq\varnothing$ *и* $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta}))=\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, *то найдется такой допустимый набор* $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in\mathfrak{D}$, *что*

$$I_0(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)).\qquad(10.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты обозначений, считаем $\mathfrak{k}=\mathfrak{m}=1$ (какие надо внести изменения в общем случае станет ясно из приводимого ниже доказательства) и полагаем $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\varsigma)\doteq\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\varsigma)$ для всех пар $\varsigma\doteq(\iota,h(\cdot))$, принадлежащих конусу $\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, а также $\mathcal{K}\doteq\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$.

Поскольку $\mathcal{K}\cap\mathcal{H}\neq\varnothing$, то (см. (10.4)) найдется такая пара $\widehat{\varsigma}\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ ($\widehat{\varsigma}\neq\varsigma_0$), что $(\mathfrak{a}_0(\widehat{\varsigma}),\mathfrak{a}_1(\widehat{\varsigma}),\mathfrak{a}_2(\widehat{\varsigma}))\in\mathcal{H}$. Теперь, взяв $\gamma\doteq\min(-(\mathfrak{a}_0(\widehat{\varsigma}),-\mathfrak{a}_1(\widehat{\varsigma}))$, получаем (см. (10.5)), что $\mathfrak{a}_0(\widehat{\varsigma}),\mathfrak{a}_1(\widehat{\varsigma})\leqslant-\gamma$, $\mathfrak{a}_2(\widehat{\varsigma})=0$. Далее, так как в рассматриваемом

[6] Как обычно, для нее сохраняем обозначения, входящие в определение э.д. однородной системы (7.1) с матрицей $A(t)=\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle$.

случае $P(\mathcal{K}) = \mathbb{R}$, то $[-1,1] \subset P(\mathcal{K})$, а значит, найдутся такие $\varsigma_1, \varsigma_2 \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, что $\mathfrak{a}_2(\varsigma_1) = -1$, $\mathfrak{a}_2(\varsigma_2) = 1$. Учитывая (4.2) – (4.5) и (9.35) (см. также (9.24), (9.24)), получаем, что для любого $\varrho > 0$ $\quad \mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1) \leqslant -\gamma + \varrho\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\varsigma_1)$, $\mathfrak{l} = 0, 1$ и $\mathfrak{a}_2(\widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1) = -\varrho$. Поэтому при малых $\varrho > 0$ будем иметь $\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1) \leqslant -\gamma/2$, $\mathfrak{l} = 0, 1$ и $\mathfrak{a}_2(\widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1) = -\varrho$. Зафиксировав такое ϱ, обозначив $\varsigma' \doteq \widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1$, $\rho' \doteq 1/\varrho$, получаем следующие соотношения:

$$\mathfrak{a}_0(\varsigma'),\ \mathfrak{a}_1(\varsigma') \leqslant -\gamma/2,\ \ \rho'\mathfrak{a}_2(\varsigma') = -1. \tag{10.7}$$

Аналогично показываем, что при некоторых $\varsigma'' \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и $\rho'' > 0$

$$\mathfrak{a}_0(\varsigma''),\ \mathfrak{a}_1(\varsigma'') \leqslant -\gamma/2,\ \ \rho''\mathfrak{a}_2(\varsigma'') = 1. \tag{10.8}$$

В дальнейшем при доказательстве рассматриваем симплекс

$$\Lambda^2 \overset{(4.25)}{=} \big\{\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\big\},$$

отвечающую указанным выше константам $\rho', \rho'' \in [0, \rho]$, где $\rho \doteq \max(\rho', \rho'')$, функцию

$$\vec{\lambda} \mapsto \mathfrak{g}(\vec{\lambda}) \overset{(4.26)}{=} (\lambda_1\rho', \lambda_2\rho''),\ \ \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2,$$

и задаем при фиксированных $h'(\cdot), h''(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ отображение

$$\vec{\mathfrak{y}} \mapsto h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}) \overset{(4.26)}{=} \lambda_1\rho' h'(\cdot) + \lambda_2\rho'' h''(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S},\ \ \vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^2 \doteq \mathfrak{g}(\Lambda^2) \subset \Pi^2 \doteq [0, \rho] \times [0, \rho]. \tag{10.9}$$

Кроме того, не оговаривая, считаем, что в указанной в (9.6) последовательности п. п. вариаций, отвечающей набору $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c \subset D_c$,

$$\vec{\iota} \doteq (\iota', \iota'') \in \mathcal{V}^2,$$

где ι', ι'' указаны в (10.7), (10.8), и последовательность $\{w(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}})\}_{p \geqslant \widehat{p}_2} \subset \mathfrak{S}$, определенная равенством (4.29) в лемме 4.4, отвечает $h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, где $\vec{\mathfrak{y}}$ принадлежит множеству $\widetilde{\Pi}^2$, определенному в (10.9).

Рассмотрим, далее, при $p \in \{0, \widehat{p}_2, \dots\}$ отображение $\vec{\mathfrak{y}} \mapsto \varphi_p(\vec{\mathfrak{y}})$, $\vec{\mathfrak{y}} \in \widetilde{\Pi}^2$, заданное равенством

$$\varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}) \doteq \begin{cases} \varepsilon_p^{-1}\mathfrak{T}_2(x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), w(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})),\ \ p \geqslant \widehat{p}_2, \\ \mathfrak{a}_2(\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})),\ \ p = 0, \end{cases} \tag{10.10}$$

а также гомеоморфное отображение $\mathfrak{f} : \Lambda^2 \to [-1, 1]$, определенное для каждого $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2$, равенством $\mathfrak{f}(\vec{\lambda}) \doteq \lambda_2 - \lambda_1$. В силу соотношений, указанных в (10.7), (10.8), получаем, что при всех $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2$

$$\mathfrak{f}(\vec{\lambda}) = \mathfrak{a}_2(\lambda_1\rho'\,\iota' + \lambda_2\rho''\,\iota'').$$

Далее, поскольку $\mathfrak{f}$ является гомеоморфизмом, то определено также непрерывное отображение

$$\alpha \mapsto \mathfrak{f}^{-1}(\alpha) = \vec{\lambda}(\alpha) \doteq (\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)) \in \Lambda^2,\ \ \alpha \in [-1, 1],$$

которое, в свою очередь, определяет непрерывную функцию

$$\alpha \mapsto \vec{\mathfrak{y}}(\alpha) = (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}^{-1})(\alpha) \doteq (\lambda_1(\alpha)\rho', \lambda_2(\alpha)\rho'') \in \widetilde{\Pi}^2, \ \alpha \in [-1,1]. \tag{10.11}$$

Следовательно, для каждого индекса $p \in \{0, \widehat{p}_2, \widehat{p}_2 + 1, \dots\}$ определено отображение $\alpha \mapsto \varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha))$. В силу леммы 9.3 $|\varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}) - \varphi_0(\vec{\mathfrak{y}})| \to 0$ при $p \to \infty$ равномерно по $\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^2$. Поэтому, принимая во внимание (10.10) и (10.11), получаем соотношения:

$$\begin{cases} \alpha - \varphi_0(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)) = 0, \ \alpha \in [-1,1], \\ |\alpha - \varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha))| \underset{\alpha \in [-1,1]}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } p \to \infty. \end{cases} \tag{10.12}$$

Сейчас, для краткости записи, введем, при $p \in \{0, \widehat{p}_2, \widehat{p}_2 + 1, \dots\}$ и $\alpha \in [-1,1]$, следующие обозначения (здесь см. (10.11) и (4.26) для $\vec{\iota} \doteq (\iota', \iota'')$ и $\vec{\mathfrak{y}} \doteq \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)$):

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_0(\cdot, \alpha) \doteq \widehat{x}(\cdot), \quad \nu_0(\cdot, \alpha) \doteq \widehat{\mu}(\cdot), \\ \mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha) \doteq x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\, \vec{\iota}), \quad \nu_p(\cdot, \alpha) \doteq \mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\, \vec{\iota}), \quad w_p(\cdot, \alpha) \doteq w(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)), \\ h(\cdot, \alpha) \doteq h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)) \overset{(10.9)}{\underset{10.11)}{=}} \lambda_1(\alpha)\rho' h'(\cdot) + \lambda_2(\alpha)\rho'' h''(\cdot). \end{cases} \tag{10.13}$$

Таким образом, имеем совокупность

$$\big\{(\mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha), w_p(\cdot, \alpha), \nu_p(\cdot, \alpha)), \ \alpha \in [-1,1], \ p = 0, \widehat{p}_2, \dots, \big\} \subset D_c$$

допустимых наборов системы (9.1), в которой $\nu_p \in S(\mathbb{R} \times [-1,1], \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, последовательность $\{w_p(\cdot, \alpha)\}_{p=\widehat{p}_2}^{\infty} \subset \mathfrak{S}$, отвечающая при каждом $\alpha \in [-1,1]$ вектору $h(\cdot, \alpha) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, такова (см. (10.13) и (4.33)), что

$$\lim_{p \to \infty} \xi_1(p) = 0, \quad \xi_1(p) \doteq \sup_{\alpha \in [-1,1]} \|w_p(\cdot, \alpha) - \widehat{v}(\cdot)\|_C, \tag{10.14}$$

$\mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha)$ — такое п.п. по Бору решение системы

$$\dot{x} = \langle \nu_p(t, \alpha), f(t, x, w_p(t, \alpha), u) \rangle,$$

что $\overline{\mathrm{orb}}(\mathfrak{x}_p(\cdot; \varepsilon, \alpha) - \widehat{x}(\cdot)) \subset O_r[0]$, где $r > 0$ такое, что отвечающее ему компактное множество $K_r \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_r[0] \subset G$, и

$$\lim_{p \to \infty} \xi_2(p) = 0, \quad \xi_2(p) \doteq \sup_{\alpha \in [-1,1]} \|\mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha) - \widehat{x}(\cdot)\|_C. \tag{10.15}$$

Кроме того, с учетом принятых обозначений (10.9) и (10.13), из теоремы 4.1 получаем предельное равенство

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \Big(\underset{\substack{(p, \alpha_l) \in \mathbb{N} \times [-1,1] \\ l=1,2, \ |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant \gamma}}{\mathrm{supremum}} \big(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\nu_p(s, \alpha_1) - \nu_p(s, \alpha_2)|(\mathfrak{U}) ds \big) \Big) = 0, \tag{10.16}$$

а из леммы 4.4 (см. равенство (4.31)), принимая во внимание непрерывность функции $\alpha \mapsto \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)$, заданной равенством (10.11)), получим, что

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{w}_\gamma = 0, \quad \mathfrak{w}_\gamma \doteq \underset{\substack{(p, \alpha_l) \in \mathbb{N} \times [-1,1] \\ l=1,2, \ |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant \gamma}}{\mathrm{supremum}} \|w_p(\cdot, \alpha_1) - w_p(\cdot, \alpha_2)\|_C. \tag{10.17}$$

Из последних двух равенств, в силу теоремы 7.4, следует, что при каждом $p \geqslant \widehat{p}_2$ отображение $(t,\alpha) \mapsto \mathfrak{x}_p(t,\alpha)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathbb{R})$.

Покажем, далее, что
$$\lim_{p\to\infty}\big(\sup_{\alpha\in[-1,1]} I(p,\alpha)\big)=0,$$
где
$$I(p,\alpha) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a} |\langle \nu_p(s,\alpha), f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\alpha),w_p(s,\alpha),u)\rangle - \langle \widehat{\mu}(s), f'_x(s,u)\rangle| ds.$$

Действительно, при любых $p \geqslant \widehat{p}_2$ и $\alpha\in[-1,1]$ $\;I(p,\alpha) \leqslant I_1(p,\alpha)+I_2(p,\alpha)$, где
$$I_1(p,\alpha) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a} |\langle \nu_p(s,\alpha), f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\alpha),w_p(s,\alpha),u) - f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\alpha),\widehat{v}(s),u)\rangle| ds,$$
$$I_2(p,\alpha) \doteq 2\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_{ma}^{(m+1)a} |\langle \nu_p(s,\alpha), f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\alpha),\widehat{v}(s)u)\rangle - \langle \widehat{\mu}(s), f'_x(s,u)\rangle| ds.$$
Сейчас, используя неравенство (см. обозначение в (10.14) и (7.33) при $g = f'_x$)
$$I_1(p,\alpha) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a} \boldsymbol{w}^{(2)}_{\xi_1(p)}(s,f'_x)ds,$$
учитывая равенство (10.14), по лемме 1.3 получаем, что $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\sup\limits_{\alpha\in[-1,1]} I_1(p,\alpha)\big)=0$. Далее, из определения $\vec{\iota} \doteq (\iota',\iota'')$ и отображения $\nu_p(\cdot,\alpha)$ (см. (10.13) и (4.18)) вытекает, что (здесь см. обозначение (7.33) при $g=f'_x$, а также 9.19)
$$I_2(p,\alpha) \leqslant 4\rho\Bbbk\varepsilon_p \sum_{i=1}^N (|\vec{\beta}'_{k'_i}| + |\vec{\beta}''_{k''_i}|) + 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a} \boldsymbol{w}^{(1)}_{\xi_2(p)}(s,f'_x)ds.$$

Отсюда, в силу равенства (10.15), по лемме 1.3 следует, что $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\sup\limits_{\alpha\in[-1,1]} I_2(p,\alpha)\big)=0$. Из последних двух предельных равенств получаем нужное предельное равенство, из которого, в свою очередь, в силу э. д. системы (7.24) и устойчивости этого свойства к малым возмушениям [35] (см. теорему 7.1), следует существование такого индекса $\widehat{p}_3 \geqslant \widehat{p}_2$, что при всех $p \geqslant \widehat{p}_3$ и $\alpha\in[-1,1]$ п. п. по Степанову система уравнений
$$\dot{y} = \langle \nu_p(t,\alpha), f'_x(t,\mathfrak{x}_p(t,\alpha),w_p(t,\alpha),u)\rangle y,\ (t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$
будет э. д. При этом, найдутся такие положительные константы $\tilde{\mathfrak{r}},\tilde{\sigma}$, что для функции Грина $\mathcal{G}(t,s;p,\alpha)$ этой системы, при всех $p \geqslant \widehat{p}_3$ и $\alpha\in[-1,1]$, будет выполняться неравенство
$$|\mathcal{G}(t,s;p,\alpha)| \leqslant \tilde{\mathfrak{r}} e^{-\tilde{\sigma}|t-s|},\ t,s\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, при $p \geqslant \widehat{p}_3$ для рассматриваемого множества допустимых наборов системы (9.1) выполнены условия а) и б) теоремы 8.1 при $\Omega=[-1,1]$. Поэтому, если при этих p для $\nu_p \in S(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$ рассмотреть (см. теорему 3.1) аппроксимирующую его последовательность $\{u_{pj}\}_{j=1}^\infty \subset S(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathcal{U})$, то найдется такое $j_1 = j_1(p)\in\mathbb{N}$, что при каждом $j \geqslant j_1$ и всяком $\alpha\in[-1,1]$ п. п. по Степанову система
$$\dot{x} = f(t,x,w_p(t,\alpha),u_{pj}(t,\alpha)),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G$$

имеет такое п. п. по Бору решение $x_{pj}(\cdot,\alpha)$, что

$$\lim_{j\to\infty}\xi_3(pj)=0,\quad \xi_3(pj)\doteq\sup_{\alpha\in[-1,1]}\|\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha)-x_{pj}(\cdot,\alpha)\|_C, \tag{10.18}$$

причем, $\overline{\mathrm{orb}}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha)-x_{pj}(\cdot,\alpha))$ содержится в $O_{r_1}[0]$, где $r_1>0$ такое, что компактное множество $\mathbb{K}_{\widehat{r}}\doteq K_r+O_{r_1}[0]\subset G$. При этом, по теореме 3.1,

$$\lim_{j\to\infty}\bigl(\sup_{\alpha\in[-1,1]}\|\nu_p(\cdot,\alpha)-\delta_{u_{pj}(\cdot,\alpha)}\|_w\bigr)=0, \tag{10.19}$$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}(\boldsymbol{v}_\gamma[u_{pj},[-1,1]\,])=0, \tag{10.20}$$

где через $\boldsymbol{v}_\gamma[u_{pj},[-1,1]\,]$ обозначена величина $\boldsymbol{v}_\gamma[\delta_{u_{pj}},[-1,1]\,]$, определенная равенством (8.27) при $\eta=\delta_{u_{pj}}$ и $\Omega=[-1,1]$, и, кроме того, для любой функции g, принадлежащей пространству $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$,

$$\lim_{j\to\infty}\bigl(\sup_{\alpha\in[-1,1]}|M\{\langle\nu_p(t,\alpha)-\delta_{u_{pj}(t,\alpha)},g(t,u)\rangle\}|\bigr)=0. \tag{10.21}$$

Укажем, сейчас, индексы $p\geqslant\widehat{p}_3$ и $j\geqslant j_1(p)$, для которых найдется $\alpha_{pj}\in[-1,1]$, такое, что набор $\{(x_{pj}(\cdot,\alpha),w_p(t,\alpha_{pj}),u_{pj}(\cdot,\alpha))$ будет, во-первых, допустимым (см. замечание 10.1) для задачи (10.3) и, во-вторых, обладать свойством, указанным в теореме 10.1 . С этой целью рассмотрим, сначала, для $\mathfrak{l}=0,1$ при $p\geqslant\widehat{p}_3$ (здесь см. обозначения (9.35), (10.11) и (10.13))

$$\begin{aligned}y_p(\alpha)&\doteq\\ &\doteq\bigl|\varepsilon_p^{-1}(\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha),w_p(\cdot,\alpha),\nu_p(\cdot,\alpha))-\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))-\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota},h(\cdot,\alpha))\bigr|+\\ &\qquad+\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota},h(\cdot,\alpha)).\end{aligned} \tag{10.22}$$

В силу (9.38)

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha),w_p(\cdot,\alpha),\nu_p(\cdot,\alpha))-\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\underset{\alpha\in[-1,1]}{\rightrightarrows}\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota},h(\cdot,\alpha))\text{ при }p\to\infty.$$

Поэтому, учитывая, что при всех $\alpha\in[-1,1]$

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota},h(\cdot,\alpha))\overset{(10.7)}{\underset{(10.8)}{=}}\lambda_1(\alpha)\rho'\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\varsigma')+\lambda_2(\alpha)\rho''\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\varsigma'')\leqslant-\frac{\gamma}{2}\min(\rho',\rho''),$$

из (10.12) и указанного предельного соотношения получаем существование такого $\widehat{p}_4\geqslant\widehat{p}_3$, что для каждого $p\geqslant\widehat{p}_4$ будут одновременно выполняться неравенства

$$\sup_{\alpha\in[-1,1]}y_p(\alpha)\leqslant-\frac{\gamma}{4}\min(\rho',\rho''),\qquad\sup_{\alpha\in[-1,1]}|\alpha-\varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha))|\leqslant 1/2. \tag{10.23}$$

Покажем, что при каждом $p\geqslant\widehat{p}_4$

$$\lim_{j\to\infty}\bigl(\sup_{\alpha\in[-1,1]}|\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha),w_p(\cdot,\alpha),\nu_p(\cdot,\alpha))-I_\mathfrak{l}(x_{pj}(\cdot,\alpha),w_p(\cdot,\alpha),u_{pj}(\cdot,\alpha))|\bigr)=0. \tag{10.24}$$

В самом деле, если допустить обратное, то найдутся константа $\gamma > 0$, последовательности $\{j_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [-1,1]$, $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = \widehat{\alpha} \in [-1,1]$ такие, что при каждом $i \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$z_i \doteq \Big|\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha_i), w_p(\cdot,\alpha_i), \nu_p(\cdot,\alpha_i)) - I_{\mathfrak{l}}(x_{pj_i}(\cdot,\alpha_i), w_p(\cdot,\alpha_i), u_{pj_i}(\cdot,\alpha_i))\Big| \geqslant \gamma.$$

С другой стороны, при всех $i \in \mathbb{N}$

$$z_i \leqslant \Big|M\{\langle \nu_p(t,\alpha_i) - \delta_{u_{pj_i}(t,\alpha_i)}, f_{\mathfrak{l}}(t, \mathfrak{x}_p(t,\alpha_i), w_p(t,\alpha_i), u)\rangle\}\Big| +$$

$$+\Big|M\{f_{\mathfrak{l}}(t, \mathfrak{x}_p(t,\alpha_i), w_p(t,\alpha_i), u_{pj_i}(t,\alpha_i)) - f_{\mathfrak{l}}(t, x_{pj}(t,\alpha), w_p(t,\alpha_i), u_{pj_i}(t,\alpha_i))\}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|M\{\langle \nu_p(t,\alpha_i) - \delta_{u_{pj_i}(t,\alpha_i))}, f_{\mathfrak{l}}(t, \mathfrak{x}_p(t,\widehat{\alpha}), w_p(t,\widehat{\alpha}), u)\rangle\}\Big| +$$

$$+\Big|M\{\langle \nu_p(t,\alpha_i) - \delta_{u_{pj_i}(t,\alpha_i))}, f_{\mathfrak{l}}(t, \mathfrak{x}_p(t,\alpha_i), w_p(t,\alpha_i), u) - f_{\mathfrak{l}}(t, \mathfrak{x}_p(t,\widehat{\alpha}), w_p(t,\widehat{\alpha}), u)\rangle\}\Big| +$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}^{(1)}_{\zeta_1(i)}(s, f_{\mathfrak{l}})ds \leqslant \sup_{\alpha\in[-1,1]} \Big|M\{\langle \nu_p(t,\alpha) - \delta_{u_{pj_i}(t,\alpha))}, f_{\mathfrak{l}}(t, \mathfrak{x}_p(t,\widehat{\alpha}), w_p(t,\widehat{\alpha}), u)\rangle\}\Big| +$$

$$+2\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}^{(1)}_{\zeta_1(i)}(s, f_{\mathfrak{l}})ds + \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}^{(1)}_{\zeta_2(i)}(s, f_{\mathfrak{l}})ds + \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \boldsymbol{w}^{(2)}_{\zeta_3(i)}(s, f_{\mathfrak{l}})ds,$$

где (см. обозначение, принятое в (10.18)) $\zeta_1(i) = \xi_3(pj_i)$,

$$\zeta_2(i) \doteq \|\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha_i) - \mathfrak{x}_p(\cdot,\widehat{\alpha})\|_C, \quad \zeta_3(i) \doteq \|w_p(\cdot,\alpha_i) - w_p(\cdot,\widehat{\alpha})\|_C,$$

а $\boldsymbol{w}^{(1)}_{\gamma}(s, f_{\mathfrak{l}})$, $\boldsymbol{w}^{(2)}_{\gamma}(s, f_{\mathfrak{l}})$ определены равенствами (7.33) и (7.34), соответственно, при $g = f_{\mathfrak{l}}$, $K_r = \mathbb{K}_{\widehat{r}}$ и V, заданном равенством (4.27) при $\varrho \doteq \rho'\|h'(\cdot)\|_C + \rho''\|h''(\cdot)\|_C + 1$. Учитывая равенства (10.18), (10.17) и (10.21) при $g(t,u) \doteq f_{\mathfrak{l}}(t, \mathfrak{x}_p(t,\widehat{\alpha}), w_p(t,\widehat{\alpha}), u)$, а также то, что $\mathfrak{x}_p \in B(\mathbb{R}\times[-1,1], \mathbb{K}_r)$, а функция $f_{\mathfrak{l}} \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{K}_r \times V \times \mathcal{U}, \mathbb{R}))$, получаем, что $z_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$, а это противоречит сделанному предположению, что $z_i \geqslant \gamma$, $i \in \mathbb{N}$. Тем самым равенство (10.24) доказано.

Далее, для $\mathfrak{l} = 0, 1$ при всех $j \geqslant j_1(p)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(I_{\mathfrak{l}}(x_{pj}(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), u_{pj}(\cdot,\alpha)) - \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_p} \sup_{\alpha\in[-1,1]} |I_{\mathfrak{l}}(x_{pj}(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), u_p(\cdot,\alpha)) - \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), \nu_p(\cdot,\alpha))| + y_p(\alpha),$$

где $y_p(\alpha)$ задается равенством (10.22). В свою очередь, из (10.24) вытекает существование такого $j_2(p) \geqslant j_1(p)$, что при всех $j \geqslant j_2(p)$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{\alpha\in[-1,1]} \Big|I_{\mathfrak{l}}(x_{pj}(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), u_{pj}(\cdot,\alpha)) - \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), \nu_p(\cdot,\alpha))\Big| \leqslant \frac{\gamma\varepsilon_p}{8}\min(\rho', \rho'').$$

Отсюда, совместно с (10.23), получаем, что при каждом $p \geqslant \widehat{p}_4$ и $j \geqslant j_2(p)$ и всяком $\alpha \in [-1,1]$ будет выполняться неравенство

$$I_{\mathfrak{l}}(x_{pj}(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), u_{pj}(\cdot,\alpha)) \leqslant \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) - \frac{\varepsilon_p\gamma}{8}\min(\rho', \rho''). \tag{10.25}$$

Сейчас на $[-1,1]$ зададим функцию

$$\alpha \mapsto \Phi_{pj}(\alpha) \doteq \alpha - \frac{1}{\varepsilon_p} I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), u_{pj}(\cdot;\varepsilon_p,\alpha)).$$

Поскольку при каждом $\alpha \in [-1,1]$

$$|\Phi_{pj}(\alpha)| \overset{(10.12)}{\leqslant} \sup_{\alpha\in[-1,1]} |\alpha - \varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha))| + \frac{1}{\varepsilon_p} \sup_{\alpha\in[-1,1]} \big|\mathfrak{I}_2(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), \nu_p(\cdot,\alpha)) - \\ - I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), u_{pj}(\cdot;\varepsilon_p,\alpha))\big|,$$

то, в силу (10.23) и (10.24), найдется такое $j_3(p) \geqslant j_2(p)$, что при всех $j \geqslant j_3(p)$ будет выполнено включение $\Phi_{pj}([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Покажем, что

$$\Phi_{pj} \in C([-1,1],\, [-1,1]).$$

В самом деле, поскольку по условию $f_2 \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{K}_{\widehat{r}} \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, то (см. лемму 1.3) для заданного $\beta > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \big(\boldsymbol{w}_\gamma^{(1)}(s,f_2) + \boldsymbol{w}_\gamma^{(2)}(s,f_2)\big) ds < \beta\varepsilon_p/4.$$

Далее, как уже отмечалось, отображение $(t,\alpha) \mapsto x_{pj}(t,\alpha)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times[-1,1], \mathbb{K}_{\widehat{r}})$. Следовательно, найдется такое $\gamma_1 > 0$, что

$$\sup\{\|x_{pj}(\cdot,\alpha') - x_{pj}(\cdot,\alpha'')\|_C,\ \alpha',\alpha'' \in [-1,1],\ |\alpha'-\alpha''| \leqslant \gamma_1\} \leqslant \gamma.$$

В силу (10.17) найдется такое $\gamma_2 > 0$, что $\mathfrak{w}_{\gamma_2} \leqslant \gamma$. Наконец, из (10.20) вытекает существование такого $\gamma_3 > 0$, при котором

$$\boldsymbol{v}_{\gamma_3}[\delta_{u_{pj}}, [-1,1]] < \varepsilon_p\beta/(4\mathbb{k}),$$

где константа $\mathbb{k} > 0$ задается равенством (9.19) при $K_r = \mathbb{K}_{\widehat{r}}$. Сейчас, если положить $\gamma_0 \doteq \min(\beta/4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, то для любых $\alpha', \alpha'' \in [-1,1]$, $|\alpha'-\alpha''| \leqslant \gamma_0$ будем имеем следующие соотношения:

$$|\Phi_{pj}(\alpha') - \Phi_{pj}(\alpha'')| \leqslant |\alpha'-\alpha''| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_p}|I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha'), w_p(\cdot,\alpha'), u_{pj}(\cdot,\alpha')) - I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha''), w_p(\cdot,\alpha'), u_{pj}(\cdot,\alpha')) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_p}|I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha''), w_p(\cdot,\alpha'), u_{pj}(\cdot,\alpha')) - I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha''), w_p(\cdot,\alpha''), u_{pj}(\cdot,\alpha'))| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_p}|I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha''), w_p(\cdot,\alpha''), u_{pj}(\cdot,\alpha')) - I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha''), w_p(\cdot,\alpha''), u_{pj}(\cdot,\alpha''))| \leqslant \beta/3 +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_p}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_\gamma^{(1)}(s,f_2)ds + \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} \boldsymbol{w}_\gamma^{(2)}(s,f_2)ds + \mathbb{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} |\delta_{u_{pj}(s,\alpha')} - \delta_{u_{pj}(s,\alpha'')}|(\mathfrak{U})ds\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\beta}{4} + \frac{\mathbb{k}}{\varepsilon_p}\boldsymbol{v}_{\delta_3}[\delta_{u_{pj}}, [-1,1]] < \beta,$$

то есть отображение $\alpha \mapsto \Phi_{pj}(\alpha)$ (равномерно) непрерывно на $[-1,1]$, а так как $\Phi_{pj}([-1,1]) \subset [-1,1]$, то получаем, что, действительно, $\Phi_{pj} \in C([-1,1],[-1,1])$ при каждом $p \geqslant \widehat{p}_4$ и $j \geqslant j_3(p)$. Поэтому по теореме Брауэра [22] для указанных p и j существует такая точка $\alpha_{pj} \in [-1, 1]$, что $\alpha_{pj} = \Phi_{pj}(\alpha_{pj})$, или, иначе,

$$I_2(x_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), w_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})) = 0. \tag{10.26}$$

Из этого равенства, совместно с неравенством (10.25), принимая во внимание, что $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$, получаем, что $(x_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), w_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})) \in \mathfrak{D}$ и, кроме того,

$$\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) > I_0(x_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), w_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})). \tag{10.27}$$

Тем самым теорема 10.1 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда в задаче (10.1) присутствуют ограничения в виде строгих неравенств. В этом случае выделяем индексы $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'} \subset \{1, \ldots, \mathfrak{k}\}$, для которых $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}_i}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$, $i = 1, \ldots, \mathfrak{k}'$, и в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}'+\mathfrak{m}}$ рассмотрим конус

$$\mathcal{K}'(\vec{\vartheta}) \doteq \big\{(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta}, \varsigma), \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}_1}(\vec{\vartheta}, \varsigma), \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'}}(\vec{\vartheta}, \varsigma), \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta}, \varsigma), \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta}, \varsigma)), \varsigma \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\big\}, \tag{10.28}$$

проектор $P\colon \mathcal{K}'(\vec{\vartheta}) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, задаваемый (см. (10.4)) аналогично проектору $P\colon \mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, и конус

$$\mathcal{H}' \doteq \{x \in \mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}'+\mathfrak{m}}\colon\ x_0, x_1, \ldots, x_{\mathfrak{k}'} < 0,\ x_{\mathfrak{k}+1} = \ldots = x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} = 0\}. \tag{10.29}$$

С л е д с т в и е 10.1. *Пусть п. п. по Степанову система уравнений* (7.24), *отвечающая допустимому набору* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$, *является э. д. Тогда, если* $P(\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})) = \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *и* $\mathcal{K}'(\vec{\vartheta}) \bigcap \mathcal{H}' \neq \varnothing$, *то найдется такой набор* $(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{D}$, *что будет выполнено неравенство* $I_0(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) < \mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы 10.1, считаем $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} = 1$, то есть в рассматриваемой ситуации $\mathfrak{T}_1(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) < 0$. Тогда

$$\mathcal{K}'(\vec{\vartheta}) \overset{(10.28)}{=} \{(\mathfrak{a}_0(\varsigma), \mathfrak{a}_1(\varsigma)),\ \varsigma \doteq (\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\}, \quad \mathcal{H}' \overset{(10.29)}{=} \{(x_0, x_2)\colon\ x_0 < 0,\ x_2 = 0\}.$$

Теперь, в точности следуя схеме доказательства теоремы 10.1, считая при этом $\mathfrak{a}_1(\varsigma') = \mathfrak{a}_1(\varsigma'') = 0$, получим что для всех $p \geqslant \widehat{p}_4$ и $j \geqslant j_3(p)$ найдется набор $(x_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), w_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})) \in D$, удовлетворяющий условиям (10.26) и (10.27).

Далее, из неравенства (см. обозначения (7.33), (7.34) при $g = f_1$ и $\mathbb{K}_r$, V, указанным при доказательстве теоремы 10.1, а также (9.18))

$$\begin{gathered}
|I_1(x_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), w_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})) - \mathfrak{T}_1(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))| \leqslant \\
\leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} (\boldsymbol{w}^{(1)}_{\xi(pj)}(s; f_1) + \boldsymbol{w}^{(2)}_{\zeta(pj)}(s; f_1)) ds + \sup_{\alpha \in [-1,1]} |M\{\langle \widehat{\mu}(t) - \nu_p(t, \alpha), \widehat{f}_1(t, u)\rangle\}| + \\
+ \sup_{\alpha \in [-1,1]} \big(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \langle \nu_p(t, \alpha) - \delta_{u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})}, \widehat{f}_1(s, u)\rangle | ds\big),
\end{gathered}$$

где $\xi(pj) \doteq \|x_{pj} - \widehat{x}\|_C$, $\zeta(pj) \doteq \|v_{pj} - \widehat{v}\|_C$, учитывая, что функция $\widehat{f}_1 \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, в силу следствия 4.1, леммы 1.3 и (10.21) при $g = f_{\mathfrak{l}}$ получаем, что

$$\lim_{p \to \infty} I_1(x_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), w_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})) = \mathfrak{T}_1(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)).$$

Поскольку $\mathfrak{T}_1(\widehat{v}(\cdot), \widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) < 0$, то при достаточно больших $p \geqslant p_4$ и любом $j \geqslant j_3(p)$ будет выполняться неравенство $I_1(x_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), w_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})) < 0$, то есть при этих p и j набор $(x_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), w_{pj}(\cdot, \alpha_{pj}), u_{pj}(\cdot, \alpha_{pj})) \in \mathfrak{D}$.

3. В этом пункте, используя утверждение теоремы 10.1 и ее следствия 10.1, докажем существование универсальных множителей Лагранжа для оптимального в ослабленном смысле решения задачи (10.1).

Л е м м а 10.1. *Пусть допустимый набор* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ *системы* (9.1) *является решением задачи* (10.1) *в ослабленном смысле и система* (7.24) *допускает э. д. Тогда для каждого набора* $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$ *точек* $\vartheta_i \in \Xi$, $i = 1, \ldots, N$, *удовлетворяющих неравенствам* $0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant, \ldots, \leqslant \vartheta_N < a$, *существуют такие не равные нулю одновременно числа* $\lambda_0(\vec{\vartheta}) \geqslant 0, \lambda_1(\vec{\vartheta}), \ldots, \lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta})$, *что для всякой пары* $(\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot)) \geqslant 0 \tag{10.30}$$

и, кроме того,

$$\lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \geqslant 0, \;\; \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0, \;\; \mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k}. \tag{10.31}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, сначала, что $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$ при всех $\mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k}$. В этом случае рассмотрим конус $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ и проектор $P\colon \mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, определенные равенствами (9.36) и (10.4), соответственно. Возможны следующие два случая: 1) $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta})) \subset \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, 2) $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta})) = \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$. В первом случае в качестве искомого набора чисел $\lambda_0(\vec{\vartheta}) \ldots \lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta})$ берем набор, в котором $\lambda_0(\vec{\vartheta}) = \ldots = \lambda_{\mathfrak{k}}(\vec{\vartheta}) = 0$, а остальные такими, что вектор $(\lambda_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta}) \ldots \lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta})) \in S_1^{\mathfrak{m}}(0)$ и $\sum\limits_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot)) \geqslant 0$ для всех $(\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$. Такой набор найдется, так как $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta}))$ — выпуклый конус с вершиной в нуле. Далее, во втором возможном случае пересечение конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ с конусом $\mathcal{H}$, заданным равенством (10.5), пусто. Действительно, если допустить, что $\mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \bigcap \mathcal{H} \neq \varnothing$, то по теореме 10.1 найдется такой набор $(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{D}$, для которого будет выполнено неравенство $I_0(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) < \mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$, что противоречит оптимальности в слабом смысле допустимого набора $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ задачи (10.1). Таким образом, $\mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \bigcap \mathcal{H} = \varnothing$. По теореме отделимости [2] найдется вектор $(\lambda_0(\vec{\vartheta}), \lambda_1(\vec{\vartheta}) \ldots \lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta}))$, принадлежащий $S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0)$, у которого первые $1+\mathfrak{k}$ координат неотрицательны, и для всех $(\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ справедливо неравенство $\sum\limits_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot)) \geqslant 0$. Условия (10.31) здесь также выполнены. Тем самым лемма 10.1 для случая, когда $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot), \widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$, $\mathfrak{l} = 1 \ldots \mathfrak{k}$, доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда в задаче (10.1) имеются ограничения в виде строгих неравенств. В этом случае выделяем те индексы $\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'} \subset \{1, \ldots, \mathfrak{k}\}$, для которых $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}_i}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$, $i = 1 \ldots \mathfrak{k}'$, и рассмотрим конусы $\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})$ и $\mathcal{H}'$, заданные равенствами (10.28) и (10.29) соответственно, а также проектор $P : \mathcal{K}'(\vec{\vartheta}) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$. Если $P(\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})) \subset \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, то рассуждаем аналогично рассмотренному в первой части доказательства случаю, когда $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta}))$ содержится в $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$. Если же $P(\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})) = \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, то по следствию 10.1 получаем, что $\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})\bigcap\mathcal{H}'=\varnothing$. Теперь по теореме отделимости найдется такой вектор

$$(\lambda_0(\vec{\vartheta}),\lambda_{\mathfrak{l}_1}(\vec{\vartheta}),\ldots,\lambda_{\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'}}(\vec{\vartheta}),\lambda_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta})\ldots\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta}))\in S_1^{1+\mathfrak{k}'+\mathfrak{m}}(0), \tag{10.32}$$

у которого первые $1+\mathfrak{k}'$ координат неотрицательны, и для всех $(\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ выполнено неравенство

$$\lambda_0(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))+\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}'}\lambda_{\mathfrak{l}_i}(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}_i}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))+\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{m}}\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))\geqslant 0.$$

Для завершения доказательства леммы 10.1 в рассматриваемом случае осталось дополнить компоненты вектора (10.32) нулями. □

Введем, далее, для всякого вектора $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и каждой пары $(\vartheta,\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$, в которой $\vartheta\in\Xi$, а $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\operatorname{rpm}(\mathcal{U})$ — п. п. последовательность [7], в рассмотрение (здесь см. (9.15), (9.34)) следующее множество

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(\vartheta,\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}},h(\cdot))\doteq\Big\{\vec{\lambda}=(\lambda_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0):&\\ \lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\lambda_{\mathfrak{l}}\Big(\triangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\nu(m))+\mathfrak{L}_{\mathfrak{l}}^{(m)}(\vartheta,\nu(m))-&\\ -M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)y(t,h(\cdot))\}-M\{y_{\mathfrak{l}}(t,h(\cdot))\}\Big)\leqslant 0,&\\ \lambda_0\geqslant 0,\ \lambda_{\mathfrak{l}}\geqslant 0,\ \lambda_{\mathfrak{l}}\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0,\ \mathfrak{l}=1,\ldots,\mathfrak{k}\Big\}.&\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\mathfrak{l}}^{(m)}(\vartheta,\nu(m))\doteq&\\ \doteq\int_0^a\psi_{\mathfrak{l},m}(t)\sum_{k=0}^{\infty}\big\{\mathcal{G}_m(t,\vartheta-(k+1)a)\triangle f_m(\vartheta-(k+1)a,\nu(m-(k+1))+&\\ +\mathcal{G}_m(t,\vartheta+ka)\triangle f_m(\vartheta+ka,\nu(m+k))\big\}dt.&\end{aligned} \tag{10.33}$$

Л е м м а 10.2. *Для любого конечного множества*

$$\big\{(\vartheta_i,\{\nu_i(m)\}_{m\in\mathbb{Z}},h_i(\cdot))\big\}_{i=1}^N$$

допустимых наборов

$$\bigcap_{i=1}^N\mathfrak{K}\big((\vartheta_i,\{\nu_i(m)\}_{m\in\mathbb{Z}},h_i(\cdot))\big)\neq\varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать (при необходимости переобозначим), что $\vartheta_1\leqslant\vartheta_2\leqslant\ldots\leqslant\vartheta_N$. Для этого набора $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$ по лемме 10.1 существует такой вектор $(\lambda_0(\vec{\vartheta}),\lambda_1(\vec{\vartheta})\ldots\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta}))\in S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0)$, что $\lambda_0(\vec{\vartheta})\geqslant 0$ и для всех пар $(\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ выполнены неравенства (10.30) и соотношения (10.31). Далее,

[7] В этом случае набор $(\vartheta,\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}},h(\cdot))$ называем допустимым.

для каждого $i_0 \in \{1 \dots N\}$ рассмотрим $\iota_{i_0} \doteq \{(\delta_{ii_0}, \{\nu_{i_0}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$ (здесь δ_{ii_0} — символ Кронекера). Тогда для каждой пары $(\iota_{i_0}, h_{i_0}(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ неравенство (10.30) (здесь см. (9.15), (9.34) и (9.35)) запишется в виде

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \Big(\triangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_{i_0}, \nu_{i_0}(m)) + \mathfrak{L}_{\mathfrak{l}}^{(m)}(\vartheta_{i_0}, \nu_{i_0}(m)) - \\ - M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t) y(t, h_{i_0}(\cdot))\} - M\{y_{\mathfrak{l}}(t, h_{i_0}(\cdot))\}\Big) \leqslant 0.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора i_0, получаем утверждение леммы 10.2.

Т е о р е м а 10.2. *Пусть допустимый набор* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ *является решением задачи* (10.1) *в ослабленном смысле и система* (7.24) *допускает э. д. Тогда существуют такие числа* $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ *не равные нулю одновременно, что для каждого* $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, *всякой точки* $\vartheta \in \Xi$ *и любой п. п. последовательности* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ *выполнено неравенство*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \Big(\triangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta, \nu(m)) + \mathfrak{L}_{\mathfrak{l}}^{(m)}(\vartheta, \nu(m)) - \\ - M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t) y(t, h(\cdot))\} - M\{y_{\mathfrak{l}}(t, h(\cdot))\}\Big) \leqslant 0 \quad (10.34)$$

и, кроме того, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $I \doteq \big\{(\vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}, h(\cdot))\big\}$ — совокупность допустимых наборов. По лемме 10.2 система замкнутых множеств

$$\big\{\mathfrak{K}(\vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}},\ h(\cdot)), \big(\vartheta, \{\nu(m),\}_{m\in\mathbb{Z}}, h(\cdot)\big) \in I\big\},$$

компакта $S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0)$ является центрированной. Поэтому [94, 173] пересечение этой системы множеств не пусто. Следовательно, в качестве искомого набора чисел можно взять координаты любого вектора $(\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}})$ из этого пересечения.

§11. Принцип максимума для задачи оптимального управления п. п. движениями при наличии ограничений

В данном параграфе сначала приведено доказательство необходимых условий для решения в ослабленном смысле задачи (10.1), а затем ряд следствий, вытекающих из этих условий.

1. Для задачи (10.1) определим на $\mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}) \times \mathbb{R}^{n^*}$ отображение

$$(t, x, v, \nu, p) \mapsto \mathbb{H}(t, x, v, \nu, p) \doteq \int_{\mathfrak{U}} H(t, x, v, u, p)\nu(du),$$

где

$$H(t,x,v,u,p) = H(t,x,v,u,p;\lambda) \doteq pf(t,x,v,u) - \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}} f_{\mathfrak{l}}(t,x,v,u),\ \ \lambda = (\lambda_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$$

— функция Понтрягина.

Напомним также, что $T_{v(\cdot)}\mathfrak{S}$ — касательный конус Кларка к заданному множеству $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ с вершиной в точке $v(\cdot) \in \mathfrak{S}$.

Т е о р е м а 11.1. *Пусть допустимый процесс* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ *является решением в ослабленном смысле задачи* (10.1) *и система уравнений*

$$\dot{y} = \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle y, \ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{11.1}$$

допускает э. д. Тогда найдутся такие не равные нулю одновременно числа $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1 \ldots \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *что*

$$\sup_{\mu(\cdot)\in \mathrm{APM}_1} M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \mu(t), \widehat{p}(t); \widehat{\lambda})\} = M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{\mu}(t), \widehat{p}(t); \widehat{\lambda})\}, \tag{11.2}$$

где $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *а функция* $t \mapsto \widehat{p}(t) \in \mathbb{R}^{n^*}$ *является п. п. по Бору решением системы уравнений*

$$\dot{p} = -p\langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \langle \widehat{\mu}(t), f'_{\mathfrak{l}x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle. \tag{11.3}$$

Кроме того, выполняются условия:

$$\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \geqslant 0, \ \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0, \ \mathfrak{l} = 1 \ldots \mathfrak{k}, \tag{11.4}$$

и при каждом $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$

$$M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle h(t)\} \leqslant 0. \tag{11.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что числа $\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ (множители Лагранжа), указанные в теореме 10.2, искомые. В самом деле, для этих чисел условия (11.4) выполнены. Далее, для произвольно фиксированного $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ рассмотрим (см. определение 2.4) его стекловское усреднение $\mu(\cdot, \zeta)$, принадлежащее (см. лемму 2.7) пространству $B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$. Поэтому при каждом $\vartheta \in [0, a]$ последовательность $\{\mu(\vartheta + ma, \zeta)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$ будет п. п. Следовательно, по теореме 10.2 для этой последовательности при каждом $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и любом $\vartheta \in \Xi$ будет выполнено неравенство

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \Big(\triangle f_{\mathfrak{l}}(\vartheta + ma, \mu(\vartheta + ma, \zeta)) +$$
$$+ \int_0^a \psi_{\mathfrak{l}}(t + ma) \sum_{k=0}^{\infty} \big\{ \mathcal{G}_m(t, \vartheta - (k+1)a) \triangle f_{\mathfrak{l}}(\vartheta + ma - (k+1)a, \mu(\vartheta + ma - (k+1)a, \zeta)) +$$
$$+ \mathcal{G}_m(t, \vartheta + ka) \ \triangle f_{\mathfrak{l}}(\vartheta + ma + ka, \mu(\vartheta + ma + ka, \zeta)) \big\} dt -$$
$$- M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t) y(t, h(\cdot))\} - M\{y_{\mathfrak{l}}(t, h(\cdot))\} \Big) \leqslant 0.$$

Проинтегрировав это неравенство по ϑ от 0 до a, получим, что (см. (10.33))

$$M\{\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \big(\triangle f_{\mathfrak{l}}(t, \mu(t, \zeta))\} + M\{\big(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \psi_{\mathfrak{l}}(t)\big) z(t, \zeta)\} -$$
$$- M\{\big(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \psi_{\mathfrak{l}}(t)\big) y(t; h(\cdot))\} - M\{\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} y_{\mathfrak{l}}(t, h(\cdot))\}) \leqslant 0,$$

где

$$z(t,\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,\vartheta)\ \triangle f(\vartheta, \mu(\vartheta,\zeta))d\vartheta.$$

Так как функции $z(\cdot,\zeta)$ и (см. (9.15)) $y(\cdot;h(\cdot))$ являются п. п. по Бору решениями систем уравнений $\dot{y} = A(t)y + \triangle f(t,\mu(t,h))$ и $\dot{y} = A(t)y + \langle \widehat{\mu}(t), f_v'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle h(t)$, $(t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ (напомним, что $A(t) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), f_x'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle$), соответственно, то используя равенства:

$$\frac{d}{dt}(\widehat{p}(t)z(t,\zeta)) = \Big(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\psi_{\mathfrak{l}}(t)\Big)z(t,\zeta) + \widehat{p}(t)\ \triangle f(t,\mu(t,h)),$$

$$\frac{d}{dt}(\widehat{p}(t)y(t,h(\cdot))) = \Big(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\psi_{\mathfrak{l}}(t)\Big)y(t,h(\cdot)) + \widehat{p}(t)\langle \widehat{\mu}(t), f_v'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle h(t),$$

где $\widehat{p}(\cdot)$ — п. п. по Бору решение системы (11.3), получаем, в свою очередь, равенства:

$$M\{\Big(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\psi_{\mathfrak{l}}(t)\Big)z(t,\zeta)\} = -M\{\widehat{p}(t)\ \triangle f(t,\mu(t,h))\},$$

$$M\{\Big(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\psi_{\mathfrak{l}}(t)\Big)\} = -M\{\widehat{p}(t)\langle \widehat{\mu}(t), f_v'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle h(t)\}.$$

Поэтому (см. обозначения (9.18)) из полученного выше неравенства следует, что

$$M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{\mu}(t),\widehat{p}(t))\} - M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\mu(t,\zeta),\widehat{p}(t))\} + \\ + M\{\langle \widehat{\mu}(t), H_v'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))\rangle h(t)\} \leqslant 0. \quad (11.6)$$

Поскольку это неравенство выполнено при всех $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, то при $h(\cdot) \equiv 0$ получаем, что для всех $\zeta > 0$

$$M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{\mu}(t),\widehat{p}(t))\} \geqslant M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\mu(t,\zeta),\widehat{p}(t))\}.$$

С другой стороны, так как (см. следствия теоремы 2.2, а также лемму 5.2) отображение $(t,u) \mapsto H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))$ п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u \in \mathcal{U}$, то, в силу теоремы 2.4, справедливо равенство

$$\lim_{\zeta\downarrow 0} M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\mu(t,\zeta),\widehat{p}(t))\} = M\{\mathbb{H}(\langle \mu(t), H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))\rangle\},$$

которое совместно с последним неравенством влечет равенство (11.2). Теперь, используя это равенство, из неравенства (11.6) получаем, что при всех $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ выполнено неравенство (11.4).

З а м е ч а н и е 11.1. Поскольку отображение $(t,u) \mapsto H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$, то (см. § 6) отвечающая ему функция максимума

$$t \mapsto \mathcal{H}(t) \doteq \max_{u\in\mathcal{U}} H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t)) \quad (11.7)$$

п. п. по Степанову, при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(t) = \max_{\nu \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})} \langle \nu, H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) \rangle,$$

и равенство (11.2) равносильно тому, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(t) = \mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{\mu}(t), \widehat{p}(t)).$$

Из определения 10.2 и теоремы 11.1 (см. также замечание 11.1) получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 11.2. *Пусть допустимый процесс* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathfrak{D}$ *является решением задачи* (10.3) *и п. п. по Степанову система уравнений*

$$\dot{y} = f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))y, \ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

допускает э. д. Тогда найдутся такие не равные нулю одновременно числа $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1 \ldots \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *что при п.в.* $t \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{H}(t) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t), \widehat{p}(t))$, *где* $\widehat{p}(t) \in \mathbb{R}^{n^*}$, $t \in \mathbb{R}$, *— п. п. по Бору решение системы*

$$\dot{p} = -pf'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t)) + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}} f'_{\mathfrak{l}x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t)),$$

выполнены условия:

$$\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \geqslant 0, \quad \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} I_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) = 0, \quad \mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k},$$

и при каждом $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$

$$M\{H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))h(t)\} \leqslant 0. \tag{11.8}$$

З а м е ч а н и е 11.2. В случае, если в задаче (10.3) $f_{\mathfrak{l}} = 0$, $\mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$, то имеем следующую задачу (без ограничений) оптимального управления п. п. движениями

$$I_0(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \to \inf, \ (x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in D.$$

Для такой задачи, по теореме 11.2, для оптимального процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in D$ необходимо найдется множитель $\widehat{\lambda}_0 > 0$, при котором будут выполнены условие максимума и неравенство (11.8) при каждом $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$. Поэтому (см. теорему 10.2) в этом случае можно считать $\widehat{\lambda}_0 = 1$, и следовательно, $\widehat{p}(\cdot)$ будет (единственным) п. п. по Бору решением системы

$$\dot{p} = -pf'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t)) + f'_{0x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t)).$$

Аналогично, по теореме 11.1, при формулировке необходимых условий оптимальности процесса задачи

$$\mathfrak{T}_0(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf, \ (x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c,$$

можно считать $\widehat{\lambda}_0 = 1$. Отметим при этом, что требование свойства э. д. однородной системы в приведенных необходимых условиях оптимальности процесса существенно, в том смысле, что при его отсутствии условие максимума может не выполняться. Действительно, на множестве D управляемых процессов уравнения $\dot{x} = (x - u(t))^2$, $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, [-1, 1])$ рассмотрим задачу $I(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{x^2(t) - f(t)u(t)\} \to \inf$, где заданная функция $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такая, что $M\{f(t)\} = 0$, и отвечающая ей функция $t \mapsto \operatorname{sign} f(t)$ п. п. по Степанову. Несложно заметить, что множество п. п. управляемых процессов D рассматриваемого уравнения — это пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, в которых $x(t) = u(t) \equiv \mathrm{const} \in [-1, 1]$. Поэтому, в силу ограничений на функцию f, процесс $\widehat{x}(t) = \widehat{u}(t) \equiv 0$ для рассматриваемой задачи будет оптимальным. Отвечающее этому процессу однородное уравнение имеет вид $\dot{y} = 0$ (то есть не является э. д.), и значение функции Понтрягина $H(t, x, u, p) = p(x - u)^2 - f(t)u$ при $p = \widehat{p}$ (здесь $\widehat{p}$ — любая фиксированная константа, поскольку в данном случае сопряженное уравнение имеет вид $\dot{p} = 0$) на этом процессе при всех $t \in \mathbb{R}$ равно нулю. С другой стороны, при п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\max\limits_{|u| \leqslant 1} H(t, 0, \widehat{p}, 0, u) = |f(t)|$.

Вместе с тем, в рассматриваемой задаче при наличии ограничений, в отвечающем оптимальному процессу наборе $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1 \ldots \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, при котором выполняются приведенные необходимые условия, не исключается возможность того, что $\widehat{\lambda}_0$ может быть равен нулю. Проиллюстрируем сказанное на примере следующей задачи: $I_0(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{\frac{1}{2}u^*(t)u(t) - x^*(t)x(t)\} \to \inf$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — совокупность управляемых процессов системы

$$\dot{x} = Ax - u(t), \ A \doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \ u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, O_1^2[0]),$$

удовлетворяющих условию $M\{x^*(t)x(t) + u^*(t)u(t)\} = 2$. Из определения множества $\mathfrak{D}$ получаем, что $\inf\{I_0(x(\cdot), u(\cdot)) : (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{D}\} \geqslant -\frac{1}{2}$. Поскольку на допустимом процессе $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, в котором $\widehat{x}(t) = \widehat{u}(t) = (\cos t, -\sin t)^*$, $t \in \mathbb{R}$, значение целевого функционала равно $-\frac{1}{2}$, то этот процесс будет решением рассматриваемой задачи. Покажем, что при $\widehat{\lambda}_0 = 0$, $\widehat{\lambda}_1 = 1$ для указанного процесса выполнены необходимые условия оптимальности. В самом деле, функция $t \mapsto \widehat{p}(t) = -2\widehat{u}(t)$ будет 2π-периодическим решением системы $\dot{p} = -pA - 2\widehat{x}^*(t)$, и так как для функции $(t, u) \mapsto h(t, u, \widehat{p}(t)) = -\widehat{p}(t)u - u^*u$ при всех $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, O_1^2[0])$ $M\{h(t, u(t), \widehat{p}(t))\} \leqslant 1 = M\{h(t, \widehat{u}(t), \widehat{p}(t))\}$, то условие максимума для функции Понтрягина здесь также выполнено.

З а м е ч а н и е 11.3. В случае если $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ является линейным многообразием в $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, то условие (11.5) в теореме 11.1 влечет для всех $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ равенство

$$M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) \rangle h(t)\} = 0. \tag{11.9}$$

Далее, если $\operatorname{int}\mathfrak{S} \neq \emptyset$ и $\widehat{v}(\cdot) \in \operatorname{int}\mathfrak{S}$, то $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} = B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ и, стало быть, при всех $h(\cdot)$ из $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ справедливо равенство (11.9), из которого, в свою очередь, следует, что все коэффициенты Фурье $M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) \rangle e^{-i\lambda t}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ограниченной (в существенном) п. п. по Степанову функции $t \mapsto \langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) \rangle$

равны нулю. Значит, по теореме о единственности разложения п. п. функции в ряд Фурье [107] получаем, что в условиях теоремы 11.1 при $\widehat{v}(\cdot) \in \mathrm{int}\mathfrak{S}$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) \rangle = 0$. Отметим также, что в случае если в теореме 11.1 в качестве $\mathfrak{S}$ рассматривается некоторое подмножество векторов из $\mathbb{R}^k$ и окажется, что $\widehat{v} \equiv \widehat{v}(t)$ принадлежит $\mathrm{int}\mathfrak{S}$, то, во-первых, $T_{\widehat{v}}\mathfrak{S} = \mathbb{R}^k$, а во-вторых, равенство (11.9) будет выполнено для всех $h \equiv h(t) \in \mathbb{R}^k$. Поэтому в этом случае $M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}, u, \widehat{p}(t)) \rangle\} = 0$. Все сказанное, с заменой $\widehat{\mu}(t)$ на $\delta_{\widehat{u}(t)}$, распространяется и на свойства, которые влекут неравенства (11.8).

П р и м е р 11.1. Пусть $\Gamma \doteq \{\mathbb{M} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) : \ \mathrm{Re}\,\lambda_j(\mathbb{M}) < 0, \ j = 1, \dots, n\}$ и $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ такие, что матрица $\mathbb{K} \doteq [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ невырождена. Зафиксируем также такую функцию $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, что $M\{f(t)\} \neq 0$, и при v принадлежащем $\mathfrak{S} \doteq \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n\colon \ A + b\boldsymbol{s}^* \in \Gamma\}$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A + bv^*)x + f(t), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{11.10}$$

Из определения $\mathfrak{S}$ вытекает, что каждому $v \in \mathfrak{S}$ отвечает единственное п. п. по Бору решение $x(\cdot) = x(\cdot, v)$ системы (11.10). Теперь, при фиксированном $q \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу

$$J(v) \doteq M\{q^* x(t, v)\} \to \inf, \quad v \in \mathfrak{S}. \tag{11.11}$$

Отметим, что подобная задача для случая, когда f — непрерывная ω-периодическая функция с условием $M\{f(t)\} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} f(t)dt \neq 0$, рассматривалась в [149].

Поскольку множество $\mathfrak{S}$ открыто в $\mathbb{R}^n$, то из теоремы 11.2 (см. также замечание 11.2) получаем, что решение $\widehat{v} \in \mathfrak{S}$ задачи (11.11) необходимо удовлетворяет равенству $M\{\widehat{p}(t) b \widehat{x}^*(t)\} = 0$, где $\widehat{x}(t) \doteq x(t, \widehat{v})$, $\widehat{p}(t) \in \mathbb{R}^{n*}$, $t \in \mathbb{R}$ — п. п. по Бору решение системы $\dot{p} = -p(A + b\widehat{v}^*) + q^*$, а так как $\widehat{p}(t) \equiv q^*(A + b\widehat{v}^*)^{-1}$ и $(A + b\widehat{v}^*)M\{\widehat{x}^*(t)\} + M\{f(t)\} = 0$, то

$$q^*(A + b\widehat{v}^*)^{-1} b = 0. \tag{11.12}$$

С другой стороны, поскольку $\frac{d}{dt}(\widehat{p}(t)\widehat{x}(t)) = \widehat{p}(t)f(t) + q^*\widehat{x}(t)$, то (см. вид функционала в (11.11))

$$J(\widehat{v}) = -q^*(A + b\widehat{v}^*)^{-1} M\{f(t)\},$$

и для нахождения $\widehat{v}$ достаточно найти решение уравнения (11.12). С этой целью приведем краткое описание множества $\mathfrak{S}$. Рассмотрим множество Λ, состоящее из таких $\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, что полином $P(\lambda, z) \doteq z^n - \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j z^{j-1}$ гурвицев, и пусть $\eta \doteq [0, \dots, 0, 1]\mathbb{K}^{-1}$. Тогда (см. [149], а также [155])

$$\mathfrak{S} = \{-(\eta P(\lambda, A))^*, \ \lambda \in \Lambda\}.$$

В силу вышесказанного получаем следующее утверждение Е. Л. Тонкова для задачи (11.11).

Т е о р е м а 11.3. *Пусть* $\widehat{\lambda} \in \Lambda$ — *решение уравнения*

$$q^*(A - b\eta P(\lambda, A))^{-1} b = 0, \ \lambda \in \Lambda.$$

Тогда $\widehat{v} = \eta P(\widehat{\lambda}, A)$ — *решение задачи* (11.11) *и* $J(\widehat{v}) = -q^*(A - b\eta P(\widehat{\lambda}, A))^{-1} M\{f(t)\}$.

З а м е ч а н и е 11.4. В ряде случаев при построении конуса $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ полезно использовать то, что на $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ определено [107] скалярное произведение $(f, g) \doteq M\{f^*(t)g(t)\}$, $f, g \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$. Пространство $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ с так определенным скалярным произведением будет предгильбертовым. Обозначим его APC. Поскольку замыкание APC по норме $\|f\|_{\mathbb{B}} \doteq \sqrt{(f, f)}$, $f \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ будет гильбертовым пространством $APB \subset L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ п. п. по Безиковичу функций [107], то, в силу утверждения, приведенного в [94, с. 219], $(APC)^*$ изоморфно APB и, значит, поляра $(T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S})^\circ$ выпуклого конуса $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} \subset APC$ представима в виде

$$(T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S})^\circ = \{g \in APB\colon (g, h) \leqslant 0, \ h \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\}.$$

Поэтому неравенства (11.5) и (11.8) означают, что п. п. по Степанову функции $t \mapsto \langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))\rangle$ и $t \mapsto H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))$ принадлежит $(T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S})^\circ$ (напомним [107], что $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ содержится в пространстве APB п. п. по Безиковичу функций). Отметим также, что если множество $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ выпукло, то [48, 124] $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)}$ выпуклого конуса $\mathrm{cone}(\mathfrak{S} - \widehat{v}(\cdot))$ и его поляра $(T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S})^\circ$ совпадает с нормальным конусом

$$N_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} \doteq \{g(\cdot) \in APB : (g(\cdot), v(\cdot) - \widehat{v}(\cdot)) \leqslant 0, \ v(\cdot) \in \mathfrak{S}\}$$

к $\mathfrak{S}$ с вершиной в точке $\widehat{v}(\cdot)$. Поэтому, если, например,

$$\mathfrak{S} \doteq \{v(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)\colon M\{|v(t)|^2\} \leqslant 1\}, \tag{11.13}$$

то, используя вид [124] нормального конуса $N_x K$ для шара K единичного радиуса в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ в точке $x \in K$, $\|x\| = 1$, получим, что в рассматриваемом случае (11.13) для каждого $\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S}$, такого, что $M\{|\widehat{v}(t)|^2\} = 1$, нормальный конус $N_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ совпадает с множеством $\{\lambda \widehat{v}(\cdot)\}_{\lambda > 0}$ и, значит,

$$T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} = \{h(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k) : M\{\widehat{v}^*(t)h(t)\} \leqslant 0\}.$$

Заметим, что множество $\mathfrak{S}$, определенное равенством (11.13), в задачах управления колебаниями в теории электрических цепей может быть интерпретировано как ограничение мощности входа.

П р и м е р 11.2. Рассмотрим задачу

$$J(v(\cdot)) \doteq M\{\frac{1}{2} v^*(t)v(t) - x^*(t)x(t)\} \to \inf, \ v(\cdot) \in \mathfrak{S}, \tag{11.14}$$

в которой $\mathfrak{S}$ определено равенством (11.14), а $x(\cdot) = x(\cdot, v(\cdot))$ — п. п. по Бору решение системы

$$\dot{x} = Ax - v(t), \ x \in \mathbb{R}^k, \ \mathrm{Re}\lambda_j(A) \neq 0, \ j = 1, \ldots, k.$$

По теореме 11.2 для решения $\widehat{v}(\cdot)$ задачи (11.14) при всех $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ будет выполнено неравенство $M\{-(\widehat{p}(t) + \widehat{v}^*(t))h(t)\} \leqslant 0$, где $\widehat{p}(\cdot)$ — п. п. по Бору решение системы

$$\dot{p} = -pA - 2\widehat{x}^*(t),\ p \in \mathbb{R}^{2*},\ \widehat{x}(\cdot) \doteq x(\cdot, \widehat{v}(\cdot)).$$

Из последнего неравенства получаем, что $-(\widehat{p}^*(\cdot) + \widehat{v}^*(\cdot)) \in N_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} = \{\lambda\widehat{v}(\cdot)\}_{\lambda>0}$, и, значит (см. замечание 11.4), при некотором $\widehat{\lambda} > 0$ будет выполнено равенство

$$-\widehat{p}^*(\cdot) = (1 + \widehat{\lambda})\widehat{v}(\cdot),$$

из которого, следует, что пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{p}^*(\cdot))$ будет п. п. по Бору решением системы

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \mathbb{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ \mathbb{A} \doteq \begin{bmatrix}A & \frac{1}{1+\widehat{\lambda}}E_k\\ -2E_k & -A^*\end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}^k, \tag{11.15}$$

где E_k — единичная матрица в $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k)$. Кроме того, принимая во внимание равенство $M\{\frac{1}{2}\widehat{p}^*(t)\widehat{v}(t)\} = -M\{\widehat{x}^*(t)\widehat{x}(t)\}$, получаем, что

$$J(\widehat{v}(\cdot)) = -\frac{\widehat{\lambda}}{2}M\{\widehat{v}^*(t)\widehat{v}(t) \overset{(11.13)}{\geqslant} -\frac{\widehat{\lambda}}{2}. \tag{11.16}$$

Таким образом, для нахождения решения задачи (11.14) достаточно указать максимальное $\widehat{\lambda} > 0$, при котором система (11.15) будет иметь п. п. по Бору решение.

Проиллюстрируем сказанное в случае, когда $\lambda_j(A) = \alpha \pm \beta_j$, $j = 1, \ldots, k$; здесь $k = 2l$, $\alpha > 0$, положительные числа $\beta_1, \ldots, \beta_k$ несоизмеримы. Будем также считать матрицу A приведенной к нормальной жордановой форме, то есть $A = \mathrm{diag}[C(\alpha, \beta_1), \ldots, C(\alpha, \beta_l)]$, где все $C(\alpha, \beta_j)$ совпадают с матрицей

$$C(\alpha, \beta) \doteq \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix} \tag{11.17}$$

при $\beta = \beta_j$. В рассматриваемом случае, используя вид матрицы $\mathbb{A}$ системы (11.15) и свойства блочно-диагональных матриц (см., например, [160]), получим равенство $\det(\mathbb{A} - \lambda E) = \prod\limits_{j=1}^{l} \det A_j(\lambda)$, в котором

$$A_j(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2 - (\alpha^2 + \beta_j^2) + 2/(1 + \widehat{\lambda}) & -2\lambda\beta_j\\ 2\lambda\beta_j & \lambda^2 - (\alpha^2 + \beta_j^2) + 2/(1 + \widehat{\lambda})\end{bmatrix}.$$

Из этого равенства вытекает, что уравнение $\det(\mathbb{A} - \lambda E) = 0$ равносильно уравнению

$$\prod_{j=1}^{l}\Big\{\big(\lambda^2 - (\alpha^2 + \beta_j^2) + 2/(1 + \widehat{\lambda})\big)^2 + 4\lambda\beta_j^2\Big\} = 0.$$

Отсюда получаем, что максимальное число $\widehat{\lambda} > 0$, при котором каждое из уравнений $\big(\lambda^2 - (\alpha^2 + \beta_j^2) + 2/(1 + \widehat{\lambda})\big)^2 + 4\lambda\beta_j^2 = 0$ имеет комплексные решения $\lambda_j = \pm i\beta_j$, удовлетворяет равенству $(1 + \widehat{\lambda})^{-1} = 2\alpha^2$. При этом $\widehat{\lambda}$ система (11.15) будет иметь (напомним, что положительные числа $\beta_1, \dots, \beta_k$ несоизмеримы) п. п. по Бору решение $(\widehat{x}(t), \widehat{p}^*(t))$, $t \in \mathbb{R}$, в котором $\widehat{x}(t) = \frac{1}{\alpha}\widehat{v}(t)$, $\widehat{p}^*(t) = -2\alpha^2\widehat{v}(t)$, где $\widehat{v}(t) = (\widehat{v}_j(t))_{j=1}^l$ и где, в свою очередь, $\widehat{v}_j(t) = \frac{1}{\sqrt{l}}(-\cos\beta_j t, \sin\beta_j t)$. Поэтому в рассматриваемом случае для задачи (11.14), в силу (11.16), минимальное значение целевого функционала равно $-1/2 - \alpha^{-2}$ и достигается при указанном выше (п. п.) $\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S}$.

2. Здесь, при дополнительных предположениях, дополним приведенные в замечании 11.1 утверждения о свойствах функции (11.7), при условии, что выполнено равенство (11.2).

а) Предположим, что $\mathfrak{U}$ совпадает с замыканием (в $\mathbb{R}^m$) некоторой ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^m$.

Л е м м а 11.1. *Допустим, что отображение* $(t, u) \mapsto H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))$ *непрерывно дифференцируемо по* u *в каждой точке* $(t, u) \in \mathbb{R} \times U$ *и* $\operatorname{supp}\widehat{\mu}(t) \subset U$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *в каждой точке* $u \in \operatorname{supp}\widehat{\mu}(t)$ *выполнено* $H'_u(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) = 0$ *и, следовательно, равенство*

$$\langle\widehat{\mu}(t), H'_u(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle = 0. \tag{11.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\widehat{\mu} \in \mathrm{APM}_1$, то [36] существует такое множество функций $u_j(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, $j \in \mathbb{N}$, что

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} u_j(t)} = \operatorname{supp}\widehat{\mu}(\mathrm{t}) \tag{11.19}$$

для п. в. $t \in \mathbb{R}$. При этом, так как (см. равенство (11.2), доказательство леммы 6.2 и обозначение (11.7)) $\operatorname{supp}\widehat{\mu}(t) \subset \{u \in \mathfrak{U} : \mathcal{H}(t) = g(t, u)\}$, где

$$g(t, u) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)), \tag{11.20}$$

то при каждом $j \in \mathbb{N}$ при всех $t \in T_j$, $\operatorname{mes}(\mathbb{R} \setminus T_j) = 0$, будет выполнено равенство $\mathcal{H}(t) = g(t, u_j(t))$, из которого, учитывая, что $u_j(t) \in \operatorname{supp}\widehat{\mu}(\mathrm{t}) \subset \mathrm{U}$, получаем, что $g'_u(t, u_j(t)) = 0$ при всех $t \in T_j$. Теперь, поскольку $g'_u(t, \cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, учитывая равенство (11.19), получаем, что при каждом $t \in T = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} T_j$ для всякого $u \in \operatorname{supp}\widehat{\mu}(\mathrm{t})$ выполнено равенство $g'_u(t, u) = 0$. $\square$

б) Здесь предполагаем, что функция f в задаче (10.1) удовлетворяет условию

1°) для любых заданных $K \in \operatorname{comp}(G)$ и $V \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$ $\quad f \in B(\mathbb{R} \times K \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$, $f'_x \in B(\mathbb{R} \times K \times V \times \mathfrak{U}, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n))$, $\ f'_v \in S(\mathbb{R} \times K \times V \times \mathfrak{U}, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n))$.

Предполагаем также, что функции $f_{\mathfrak{l}} : \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathfrak{U}$ удовлетворяют аналогичному условию и, кроме того, выполнено условие

2°) функции f и $f_{\mathfrak{l}}$ имеют (локально на $\mathbb{R}$) абсолютно непрерывные частные производные по t такие, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\Big(\underset{(x,v,u)\in\mathbb{K}_r\times V\times\mathfrak{U}}{\operatorname{maximum}}\{|f'_t(t, x, v, u)| + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} |f'_{\mathfrak{l}t}(t, x, v, u)|\}\Big) < \infty,$$

где $\mathbb{K}_r \subset \operatorname{comp}(G)$ и $V \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$ определены при доказательстве теоремы 10.1 и $f'_t \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{K}_r \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, $f'_{\mathfrak{l}t} \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{K}_r \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$.

Л е м м а 11.2. *Пусть функции f и $f_{\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ удовлетворяют условиям 1°), 2°) и $\mathfrak{S}\subset\mathbb{R}^m$. Тогда функция $t\mapsto\mathcal{H}(t)$ абсолютно непрерывна, $\dot{\mathcal{H}}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и при п. в. $t\in\mathbb{R}$*

$$\dot{\mathcal{H}}(t)=\widehat{p}(t)\langle\widehat{\mu}(t),f_t'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v},u)-\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}f_{\mathfrak{l}t}'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v},u)\rangle. \tag{11.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $(t,u)\mapsto g(t,u)$, определенную равенством (11.20) при $\widehat{v}(t)\equiv\widehat{v}$ и измеримое отображение $t\mapsto\tilde{\mu}(t)$, совпадающее с $\widehat{\mu}(t)$ в тех точках t, в которых $\langle\widehat{\mu}(t),g(t,u)\rangle=\mathcal{H}(t)$, а в остальных точках с $\delta_{u(t)}$, где $u(t)\in\mathfrak{U}$ такое, что $g(t,u(t))=\mathcal{H}(t)$. Поскольку $\tilde{\mu}(\cdot)$ и $\widehat{\mu}(\cdot)$ отличаются на множестве нулевой меры, то $\tilde{\mu}(\cdot)\in APM_1$ и при этом для всех $t\in\mathbb{R}$ справедливо равенство (6.17) при $\varphi(t)\doteq\mathcal{H}(t)$. Далее, так как для указанной функции g при каждом $u\in\mathfrak{U}$ и п. в. $t\in\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\begin{gathered}g_t'(t,u)=\dot{\widehat{p}}(t)f(t,\widehat{x}(t),\widehat{v},u)+\widehat{p}(t)(f_t'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v},u)+f_x'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v},u)\dot{\widehat{x}}(t))-\\ -\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\big(f_{\mathfrak{l}t}'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v},u)-f_{\mathfrak{l}x}'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v},u)\dot{\widehat{x}}(t)\big),\end{gathered} \tag{11.22}$$

то $g_t'\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ и, кроме того, в силу наложенных ограничений на функции f и $f_{\mathfrak{l}}$, $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}(\max_{u\in\mathfrak{U}}|g_t'(t,u)|)<\infty$. Поэтому по лемме 6.4 получаем, что функция $\mathcal{H}(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $\mathcal{H}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Далее, из определения $\tilde{\mu}(\cdot)$ и равенства (11.22), принимая во внимание, что $\widehat{p}(\cdot)$, $\widehat{x}(\cdot)$ — п. п. по Бору решения систем (9.1) и (11.3), соответственно, получаем, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$ выполнено равенство (11.21).

З а м е ч а н и е 11.5. Отметим, что, если задача (10.1) автономна, то есть функции f и $f_{\mathfrak{l}}$ не зависят от t, то в силу (11.21) $\mathcal{H}(t)\equiv\mathrm{const}$, $t\in\mathbb{R}$. Кроме того, аналогичное лемме 11.2 утверждение можно доказать, если $\mathfrak{S}$ является подмножеством пространства $B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ и $\widehat{v}(\cdot)\in\mathrm{int}\mathfrak{S}$. В этом случае (см. замечание 11.2) надо использовать, то, что для п. в. $t\in\mathbb{R}$ $\langle\widehat{\mu}(t),H_v'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))\rangle=0$.

3. В этом пункте и следующем параграфе для ряда задач оптимального управления п. п. движениями приведем достаточные условия существования оптимального процесса.

Рассмотрим (здесь см. следствие 2.3) п. п. по Степанову систему

$$\dot{x}=A(t,x)+\langle\mu(t),B(t,u)\rangle,\quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\ \mu(\cdot)\in\mathrm{APM}_1, \tag{11.23}$$

в которой $B\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, дифференцируемое по x отображение $(t,x)\mapsto A(t,x)$ такое, что для всякого $K\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $A\in S(\mathbb{R},C(K,\mathbb{R}^n))$, $A_x'\in S(\mathbb{R},C(K,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, и будем предполагать, что множество $D_c\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times\mathrm{APM}_1$ управляемых процессов $(x(\cdot),\mu(\cdot))$ этой системы не пусто. Теперь на D_c для каждого $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{l}$ зададим функционал

$$(x(\cdot),\mu(\cdot))\mapsto J_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),\mu(\cdot))\doteq M\{a_{\mathfrak{l}}(t,x(t))+\langle\mu(t),b_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}, \tag{11.24}$$

где $b_{\mathfrak{l}} \in S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U}, \mathbb{R}))$, а дифференцируемая по x функция $(t,x) \mapsto a_{\mathfrak{l}}(t,x) \in \mathbb{R}$ такая, что для всякого $K \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ $a_{\mathfrak{l}} \in S(\mathbb{R}, C(K, \mathbb{R}))$, $a'_{\mathfrak{l}x} \in S(\mathbb{R}, C(K, \mathbb{R}^{n^*}))$. Обозначим, далее,

$$\mathfrak{D}_c \doteq \{(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c : J_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), \mu(\cdot)) \leqslant 0,\ \mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k},\ J_{\mathfrak{l}}(x(\cdot), \mu(\cdot)) = 0,\ \mathfrak{l} = \mathfrak{k}+1, \ldots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}\}$$

и рассмотрим задачу

$$J_0(x(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf, \quad (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c, \tag{11.25}$$

с которой свяжем функцию

$$h(t,u,p\,; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}) \doteq pB(t,u) - \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}} b_{\mathfrak{l}}(t,u),\ (t,u,p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{n^*}. \tag{11.26}$$

Из теоремы 11.1 получаем, что если $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ является решением задачи (11.25) и система $\dot{y} = A'_x(t, \widehat{x}(t))y$ допускает э. д., то найдутся такие не равные нулю одновременно числа $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, что (см. (11.2) и (11.4))

$$\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \geqslant 0, \quad \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} J_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0, \quad \mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k}, \tag{11.27}$$

$$\sup_{\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1} M\{\langle \mu(t), h(t,u,\widehat{p}(t)) \rangle\} = M\{\langle \widehat{\mu}(t), h(t,u,\widehat{p}(t)) \rangle\}, \tag{11.28}$$

где

$$h(t,u,\widehat{p}(t)) \doteq h(t,u,\widehat{p}(t)\,; \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}),$$

а $\widehat{p}(\cdot)$ — п. п. по Бору решение системы

$$\dot{p} = -pA'_x(t, \widehat{x}(t)) + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} a'_{\mathfrak{l}x}(t, \widehat{x}(t)), \quad (t,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^*}. \tag{11.29}$$

Отметим также, что в силу теоремы 6.5 равенство (11.28) равносильно тому, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\langle \widehat{\mu}(t), h(t,u,\widehat{p}(t)) \rangle = \max\limits_{u \in \mathcal{U}} h(t,u,\widehat{p}(t))$.

Сейчас приведем достаточные условия оптимальности процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ задачи (11.25), в которых, вообще говоря, не требуется э. д. системы $\dot{y} = A'_x(t, \widehat{x}(t))y$.

Т е о р е м а 11.4. *Пусть для* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ *существуют такой набор чисел* $\widehat{\lambda}_0 > 0$, $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *удовлетворяющий условиям* (11.27) *и п. п. по Бору решение* $\widehat{p}(\cdot)$ *системы* (11.29), *при которых выполнено условие максимума* (11.28). *Тогда, если при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *функция*

$$x \mapsto \mathfrak{a}(t,x) \doteq -\widehat{p}(t)A(t,x) + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} a_{\mathfrak{l}}(t,x)$$

выпукла, то процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ *является решением задачи* (11.25).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную пару $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$. Поскольку $\dot{\widehat{p}}(t) = \mathfrak{a}'_x(t,\widehat{x}(t))$, а $x(\cdot)$ и $\widehat{x}(\cdot)$ — п. п. по Бору решения системы (11.24), отвечающие $\mu(\cdot)$ и $\widehat{\mu}(\cdot)$, соответственно, то

$$0 = M\{\frac{d}{dt}[\widehat{p}(t)(x(t)-\widehat{x}(t))]\} =$$
$$= M\{\mathfrak{a}'_x(t,\widehat{x}(t))(x(t)-\widehat{x}(t)) + \widehat{p}(t)(A(t,x(t)) - A(t,\widehat{x}(t)) + \langle \mu(t)-\widehat{\mu}(t), B(t,u)\rangle\}.$$

Отсюда, учитывая определение множества $\mathfrak{D}_c$ и выпуклость функции $x \mapsto \mathfrak{a}(t,x)$ (значит, для п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\quad \mathfrak{a}(t,x(t)) - \mathfrak{a}(t,\widehat{x}(t)) \geqslant \mathfrak{a}'_x(t,\widehat{x}(t))(x(t)-\widehat{x}(t))$), имеем следующие соотношения:

$$0 \leqslant M\{\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}(a_{\mathfrak{l}}(t,x(t)) - a_{\mathfrak{l}}(t,\widehat{x}(t))) + \widehat{p}(t)\langle\widehat{\mu}(t)-\mu(t), B(t,u)\rangle\} \overset{(11.26)}{=}$$

$$= \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}(J_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),\mu(\cdot)) - J_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))) + M\{\langle \mu(t)-\widehat{\mu}(t), h(t,u,\widehat{p}(t))\rangle\} \overset{(11.28)}{\underset{(11.27)}{\leqslant}}$$
$$\leqslant \widehat{\lambda}_0(J_0(x(\cdot),\mu(\cdot)) - J_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)),$$

из которых получаем утверждение теоремы 11.4 . $\square$

Рассмотрим частный случай задачи (11.25), а именно, будем считать, что

$$A(t,x) = A(t)x, \;\; a_{\mathfrak{l}}(t,x) = a_{\mathfrak{l}}(t)x, \tag{11.30}$$

где $A \in S(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, $a_{\mathfrak{l}} \in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n^*})$. Множество $\mathfrak{D}_c$ допустимых процессов этой задачи, отвечающих рассматриваемому случаю, обозначим $\widetilde{\mathfrak{D}}_c$. Тогда, для оптимальности процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \widetilde{\mathfrak{D}}_c$ задачи

$$J_0(x(\cdot),u(\cdot)) = M\{a_0(t,x(t)) + b_0(t,u(t))\} \to \inf, \quad (x(\cdot),u(\cdot)) \in \widetilde{\mathfrak{D}}_c, \tag{11.31}$$

в теореме 11.4 достаточно потребовать лишь выпуклости функции $x \mapsto a_0(t,x)$. При этом, в силу (11.30), $\widehat{p}(\cdot)$ будет п. п. по Бору решением системы уравнений

$$\dot{p} = -pA(t) + \widehat{\lambda}_0 a'_{0x}(t,\widehat{x}(t)) + \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} a_{\mathfrak{l}}(t), \quad (t,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n^*}. \tag{11.32}$$

Т е о р е м а 11.5. *Пусть для допустимого процесса* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \widetilde{\mathfrak{D}}_c$ *существует такой набор чисел* $\widehat{\lambda}_0 > 0$, $\widehat{\lambda}_1,\ldots,\widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *удовлетворяющий условиям* (11.27) *и п. п. по Бору решение* $\widehat{p}(\cdot)$ *системы* (11.32), *при которых выполнено условие максимума* (11.28). *Тогда, если при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *функция* $x \mapsto a_0(t,x)$ *строго выпукла, дважды дифференцируема, и для любого* $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $\quad a''_{0x} \in S(\mathbb{R}, C(K, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$, *то* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \widetilde{\mathfrak{D}}_c$ — *решение задачи* (11.32), *и для любого другого решения* $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \widetilde{\mathfrak{D}}_c$ *задачи* (11.32) *необходимо* $\widehat{x}(t) \equiv x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$

$$\langle\widehat{\mu}(t), B(t,u)\rangle = \langle \mu(t), B(t,u)\rangle. \tag{11.33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ будет решением задачи (11.32), как отмечалось выше, следует из теоремы 11.4. Теперь предположим, что наряду с этим решением, существует другое решение $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\widetilde{\mathfrak{D}}_c$ этой задачи. Тогда, обозначив $\triangle x(t)\doteq x(t)-\widehat{x}(t)$, из определения множества $\widetilde{\mathfrak{D}}_c$ в силу (11.27) получим, что

$$\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}M\{a_{\mathfrak{l}}(t)\triangle x(t)\}\geqslant\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}M\{\langle\widehat{\mu}(t)-\mu(t),b_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}.$$

Кроме того, поскольку $\widehat{p}(\cdot)$ — решение системы уравнений (11.32), то при п. в. $t\in\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}(\widehat{p}(t)\triangle x(t))=\widehat{\lambda}_0a'_{0x}(t,\widehat{x}(t))\triangle x(t)+\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}a_{\mathfrak{l}}(t)\triangle x(t)+\widehat{p}(t)\langle\widehat{\mu}(t)-\mu(t),b_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle,$$

и значит,

$$\widehat{\lambda}_0M\{a'_{0x}(t,\widehat{x}(t))\triangle x(t)\}+\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}M\{a_{\mathfrak{l}}(t)\triangle x(t)\}+M\{\widehat{p}(t)\langle\widehat{\mu}(t)-\mu(t),b_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}=0.$$

Отсюда, в силу предыдущего неравенства (см. также (11.26)) получим, что

$$\widehat{\lambda}_0M\{a'_{0x}(t,\widehat{x}(t))\triangle x(t)\}\geqslant M\{\langle\widehat{\mu}(t)-\mu(t),h(t,u,\widehat{p}(t))\rangle\}+\widehat{\lambda}_0M\{\langle\widehat{\mu}(t)-\mu(t),b_0(t,u)\rangle\}.$$

Из этого неравенства, представив $a_0(t,x(t))$ по формуле Тейлора в виде

$$a_0(t,x(t))=a_0(t,\widehat{x}(t))+a'_{0x}(t,\widehat{x}(t))\triangle x(t)+\frac{1}{2}\triangle x(t)^*a''_{0x}(t,\widehat{x}(t)+\theta\triangle x(t))\triangle x(t),\quad\theta\in(0,1),$$

вытекают следующие соотношения:

$$\widehat{\lambda}_0J_0(x(\cdot),\mu(\cdot))\doteq\widehat{\lambda}_0M\{a_0(t,x(t))+\langle\mu(t),b_0(t,u)\rangle\}\geqslant\widehat{\lambda}_0J_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))+$$
$$+M\{\langle\widehat{\mu}(t)-\mu(t),h(t,u,\widehat{p}(t))\rangle\}+\frac{\widehat{\lambda}_0}{2}M\{\triangle x(t)^*a''_{0x}(t,\widehat{x}(t)+\theta\triangle x(t))\triangle x(t)\}\overset{(11.28)}{\geqslant}$$
$$\geqslant J_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))+\frac{1}{2}M\{\triangle x(t)^*a''_{0x}(t,\widehat{x}(t)+\theta\triangle x(t))\triangle x(t)\}.$$

Отсюда, учитывая, что $J_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\geqslant J_0(x(\cdot),\mu(\cdot))$, положительную определенность при п. в. $t\in\mathbb{R}$ квадратичной формы $\triangle x(t)^*a''_{0x}(t,\widehat{x}(t)+\theta\triangle x(t))\,\triangle x(t)$ (напомним, что мы предположили строгую выпуклость функции $x\mapsto a_0(t,x)$) и лемму 6.3 получаем, что $\mathfrak{x}(t)\equiv 0$, $t\in\mathbb{R}$. Отсюда, в свою очередь, принимая во внимание, что $x(\cdot)$ — решение системы системы (11.32) (здесь см. (11.30)), следует при п. в. $t\in\mathbb{R}$ равенство (11.33).

З а м е ч а н и е 11.6. Отметим, что аналогичные доказанным в этом пункте теоремам 11.4 и 11.5 утверждения справедливы и для соответствующих задач определенных на множестве $\mathfrak{D}\doteq\{(x(\cdot),\mu(\cdot))\in D:(x(\cdot),\delta_{u(\cdot)}\in\mathfrak{D}_c)\}$, где D — совокупность управляемых процессов системы $\dot{x}=A(t,x)+B(t,u(t))$, с управлениями $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$. Формулировку этих утверждений опустим. Отметим лишь, что в формулировке утверждения, аналогичного теореме 11.5, вместо равенства (11.33) будет при п.в. $t\in\mathbb{R}$ выполняться равенство $B(t,u(t))=B(t,\widehat{u}(t))$. Поэтому, в случае инъективности при п. в. $t\in\mathbb{R}$ функции $u\mapsto B(t,u)$ получим, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$ $u(t)=\widehat{u}(t)$. Кроме того, используя пример 10.1, несложно привести задачу с управлениями из пространства $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, которая решения не имеет, а для соответствующей ей расширенной задачи, используя утверждение теоремы 11.4, возможно указать оптимальный процесс.

§12. О существовании оптимального п. п. решения линейной системы с квадратичным функционалом качества

Рассмотрена задача оптимального управления п. п. движениями линейной системы с квадратичным функционалом качества. Для такой задачи приводятся достаточные условия существования оптимального управления, являющегося тригонометрическим полиномом. Эти условия получены из теоремы существования решения у овыпукленной задачи, в которой управлениями являются мерозначные тригонометрические полиномы.

1. Пусть $\mathbb{V}^{\boldsymbol{n}}$ — $\boldsymbol{n}$-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $|x| = \sqrt{x^*x}$ — норма вектора $x = (x_l)_{l=1}^{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{V}^{\boldsymbol{n}}$ (звезда означает эрмитово сопряжение, если $\mathbb{V} = \mathbb{C}$, и операцию транспонирования, если $\mathbb{V} = \mathbb{R}$), через $\lambda(L)$ обозначаем собственное значение оператора $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}^{\boldsymbol{n}})$. Напомним, что каждой функции $f \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ однозначно соотносится ряд Фурье и это соответствие можно представить в виде $f(t) \sim \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j \exp(i\omega_j t)$, где $c_{-j} = \overline{c_j}$, $\omega_{-j} = -\omega_j$ (черта — комплексное сопряжение).

Рассмотрим линейную стационарную систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{12.1}$$

и всюду далее, не оговаривая специально, предполагаем, что система

$$\dot{x} = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{12.2}$$

допускает э. д., то есть [35, 138] существуют пара взаимно дополнительных проекторов $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ и положительные константы $\mathfrak{r}_j, \sigma_j,\ j = 1,2$ такие, что будут выполнены неравенства (7.2) при $\Phi(t) = e^{At}$. При этом функция Грина системы (12.2) представима при всех $t, s \in \mathbb{R}$ в виде $\mathcal{G}(t,s) = e^{At}(\chi_{(-\infty,t)}\mathfrak{P}_1 - \chi_{(t,\infty)}\mathfrak{P}_2)e^{-As}$. Напомним также [35, 138], что система (12.2) э. д. в том и только в том случае, если $\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) \neq 0,\ j = 1,\ldots,n$ и, стало быть, при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ существует матрица

$$\mathcal{R}(\omega) \doteq (i\omega E - A)^{-1} \in \mathrm{Hom}(V^n), \tag{12.3}$$

где E — единичная матрица. Используя определение функции Грина системы (12.2), получаем, что при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)e^{i\omega s}ds = \mathcal{R}(\omega)e^{i\omega t}, \tag{12.4}$$

из которого, в свою очередь, в силу неравенств (7.2) при $\Phi(t) = e^{At}$, следует, что

$$\lim_{\omega\to\infty} |\mathcal{R}(\omega)| = 0. \tag{12.5}$$

Далее, так как система (12.2) э. д., то для всякого $u(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ система (12.1) при $u = u(t)$ имеет п. п. по Бору решение $x(t) = x(t; u(\cdot)),\ t \in \mathbb{R}$. При этом, если

$$u(t) \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{i\omega_j t},\ t \in \mathbb{R}, \tag{12.6}$$

то [47, с. 425] для $x(\cdot)=x(\cdot;u(\cdot))$ имеет место соответствие (см. (12.3))

$$x(t)\sim\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{R}(\omega_j)Bc_je^{i\omega_jt}\overset{(12.4)}{=}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)e^{i\omega_js}dsBc_j. \tag{12.7}$$

Введем в рассмотрение, при фиксированном $\varkappa>0$, множество

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_m(\varkappa)\doteq\big\{u(\cdot)\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^m):M\{|u(t)|^2\}\leqslant\varkappa^2\big\} \tag{12.8}$$

допустимых управлений системы (12.1) и через $\mathcal{U}^N_{\mathrm{trig}}$ обозначим его подмножество, состоящее из тригонометрических полиномов порядка N, то есть п. п. функций u из $\mathcal{U}$, представимых в виде

$$u(t)=\sum_{j=1}^{N}a_j\cos\omega_jt+b_j\sin\omega_jt,\ a_j,b_j\in\mathbb{R}^m,\ j=1,\ldots,N,\ 0\leqslant\omega_N<\ldots<\omega_1, \tag{12.9}$$

и через $\mathcal{U}_{\mathrm{trig}}$ обозначим совокупность всех таких тригонометрических полиномов.

З а м е ч а н и е 12.1. Поскольку (см. (12.8) и (12.9)) для каждого $u(\cdot)$, принадлежащего $\mathcal{U}^N_{\mathrm{trig}}$, $M\{|u(t)|^2\}=\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}|a_j|^2+|b_j|^2\leqslant\varkappa^2$, то в дальнейшем $\mathcal{U}^N_{\mathrm{trig}}$ отождествляем с множеством $\mathcal{K}_N\times\Omega_N$, где

$$\begin{cases}\mathcal{K}_N\doteq\big\{\vec{k}_N\doteq(k_1,\ldots,k_N):k_j\doteq(a_j,b_j),\ j=1,\ldots,N,\ \sum\limits_{j=1}^{N}|a_j|^2+|a_j|^2\leqslant2\varkappa^2\big\},\\ \Omega_N\doteq\big\{\vec{\omega}_N\doteq(\omega_1,\ldots,\omega_N):\ 0\leqslant\omega_N<\ldots<\omega_1\big\}.\end{cases} \tag{12.10}$$

Отметим также, что, используя равенство Парсеваля для п. п. функций, а также оценки (7.2) при $\Phi(t)=e^{At}$, получим, что для каждого $u(\cdot)\in\mathcal{U}$, в силу (12.7), для отвечающего ему (п. п. по Бору) решения $x(\cdot)=x(\cdot;u(\cdot))$ системы (12.1) справедливо неравенство

$$M\{|x(t)|^2\}\leqslant\mathfrak{k}\doteq(\mathfrak{r}_1/\sigma_1+\mathfrak{r}_2/\sigma_2)^2|B|^2\varkappa. \tag{12.11}$$

Сейчас фиксируем матрицы $Q\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $P\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $D\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m)$ и рассмотрим задачу

$$I(x(\cdot),u(\cdot))\to\inf,\ u(\cdot)\in\mathcal{U},\ x(\cdot)=x(\cdot;u(\cdot)), \tag{12.12}$$

где

$$I(x(\cdot),u(\cdot))\doteq M\{x^*(t)Qx(t)+x^*(t)Pu(t)+u^*(t)Du(t)\},$$

в которой управление $\widehat{u}(\cdot)\in\mathcal{U}$ называется оптимальным, если для всякого $u(\cdot)$ из $\mathcal{U}$ $I(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))\leqslant I(x(\cdot),u(\cdot))$, где $\widehat{x}(\cdot)=x(\cdot;\widehat{u}(\cdot))$, и пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ называется решением этой задачи.

Отметим, что задача (12.12) играет важную роль в исследовании задачи о передаче максимума мощности в нагрузку с помощью пассивной электрической цепи с m входами и ограничением мощности входа [127, 129].

Основной целью данного параграфа является доказательство существования решения овыпукленной задачи для следующей задачи

$$I(x(\cdot),u(\cdot))\to\inf,\ u(\cdot)\in\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}},\ \big(x(\cdot)=x(\cdot;u(\cdot))\big), \tag{12.13}$$

и получение достаточных условий существования решения задачи (12.12). Целесообразность рассмотрения задачи (12.12) обусловлена следующим утверждением.

Т е о р е м а 12.1. *Имеет место равенство*

$$\inf\bigl\{I(x(\cdot),u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}\bigr\}=\inf\bigl\{I(x(\cdot),u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}\bigr\}. \tag{12.14}$$

Доказательству теоремы 12.1 предпошлем ряд обозначений и одно утверждение. В дальнейшем, если $k=(a,b)$, то $c=c(k)\doteq a-ib$, и полагаем (см. (12.2))

$$\begin{cases} f_1(k,\omega;Q)=\boldsymbol{f}_1(c,\omega;Q)\doteq c^*B^*\mathcal{R}^*(\omega)Q\mathcal{R}(\omega)Bc,\\ f_2(k,\omega;P)=\boldsymbol{f}_2(c,\omega;P)\doteq c^*B^*\mathcal{R}^*(\omega)Pc,\\ f_3(k;D)=\boldsymbol{f}_3(c\,;D)\doteq c^*Dc. \end{cases} \tag{12.15}$$

Фиксируем, далее, отображение $(z,\omega)\mapsto\boldsymbol{f}(z,\omega)$, $(z,\omega)\in\mathbb{C}^m\times\mathbb{R}$ такое, что для всякого $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f}(\alpha z,\omega))=\alpha^2\boldsymbol{f}(z,\omega),$$

и по нему построим отображение $(z_1,\dots,z_N,\omega_1,\dots,\omega_N)\mapsto\sum\limits_{j=1}^{N}\boldsymbol{f}(z_j,\omega_j)$, где при каждом $j=1,\dots,N$ $\quad z_j\in\mathbb{C}^m$, $\omega_j\in\mathbb{R}$.

Л е м м а 12.1. *Пусть $N>m$. Тогда для всякого набора $(z_1,\dots,z_N,\omega_1,\dots,\omega_N)$, в котором $z_j\in\mathbb{C}^m$, $|z_j|>0$, $\omega_j\in\mathbb{R}$, при $j=1,\dots,N$, найдется такой набор*

$$(\zeta_1,\dots,\zeta_m,\varphi_1,\dots,\varphi_m),\quad \zeta_j\in\mathbb{C}^m,\ j=1,\dots,m,$$

что будут выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m}|\zeta_j|^2=\sum\limits_{j=1}^{N}|z_j|^2,\quad \{\varphi_1,\dots,\varphi_N\}\subset\{\omega_1,\dots,\omega_N\},\\ \sum\limits_{j=1}^{m}\boldsymbol{f}(\zeta_j,\varphi_j)\leqslant\sum\limits_{j=1}^{N}\boldsymbol{f}(z_j,\omega_j). \end{cases} \tag{12.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $N>m$, то векторы $[|z_{j1}|^2,\dots,|z_{jm}|^2]^*\in\mathbb{R}^n$, $j=1,\dots,N$ линейно зависимы, а значит, найдутся не равные нулю одновременно такие числа $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, что будет выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_j[|z_{j1}|^2,\dots,|z_{jm}|^2]^*=0, \tag{12.17}$$

из которого вытекает, что среди этих чисел необходимо существуют как положительные, так и отрицательные. Пусть, далее, $\gamma\doteq\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{f}(z_j,\omega_j)$. В случае, если $\gamma\leqslant0$, то находим минимальное из $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, а в случае $\gamma\geqslant0$ — максимальное из этих чисел. Поскольку рассуждения в обоих случаях аналогичны, то рассмотрим лишь случай, когда $\gamma\leqslant0$. Считаем для определенности, что $\alpha_N\doteq\min\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\{\alpha_j\colon\ \alpha_j<0\}$. Так как $\frac{\gamma}{\alpha_N}\geqslant0$, то

$$\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{f}(z_j,\omega_j)\geqslant\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{f}(z_j,\omega_j)-\frac{\gamma}{\alpha_N}=\sum_{j=1}^{N-1}(1-\frac{\alpha_j}{\alpha_N})\boldsymbol{f}(z_j,\omega_j)=$$
$$=\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{f}((1-\frac{\alpha_j}{\alpha_N})^{1/2}z_j,\omega_j)=\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{f}(z_j^{(1)},\omega_j^{(1)}),$$

где

$$z_j^{(1)} \doteq (1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_N})^{1/2} z_j, \ \omega_j^{(1)} \doteq \omega_j,$$

причем

$$\sum_{j=1}^{N-1} |z_j^{(1)}|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} |z_j|^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_N} |z_j|^2 \overset{(12.17)}{=} \sum_{j=1}^{N} |z_j|^2.$$

Далее, если $m < N-1$, то вышеприведенные рассуждения повторяем для построенного набора $(z_1^{(1)}, \ldots, z_{N-1}^{(1)}, \omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_{N-1}^{(1)})$, и т. д. В итоге, за конечное число итераций получим набор, удовлетворяющий условиям (12.16). □

Доказательство теоремы 12.1. Из (12.8) и неравенства (12.11) следует, что $\sup\{|I(x(\cdot), u(\cdot))|, \ u(\cdot) \in \mathcal{U}\} \leqslant \mathfrak{k}^2|Q| + \mathfrak{k}\varkappa|P| + \varkappa^2|D|$. Используя эту оценку, соответствие (12.7) для решения $x(\cdot)$, отвечающего допустимому управлению $u(\cdot)$ с соответствием (12.6), а также теорему о единственности разложения п. п. функций в ряд Фурье [107], получим равенство

$$\inf\{I(x(\cdot), u(\cdot)), \ u(\cdot) \in \mathcal{U}\} = \inf\{I(x(\cdot), u(\cdot)), \ u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{trig}}\} \tag{12.18}$$

Далее, всякое $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{trig}}$ представимо, при некотором $N \in \mathbb{N}$, в виде (12.9), или в эквивалентном комплексном виде

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{|j| \leqslant N, j \neq 0} c_j e^{i\omega_j t} \quad (c_j = a_j - ib_j), \tag{12.19}$$

а отвечающее ему решение $x(\cdot) \doteq x(\cdot; u(\cdot))$ системы (12.1) в виде (см. (12.3))

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{|j| \leqslant N, j \neq 0} \mathcal{R}(\omega_j) B c_j e^{i\omega_j t}.$$

Поэтому, учитывая ортогональность [47, 107] системы функций $\{e^{i\omega t}, \, \omega \in \mathbb{R}\} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, получаем, что $I(x(\cdot), u(\cdot)) = \sum\limits_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}(c_j, \omega_j)$, где (см. (12.15) при $c = c_j$ и $\omega = \omega_j$) $\boldsymbol{f}(c_j, \omega_j) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{f}_1(c_j, \omega_j; Q) + \boldsymbol{f}_2(c_j, \omega_j; P) + \boldsymbol{f}_3(c_j; D)]$. Поскольку $\boldsymbol{f}(\alpha c_j, \omega_j) = \alpha^2 \boldsymbol{f}(c_j, \omega_j)$, то в случае если $N > m$, по лемме 12.1 найдется набор $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, удовлетворяющий условиям (12.16). Теперь рассмотрим управление

$$v(t) = \frac{1}{2} \sum_{|j| \leqslant m, j \neq 0} \zeta_j e^{i\varphi_j t}.$$

В силу свойств указанного набора получаем, что $v(\cdot) \in \mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}$, а также равенство $I(x(\cdot; v(\cdot)), v(\cdot)) = \sum\limits_{j=1}^{m} \boldsymbol{f}(\zeta_j, \varphi_j)$. Таким образом, для каждого $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{trig}}$ существует такое $v(\cdot) \in \mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}$, что $I(x(\cdot; v(\cdot)), v(\cdot))$ не превосходит $I(x(\cdot), u(\cdot))$. Поэтому из включения $\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}} \subset \mathcal{U}$ и равенства (12.18) вытекает нужное равенство (12.14).

Замечание 12.2. Пусть заданы матрицы $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m$ такие, что матрица $\mathbb{A} = \sum\limits_{l=1}^{m} \mathbb{A}_l$ положительно определена. Рассмотрим, далее, множество

$$\mathbb{U} \doteq \{u(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) : M\{u^* \mathbb{A}_l u(t)\} \leqslant \varkappa^2, \ l = 1, \ldots, m\}$$

и задачу

$$I(x(\cdot),u(\cdot))\to\inf,\ u(\cdot)\in\mathbb{U}. \tag{12.20}$$

Поскольку для каждого $u(\cdot)\in\mathbb{U}$ $\ M\{|u(t)|^2\}\leqslant\varkappa^2/\lambda$, где λ — минимальное собственное значение матрицы $\mathbb{A}$, то, повторив рассуждения вышеприведенного доказательства, легко видеть, что и для задачи (12.20) справедливо утверждение аналогичное теореме 12.1. В частности, если $\mathbb{A}_l$ — диагональная матрица, у которой на диагонали на l-м месте 1, а остальные нули, то получим

$$\mathbb{U}=\big\{u(\cdot)=(u_l(\cdot))_{l=1}^m\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)\colon\ M\{|u_l(t)|^2\}\leqslant\varkappa^2,\ l=1,\dots,m\big\}. \tag{12.21}$$

Именно с таким множеством $\mathbb{U}$, нулевой матрицей P и при условии, что $\operatorname{Re}\lambda_j(A)<0$, $j=1,\dots,m$, для задачи (12.20) в [128] было непосредственно установлено равенство, аналогичное (12.14).

З а м е ч а н и е 12.3. Как отмечалось при доказательстве теоремы 12.1, для каждого $u(\cdot)\in\mathcal{U}^m_{\text{trig}}$, представимого в виде (12.9), имеет место равенство (здесь см. (12.10) при $N=m$ и (12.15)) $I(x(\cdot),u(\cdot))=F(\vec{k}_m,\vec{\omega}_m)$, где

$$F(\vec{k}_m,\vec{\omega}_m)\doteq\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m\operatorname{Re}[f_1(k_j,\omega_j;Q)+f_2(k_j,\omega_j;P)+f_3(k_j;D)], \tag{12.22}$$

а так как (см. замечание 12.1) $\mathcal{U}^m_{\text{trig}}$ отождествляется с $\mathcal{K}_m\times\Omega_m$, то задача (12.13) эквивалентна следующей конечномерной гладкой задаче:

$$F(\vec{k}_m,\vec{\omega}_m)\to\inf,\ (\vec{k}_m,\vec{\omega}_m)\in\mathcal{K}_m\times\Omega_m.$$

При этом $\inf\{I(x(\cdot),u(\cdot)),\,u(\cdot)\in\mathcal{U}\}\overset{(12.14)}{=}\inf\{F(\vec{k}_m,\vec{\omega}_m),\,(\vec{k}_m,\vec{\omega}_m)\in\mathcal{K}_m\times\Omega_m\}$.

2. В пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R},\operatorname{frm}^+(\mathbb{R}^m))$ рассмотрим подмножество (см. (12.10))

$$\mathfrak{M}^m_{\text{trig}}\doteq\bigcup_{q=0}^m\big\{\mu(\cdot)=\mu(\cdot;\vec{k}_m,\omega_m,\dots,\omega_{q+1})\colon\ \vec{k}_m\in\mathcal{K}_m,\ 0\leqslant\omega_m<\ldots<\omega_{q+1})\big\}, \tag{12.23}$$

в котором

$$\mu(t;\vec{k}_m,\omega_m,\dots,\omega_{q+1})\doteq\begin{cases}\nu^{(q)}+\eta^{(q)}(t),\ \text{если}\ q\geqslant1,\\ \eta^{(0)}(t),\ \text{если}\ q=0,\end{cases} \tag{12.24}$$

и где, в свою очередь,

$$\nu^{(q)}\doteq\frac{1}{4}\sum_{j=1}^q\big\{\delta_{-a_j}+\delta_{a_j}+\delta_{-b_j}+\delta_{b_j}\big\},\quad \eta^{(q)}(t)\doteq\sum_{j=q+1}^m\delta_{a_j\cos\omega_jt+b_j\sin\omega_jt}. \tag{12.25}$$

Поскольку для каждого $\mu(\cdot)\in\mathfrak{M}^m_{\text{trig}}$ при любой функции $c\in C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ отображение

$$t\mapsto\langle\mu(t),c(u)\rangle\overset{(12.25)}{=}\frac{1}{4}\sum_{j=1}^q(c(-a_j)+c(a_j)+c(-b_j)+c(b_j))+\sum_{j=q+1}^m c(a_j\cos\omega_jt+b_j\sin\omega_jt)$$

п. п. в смысле Бора, то $\mathfrak{M}^m_{\rm trig}$ — множество мерозначных п. п. (по Бору) функций. Кроме того, для каждого $\mu \in \mathfrak{M}^m_{\rm trig}$

$$M\{\langle \mu(t; \vec{k}_m, \omega_m, \ldots, \omega_{q+1}), u^* u\rangle\} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m |a_j|^2 + |b_j|^2 \overset{(12.10)}{\leqslant} \varkappa^2. \tag{12.26}$$

Далее, на $\mathfrak{M}^m_{\rm trig}$ зададим отображение

$$\mu(\cdot) \mapsto \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq M\{x^*(t)Qx(t) + x^*(t)\langle \mu(t), Pu\rangle + \langle \mu(t), u^*Du\rangle\},$$

где $x(t) \doteq x(t; \mu(\cdot))$, $t \in \mathbb{R}$ — п. п. по Бору решение системы

$$\dot{x} = Ax + B\langle \mu(t), u\rangle = Ax + B\int_{\mathbb{R}^m} u\, \mu(t)(du), \tag{12.27}$$

отвечающее $\mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\rm trig}$, и рассмотрим задачу

$$\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf, \ \mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\rm trig}, \tag{12.28}$$

в которой мера $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\rm trig}$ называется оптимальным управлением, если для всех $\mu(\cdot)$ из $\mathfrak{M}^m_{\rm trig}$ $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot))$, где $\widehat{x}(\cdot) = x(\cdot; \widehat{\mu}(\cdot))$, а пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ — решением этой задачи.

З а м е ч а н и е 12.4. При $q = 0$ (см. (12.24), (12.25)) $\mu(t; \vec{k}_m, \vec{\omega}_m) = \sum\limits_{j=1}^m \delta_{u_j(t)}$, где $u_j(t) = a_j \cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t$. Поскольку $\delta_{u_j(t)}$ отождествляется с $u_j(t)$, то, при $q = 0$ $\mu(t; \vec{k}_m, \vec{\omega}_m)$ отождествляем с $u(t) \doteq \sum\limits_{j=1}^m u_j(t)$. Отметим также, что в этом случае $\mathfrak{T}(x(\cdot; \mu(\cdot; \vec{k}_m, \vec{\omega}_m)), \mu(\cdot; \vec{k}_m, \vec{\omega}_m)) = I(x(\cdot; u(\cdot)), u(\cdot))$. Таким образом, задача (12.28) (здесь см. также (12.26)) является расширением задачи (12.13). Следующее утверждение свидетельствует о корректности этого утверждения.

Л е м м а 12.2. *Для каждого $\mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\rm trig}$ найдется такая последовательность $\{u_p(\cdot)\}_{p=1}^\infty \subset \mathcal{U}^m_{\rm trig}$, что $\lim\limits_{p\to\infty} I(x_p(\cdot), u_p(\cdot)) = \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot))$, где $x_p(\cdot) \doteq x(\cdot; u_p(\cdot))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое $\mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\rm trig}$ (см. (12.23) - (12.25)) представимо в виде $\mu(t) = \nu^{(q)} + \eta^{(q)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (считаем $q \geqslant 1$, ибо случай, когда $q = 0$ тривиален). Так как $x(t; \nu^{(q)}) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, то $x(t; \mu(\cdot)) = x(t; u^{(q)}(\cdot)), t \in \mathbb{R}$, где

$$u^{(q)}(t) = \sum_{j=q+1}^m a_j \cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t.$$

Далее, для каждого $p \in \mathbb{N}$ зафиксируем такой набор $\omega_q^{(p)} < \ldots < \omega_1^{(p)}$, что $\omega_{q+1} < \omega_q^{(p)}$ и $\lim\limits_{p\to\infty} \omega_q^{(p)} = \infty$. В свою очередь, по этому набору построим тригонометрический полином $u_p(t) \doteq u_p^{(q)}(t) + u^{(q)}(t)$, в котором $u_p^{(q)}(t) = \sum\limits_{j=1}^q a_j \cos\omega_j^{(p)} t + b_j \sin\omega_j^{(p)} t$. Поскольку $M\{|u_p(t)|^2\} = \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^m |a_j|^2 + |b_j|^2 \overset{(12.10)}{\leqslant} \varkappa^2$, то $\{u_p(\cdot)\}_{p=1}^\infty \subset \mathcal{U}^m_{\rm trig}$ и, кроме того, очевидно, $x_p(\cdot) \doteq x(\cdot; u_p(\cdot)) = x(\cdot; u_p^{(q)}(\cdot)) + x(\cdot; u^{(q)}(\cdot))$. Далее, так как

$$x(t; u_p^{(q)}(\cdot)) = \frac{1}{2}\sum_{|j|\leqslant q,\, j\neq 0} \mathcal{R}(\omega_j^{(p)}) B c_j e^{i\omega_j^{(p)} t},$$

то, принимая во внимание, что $\lim\limits_{p\to\infty}\omega_q^{(p)}=\infty$, в силу (12.5) получаем $|x(t;u_p^{(q)}(\cdot))|\underset{t\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows}0$ при $p\to\infty$. Поэтому, в силу равенств

$$M\{u_p^*(t)Du_p(t)\}=M\{\langle\mu(t)u^*,Du\rangle\},\quad x(t;\mu(\cdot))=x(t;u^{(q)}(\cdot)),$$

получим, что $\lim\limits_{p\to\infty}I(x_p(\cdot),u_p(\cdot))=\mathfrak{I}(x(\cdot),\mu(\cdot))$. $\square$

Из леммы 12.2 (см. также замечание 12.4) следует, что

$$\inf\bigl\{I(x(\cdot),u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}^m_{\text{trig}}\bigr\}=\inf\bigl\{\mathfrak{I}(x(\cdot),\mu(\cdot)),\ \mu(\cdot)\in\mathfrak{M}^m_{\text{trig}}\bigr\}.\tag{12.29}$$

Т е о р е м а 12.2. *Решение задачи* (12.28) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (12.29) следует, что найдется такая последовательность управлений $\{v_p(\cdot)\}_{p=1}^\infty\subset\mathcal{U}^m_{\text{trig}}$, что

$$\lim_{p\to\infty}I(y_p(\cdot),v_p(\cdot))=\iota\doteq\inf\bigl\{\mathfrak{I}(x(\cdot),\mu(\cdot)),\ \mu(\cdot)\in\mathfrak{M}^m_{\text{trig}}\bigr\},\tag{12.30}$$

где $y_p(\cdot)\doteq x(\cdot;v_p(\cdot))$, а каждое $v_p(\cdot)$ представимо в виде

$$v_p(t)=\sum_{j=1}^m a_j^{(p)}\cos\omega_j^{(p)}t+b_j^{(p)}\sin\omega_j^{(p)}t,\ \ t\in\mathbb{R},\tag{12.31}$$

в котором $k_j^{(p)}=(a_j^{(p)},b_j^{(p)})$ и $0\leqslant\omega_m^{(p)}<\ldots<\omega_1^{(p)}$ такие, что (см. (12.10) при $N=m$)

$$\vec{k}_m^{(p)}=(k_1^{(p)},\ldots,k_m^{(p)})\in\mathcal{K}_m,\quad \vec{\omega}_m^{(p)}=(\omega_1^{(p)},\ldots,\omega_m^{(p)})\in\Omega_m.$$

Будем считать, для определенности, что

$$\lim_{p\to\infty}\omega_j^{(p)}=\begin{cases}\infty, & \text{при } 1\leqslant j\leqslant q,\\ \omega_j, & \text{при } q+1\leqslant j\leqslant m.\end{cases}\tag{12.32}$$

Ясно, что $0\leqslant\omega_m\leqslant\ldots\leqslant\omega_{q+1}$. Полагаем, далее,

$$\mathfrak{q}_{l+1}\doteq\mathfrak{q}_l+m_l,\ \ l=1,\ldots,\mathfrak{k},$$

где $\mathfrak{q}_1\doteq q$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}+1}\doteq m$, и пусть

$$\widehat{\omega}_l\doteq\omega_{\mathfrak{q}_l+1}=\ldots=\omega_{\mathfrak{q}_l+m_l},\ \ l=1,\ldots,\mathfrak{k}.\tag{12.33}$$

Поскольку $\mathcal{K}_m$ — компактное множество, то, без ограничения общности, можно считать, что

$$\lim_{p\to\infty}\vec{k}_m^{(p)}=\vec{k}_m=(k_1,\ldots,k_m)\in\mathcal{K}_m,\quad k_j=(a_j,b_j),\ \ j=1,\ldots,m.\tag{12.34}$$

при этом каждая компонента $k_j=(a_j,b_j)$ в $\vec{k}_m$ будет являться пределом, при $p\to\infty$, соответствующей компоненты $k_j^{(p)}=(a_j^{(p)},b_j^{(p)})$ из $\vec{k}_m^{(p)}$. Далее, в силу (12.31) (здесь см. замечание 12.3) при всех $p\in\mathbb{N}$ выполнено равенство $I(y_p(\cdot),v_p(\cdot))=F(\vec{k}_m^{(p)},\vec{\omega}_m^{(p)})$, в котором $F(\vec{k}_m^{(p)}, \vec{\omega}_m^{(p)})$ определено равенством (12.22) при $\vec{k}_m = \vec{k}_m^{(p)}$, $\vec{\omega}_m = \vec{\omega}_m^{(p)}$. Поэтому, в силу непрерывности отображений $(k,\omega) \mapsto f_1(k,\omega;Q)$, $f_2(k,\omega;P)$, $f_3(k;D)$, указанных в (12.15), принимая во внимание равенства (12.5), (12.32) – (12.34), из (12.30) получаем, что

$$\iota = \mathfrak{F}(\vec{k}_m, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_m) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Re} f_3(k_j; D), \tag{12.35}$$

где

$$\mathfrak{F}(\vec{k}_m, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_m) \doteq \frac{1}{2}\sum_{j=q+1}^{m} \operatorname{Re}[f_1(k_j,\omega_j;Q) + f_2(k_j,\omega_j;P) + f_3(k_j;D)].$$

Полагая

$$\mathbb{A}(\omega) \doteq B^*\mathcal{R}^*(\omega)Q\mathcal{R}(\omega)B + B^*\mathcal{R}^*(\omega)P + D,$$

и воспользовавшись равенством $\operatorname{Re}[z^*\mathbb{A}(\omega)z] = \frac{1}{2}z^*\mathbb{M}(\omega)z,\ z \in \mathbb{C}^m$, где

$$\mathbb{M}(\omega) \doteq \mathbb{A}(\omega) + \mathbb{A}^*(\omega),$$

получим (см. (12.33)), что

$$\mathfrak{F}(\vec{k}_m, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_m) = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\mathfrak{k}}\sum_{j=\mathfrak{q}_l+1}^{\mathfrak{q}_l+m_l} c_j^*\mathbb{M}(\widehat{\omega}_l)c_j \quad (c_j \doteq a_j - ib_j). \tag{12.36}$$

Пусть, далее, λ_l — минимальное собственное значение эрмитовой матрицы $\mathbb{M}(\widehat{\omega}_l)$ и $h_l \in \mathbb{C}^m$ — отвечающий ему нормированный собственный вектор. Тогда, в силу отношений Рэлея [160], имеют место следующие соотношения:

$$c_j^*\mathbb{M}(\widehat{\omega}_l)c_j \geqslant \lambda_l c_j^* c_j, \quad h_l^*\mathbb{M}(\widehat{\omega}_l)h_l = \lambda_l. \tag{12.37}$$

Теперь рассмотрим меры $\Delta_l(t) \doteq \delta_{u_l(t)}$, где

$$u_l(t) \doteq \sqrt{\mathfrak{c}_l}\big(\operatorname{Re}(h_l)\cos\widehat{\omega}_l t - \operatorname{Im}(h_l)\sin\widehat{\omega}_l t\big), \quad \mathfrak{c}_l \doteq \sum_{j=\mathfrak{q}_l+1}^{\mathfrak{q}_l+m_l} c_j^* c_j, \tag{12.38}$$

и положим

$$\widehat{\mu}(t) \doteq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{q}\{\delta_{-a_j} + \delta_{a_j} + \delta_{-b_j} + \delta_{b_j}\} + \sum_{l=1}^{\mathfrak{k}} \Delta_l(t).$$

Из определения $\widehat{\mu}(\cdot)$ и соотношений

$$M\{\langle\widehat{\mu}(t), u^*u\rangle\} \doteq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}|a_j|^2 + |b_j|^2 + \sum_{l=1}^{\mathfrak{k}} M\{u_l^*(t)u_l(t)\} \overset{(12.38)}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}|a_j|^2 + |b_j|^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\mathfrak{k}}\sum_{j=\mathfrak{q}_l+1}^{\mathfrak{q}_l+m_l} c_j^* c_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}|a_j|^2 + |b_j|^2 \leqslant \varkappa^2,$$

следует, что $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}}$. Далее, в силу (12.37) из (12.36) вытекает неравенство $\mathfrak{F}(\vec{k}_m, \omega_{q+1}, \dots, \omega_m) \geqslant \frac{1}{4}\sum\limits_{l=1}^{\mathfrak{k}} \lambda_l \mathfrak{c}_l$, и стало быть (см. (12.35)),

$$\iota \geqslant \alpha \doteq \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\mathfrak{k}} \lambda_l \mathfrak{c}_l + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Re} f_3(k_j; D). \tag{12.39}$$

С другой стороны, решение системы (12.27), отвечающее $\widehat{\mu}(\cdot)$, представимо в виде

$$\widehat{x}(t) = \sum_{|l|\leqslant\mathfrak{k},\, l\neq 0} \frac{\sqrt{\mathfrak{c}_l}}{2}\,\mathcal{R}(\widehat{\omega}_l) h_l e^{i\widehat{\omega}_l t},$$

где $h_{-l} = \overline{h_l}$, $\widehat{\omega}_{-l} = -\widehat{\omega}_l$. Поэтому (см. (12.37))

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Re} f_3(k_j; D) + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\mathfrak{k}} h_l^* \mathbb{M}(\widehat{\omega}_l) h_l = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Re} f_3(k_j; D) + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\mathfrak{k}} \lambda_l \mathfrak{c}_l \doteq \alpha,$$

откуда, в силу (12.39), получаем, что $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ — задачи (12.28).

С л е д с т в и е 12.1. *Пусть матрица $Q \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ отрицательно определенная. Тогда для любой фиксированной матрицы $D \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m)$ задача*

$$I_0(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{x^*(t)Qx(t) + u^*(t)Du(t)\} \to \inf,\ u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{12.40}$$

имеет решение $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, где $\widehat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 12.2 для задачи

$$\mathfrak{T}_0(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq M\{x^*(t)Qx(t) + \langle \mu(t), u^* D u\rangle)\} \to \inf,\ \mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}}, \tag{12.41}$$

где $x(\cdot) = x(\cdot, \mu(\cdot))$ — п. п. по Бору решение системы (12.27), отвечающее $\mu(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}}$, являющейся овыпукленной для задачи

$$I_0(x(\cdot), u(\cdot)) \to \inf,\ u(\cdot) \in \mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}},\ x(\cdot) = x(\cdot, u(\cdot)),$$

существует оптимальное управление $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathfrak{M}^m_{\mathrm{trig}}$, которое согласно (12.23), (12.24) представимо в виде: $\widehat{\mu}(t) = \nu^{(q)} + \eta^{(q)}(t)$, где $\nu^{(q)}$ и $\eta^{(q)}(t)$ заданы равенствами (12.25). Допустив, что $q \geqslant 1$, рассмотрим управление $u(t) = v(t) + u^{(q)}(t),\ t \in \mathbb{R}$, где

$$v(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j \cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t, \quad u^{(q)}(t) = \sum_{j=q+1}^{m} a_j \cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t,$$

а числа $\omega_q < \dots < \omega_1$ выбраны так, что $\omega_{q+1} < \omega_q$. Ясно, что $u(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}$ и $x(\cdot) = x(\cdot; v(\cdot)) + x^{(q)}(\cdot)$, где $x(\cdot) = x(\cdot; u(\cdot))$, $x^{(q)}(\cdot) = x(\cdot; u^{(q)}(\cdot))$. Теперь, учитывая равенства $M\{u^*(t)Du(t)\} = M\{\langle \widehat{\mu}(t), u^* D u\rangle\}$, $\widehat{x}(\cdot) \doteq x(\cdot; \widehat{\mu}(\cdot)) = x^{(q)}(\cdot)$, отрицательную определенность матрицы Q и выбор чисел $\omega_1, \dots, \omega_q$, получаем, что

$$I_0(x(\cdot), u(\cdot)) = M\{x^*(t; v(\cdot))Qx(t; v(\cdot)) + x^{(q)*}(t)Qx^{(q)}(t) + u^*(t)Du(t)\} <$$
$$< M\{x^{(q)*}(t)Qx^{(q)}(t) + u^*(t)Du(t)\} = \mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)),$$

что противоречит (12.29). Таким образом, $q = 0$, то есть (см. замечание 12.4) решение задачи (12.40) существует и оптимальное управление принадлежит $\mathcal{U}^m_{\mathrm{trig}}$.

С л е д с т в и е 12.2. *Пусть в задаче* (12.40) *матрица* Q *положительно определенная. Тогда для любой фиксированной матрицы* D *оптимальное управление существует и является мерой*

$$\nu_0^{(m)} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\{\delta_{-a_j^0} + \delta_{a_j^0} + \delta_{-b_j^0} + \delta_{b_j^0}\},$$

отвечающей некоторому набору $\vec{k}_m^0 = (k_1^0, \ldots, k_m^0) \in \mathcal{K}_m$, $k_j^0 = (a_j^0, b_j^0)$, $j = 1, \ldots, m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На компактном множестве $\mathcal{K}_m$ рассмотрим непрерывное отображение $\vec{k}_m \mapsto \sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{Re} f_3(k_j; D)$. По теореме Вейерштрасса найдется набор $\vec{k}_m^0 \in \mathcal{K}_m$, при котором это отображение принимает минимальное значение. По этому набору строим меру $\nu_0^{(m)}$. Ясно, что $x(t; \nu_0^{(m)}) \equiv 0$. Далее, по теореме 12.2 оптимальное управление задачи (12.41) ищем в виде $\mu(t) = \nu^{(q)} + \eta^{(q)}(t)$, где $\nu^{(q)}$ и $\eta^{(q)}(t)$ заданы равенствами (12.25). Для всякого такого управления при $q < m$ из равенства $x(\cdot; \mu(\cdot)) = x(\cdot; u^{(q)}(\cdot))$, где $u^{(q)}(t)$ то же, что и при доказательстве следствия 12.1, и положительной определенности матрицы Q имеем следующие соотношения:

$$\mathfrak{T}_0(x(\cdot; \mu(\cdot)), \mu(\cdot)) = M\{x^*(t; u^{(q)}(\cdot))Qx(t; u^{(q)}(\cdot)) + \langle \mu(t), u^*Du\rangle\} >$$
$$> M\{\langle \mu(t), u^*Du\rangle\} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Re} f_3(k_j; D) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Re} f_3(k_j^0; D) = \mathfrak{T}_0(0, \nu_0^{(m)}),$$

из которых следует, что при сделанных предположениях пара $(0, \nu_0^{(m)})$ является решением задачи (12.41).

3. Приведенные выше утверждения указывают еще раз на целесообразность расширения п. п. функций до мерозначных п. п. функций. Кроме того, полученные результаты, совместно с результатами второго и седьмого параграфов, создают определенную предпосылку для исследования в терминах второй вариации вопроса о целесообразности расширения допустимых процессов в задаче оптимального управления периодическоми движениями до почти периодических. Поясним последнее более подробно. С этой целью, определим овыпукленную задачу для (автономной) задачи оптимального управления периодическими движениями в постановке, которая будет использована в дальнейшем.

Пусть $f \in C(G \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$. Через $\mathbb{P}_{c,\omega}$ ($\omega > 0$) обозначим совокупность ω-периодических пар (управляемых процессов) $(x(\cdot), \mu(\cdot))$, в которых $x : \mathbb{R} \to G$ является ω-периодическим решением системы

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(x, u)\rangle = \int_{\mathcal{U}} f(x, u)\mu(t)(du), \tag{12.42}$$

отвечающим ω-периодическому управлению $\mu \in \mathcal{M} \doteq \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$. Теперь рассмотрим [8] задачу

$$\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), f_0(x(t), u)\rangle\} \to \inf,\ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathbb{P}_c \doteq \bigcup_{\omega > 0} \mathbb{P}_{c,\omega}, \tag{12.43}$$

[8] Напомним, что для всякой ω-периодической функции $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $M\{F(t)\} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} F(t)dt$.

в которой $f_0 \in C(G \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$. Для задачи (12.43) — *задачи оптимального управления периодическими движениями,* процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathbb{P}_{c,\widehat{\omega}}$ называется решением, если для любого $\omega > 0$ и всякого процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathbb{P}_{c,\omega}$ выполнено неравенство

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = \frac{1}{\widehat{\omega}} \int_0^{\widehat{\omega}} \langle \widehat{\mu}(t), f_0(\widehat{x}(t), u) \rangle dt \leqslant \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \langle \mu(t), f_0(x(t), u) \rangle dt = \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)).$$

Далее, так же как и для системы (9.1), через D_c обозначим совокупность п. п. управляемых процессов системы (12.42), то есть совокупность пар $(x(\cdot), \mu(\cdot))$, в которых $x : \mathbb{R} \to G$ — п. п. по Бору решением системы (12.42), отвечающее $\mu \in \mathrm{APM}_1$ и такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$.

Таким образом, задача (12.43), с одной стороны, служит овыпуклением задачи

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{f_0(x(t), u(t))\rangle\} \to \inf,\ (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{P}, \tag{12.44}$$

определенной на множестве $\mathbb{P} \doteq \{(z(\cdot), v(\cdot)) : (z(\cdot), \delta_{v(\cdot)}) \in \mathbb{P}_c\}$, а с другой — сужением на множество $\mathbb{P}_c \subset D_c$ задачи оптимального управления п. п. движениями

$$\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), f_0(x(t), u) \rangle\} \to \inf,\ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c. \tag{12.45}$$

Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\iota_1 \doteq \inf\bigl\{\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)),\ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c\bigr\} \leqslant \inf\bigl\{\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)),\ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathbb{P}_c\bigr\} \doteq \iota_2, \tag{12.46}$$

$$\iota_2 \leqslant \inf\bigl\{I(x(\cdot), u(\cdot)),\ (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{P}\bigr\} \doteq \iota_3. \tag{12.47}$$

З а м е ч а н и е 12.5. Аналогичным образом можно определить (см. (12.43)) задачу $\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf,\ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{P}_c$, определенную на множестве $\mathcal{P}_c \subset \mathfrak{D}_c$, где $\mathfrak{D}_c \doteq \bigl\{M\{\langle \mu(t), f_{\mathfrak{l}}(x, u) \rangle\} \leqslant 0,\ \mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k} + \mathfrak{m}\bigr\}$ $(f_{\mathfrak{l}} \in C(G \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, то есть рассмотреть задачу оптимального управления периодическими движениями при наличии ограничений на средние, являющуюся сужением задачи оптимального управления п. п. движениями $\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf,\ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ на $\mathcal{P}_c$. Поэтому в этом случае также будет выполнено неравенство вида (12.46).

Далее предполагаем, что $\iota_1 > -\infty$ и функция $(x, u) \mapsto f(x, u)$ непрерывно дифференцируема на $G \times \mathfrak{U}$ по переменной x. В случае если для ω-периодического процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathbb{P}_{c,\omega}$, отвечающая ему система уравнений

$$\dot{y} = \langle \mu(t), f'_x(x(t), u) \rangle y,\ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{12.48}$$

не имеет ω-периодических решений отличных от тривиального, то используя [149] теорему о непрерывной зависимости периодических решений от параметра, можно показать, что найдется такая последовательность $\{(x_j(\cdot), u_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}_{\omega}$, что $\lim\limits_{j \to \infty} I(x_j(\cdot), u_j(\cdot)) = \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot))$, то есть при сделанном предположении расширение задачи (12.44) до задачи (12.43) корректно. Отметим также, что при отсутствии указанного свойства системы (12.48) может случиться, что значение $\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot))$ будет строго меньше (см. (12.47)) ι_3, либо, вообще, у задачи (12.44) множество $\mathbb{P}$ может оказаться пустым [80, 149, 190].

Сейчас, используя следствие 12.1, приведем примеры (см. также примеры в [80, 164, 198]), иллюстрирующие, что расширение множества периодических процессов в задаче оптимального управления периодическими движениями (см. (12.44), а также замечание 12.5) до множества п. п. процессов может быть эффективным. Указанное расширение называем *эффективным*, если выполняется один из указанных ниже случаев:

1) в исходной задаче оптимального управления периодическими движениями inf ее целевого функционала не достигается ни при каком допустимом периодическом процессе, а достигается на некотором п. п. процессе соответствующей задачи оптимального управления п. п. движениями, при этом точные нижние грани этих задач могут совпадать;

2) расширение множества периодических процессов в заданной задаче оптимального управления периодическими движениями до множества п. п. процессов приводит к уменьшению точной нижней грани значений целевого функционала.

В следующем примере используем обозначение (11.17) для матрицы $C(\alpha,\beta)$, и при $\alpha\neq 0$, $\beta>0$ и $\omega\geqslant 0$ полагаем $\mathcal{R}(\alpha,\beta,\omega)\doteq(C(\alpha,\beta)-i\omega E)^{-1}$.

Непосредственно можно показать, что $|\mathcal{R}(\alpha,\beta,\omega)|^2=k^{-1}(\alpha^2+\beta^2+\omega^2+2\omega\beta)$, где $k\doteq\alpha^2(\alpha^2+2\beta^2+2\omega^2)+(\beta^2-\omega^2)^2$. Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases}|\mathcal{R}(\alpha,\beta,\omega)|^2<\alpha^{-2}, \text{ если } \ \omega\neq\beta,\\ |\mathcal{R}(\alpha,\beta,\omega)|^2=\alpha^{-2}, \text{ если } \ \omega=\beta.\end{cases} \tag{12.49}$$

П р и м е р 12.1. Рассмотрим систему $\dot{x}=Ax-u(t)$ с блочно-диагональной матрицей $A=\operatorname{diag}[C(\alpha,\beta_1),C(\alpha,\beta_2)]\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4)$, где $\alpha>0$ и положительные числа β_1,β_2 несоизмеримы. Пусть, далее, $\mathcal{O}_2^4[0]\doteq\{x\in\mathbb{R}^4:|x|^2\leqslant 2\}$ и

$$\mathbb{U}\doteq\bigl\{u(\cdot)=(u_j(\cdot))_{j=1}^4\in S(\mathbb{R},\mathcal{O}_2^4[0]):M\{u_1^2(t)+u_2^2(t)\}\leqslant 1,\ M\{u_3^2(t)+u_4^2(t)\}\leqslant 1\bigr\}.$$

Сейчас рассмотрим задачу

$$J(x(\cdot),u(\cdot))\doteq\frac{1}{4}M\{(x_1(t)+\ldots+x_4(t))^2\}\to\sup,\ u(\cdot)\in\mathbb{U}, \tag{12.50}$$

где $x(\cdot)=(x_j(\cdot))_{j=1}^4$ — (единственное) п. п. по Бору решение системы $\dot{x}=Ax-u(t)$, отвечающее $u(\cdot)\in\mathbb{U}$.

Поскольку $\mathbb{U}$ содержит множество $\mathbb{U}_p$, состоящее из всех периодических измеримых отображений $u:\mathbb{R}\to\mathcal{O}_2^4[0]$, удовлетворяющих указанным в определении $\mathbb{U}$ ограничениям, а само содержится в множестве

$$\mathcal{U}\doteq\bigl\{u(\cdot)=(u_j(\cdot))_{j=1}^4\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^4):M\{u_1^2(t)+u_2^2(t)\}\leqslant 1,\ M\{u_3^2(t)+u_4^2(t)\}\leqslant 1\bigr\},$$

то справедливы неравенства

$$\varkappa_1\leqslant\sup\{J(x(\cdot),u(\cdot)),u(\cdot)\in\mathbb{U}\}\leqslant\varkappa_2, \tag{12.51}$$

где

$$\varkappa_1\doteq\sup\{J(x(\cdot),u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathbb{U}_p\},\quad \varkappa_2\doteq\sup\{J(x(\cdot),u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}\}$$

Далее рассмотрим задачу

$$I(x(\cdot),u(\cdot))\doteq\frac{1}{2}M\{x^*(t)x(t)\}\to\sup,\ u(\cdot)\in\mathcal{U}. \tag{12.52}$$

Очевидно, что
$$\varkappa_2 \leqslant \sup\{I(x(\cdot),u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}\} \doteq \varkappa_3,$$
и, кроме того, для такой задачи (см. замечание 12.2 и доказательство теоремы 12.1) имеет место утверждение, аналогичное следствию 12.1. Поэтому решение задачи (12.52) существует и оптимальное управление достаточно искать в множестве $\mathcal{U}^4_{\mathrm{trig}}\subset\mathcal{U}$, то есть (см. (12.9)) среди тригонометрических полиномов вида
$$u(t)=\sum_{j=1}^{4} a_j\cos\omega_j t + b_j\sin\omega_j t, \tag{12.53}$$
в которых коэффициенты $a_j=(a_{jl})_{l=1}^4$, $b_j=(b_{jl})_{l=1}^4\in\mathbb{R}^4$ такие, что
$$\frac{1}{2}\sum_{l=2q-1}^{2q}|a_{jl}|^2+|b_{jl}|^2\leqslant 1,\ q=1,2\,. \tag{12.54}$$
Укажем его. Используя (см. (12.17)) вид решения системы $\dot{x}=Ax-u(t)$, отвечающего управлению $u(t)\in\mathcal{U}^4_{\mathrm{trig}}$, получим равенство
$$I(x(\cdot),p(\cdot))=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}c_j^*\mathbb{M}^*(\omega_j)\mathbb{M}(\omega_j)c_j, \tag{12.55}$$
где $c_j=a_j-ib_j$, $\mathbb{M}(\omega_j)=\mathrm{diag}[\mathcal{R}(\alpha,\beta_1,\omega_j),\mathcal{R}(\alpha,\beta_1,\omega_j)]$. Поскольку для координат коэффициентов a_j,b_j, входящих в определение $p(\cdot)\in\mathcal{U}^4_{\mathrm{trig}}$ выполнены неравенства (12.54), то из соотношений (12.49) вытекает, что максимальное значение функционала в задаче (12.52) равно $2\alpha^{-2}$ и достигается на тригонометрическом полиноме $\widehat{u}(t)=(\cos\beta_1 t,\,-\sin\beta_1 t,\,\cos\beta_2 t,\,-\sin\beta_2 t)^*$, который, в силу несоизмеримости β_1 и β_2, является п. п. по Бору функцией. Кроме того, поскольку $\widehat{u}(\cdot)\in\mathbb{U}$, то (см. (12.51)) п. п. процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, где $\widehat{x}(\cdot)=\frac{1}{\alpha}\widehat{u}(\cdot)$, будет решением задачи (12.50). При этом $J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))=2\alpha^{-2}$.

Сейчас покажем, что для всех $u(\cdot)\in\mathbb{U}_p$ $\ J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))<2\alpha^{-2}$. Допустим противное, то есть предположим, что найдется T-периодическое управление $\tilde{u}(\cdot)$ из $\mathcal{U}_p$ такое, что
$$\varkappa_1=J(\tilde{x}(\cdot),\tilde{u}(\cdot))=2\alpha^{-2}. \tag{12.56}$$
С другой стороны, в $\mathcal{U}$ рассмотрим подмножество $\mathcal{U}_T$, состоящее из T-периодических управлений. В свою очередь, в $\mathcal{U}_T$ выделим подмножество $\tilde{\mathcal{U}}^4_{\mathrm{trig}}$ $\tilde{T}$-периодических тригонометрических полиномов вида $p(t)=\sum\limits_{j=1}^{4}a_j\cos\frac{2\pi j}{T}t+b_j\sin\frac{2\pi j}{T}t$, в которых, в соответствии с определением множества $\mathcal{U}$, коэффициенты $a_j=(a_{jl})_{l=1}^4$, $b_j=(b_{jl})_{l=1}^4\in\mathbb{R}^4$, такие, что для их координат выполнены неравенства (12.54).

Множество $\tilde{\mathcal{U}}^4_{\mathrm{trig}}$ отождествим с компактным множеством $\mathcal{K}_4$, состоящим из наборов $\big((a_1,b_1),\ldots,(a_4,b_4)\big)$, для которых выполнены неравенства (12.54).

Из равенства $\sup\big\{I(x(\cdot),u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}_T\big\}=\sup\big\{I(x(\cdot),p(\cdot)),\ p(\cdot)\in\tilde{\mathcal{U}}^4_{\mathrm{trig}}\big\}\doteq\varkappa_4$, в силу (12.56) и включений $\tilde{\mathcal{U}}^4_{\mathrm{trig}}\subset\mathcal{U}^4_{\mathrm{trig}}\subset\mathcal{U}$, получаем, что $\varkappa_4=2\alpha^{-2}$. Отсюда, поскольку при каждом $p(\cdot) \in \tilde{\mathcal{U}}^4_{\mathrm{trig}}$ выполнено равенство (12.55) при $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$, то, в силу компактности множества $\mathcal{K}_4$ найдется такой набор $\big((\widehat{a}_1, \widehat{b}_1), \dots, (\widehat{a}_4, \widehat{b}_4)\big) \in \mathcal{K}_4$, что будет выполнено равенство

$$\gamma \doteq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} \widehat{c}_j^{\,*}\mathbb{M}^*(2\pi j T^{-1})\mathbb{M}(2\pi j T^{-1})\widehat{c}_j = 2\alpha^{-2} \quad (\widehat{c}_j = \widehat{a}_j - i\widehat{b}_j).$$

Вместе с тем, в силу (12.49) и неравенств (12.54) для координат векторов $\widehat{a}_j$ и $\widehat{b}_j$ следует, что $\gamma < 2\alpha^{-2}$. Полученное противоречие показывает, что задача (12.50) является эффективным расширением задачи $J(x(\cdot), u(\cdot)) \to \sup$, $u(\cdot) \in \mathbb{U}_p$.

П р и м е р 12.2. В данном примере используем принятые в примере 12.1 обозначения. Изменим лишь вид целевого функционала в задаче (12.50).

Фиксируем диагональную матрицу $D = \mathrm{diag}[d_1, \dots, d_4]$. Полагаем $D_1 = \mathrm{diag}[d_1, d_2]$, $D_2 = \mathrm{diag}[d_3, d_4]$, и пусть $\mathbb{M}_l(\omega) \doteq D_l - \mathcal{R}^*(\alpha, \beta_l, \omega)\mathcal{R}(\alpha, \beta_l, \omega)$ при $l = 1, 2$. Отметим, что число

$$\lambda_l(\omega) \doteq \frac{1}{2k}\big(k(d_{2l-1} + d_{2l}) - 2(\alpha_l^2 + \beta_l^2 + \omega^2) - \sqrt{k^2(d_{2l-1} - d_{2l})^2 + 16\beta^2\omega^2}\,\big),$$

где $k \doteq \alpha^2(\alpha^2 + 2\beta_l^2 + 2\omega^2) + (\beta_l^2 - \omega^2)^2$, является минимальным собственным значением матрицы $\mathbb{M}_l(\omega)$. Далее считаем, что $0 \le d_{2l-1} < d_{2l} < 1/\alpha^2$, $l = 1, 2$. В этом случае, при каждом $l = 1, 2$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \lambda_l(\omega) > \gamma_l \doteq d_{2l} - 1/\alpha^2, \text{ если } \omega \ne \beta_l \\ \lambda_l(\beta_l) < (d_{2l-1} + d_{2l})/2 - 1/\alpha^2 < \gamma_l. \end{cases} \tag{12.57}$$

Теперь рассмотрим задачу

$$\mathbb{I}(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{u^*(t)Du(t) - |x(t)|^2\} \to \inf, \ u(\cdot) \in \mathbb{U}, \tag{12.58}$$

определенную на множестве

$$\mathbb{U} \doteq \big\{u(\cdot) = (u_j(\cdot))_{j=1}^4 \in S(\mathbb{R}, \mathcal{O}_4^4[0]) : M\{u_1^2(t) + u_2^2(t)\} \leqslant 1, \ M\{u_3^2(t) + u_4^2(t)\} \leqslant 1\big\},$$

которое содержится в множестве $\mathcal{U}$, указанному в примере 12.1.

Далее, как уже отмечалось, решение задачи

$$\mathbb{I}(x(\cdot), u(\cdot)) \to \inf, \ u(\cdot) \in \mathcal{U} \tag{12.59}$$

существует, и оптимальное управление достаточно искать в множестве $\mathcal{U}^4_{\mathrm{trig}} \subset \mathcal{U}$, также указанном в предыдущем примере. Для всякого управления $u \in \mathcal{U}^4_{\mathrm{trig}}$ вида (12.53) из структуры матриц A и D получаем, что

$$\mathbb{I}(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} \mathfrak{c}_{jl}^*\mathbb{M}_l(\omega_j)\mathfrak{c}_{jl},$$

где $\mathfrak{c}_{j1}, \mathfrak{c}_{j2} \in \mathbb{C}^2$ — вектора, составленные, соответственно, из первой и второй, третьей и четвертой координат вектора $c_j = (c_{jk})_{k=1}^4$ $(c_j = a_j - ib_j)$. Отсюда, в силу (12.57), следует, что для всякого $u(\cdot) \in \mathcal{U}^4_{\mathrm{trig}}$ $\mathbb{I}(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant \lambda_1(\beta_1) + \lambda_2(\beta_2)$. С другой стороны, пусть $h_l \in \mathbb{C}^2$ — нормированный собственный вектор матрицы $\mathbb{M}_l(\beta_l)$, отвечающий минимальному собственному значению $\lambda_l(\beta_l)$ этой матрицы. Тогда управление $\widehat{u}(t) = [\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_2(t)]^*$, где $\widehat{u}_l(t) = \mathrm{Re}(h_l)\cos\beta_l t - \mathrm{Im}(h_l)\sin\beta_l t$, $l = 1, 2$ принадлежит $\mathcal{U}^4_{\mathrm{trig}}$, которое, вследствие несоизмеримости β_1 и β_2, является п. п., и при котором выполняется равенство $\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) = \lambda_1(\beta_1) + \lambda_2(\beta_2)$, где $\widehat{x}(\cdot)$ — п. п. решение системы $\dot{x} = Ax - \widehat{u}(t)$. Таким образом, процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ будет решением задачи (12.59). Кроме того, поскольку при всех $t \in \mathbb{R}$ $\ |\widehat{u}(t)|^2 \leqslant 4$, то $\widehat{u}(\cdot) \in \mathbb{U}$, а так как $\mathbb{U} \subset \mathcal{U}$, то указанный п. п. процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ будет также решением задачи (12.58).

Теперь в множестве $\mathbb{U}_p$, состоящем из всех периодических измеримых управлений $u : \mathbb{R} \to \mathcal{O}^4_4[0]$, зафиксируем произвольное, некоторого периода $T > 0$, управление $\tilde{u}(\cdot)$. Тогда, в силу равенства

$$\inf\bigl\{\mathbb{I}(x(\cdot), u(\cdot)),\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_T\bigr\} = \inf\bigl\{\mathbb{I}(x(\cdot), p(\cdot)),\ p(\cdot) \in \tilde{\mathcal{U}}^4_{\mathrm{trig}}\bigr\},$$

где $\mathcal{U}_T$ и $\tilde{\mathcal{U}}^4_{\mathrm{trig}}$ те же, что и в примере 12.1, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ в $\tilde{\mathcal{U}}^4_{\mathrm{trig}}$ найдется такое $p_\varepsilon(t) = \sum\limits_{j=1}^{4} a_j \cos\frac{2\pi j}{\omega}t + b_j \sin\frac{2\pi j}{\omega}t$, что $\mathbb{I}(x_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot)) < \varepsilon + \mathbb{I}(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$, где $x_\varepsilon(\cdot)$ — T-периодическое решение системы $\dot{x} = Ax - p_\varepsilon(t)$. Далее, так как β_1 и β_2 несоизмеримы, то по-крайней мере одно из этих чисел не принадлежит множеству $\Lambda(p_\varepsilon(\cdot)) \doteq \{\frac{2\pi j}{T},\ j = 1, \ldots, 4\}$. Пусть для определенности $\beta_2 \notin \Lambda(p_\varepsilon(\cdot))$. Тогда, учитывая, что координаты коэффициентов a_j, b_j в $p_\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяют неравенствам (12.54), в силу (12.57) получим, что

$$\mathbb{I}(x_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot)) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} \mathfrak{c}^*_{jl}\mathbb{M}_l(2\pi j T^{-1})\mathfrak{c}_{jl} \geqslant \lambda_1(\beta_1) + \frac{d_4 + d_3}{2} - \frac{1}{\alpha^2} > \lambda_1(\beta_1) + \lambda_2(\beta_2).$$

Отсюда, в силу произвольности выбора $\tilde{u} \in \mathbb{U}_p$ и $\varepsilon > 0$, следует, что

$$\inf\{\mathbb{I}(x(\cdot), u(\cdot)),\ u(\cdot) \in \mathbb{U}_p\} > \mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) = \lambda_1(\beta_1) + \lambda_2(\beta_2).$$

Таким образом, задача (12.58) также является эффективным расширением задачи $\mathbb{I}(x(\cdot), u(\cdot)) \to \inf$, $u(\cdot) \in \mathbb{U}_p$. При этом выполнен второй возможный случай, указанный в определении эффективного расширения множества периодических процессов в задаче оптимального управления периодическими движениями до множества п. п. процессов.

Глава 5. О некоторых свойствах решения задачи оптимального управления п. п. движениями

В этой главе сначала определяется свойство C) нелинейной системы управления на заданную интегральную кривую заданного решения этой системы, включающее в себя свойство равномерной локальной управляемости на интегральную кривую. В терминах этого свойства в § 14 доказаны теоремы, позволяющие интерпретировать решение $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ задачи оптимального управления п. п. движениями как магистральный процесс, в том смысле, что его сужение на каждый отрезок $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ будет являться решением задачи оптимального управления, определенной на этом отрезке, с интегральным функционалом и закрепленными в точках $\widehat{x}(t_0)$ и $\widehat{x}(t_1)$ концами и, кроме того, усреднение оптимального значения целевого функционала такой задачи равномерно по множеству решений стремится при $t_1 - t_0 \to \infty$ к оптимальному значению целевого функционала рассматриваемой задачи оптимального управления п. п. движениями. В последнем параграфе главы, в терминах динамической системы сдвигов, определенной на множестве допустимых процессов заданной системы управления, используемые свойства которой приведены в § 15 , доказаны достаточные условия существования п. п. процессов, являющихся решениями задачи оптимального управления п. п. движениями, и указан ряд свойств, характеризующих их как магистральный процесс.

§13. О равномерной локальной управляемости нелинейной системы на заданную интегральную кривую

Введено пространство $\mathfrak{S}$ линейных систем управления и два его подмножества, состоящих из локально и равномерно локально управляемых систем. Определено свойство равномерной локальной управляемости нелинейной системы на заданную интегральную кривую и приведены его достаточные условия .

1. Рассмотрим метрическое пространство $\mathcal{P} = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой $(\varphi_1, \varphi_1) \mapsto |A_1 - A_2| + \mathrm{dist}(V_1, V_2)$, $\varphi_j = (A_j, V_j) \in \mathcal{P}$, $j = 1, 2$ прямого произведения метрических пространств $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ и $(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n), \mathrm{dist})$, а также (см. п. 1 в § 1) совокупность отображений $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P})$. Напомним, что на $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P})$ задается d - расстояние, которое в данном случае, в силу определения метрики на $\mathcal{P}$, для любых $\varphi_j(\cdot) = (A_j(\cdot), V_j(\cdot)) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P})$, $j = 1, 2$, будет определено следующим образом:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \big(|A_1(s) - A_2(s)| + \mathrm{dist}(V_1(s), V_2(s))\big) ds.$$

Теперь в $\mathcal{P}$ выделим подпространство

$$\mathcal{P}_0 \doteq \big\{(A, V) \in \mathcal{P} : 0 \in \mathrm{co}\, V\big\}$$

и в $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P})$ рассмотрим подмножество

$$\mathfrak{S} \doteq \big\{\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0) : \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} (|A(s)| + |V(s)|) ds < \infty\big\}, \tag{13.1}$$

где
$$|V(s)| \doteq \max_{v \in V(s)} |v|.$$
Поскольку каждому отображению $t \mapsto \varphi(t) = (A(t), V(t))$ из $\mathfrak{S}$ можно однозначно поставить в соответствие систему управления
$$\dot{x} = A(t)x + v, \ (x, v) \in \mathbb{R}^n \times V(t), \ t \in \mathbb{R}, \tag{13.2}$$
в которой для измеримого отображения $t \mapsto V(t)$ (множества допустимых управлений) при п. в. $t \in \mathbb{R}$ выполняется условие
$$0 \in \operatorname{co} V(t), \tag{13.3}$$
то множество $\mathfrak{S}$ будем называть *пространством систем.* При этом, для заданной системы $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot)) \in \mathfrak{S}$ совокупность измеримых сечений отображения $V(\cdot)$ называем допустимыми управлениями, а точки фазового пространства $\mathbb{R}^n$ — состояниями этой системы.

Напомним, далее, что состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы $\varphi = (A, V) \in \mathfrak{S}$ (или, что то же самое, системы (13.2) при условии (13.3)) называется управляемым на заданном отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$, если существует такое допустимое управление $v(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, что при $v = v(t)$ система (13.2) имеет решение $x(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, удовлетворяющее условиям $x(\tau) = x_0$, $x(t + \tau) = 0$. Совокупность управляемых состояний системы φ на $[\tau, \tau + \vartheta]$ обозначим $D_\tau(\varphi, \vartheta)$. Непосредственно из определения получаем, что
$$D_\tau(\varphi, \vartheta) = -\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau, s) V(s) ds, \tag{13.4}$$
где $X(t, s)$ — оператор Коши системы $\dot{x} = A(t)x$, а интеграл в правой части равенства (13.4) от измеримого отображения $s \mapsto X(\tau, s)V(s) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ понимается в смысле А. А. Ляпунова [15, 90]. Поскольку $X_\tau(t, s) \doteq X(t + \tau, s + \tau)$ — оператор Коши системы $\dot{x} = A_\tau(t)x$, то из (13.4) получаем, что
$$D_\tau(\varphi, \vartheta) = D_0(\varphi_\tau, \vartheta), \tag{13.5}$$
и в дальнейшем, для упрощения записи, вместо $D_0(\varphi_\tau, \vartheta)$ пишем $D(\varphi_\tau, \vartheta)$.

Из (13.4) и свойств интеграла от многозначного отображения вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 13.1. *Пусть* $\varphi = (A, V) \in \mathfrak{S}$. *Тогда*

1) *для всех* $\tau \in \mathbb{R}$ $D_\tau(\varphi, \vartheta) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ *и* $0 \in D_\tau(\varphi, \vartheta)$;

2) *если* $\vartheta_1 < \vartheta_2$, *то* $D_\tau(\varphi, \vartheta_1) \subset D_\tau(\varphi, \vartheta_2)$;

3) *если* $V(t) \subset W(t)$ *при п. в.* $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, *то* $D_\tau(\varphi, \vartheta)$ *содержится в* $D_\tau(\psi, \vartheta)$, *где* $\psi = (A, W) \in \mathfrak{S}$;

4) $D_\tau(\varphi, \vartheta) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \colon T(\tau, x_0) \leqslant \vartheta\}$, *где* $T(\tau, x_0)$ — *наименьшее время, за которое возможен перевод состояния* x_0 *системы* φ *с помощью допустимых управлений* $v(t)$, $t \geqslant \tau$ *в начало координат.*

В свою очередь, из леммы 13.1 и свойств опорной функции (см., например [15, **?**])
$$c(\psi, F) \doteq \max_{f \in F} \psi f, \ (\psi, F) \in \mathbb{R}^{n^*} \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$$
получаем следующее утверждение.

С л е д с т в и е 13.1. *Пусть* $\varphi = (A, V) \in \mathfrak{S}$. *Тогда*

1) *для любых* $(\psi, \tau) \in \mathbb{R}^{n^*} \times \mathbb{R}$ *имеют место следующие соотношения*

$$0 \leqslant c(-\psi, D_\tau(\varphi, \vartheta)) = \int_\tau^{\tau+\vartheta} c(\psi X(\tau, s), V(s))\, ds \overset{(13.5)}{=} \int_0^\vartheta c(\psi X_\tau(0, s), V_\tau(s))\, ds; \quad (13.6)$$

2) *включение*

$$O_\varepsilon[0] \subset D_\tau(\varphi, \vartheta) \quad (\varepsilon > 0) \quad (13.7)$$

имеет место в том и только в том случае, если для всякого вектора ψ *из множества*

$$\Psi_1 \doteq \{\psi \in \mathbb{R}^{n^*} : |\psi| = 1\} \quad (13.8)$$

выполнено неравенство

$$c(-\psi, D_\tau(\varphi, \vartheta)) \geqslant \varepsilon. \quad (13.9)$$

О п р е д е л е н и е 13.1. Система $\varphi \in \mathfrak{S}$ называется

1) ε, ϑ-*локально управляемой* $(\varepsilon, \vartheta > 0)$, если $O_\varepsilon[0] \subset D(\varphi, \vartheta)$;

2) ε, ϑ-*равномерно локально управляемой,* если для всех $\tau \geqslant 0$ справедливо включение (13.7);

3) *локально управляемой*, либо *равномерно локально управляемой,* если при некоторых $\varepsilon, \vartheta > 0$ она является, соответственно, ε, ϑ-локально управляемой, ε, ϑ - равномерно локально управляемой.

Таким образом, из данного определения 13.1 получаем, что множества

$$\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta} \doteq \{\varphi \in \mathfrak{S} : O_\varepsilon[0] \subset D(\varphi, \vartheta)\}, \quad \mathbb{L} \doteq \bigcup_{\varepsilon,\vartheta>0} \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta} \quad (13.10)$$

определяют совокупность всех ε, ϑ-локально управляемых и локально управляемых систем из $\mathfrak{S}$, соответственно, а множества (здесь см. равенство (13.5))

$$\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta} \doteq \{\varphi \in \mathfrak{S} : \mathrm{orb}^+_g(\varphi) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}\}, \quad \mathbb{L}^0 \doteq \bigcup_{\varepsilon,\vartheta>0} \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}, \quad (13.11)$$

где $\mathrm{orb}^+_g(\varphi) \doteq \{\varphi(\cdot + \tau),\ \tau \geqslant 0\}$, составляют совокупность всех ε, ϑ-равномерно локально управляемых и равномерно локально управляемых систем, принадлежащих $\mathfrak{S}$.

Из определения $\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$ и следствия 13.1 получаем следующее утверждение.

Л е м м а 13.2. *Система* $\varphi = (A, V) \in \mathfrak{S}$ *принадлежит* $\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$ *в том и только в том случае, если для всех* $(\psi, \tau) \in \Psi \times \mathbb{R}_+$ *выполнено неравенство*

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} c(\psi X(\tau, s), V(s))\, ds \geqslant \varepsilon. \quad (13.12)$$

З а м е ч а н и е 13.1. В силу теоремы А. А. Ляпунова [15, 90] для всякой системы $(A(\cdot), V(\cdot)) \in \mathfrak{S}$ выполнено равенство

$$\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)V(s)ds = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)\mathrm{co}V(s)ds. \tag{13.13}$$

Поэтому (см. (13.4) и леммы 13.1, 13.2) в вопросах, связанных с изучением локальной и равномерной локальной управляемостей линейных систем и отвечающих им множеств $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}^0$, не уменьшая общности, достаточно изначально рассматривать системы, принадлежащие $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \Phi) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$, где

$$\Phi \doteq \{(A,V) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n) \colon\ 0 \in V\}.$$

Отметим также еще одно, неявным образом, входящее в определение ε, ϑ-равномерной локальной управляемости свойство управлений, а именно: если система $\varphi = (A,V) \in \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$, то найдется такая константа $\eta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$ для любой точки $x_0 \in O_\varepsilon[0]$ найдется управление $t \mapsto v_{x_0}(t) \in \mathrm{co}\, V(t)$ такое, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |v_{x_0}(s)|ds \leqslant \eta |x_0|$, и переводящее систему (13.15) из состояния x_0 в момент времени τ в начало координат при $t = \tau + \vartheta$. В самом деле, рассмотрим $\eta \doteq \boldsymbol{v}/\varepsilon$, где $\boldsymbol{v} \doteq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |V(s)|ds$, и покажем, что эта константа искомая. Действительно, если $x_0 \in O_\varepsilon[0]$, то точка $z_0 = \frac{x_0}{|x_0|}\varepsilon \in O_\varepsilon[0]$. Следовательно, при некотором допустимом управлении $v_{z_0}(\cdot)$ будет выполнено равенство $z_0 = -\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)v_{z_0}(s)ds$. Отсюда находим управление $t \mapsto v_{x_0}(t) \doteq \frac{|x_0|}{\varepsilon} v_{z_0}(t)$, обладающее указанными свойствами и показывающее, что "близкие" к началу координат точки могут быть переведены в нуль с помощью "малых" в смысле d-расстояния управлений.

З а м е ч а н и е 13.2. Множество $\mathfrak{S}$ содержит все равномерно непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ функции $t \mapsto (A(t), V(t))$, в частности и те, в которых $V(t)$ представимо в виде $V(t) = B(t)\mathcal{U}$, где $B(t) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, а множество $\mathcal{U} \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^m)$ такое, что $0 \in \mathrm{ri}\, \mathcal{U}$. Именно для такого вида систем, или, что равносильно, систем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ (t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}, \tag{13.14}$$

в [144], по–видимому впервые, было введено понятие равномерной локальной управляемости, представляющее интерес для приложений [145] уже для указанного вида систем управления. Однако, изучение систем из $\mathfrak{S}$, в которых традиционное для задач управления условие $0 \in \mathrm{ri}\,\mathrm{co}V(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ — ослаблено до условия: $0 \in \mathrm{co}\, V(t)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$, не исключающего возможности, что нуль лежит при п. в. $t \in \mathbb{R}$ на границе множества $\mathrm{co}\, V(t)$, обуславливается не только исследованием вопросов об управляемости систем более общего вида, в сравнении с (13.14), но и рядом других причин, например, изучением вопроса о равномерной локальной управляемости нелинейной системы на заданную полутраекторию.

2. В этом пункте и далее, наряду с пространством $\mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ и определенными на нем нормами (см. п. 1 в § 2) $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_w$, будем рассматривать отвечающее заданному промежутку $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ нормированное пространство $\mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ с нормами $\|\cdot\|_{\mathbb{T}}$ и $\|\cdot\|_{w,\mathbb{T}}$, определяемыми аналогично случаю $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Через $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ обозначаем множество $\mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$. При $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ используем прежние обозначения.

Сейчас фиксируем функцию $f\colon \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ (G — область в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющую условию: I) для любого $K \in \mathrm{comp}(G)$ $\quad f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$, и при $\mu(\cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t,x,u) \rangle dt \doteq \int_{\mathfrak{U}} f(t,x,u)\mu(t)(du). \tag{13.15}$$

В дальнейшем $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T})$ — совокупность допустимых пар (управляемых процессов) $(x(\cdot), \mu(\cdot))$ системы (13.15), в которых $x(t)$, $t \in \mathbb{T}$ — решение этой системы, отвечающее управлению $\mu(\cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x; \mathbb{T}) \subset G$.

З а м е ч а н и е 13.3. Поскольку $\mathcal{M}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{U}_{\mathbb{T}}$, где $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ — совокупность измеримых отображений $u : \mathbb{T} \to \mathfrak{U}$, то множество $\mathfrak{A}(\mathbb{T}) \doteq \{(x(\cdot), u(\cdot)) : (x(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{T})\}$ будет множеством допустимых пар системы

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) \tag{13.16}$$

с управлениями $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathbb{T}}$.

В следующем определении и далее рассматриваем пару $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ и через

$$\gamma_+(\widehat{x}) \doteq \{(t, \widehat{x}(t)) : t \in \mathbb{R}_+\}$$

будем обозначать интегральную кривую, отвечающую решению $\widehat{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

О п р е д е л е н и е 13.2. Пусть $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$. Система (13.15) называется *равномерно локально управляемой* (РЛУ) *на* $\gamma_+(\widehat{x})$, если существуют такие константы $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$ для любого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ найдется такое управление $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta} \doteq \mathcal{M}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, что будет выполнено неравенство

$$\|\widehat{\mu} - \mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta |\widehat{x}(\tau) - x_0|, \tag{13.17}$$

при котором система (13.15) имеет такое решение $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \vartheta$, что $x(\tau) = x_0$ и $x(\tau + \vartheta) = \widehat{x}(\tau + \vartheta)$.

При наличии констант $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, обеспечивающих указанное выше свойство системы (13.15), говорим, что эта система является $\varepsilon, \vartheta, \eta$ – РЛУ на $\gamma_+(\widehat{x})$.

З а м е ч а н и е 13.4. Свойство $\varepsilon, \vartheta, \eta$ – РЛУ системы (13.15) на интегральную кривую $\gamma_+(\widehat{x})$ равносильно РЛУ в нуль следующей, эквивалентной (13.15), системы $\dot{z} = \langle \widehat{\mu}(t), f(t, \widehat{x}(t), u) \rangle - \langle \widehat{\mu}(t) - \Delta\mu(t), f(t, \widehat{x}(t) - z, u) \rangle$, где $z \doteq \widehat{x}(t) - x$, $\Delta\mu(t) \doteq \widehat{\mu}(t) - \mu(t)$, и указывает на возможность возвращения на любом отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ каждого возмущенного движения $t \mapsto \widehat{x}(t) - z(t)$, $z(\tau) \in O_\varepsilon[0]$ на $\gamma_+(\widehat{x})$ с помощью управлений вида $\widehat{\mu}(\cdot) - \Delta\mu(\cdot) \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, в которых возмущениями $\Delta\mu(\cdot)$ служат измеримые функции $t \mapsto \Delta\mu(t) \in \widehat{\mu}(t) - \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, удовлетворяющие неравенству (13.17) при $x_0 = z(\tau)$.

В дальнейшем, наряду со свойством РЛУ системы (13.15) на $\gamma_+(\widehat{x})$, важную роль будет играть указанное в следующем определении 13.3 свойство этой системы.

Определение 13.3. Пусть $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$. Система (13.15) называется *равномерно локально достижимой* (РЛД) с $\gamma_+(\widehat{x})$, если при каждом $\tau \geqslant 0$, для любого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau+\vartheta)]$ найдется такое управление $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, что будет выполнено неравенство

$$\|\widehat{\mu}-\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta\,|\widehat{x}(\tau+\vartheta)-x_0|, \tag{13.18}$$

при котором система (13.15) имеет такое решение $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau+\vartheta$, что $x(\tau)=\widehat{x}(\tau)$ и $x(\tau+\vartheta)=x_0$.

При наличии констант $\varepsilon,\vartheta,\eta>0$, обеспечивающих указанное выше свойство системы (13.15), говорим, что эта система обладает свойством $\varepsilon,\vartheta,\eta$ – РЛД с $\gamma_+(\widehat{x})$.

Достаточные условия указанных в определениях 13.2 и 13.3 свойств системы (13.15) приведем в терминах РЛУ (см. определение 13.1) линейной системы, отвечающей заданному процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$. С этой целью будем считать, что помимо условия I) функция $f\colon \mathbb{R}\times G\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию:

II) в каждой точке $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times G\times\mathfrak{U}$ существует $f'_x(t,x,u)$, и для любого компактного множества $K\subset \operatorname{comp}(G)$ $\quad f'_x\in\mathfrak{V}^{\rm loc}(\mathbb{R}\times K\times\mathfrak{U},\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n))$.

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+\langle\Delta\mu(t),f(t,\widehat{x}(t),u)\rangle, \tag{13.19}$$

в которой

$$A(t)\doteq\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),u)\rangle,\ \ \Delta\mu(t)\doteq\widehat{\mu}(t)-\mu(t), \tag{13.20}$$

и по аналогии с определением 13.1 для линейных систем управления скажем, что система (13.19) равномерно локально управляема (РЛУ), если найдутся такие константы $\varepsilon,\vartheta>0$, что при каждом $\tau\geqslant 0$ и всяком $x_0\in O_\varepsilon[0]$ найдется такое $\mu_{x_0}\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, что (см. обозначение (13.20)) при $\mu(t)=\mu_{x_0}(t)$ система (13.19) имеет решение $x(t)$, $\tau\leqslant t\leqslant\tau+\vartheta$, удовлетворяющее условиям: $x(\tau)=x_0$, $x(\tau+\vartheta)=0$. При наличии констант $\varepsilon,\vartheta>0$, обеспечивающих указанное свойство системы (13.20), говорим, что эта система ε,ϑ – РЛУ (в нуль).

Приведем два утверждения, связанных с определением РЛУ системы (13.19).

Лемма 13.3. *Пусть система* (13.19) ε,ϑ –РЛУ. *Тогда существует такая константа* $\eta>0$, *что для каждого* $\tau\geqslant 0$ *и всякого* $x_0\in O_\varepsilon[0]$ *найдется такое* $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, *что* $\|\Delta\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\leqslant\eta|x_0|$, *и при котором система* (13.19) *имеет решение* $x(t)$, $\tau\leqslant t\leqslant\tau+\vartheta$, *удовлетворяющее условиям* $x(\tau)=x_0$, $x(\tau+\vartheta)=0$.

Доказательство. Множество (см. обозначение (13.20))

$$\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)\doteq\Big\{-\int_\tau^{\tau+\vartheta}X(\tau,s)\langle\Delta\mu(s),f(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds,\ \mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}\Big\}, \tag{13.21}$$

где, здесь и далее, $X(t,s)$ — оператор Коши системы $\dot{y}=A(t)y$, $y\in\mathbb{R}^n$, является множеством управляемости системы (13.20) на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, и условие ε,ϑ–РЛУ этой системы равносильно тому, что для всех $\tau\geqslant 0\quad O_\varepsilon[0]\subset\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)$. Пусть теперь

$x_0 \in O_\varepsilon[0]$. Тогда $\xi_0 \doteq \varepsilon \frac{x_0}{|x_0|} \in O_\varepsilon[0]$. Поэтому (см. (13.21)) найдется $\mu_{\xi_0} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, такое, что

$$\xi_0 = -\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)\langle \Delta\mu_{\xi_0}(s), f(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds,$$

где $\Delta\mu_{\xi_0}(s) \doteq \widehat{\mu}(s) - \mu_{\xi_0}(s)$. Отсюда получаем, что

$$x_0 = -\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)\langle \frac{|x_0|}{\varepsilon}\Delta\mu_{\xi_0}(s), f(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds.$$

Рассмотрим, далее, отображение

$$t \mapsto \mu(t) \doteq \frac{|x_0|}{\varepsilon}\mu_{\xi_0}(t) + \frac{\varepsilon - |x_0|}{\varepsilon}\widehat{\mu}(t).$$

Так как $|x_0| \leqslant \varepsilon$ и $\mu_{\xi_0}, \widehat{\mu} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, то $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$. Кроме того, легко видеть, что $\Delta\mu(t) = \frac{|x_0|}{\varepsilon}\Delta\mu_{\xi_0}(t)$, откуда получаем неравенство (13.21) при $\eta = \frac{2}{\varepsilon}$ (на самом деле здесь выполнено более сильное неравенство, а именно $\|\Delta\mu\|_{[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta|x_0|$), и что отвечающее $\mu(t)$, решение $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau+\varepsilon$ такое, что $x(\tau) = x_0$, $x(\tau+\vartheta) = 0$.

Л е м м а 13.4. *Система* (13.19) ε,ϑ –РЛУ *в том и только в том случае, если система* $\widehat{\varphi}(\cdot) = (A(\cdot), \widehat{V}(\cdot)) \in \mathfrak{S}$, *где* $\widehat{V}(t) = \langle \widehat{\mu}(t), f(t,\widehat{x}(t),u)\rangle - f(t,\widehat{x}(t),\mathfrak{U})$, $t \in \mathbb{R}$, *является* ε,ϑ –РЛУ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ совпадает [32, 158] с замыканием в метрике ρ_w выпуклой оболочки множества $\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$, гомеоморфного $\mathfrak{U}$, то (см. (13.13) при $V(t) = \widehat{V}(t)$), учитывая ограничения на f, получим, что при каждом $\tau \geqslant 0$ и $\vartheta > 0$ множество (см. (13.21)) управляемости $\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)$ системы (13.19) совпадет с множеством управляемости

$$\mathfrak{D}_\tau(\widehat{\varphi},\vartheta) = \Big\{-\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau+\vartheta,s)[\langle\widehat{\mu}(s), f(s,\widehat{x}(s),u)\rangle - f(s,\widehat{x}(s),u(s))]ds,\ u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\tau,\vartheta}\Big\}$$

указанной системы $\widehat{\varphi}(\cdot)$. Тем самым лемма 13.4 доказана.

З а м е ч а н и е 13.5. Таким образом, РЛУ системы (13.19) в классе обобщенных управлений (мер) равносильна РЛУ отвечающей ей системы $\widehat{\varphi}(\cdot) \in \mathfrak{S}$, что при фиксированном τ является известным утверждением (см., например [166]). Отметим далее, что особенностью системы $\widehat{\varphi}(\cdot)$ является то, что нуль при п. в. $t \in \mathbb{R}$ находится на границе множества $\mathrm{co}\,\widehat{V}(t)$. Кроме того, для такой системы зависимость управлений, принадлежащих $\mathcal{U}_{\tau,\vartheta}$, от точек x_0, которые переводятся в начало координат, не носит столь прозрачный характер (см. лемму 13.4), как для отвечающей ей овыпукленной системы (13.19). Поэтому в дальнейшем при доказательствах удобнее использовать РЛУ системы (13.19).

3. Здесь приведем, при указанных ниже условиях для функции f, связанных с заданным процессом $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$, ряд утверждений, используемых при доказательстве достаточных условий РЛУ системы (13.15) на $\gamma_+(\widehat{x})$.

III) существует такое $r > 0$, что при всех $t \geqslant 0$ выполняется включение

$$K(t) \doteq \widehat{x}(t) + O_r[0] \subset G, \tag{13.22}$$

и при этом

$$\gamma \doteq 2\sup_{\tau\geqslant 0}\int_{\tau}^{\tau+1}\max_{(x,u)\in K(t)\times\mathfrak{U}}(|f(t,x,u)|+|f'_x(t,x,u)|)dt<\infty; \tag{13.23}$$

IV) существуют такие константы $\widehat{r}\in(0,r],\ \alpha>0$ и функция $\mathfrak{f}\in\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}_+)$, что

$$\mathfrak{F}\doteq 2\sup_{\tau\geqslant 0}\int_{\tau}^{\tau+1}\max_{u\in\mathfrak{U}}\mathfrak{f}(t,u)dt<\infty \tag{13.24}$$

и для почти каждого $t\in\mathbb{R}_+$ и всех $(z,u)\in O_{\widehat{r}}[0]\times\mathfrak{U}$ выполнено неравенство

$$\max_{\theta\in[0,1]}|f'_x(t,\widehat{x}(t)+\theta z,u)-f'_x(t,\widehat{x}(t),u)|\leqslant\mathfrak{f}(t,u)|z|^{\alpha}. \tag{13.25}$$

Теперь в системе (13.15) сделаем замену $z\doteq\widehat{x}(t)-x$, которая относительно z запишется в виде

$$\dot{z}=A(t)z+\langle\Delta\mu(t),f(t,\widehat{x}(t)-z,u)\rangle+\langle\widehat{\mu}(t),g(t,z,u)\rangle, \tag{13.26}$$

где

$$g(t,z,u)\doteq f(t,\widehat{x}(t),u)-f(t,\widehat{x}(t)-z,u)-f'_x(t,\widehat{x}(t),u)z. \tag{13.27}$$

Л е м м а 13.5. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}_+\times G\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* I), II) *и на процессе* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ *выполняется условие* III). *Тогда, если система* (13.19) РЛУ, *то найдутся такие константы* $\varepsilon_1,\vartheta_1,\delta_1>0$, *что при каждом* $\tau\geqslant 0$ *и любой функции* $y\in C([\tau,\tau+\vartheta_1],O_{\delta_1}[0])$ *шар* $O_{\varepsilon_1}[0]$ *содержится в множестве*

$$\mathbb{D}_{\tau}(\vartheta_1,y)\doteq\Big\{-\int_{\tau}^{\tau+\vartheta_1}X(\tau,s)\langle\Delta\mu(s),f(s,\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle ds,\ \mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta_1}\Big\} \tag{13.28}$$

управляемости на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta_1]$ *системы*

$$\dot{z}=A(t)z+\langle\Delta\mu(t),f(t,\widehat{x}(t)-y(t),u)\rangle. \tag{13.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon_2,\vartheta_2>0$ — константы, входящие в определение РЛУ системы (13.19). Так как (см. (13.21)) $\mathfrak{D}_{\tau}(\vartheta_2)\subset\mathfrak{D}_{\tau}(\vartheta_1)$, если $\vartheta_2<\vartheta_1$, то, взяв в качестве ϑ_1 любое натуральное число больше $[\vartheta_2]+1$, учитывая, что $O_{\varepsilon_2}[0]\subset\mathfrak{D}_{\tau}(\vartheta_2)$, получим включение $O_{\varepsilon_2}[0]\subset\mathfrak{D}_{\tau}(\vartheta_1)$. Кроме того, в силу неравенства Гронуолла – Беллмана и топологической эквивалентности d_l–расстояний,

$$\max_{\tau\leqslant s\leqslant\tau+\vartheta_1}|X(\tau,s)|\leqslant e^{\gamma\vartheta_1}\qquad(\tau\geqslant 0). \tag{13.30}$$

Полагаем далее

$$\delta_1\doteq\min\Big(\frac{\varepsilon_2}{4\gamma\vartheta_1 e^{\gamma\vartheta_1}},\widehat{r}\Big), \tag{13.31}$$

фиксируем произвольное $\tau \geqslant 0$, функцию $y \in C([\tau, \tau+\vartheta], O_{\delta_1}[0])$ и точку $z_0 \in \mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1)$. В силу (13.21) найдется такое $\mu_0 \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta_1}$, что

$$z_0 = -\int_\tau^{\tau+\vartheta_1} X(\tau, s)\langle \Delta\mu_0(s), f(s, \widehat{x}(s), u)\rangle ds.$$

Принимая во внимание (13.27), имеем следующие соотношения:

$$\rho(z_0, \mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y)) \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta_1} |X(\tau, s)| \cdot |\langle \Delta\mu_0(s), \int_0^1 f'_x(s, \widehat{x}(s) - \theta y(s), u)\, d\theta\rangle y(s)| ds \overset{(13.30)}{\overset{(13.25)}{\leqslant}}$$

$$\leqslant 2\gamma\vartheta_1 e^{\gamma\vartheta_1} \|y\|_{C([\tau,\tau+\vartheta_1], O_{\delta_1}[0])} \overset{(13.29)}{\leqslant} \varepsilon_2/2 \doteq \varepsilon_1,$$

откуда получаем, что $\max\{\rho(z_0, \mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y)),\ z_0 \in \mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1)\} \leqslant \varepsilon_1$. Аналогично показываем, что $\max\{\rho(z_0, \mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1)),\ z_0 \in \mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y)\} \leqslant \varepsilon_1$, а значит,

$$\operatorname{dist}(\mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1), \mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y)) \leqslant \varepsilon_1.$$

Напомним, далее, что $c(\psi, F)$ — опорная функция [9] к $F \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ в точке $\psi \in \mathbb{R}^{n^*}$. Поскольку $\mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1)$ и $\mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y)$ принадлежат $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ и $O_{\varepsilon_2}[0] \subset \mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1)$ в том и только в том случае, если $c(\psi, \mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1)) \leqslant \varepsilon_2$ для любого $\psi \in \mathbb{R}^{n^*}$, $|\psi| = 1$, то из неравенства

$$|c(\psi, \mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1)) - c(\psi, \mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y))| \leqslant \operatorname{dist}(\mathfrak{D}_\tau(\vartheta_1), \mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y)),$$

выполненного для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^{n^*}$, $|\psi| = 1$, получаем, что для всех таких ψ $c(\psi, \mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y)) \leqslant \varepsilon_2/2$, или, что равносильно, $O_{\varepsilon_1}[0] \subset \mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y)$.

Л е м м а 13.6. *Пусть функция* $f : \mathbb{R}_+ \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* I), II) *и на процессе* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ *выполняются условия* III), IV). *Тогда, если система* (13.19) РЛУ, *то найдутся такие константы* $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, *что для каждого* $z_0 \in O_\varepsilon[0]$ *существует такое* $\delta = \delta(z_0) > 0$, *что для всякого* $\tau \geqslant 0$ *и любой функции* $y \in C([\tau, \tau+\vartheta], O_\delta[0])$ *найдется* $\mu_{z_0,y} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|\Delta\mu_{z_0,y}\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta\, |z_0| \tag{13.32}$$

и при котором система

$$\dot{z} = A(t)z + \langle \Delta\mu(t), f(t, \widehat{x}(t) - y(t), u)\rangle + \langle \widehat{\mu}(t), g(t, y(t), u)\rangle \tag{13.33}$$

имеет такое решение $z(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \vartheta$, *что* $z(\tau) = z_0$, $z(\tau + \vartheta) = 0$ *и*

$$\max_{\tau \leqslant t \leqslant \tau+\vartheta} |z(t)| \leqslant \delta. \tag{13.34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon_2, \vartheta_2 > 0$ — константы, входящие в определение РЛУ системы (13.19) и $\varepsilon_1, \vartheta_1, \delta_1 > 0$ — отвечающие им константы, указанные в лемме 13.5 . Полагаем, далее, $\vartheta \doteq \vartheta_1$ и (см. обозначения в (13.23) и (13.24))

$$\varkappa \doteq \frac{\varepsilon_2}{2(1 + \vartheta e^{\gamma\vartheta}\mathfrak{F})}, \quad \sigma \doteq 1 + \frac{2\gamma\vartheta}{\varkappa} + \vartheta\mathfrak{F}. \tag{13.35}$$

[9] Необходимые свойства опорной функции, приведенные, например, в [15], используем без специальных оговорок.

Фиксируем, сейчас, константу $\varepsilon>0$, удовлетворяющую условиям:

$$0<\varepsilon\leqslant k\doteq\min\Big\{\varkappa,\delta_1^{1+\alpha},\Big(\frac{e^{-2\gamma\vartheta}}{3\sigma}\Big)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\Big\},\tag{13.36}$$

точку $z_0\in O_\varepsilon[0]$, и пусть $\delta=\delta(z_0)>0$ — решение уравнения

$$\delta^{1+\alpha}=|z_0|.\tag{13.37}$$

Поскольку $\delta\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{1+\alpha}}\leqslant k^{\frac{1}{1+\alpha}}\overset{(13.36)}{\leqslant}\delta_1$, то (см. (13.31), (13.25) и (13.27)) для каждой фиксированной функции $y\in C([\tau,\tau+\vartheta],O_\delta[0])$ при всех $(t,u)\in\mathbb{R}_+\times\mathfrak{U}$

$$|g(t,y(t),u)|\leqslant\mathfrak{f}(t,u)\delta^{1+\alpha}\overset{(13.33)}{=}\mathfrak{f}(t,u)|z_0|$$

и, следовательно, (см. (13.30) при $\vartheta_1=\vartheta$)

$$|\int_\tau^{\tau+\vartheta}X(\tau,s)\langle\widehat{\mu}(s),g(s,y(s),u)\rangle ds|\leqslant\vartheta e^{\gamma\vartheta}\mathfrak{F}|z_0|.$$

Рассмотрим, далее, точку

$$\xi_0\doteq\frac{\varkappa}{|z_0|}\Big(z_0+\int_\tau^{\tau+\vartheta}X(\tau,s)\langle\widehat{\mu}(s),g(s,y(s),u)\rangle ds\Big).\tag{13.38}$$

Из предыдущего неравенства, определения констант $\varkappa$ и ε_1 (см. (13.35) и доказательство леммы 13.5) получаем, что $|\xi_0|\leqslant\varkappa(1+\vartheta e^{\gamma\vartheta}\mathfrak{F})=\varepsilon_2/2\doteq\varepsilon_1$, то есть $\xi_0\in O_{\varepsilon_1}[0]$, а так как $O_{\varepsilon_1}[0]\subset\mathbb{D}_\tau(\vartheta,y)$, то (см. (13.28)) найдется такое $\mu_{\xi_0,y}\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, что (см. (13.20))

$$\xi_0=-\int_\tau^{\tau+\vartheta}X(\tau,s)\langle\Delta\mu_{\xi_0,y}(s),f(s,\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle ds.$$

Поэтому в силу (13.38) получаем, что

$$z_0=-\int_\tau^{\tau+\vartheta}X(\tau,s)[\frac{|z_0|}{\varkappa}\langle\Delta\mu_{\xi_0,y}(s),f(s,\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle+\langle\widehat{\mu}(s),g(s,y(s),u)\rangle]ds.$$

Теперь рассмотрим отображение

$$t\mapsto\mu_{z_0,y}(t)\doteq\frac{|z_0|}{\varkappa}\mu_{\xi_0,y}(t)+\frac{\varkappa-|z_0|}{\varkappa}\widehat{\mu}(t),\quad t\in[\tau,\tau+\vartheta].\tag{13.39}$$

Поскольку $\mu_{\xi_0,y},\widehat{\mu}\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, а $|z_0|\leqslant\varepsilon\overset{(13.36)}{\leqslant}\varkappa$, то, во–первых, $\mu_{z_0,y}\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, а во–вторых, из равенства $\Delta\mu_{z_0,y}(t)\overset{(13.39)}{=}\frac{|z_0|}{\varkappa}\Delta\mu_{\xi_0,y}(t)$ получаем неравенство (13.32) при $\eta\doteq2/\varkappa$ и что точка z_0 принадлежит множеству

$$\mathfrak{D}_\tau(\vartheta,y)\doteq\Big\{-\int_\tau^{\tau+\vartheta}X(\tau,s)[\langle\Delta\mu(s),f(s,\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle+\langle\widehat{\mu}(s),g(s,y(s),u)\rangle]ds,\ \mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}\Big\}$$

управляемости системы (13.33) на $[\tau,\tau+\vartheta]$. Поэтому решение

$$z(t)=X(t,\tau)\big\{z_0+\int_\tau^tX(\tau,s)[\langle\Delta\mu_{z_0,y}(s),f(s,\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle+\langle\widehat{\mu}(s),g(s,y(s),u)\rangle]ds\big\}$$

этой системы при $\mu(t) = \mu_{z_0,y}(t)$ удовлетворяет условиям: $z(\tau) = z_0$, $z(\tau+\vartheta) = 0$.

Покажем, наконец, что $z(t)$ удовлетворяет неравенству (13.34). В самом деле, учитывая, что $|z_0| \overset{(13.37)}{=} \delta\,|z_0|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leqslant \delta\varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, имеем, при каждом $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, следующие соотношения:

$$|z(t)| \leqslant e^{\gamma\vartheta}\Big\{|z_0| + 2e^{\gamma\vartheta}\frac{|z_0|}{\varkappa}\int_\tau^{\tau+\vartheta} \max_{(x,u)\in K(s)\times\mathfrak{U}} |f(s,x,u)|ds +$$
$$+e^{\gamma\vartheta}\int_\tau^{\tau+\vartheta} |\langle\widehat{\mu}(s), \int_0^1 (f'_x(s,\widehat{x}(s)-\theta y(s),u) - f'_x(s,\widehat{x}(s),u))d\theta y(s)|ds\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant e^{2\gamma\vartheta}(1 + \frac{2\gamma\vartheta}{\varkappa} + \vartheta\mathfrak{F})\delta\varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \overset{(13.35)}{\leqslant} \delta\sigma e^{2\gamma\vartheta}\varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \overset{(13.36)}{\leqslant} \delta,$$

и тем самым лемма 13.6 доказана.

4. Приведем достаточные условия РЛУ системы (13.15) на $\gamma_+(\widehat{x})$.

Т е о р е м а 13.1. *Пусть функция* $f : \mathbb{R}_+ \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* I), II) *и на процессе* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ *выполняются условия* III), IV). *Тогда, если система* (13.19) РЛУ [10] (*в нуль*), *то система* (13.15) РЛУ *на* $\gamma_+(\widehat{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$ — константы, указанные в лемме 13.6, $\tau \geqslant 0$ и точку $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$, представим в виде: $x_0 = \widehat{x}(\tau) - z_0$, где $z_0 \in O_\varepsilon[0]$. Для точки z_0 выбираем константу $\delta > 0$, также указанную в лемме 13.6, и зафиксируем произвольную функцию $y_1 \in C([\tau, \tau+\vartheta], O_\delta[0])$. Теперь рассмотрим систему (13.33) при $y(t) = y_1(t)$. По лемме 13.6 такая система равномерно локально управляема и, следовательно, найдется такое $\mu_1 \doteq \mu_{z_0,y_1} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее при $y = y_1$ неравенству (13.32), что система (13.33) при $y(t) = y_1(t)$ и $\mu(t) = \mu_1(t)$ будет иметь решение $y_2(t) \in O_\delta[0]$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, удовлетворяющее условиям $y_2(\tau) = z_0$, $y_2(\tau+\vartheta) = 0$. Далее рассмотрим систему (13.33) при $y(t) = y_2(t)$. Снова по лемме 13.6 такая система будет равномерно локально управляемой. Поэтому найдется такое $\mu_2 \doteq \mu_{z_0,y_2} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее при $y = y_1$ неравенству (13.32), что система (13.33) при $y(t) = y_2(t)$ и $\mu(t) = \mu_2(t)$ будет иметь решение $y_3(t) \in O_\delta[0]$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, удовлетворяющее условиям $y_3(\tau) = z_0$, $y_3(\tau+\vartheta) = 0$. Продолжая указанную процедуру, в итоге получим последовательность абсолютно непрерывных на $[\tau, \tau+\vartheta]$ функций $\{y_j\}_{j=1}^\infty$, а также последовательность управлений $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ таких, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ $y_j(t) \in O_\delta[0]$ для всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, $y_j(\tau) = z_0$, $y_j(\tau+\vartheta) = 0$ и (см. обозначения в (13.20) и (13.27))

$$y_{j+1}(t) = X(t,\tau)\big\{z_0 + \int_\tau^t X(\tau,s)[\langle\Delta\mu_j(s), f(s,\widehat{x}(s)-y_j(s),u)\rangle +$$
$$+ \langle\widehat{\mu}(s), g(s,y_j(s),u)\rangle]ds\big\}, \quad (13.40)$$

и, кроме того, при всех $j \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|\Delta\mu_j\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta|z_0|. \quad (13.41)$$

[10] Здесь см. лемму 13.4.

Из (13.40), используя ограничения на функцию f и свойства оператора Коши, несложно показать, что последовательность функций $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна на $[\tau, \tau+\vartheta]$. Следовательно, по теореме Арцеля–Асколи из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[\tau, \tau+\vartheta]$ к некоторой функции $z \in C([\tau, \tau+\vartheta], O_\delta[0])$. Будем считать, что

$$y_j(t) \underset{t\in[\tau,\tau+\vartheta]}{\rightrightarrows} z(t) \text{ при } j \to \infty. \tag{13.42}$$

Далее, так как $\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ — компактное множество, то из последовательности $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ также можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$. Чтобы не загромождать обозначений, будем считать, что

$$\|\nu_j\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \to 0 \text{ при } j \to \infty, \ \nu_j(\cdot) \doteq \mu_j(\cdot) - \mu(\cdot). \tag{13.43}$$

Последнее предельное соотношение, в силу определения нормы $\|\cdot\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}$, означает, что для каждой функции φ из пространства $\mathfrak{V}([\tau, \tau+\vartheta]\times\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, в частности и для функций вида $\varphi(s,u) \doteq \chi_{[\tau,t]}(s)X(\tau,s)f(s,\widehat{x}(s)-z(s),u)$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, будет выполнено равенство $\lim\limits_{j\to\infty} |\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} \langle\nu_j(s), \varphi(s,u)\rangle ds| = 0$. Поэтому, переходя в (13.40) к пределу при $j \to \infty$, учитывая (13.42), получим, что при каждом $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ будет выполнено равенство

$$z(t) = X(t,\tau)\{z_0 + \int_\tau^t X(\tau,s)[\langle\Delta\mu(s), f(s,\widehat{x}(s)-z(s),u)\rangle + \langle\widehat{\mu}(s), g(s,z(s),u)\rangle]ds\}.$$

При этом $z(t) \in O_\delta[0]$ для всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, $z(\tau) = z_0$, $z(\tau+\vartheta) = 0$, и, кроме того, в силу (13.41) и (13.43) выполняется неравенство (13.17). Для завершения доказательства теоремы 13.1 осталось заметить, что функция $t \mapsto z(t)$ — решение системы (13.26), и следовательно, $x(t) = \widehat{x}(t) - z(t)$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ — решение системы (13.15), отвечающее управлению $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющему неравенству (13.17), такое, что $x(\tau) = \widehat{x}(\tau) - z_0 = x_0$ и $x(\tau+\vartheta) = \widehat{x}(\tau+\vartheta)$. Кроме того, $\max\limits_{\tau\leqslant t\leqslant\tau+\vartheta} |x(t) - \widehat{x}(t)| \leqslant \delta$.

З а м е ч а н и е 13.6. Приведенное доказательство теоремы 13.1 показывает, что указанные в ней условия влекут более сильное свойство системы (13.15), чем просто свойство $\varepsilon, \vartheta, \eta$–РЛУ этой системы на интегральную кривую $\gamma_+(\widehat{x})$. А именно: для всякого $\tau \geqslant 0$ и каждого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ найдутся $\delta = \delta(x_0) \in (0, \varepsilon]$ и управление $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству (13.17), при котором система (13.15) имеет решение, которое помимо условий: $x(\tau) = x_0$, $x(\tau+\vartheta) = \widehat{x}(\tau+\vartheta)$, еще при всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ содержится в $O_\delta[\widehat{x}(t)]$, а значит и в $O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$. Таким образом, теорема 13.1 указывает достаточные условия, при которых выполнено свойство системы (13.15), данное в следующем определении.

О п р е д е л е н и е 13.4. Система (13.15) называется РЛУ *в малом на* $\gamma_+(\widehat{x})$, если найдутся такие $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, что для каждого $\tau \geqslant 0$ и всякого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ найдется управление $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству (13.17), при котором система (13.15) имеет решение $x(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ и при этом выполнены равенства: $x(\tau) = x_0$, $x(\tau+\vartheta) = \widehat{x}(\tau+\vartheta)$.

При наличии констант $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, при которых будет выполнено указанное в данном определении 13.4 свойство, говорим, что система (13.15) $\varepsilon, \vartheta, \eta$ – РЛУ в малом на $\gamma_+(\widehat{x})$.

Следующее утверждение показывает, что из этого свойства управляемости системы (13.15) следует ее РЛУ в малом на $\gamma_+(\widehat{x})$ в смысле определения приведенного во введении.

Л е м м а 13.7. *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* I), II) *и система* (13.15) $\varepsilon, \vartheta, \eta$–РЛУ *в малом на* $\gamma_+(\widehat{x})$. *Тогда при каждом* $\tau \geqslant 0$ *для любого* $\zeta > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всякого* $x_0 \in O_\delta[\widehat{x}(\tau)]$ *найдется управление* $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, *удовлетворяющее неравенству* (13.17), *при котором система* (13.15) *имеет решение* $x(t) \in O_\zeta[\widehat{x}(t)]$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ *и удовлетворяющее также условиям:* $x(\tau) = x_0$, $x(\tau+\vartheta) = \widehat{x}(\tau+\vartheta)$.

Доказательство леммы 13.7 несложно получить (см., например, [54]), если воспользоваться утверждением [31]: если последовательность $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ сходится при $j \to \infty$ по норме $\|\cdot\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}$ к $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, то для всякой функции $\varphi \in \mathfrak{V}([\tau,\tau+\vartheta]\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ $\quad |\int\limits_{\tau}^{t} \langle \mu(s) - \mu_j(s), \varphi(s,u)\rangle ds| \underset{t\in[\tau,\tau+\vartheta]}{\rightrightarrows} 0$, и мы его здесь опускаем.

Приведем, далее, достаточные условия РЛД системы (13.15) с точек $\gamma_+(\widehat{x})$.

Т е о р е м а 13.2. *Пусть функция* $f : \mathbb{R}_+ \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* I), II) *и на процессе* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ *выполняются условия* III), IV). *Тогда, если система* (13.19) РЛУ, *то система* (13.15) РЛД *с* $\gamma_+(\widehat{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим при $\tau \geqslant 0$ и $\vartheta > 0$ множество

$$\mathbb{A}_\tau(\vartheta) \doteq \Big\{ \int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau+\vartheta, s)\langle \Delta\mu(s), f(s, \widehat{x}(s), u)\rangle ds,\ \mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta} \Big\}, \tag{13.44}$$

совпадающее с концами $x(\tau+\vartheta)$ решений $x(t) = \int\limits_{\tau}^{t} X(t,s)\langle \Delta\mu(s), f(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds$ системы (13.19), отвечающих $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, выходящих в момент времени τ из нуля. Множество $\mathbb{A}_\tau(\vartheta)$, принадлежащее $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, называется множеством достижимости системы (13.19) на $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ из нуля, и говорим, что система (13.19) РЛД (из нуля), если существуют такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$

$$O_\varepsilon[0] \subset \mathbb{A}_\tau(\vartheta). \tag{13.45}$$

Далее, так как система (13.19) РЛУ, то найдутся такие $\varepsilon_1, \vartheta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$ и отвечающем любому вектору (см. обозначение (13.8)) $\psi \in \Psi_1$, векторе

$$q \doteq -\psi X(\tau+\vartheta, \tau)/|\psi X(\tau+\vartheta,\tau)|,$$

будет выполнено неравенство $c(q, \mathfrak{D}_\tau(\vartheta)) \geqslant \varepsilon_1$. Теперь, учитывая, что (см. (13.21) и (13.44))

$$\mathbb{A}_\tau(\vartheta) = -X(\tau+\vartheta,\tau)\mathfrak{D}_\tau(\vartheta),$$

при каждом $\psi \in \Psi_1$ имеем следующие соотношения:

$$c(\psi, \mathbb{A}_\tau(\vartheta)) = |X^*(\tau+\vartheta,\tau)\psi| c(q, \mathfrak{D}_\tau(\vartheta)) \geqslant \varepsilon_1 e^{-\gamma\vartheta} \doteq \varepsilon,$$

из которых получаем включение (13.45) при $\varepsilon \doteq \varepsilon_1 e^{-\gamma\vartheta}$, то есть из РЛУ системы (13.19) вытекает ее РЛД. Сейчас, следуя схеме доказательства теоремы 13.1 можно доказать теорему 13.2 . При этом найдутся такие $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, что для всякого $\tau \geqslant 0$ и каждого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau+\vartheta)]$ найдутся $\delta = \delta(x_0) \in (0, \varepsilon]$ и управление $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству (13.18), при котором система (13.15) имеет решение, которое помимо условий: $x(\tau) = \widehat{x}(\tau)$, $x(\tau+\vartheta) = x_0$, еще при всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ содержится в $O_\delta[\widehat{x}(t)]$, а значит и в $O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$. Следовательно, теорема 13.2, так же как и теорема 13.1, указывает достаточные условия при которых выполнено свойство системы (13.15), приведенное в следующем определении.

О п р е д е л е н и е 13.5. Система (13.15) называется РЛД *в малом с* $\gamma_+(\widehat{x})$, если найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, что для каждого $\tau \geqslant 0$ и всякого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau+\vartheta)]$ найдется управление $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству (13.18), при котором система (13.15) имеет решение $x(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, и такое, что $x(\tau) = \widehat{x}(\tau)$, $x(\tau+\vartheta) = x_0$.

При наличии констант $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, при которых будет выполнено указанное свойство, говорим, что система (13.15) $\varepsilon, \vartheta, \eta-$РЛД в малом с $\gamma_+(\widehat{x})$.

Для системы (13.15), обладающей свойством $\varepsilon, \vartheta, \eta-$РЛД в малом с $\gamma_+(\widehat{x})$, справедливо утверждение, аналогичное лемме 13.7 .

Л е м м а 13.8. *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* I), II) *и система* (13.15) $\varepsilon, \vartheta, \eta$–РЛД *в малом с* $\gamma_+(\widehat{x})$. *Тогда при каждом* $\tau \geqslant 0$ *для любого* $\zeta > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всякого* $x_0 \in O_\delta[\widehat{x}(\tau+\vartheta)]$ *найдется управление* $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, *удовлетворяющее неравенству* (13.18), *при котором система* (13.15) *имеет решение* $x(t) \in O_\zeta[\widehat{x}(t)]$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ *и удовлетворяющее также условиям:* $x(\tau) = \widehat{x}(\tau)$, $x(\tau+\vartheta) = x_0$.

В дальнейшем, наряду с данными выше определениями, используем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 13.6. Пусть $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$. Скажем, что *система* (13.15) *обладает свойством* C) *относительно* $\gamma_+(\widehat{x})$, если найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, что эта система будет $\varepsilon, \vartheta, \eta-$РЛУ в малом на $\gamma_+(\widehat{x})$ и также $\varepsilon, \vartheta, \eta-$РЛД в малом с $\gamma_+(\widehat{x})$.

З а м е ч а н и е 13.7. Достаточные условия, приведенные в теореме 13.1, на самом деле (см. доказательства теорем 13.1 и 13.2, а также леммы 13.7 и 13.8) обеспечивают существование констант $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, при которых система (13.15) одновременно обладает свойствами $\varepsilon, \vartheta, \eta-$РЛУ в малом на $\gamma_+(\widehat{x})$ и $\varepsilon, \vartheta, \eta-$РЛД в малом с $\gamma_+(\widehat{x})$, то есть при этих условиях система (13.15) обладает свойством C) относительно $\gamma_+(\widehat{x})$. Отметим также, что указанное свойство управляемости приведено для овыпукленной системы управления. Это связано с задачами которые будут исследованы в четырнадцатом и шестнадцатом параграфах. При этом, в этих исследованиях, на самом деле, будет использовано, вытекающее из определения 13.6, следующее свойство управляемости системы (13.15) относительно $\gamma_+(\widehat{x})$: существуют такие константы $\varepsilon, \vartheta > 0$, что 1) система (13.15) $\varepsilon, \vartheta-$РЛУ на $\gamma_+(\widehat{x})$, 2) для любого $\zeta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$ для всякого $x_0 \in O_\delta[\widehat{x}(\tau)]$ среди управлений из $\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, осуществляющих перевод системы (13.15) из позиции

(τ, x_0) в позицию $(\tau+\vartheta, \widehat{x}(\tau+\vartheta))$ найдется управление μ, удовлетворяющее неравенству $\|\widehat{\mu}-\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \zeta$, 3) при каждом $\tau \geqslant 0$ выполнено свойство решений системы (13.15), указанное в утверждении леммы 13.7 с заменой в нем требования выполнения неравенства (13.17) на неравенство $\|\widehat{\mu}-\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \zeta$. Кроме того, при этих же константах система (13.15) обладает свойством ε, ϑ – РЛД с $\gamma_+(\widehat{x})$ и выполняются условия (с соответствующими изменениями в формулировках) на управления и решения (см. лемму 13.8), аналогичные указанным в условиях 2) и 3), соответственно. Тем самым, приведенные достаточные условия при которых система (13.15) обладает свойством С) обеспечивают при некоторых $\varepsilon, \vartheta > 0$ одновременное выполнение двух групп указанных свойств управляемости этой системы относительно $\gamma_+(\widehat{x})$.

Отметим, что определение РЛУ системы (13.15) на $\gamma_+(\widehat{x})$ (то же касается и определения РЛД системы (13.15) с $\gamma_+(\widehat{x})$), приведенное по указанной выше причине, предполагает, что эта система необходимо при некоторых $\varepsilon, \vartheta > 0$ обладает свойством ε, ϑ – РЛУ на $\gamma_+(\widehat{x})$, то есть, когда при каждом $\tau \geqslant 0$ для всякой точки $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ найдется управление из $\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, переводящее эту точку по решениям системы (13.15) в точку $\widehat{x}(\tau+\vartheta)$. При наличии констант $\varepsilon, \vartheta > 0$ при которых выполнено указанное свойство можно принять за (общее) определение РЛУ системы (13.15) на $\gamma_+(\widehat{x})$. Такое определение РЛУ системы (13.15) на $\gamma_+(\widehat{x})$ отвечает следующему определению РЛУ системы (13.16) на интегральную кривую $\gamma_+(\widehat{x})$ решения этой системы, отвечающего заданному управлению $\widehat{u} \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}_+}$.

Определение 13.7. Система (13.16) называется РЛУ на $\gamma_+(\widehat{x})$, если найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$ для любого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ найдется управление $u \in \mathcal{U}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, при котором эта система имеет такое решение $x(t)$, что $x(\tau) = x_0$ и $x(\tau+\vartheta) = \widehat{x}(\tau+\vartheta)$.

В случае, когда для п. в. $t \in \mathbb{R}_+$ $f(t,0,0) = 0$ получаем, что свойство РЛУ системы (13.16) на интегральную кривую решения $\widehat{x}(t) \equiv 0$ просто означает РЛУ в нуль этой системы, которая, в свою очередь, влечет свойство локальной управляемости на фиксированном отрезке $[t_0, t_1]$. Достаточные условия локальной управляемости на фиксированном отрезке $[t_0, t_1]$ такой системы при условии $0 \in \operatorname{int} \mathfrak{U}$ приведены, например, в [28, 30, 103, 113, 154, 200]. Отметим также недавние работы [7, 8] о неявной функции, которые повидимому могут быть использованы при исследовании локальной управляемости нелинейной системы при условии $0 \in \mathfrak{U}$.

Вместе с тем, еще в 60-х годах определился ряд направлений исследования, в том числе (см., например [3, 91, **?**, 99, 100, 102, 105, 109]), задачи стабилизации, оптимального управления и наблюдаемости систем вида (13.16) в окрестности заданного нестационарного решения, определенного на неограниченном временном промежутке. В данном случае, РЛУ системы (13.16) на интегральную кривую $\gamma_+(\widehat{x})$ означает возможность возвращения на каждом отрезке $[\tau, \tau+\vartheta] \subset \mathbb{R}_+$ состояний x_0, лежащих в ε-окрестности $\widehat{x}(\tau)$, с помощью управлений из $\mathcal{U}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$ в состояние $\widehat{x}(\tau+\vartheta)$. Полагая $z = \widehat{x}(t) - x$, $w = \widehat{u}(t) - u$, получим, что определение 13.7 равносильно РЛУ в нуль системы

$$\dot{z} = F(t, z, w), \tag{13.46}$$

где $F(t,z,w) \doteq f(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)) - f(t,\widehat{x}(t)-z,\widehat{u}(t)-w)$, и в которой в качестве множества допустимых управлений рассматривается совокупность измеримых сечений отображения $t \mapsto W(t) \doteq \widehat{u}(t) - \mathfrak{U} \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Укажем, сейчас, на основные особенности изучении РЛУ такой системы. В следствие нестационарности процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ (даже если в исходной системе (13.16) функция f не зависит от t) система (13.46) будет нестационарной и множество $W(t)$, ограничивающее значения допустимых управлений (в отличие от заданного множества $\mathfrak{U}$ исходной системы (13.16)) также зависит от $t \in \mathbb{R}_+$. Поскольку управление $t \mapsto \widehat{u}(t) \in \mathfrak{U}$ измеримо, то функция $t \mapsto F(t,z,w)$ в системе (13.46) и отображение $t \mapsto W(t) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ измеримы, при этом $0 \in W(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}_+$. Заметим, что последнее условие не исключает возможности того, что

$$0 \in \operatorname{int} W(t), \tag{13.47}$$

а также, поскольку процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ фиксируется из соображений, обусловленных рассматриваемой задачей, определенной на множестве допустимых процессов $\mathfrak{A}(\mathbb{R}_+)$ системы (13.16), в частности, может быть оптимальным в смысле некоторого функционала, то в силу оптимальности управления $\widehat{u}(\cdot)$, как правило, при п. в. $t \in \mathbb{R}_+$ $\widehat{u}(t) \in \partial\mathfrak{U}$, а значит, не исключена также возможность, того, что при п. в. $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \in \partial W(t). \tag{13.48}$$

Отметим, что при исследовании локальной и равномерной локальной управляемости системы системы (13.46) с условием $0 \in W(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}_+$ необходимо различать случаи (13.47) и (13.48). Действительно, так как скалярное уравнения $\dot{x} = u(t)$, $u(t) \in \mathfrak{U} \doteq \{-1\} \cup [0,1]$ (см. замечание 13.1) локально управляемо, то для нелинейного уравнения $\dot{x} = u(t) + u^2(t)$, $u(t) \in \mathfrak{U}$ все условия, кроме условия $0 \in \operatorname{int}\mathfrak{U}$, теоремы 2 работы [154] выполнены. Вместе с тем, оно не является локально управляемым (тем более, РЛУ), поскольку множество управляемости на каждом отрезке $[0,\vartheta]$ такого уравнения состоит из точек $x_0 \leqslant 0$. Заметим также, что линейным приближением, отвечающим процессу (0,0), этого уравнения будет уравнение $\dot{x} = u(t)$, в котором $u(t) \in [0,1]$. Поскольку оно не является локально управляемым (хотя для уравнения $\dot{x} = u(t)$ достаточные условия управляемости стационарной системы управления очевидно выполнены), то достаточные условия локальной управляемости, приведенные в [30, 110], тоже не выполняются. Покажем, далее, что нестационарность системы (13.46) и зависимость множества $W(t)$ от времени также не позволяют воспользоваться достаточные условиями локальной управляемости нелинейных систем для исследования равномерной локальной управляемости этой системы. В самом деле, для скалярного уравнения $\dot{x} = u(t) + u^2(t)$, $u(t) \in [-1,1]$ рассмотрим допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, в котором управление определено следующим образом: для фиксированных точек $r_0 \doteq 0 < r_1 < \ldots$, таких, что $\lim\limits_{j\to\infty}(r_{j+1} - r_j) = \infty$, при каждом $j \in \mathbb{N}$ $\widehat{u}(t) = 0$ при $t \in [r_{2j-2}, r_{2j-1})$ и $\widehat{u}(t) = 1$ при $t \in [r_{2j-1}, r_{2j})$. Для рассматриваемого уравнения, отвечающая процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, система (13.46) иметь вид $\dot{z} = b(t)w - w^2$, где $b(t) = 1 + 2\widehat{u}(t)$ и $w \in W(t) = [\widehat{u}(t) - 1, \widehat{u}(t) + 1]$. Поскольку при $t \in [r_{2j-2}, r_{2j-1})$ уравнение $\dot{z} = w - w^2$, $w \in [-1,1]$ (см. [30, 110, 154]) локально управляемо, то уравнение $\dot z = b(t)w - w^2$, $w \in W(t)$ будет локально управляемым на каждом полуинтервале $[\tau, \infty)$. Однако равномерно локально управляемым оно не будет. Действительно, при $t \in [r_{2j-1}, r_{2j})$ имеем уравнение $\dot z = 3w - w^2$, в котором $w \in [0,2]$. Так как множество управляемости этого уравнения на каждом отрезке $[\tau, \tau + \vartheta] \subset [r_{2j-1}, r_{2j})$ состоит из точек $x_0 \leqslant 0$, то для локальной управляемости на $[r_{2j-1}, r_{2j} + \vartheta]$ уравнения $\dot z = b(t)w - w^2$, $w \in W(t)$ необходимо $\vartheta > r_{2j} - r_{2j-1}$, а так как $\lim\limits_{j\to\infty}(r_{j+1} - r_j) = \infty$, то не найдется такого $\vartheta > 0$, чтобы равномерно по всем $\tau \geqslant 0$ множество управляемости на $[\tau, \tau + \vartheta]$ этого уравнения содержало некоторую окрестность нуля. Заметим, что в данном случае нуль лежит на границе множества $W(t)$ при всех $t \in [r_{2j-1}, r_{2j})$. Вместе с тем, если в исходном уравнении зафиксировать процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, в котором $\widehat{u}(t) = 1 - e^{-t}$, $t \geqslant 0$, то отвечающее ему уравнение $\dot z = b(t)w - w^2$, где $b(t) = 3 - 2\widehat{u}(t)$ и $w \in W(t) = [-e^{-t}, 2 - e^{-t}]$, будет локально управляемым на каждом полуинтервале $[\tau, \infty)$. Однако, несмотря на то, что нуль при всех $t \geqslant 0$ содержится во внутренности множества $W(t)$, не будет равномерно локально управляемым.

Сказанное показывает, что вопрос о достаточных условиях РЛУ системы (13.16) на интегральную кривую, или, что тоже самое РЛУ в нуль системы вида (13.46) при условии, что $0 \in W(t)$, требует, вообще говоря, специального исследования. Такие условия можно указать используя, например, результаты работ [68, 78, 154]. Заметим также, что указанные в данной работе достаточные условия РЛУ системы (13.15) на интегральную кривую дополняют проведенные в [78] исследования и обусловлены, как отмечалось в начале замечания, задачами, которые будут рассмотрены в четырнадцатом и шестнадцатом параграфах.

§14. Об одном свойстве решения задачи оптимального управления почти периодическими движениями

В данном параграфе исследованы свойства сужения на произвольный отрезок решения задачи оптимального управления почти периодическими движениями и доказана теорема, характеризующая его как магистральный процесс.

1. Рассмотрим систему (13.15) с функцией $f : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей (см. п. 2 в § 13) условию I). На множестве $\mathfrak{A}_c[t_0, t_1]$ управляемых процессов этой системы зададим функционал

$$(x(\cdot), \mu(\cdot)) \mapsto J(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \doteq \int_{t_0}^{t_1} \langle \mu(t), f_0(t, x(t), u)\rangle dt, \tag{14.1}$$

где функция $f_0 \colon \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию, аналогичному для f, и по аналогии с определением в [127, 128] дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 14.1. Управляемый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_1]$ системы (13.15) называется *оптимальным* для задачи

$$J(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \to \inf, \ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_1],$$

если для любого другого процесса $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$, такого, что $x(t_0)=\widehat{x}(t_0)$, $x(t_1)=\widehat{x}(t_1)$, выполнено неравенство $J(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0,t_1)$.

Совокупность решений задачи, указанной в определении 14.1, обозначим $O\mathcal{P}[t_0,t_1]$ $\blacksquare$ и полагаем

$$O\mathcal{P}(\mathbb{R}) \doteq \{(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}) : \text{для каждого } [t_0,t_1] \subset \mathbb{R} \ \ (\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))|_{[t_0,t_1]} \in O\mathcal{P}[t_0,t_1]\}.$$

Таким образом, процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in O\mathcal{P}[t_0,t_1]$ в том и только в том случае, если $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ является решением указанной в определении 14.1 задачи с закрепленными концами в точках $\widehat{x}(t_0)$ и $\widehat{x}(t_1)$, и, кроме того, он обладает так же как и в автономном случае [127] (то есть когда функции f и f_0 не зависят от t) свойством: его сужение $(x(\cdot),\mu(\cdot))|_{[t_0',t_1']}$ на каждый подотрезок $[\,t_0',t_1'] \subset [t_0,t_1]$ принадлежит $O\mathcal{P}[\,t_0',t_1']$.

В следующем пункте укажем достаточные условия, при которых решение задачи оптимального управления п. п. движениями будет принадлежать $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$, то есть когда сужение его на каждый отрезок $[t_0,t_1]$ будет оптимальным в смысле определения 14.1.

2. Всюду в этом параграфе, если не оговорено специально, рассматриваем систему (13.15) с дифференцируемой по x в каждой точке $(t,x,u) \in \mathbb{R}\times G\times\mathfrak{U}$ функцией $f:\mathbb{R}\times G\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$, такой, что при каждом $X \in \operatorname{comp}(G)$ $f \in S(\mathbb{R},C(X\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$ и $f_x' \in S(\mathbb{R},C(X\times\mathfrak{U},\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)))$. Через $D_c \subset \mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ обозначаем совокупность пар $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R},G)\times \mathrm{APM}_1$, в которых п. п. по Бору функция $x(t)$, $t\in\mathbb{R}$ является решением системы (13.15), отвечающим п. п. по Степанову $\mu \in \mathrm{APM}_1$ и $\overline{\operatorname{orb}}(\widehat{x}) \subset G$. Предполагаем также, что для всякого множества $X \in \operatorname{comp}(G)$ функция f_0 принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(X\times\mathfrak{U},\mathbb{R}))$.

Рассмотрим, далее (здесь см. § 10), следующую задачу оптимального управления п. п. движениями

$$\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot)) \doteq M\{\langle\mu(t),f_0(t,x(t),u)\rangle\} \to \inf,\ \ (x(\cdot),\mu(\cdot)) \in D_c, \tag{14.2}$$

в которой пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ называется решением, если для всех $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in D_c$ выполняется неравенство $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot))$.

Т е о р е м а 14.1. *Пусть $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ является решением задачи* (14.2) *и система* (13.15) *обладает свойством* C) *относительно $\gamma_+(\widehat{x})$. Тогда $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ принадлежит множеству $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. В этом случае (см. определение 14.1 и задание $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$) найдутся такие $t_0<t_1$ и процесс $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$, что

$$x(t_0)=\widehat{x}(t_0),\ \ x(t_1)=\widehat{x}(t_1), \tag{14.3}$$

и для которых при некотором $\delta>0$ будет выполнено неравенство (см. (14.1))

$$J(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)+\delta < J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0,t_1). \tag{14.4}$$

Далее, так как (см. определение 13.6) рассматриваемая система (13.15) обладает свойством C) относительно $\gamma_+(\widehat{x})$, то несложно показать, что она будет также обладать этим свойством относительно интегральной кривой

$$\gamma(\widehat{x};[t_0,\infty)) \doteq \{(t,\widehat{x}(t)) : t \geqslant t_0\}.$$

В дальнейшем $\varepsilon, \vartheta, \eta$ — константы, входящие в определение свойства C) системы (13.15) относительно $\gamma(\widehat{x};[t_0,\infty))$, $\mathbb{K} \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x};[t_0,\infty)) + O_\varepsilon[0]$, $\mathcal{K}$ — компактная окрестность $\mathrm{orb}(x;[t_0,t_1])$, содержащаяся в G, и

$$K \doteq \mathbb{K} \cup \mathcal{K}.$$

Поскольку $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) \in \mathrm{comp}(G)$, то (см. лемму 5.2) отображения

$$\begin{cases} (t,u) \mapsto \mathfrak{f}_0(t,u) \doteq f_0(t,\widehat{x}(t),u), \ t \mapsto \mathfrak{F}_0(t) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), \mathfrak{f}_0(t,u)\rangle, \\ (t,u) \mapsto \mathfrak{f}(t,u) \doteq f(t,\widehat{x}(t),u), \ t \mapsto \mathfrak{F}(t) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), \mathfrak{f}(t,u)\rangle, \end{cases} \tag{14.5}$$

принадлежат пространствам п. п. функций $S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$, $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}^n))$, $S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, соответственно. Поэтому для константы $\varkappa = \varkappa(\delta) \in (0,\varepsilon]$ (конкретное значение которой будет указано далее в процессе доказательства) по теоремам о существовании общих почти периодов [107] найдется такое $l' = l'(\varkappa) > 0$, что каждый отрезок

$$\mathbb{T}_i \doteq [t_1 - t_0 + \vartheta + il, t_1 - t_0 + \vartheta + il + l'], \ i \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$l \doteq 2(t_1 - t_0) + 3\vartheta + l',$$

содержит общий $\varkappa$–п. п. указанных в (14.5) п. п. по Степанову отображений и п. п. по Бору функции $\widehat{x}$, то есть найдется такая точка $\tau_i = \tau_i(\varkappa) \in \mathbb{T}_i$, что

$$\tau_i \in \mathcal{E}(\varkappa) \doteq E_S(\mathfrak{f}_0,\varkappa) \cap E_S(\mathfrak{F}_0,\varkappa) \cap E_S(\mathfrak{f},\varkappa) \cap E_S(\mathfrak{F},\varkappa) \cap E_S(f_0,\varkappa) \cap E_B(\widehat{x},\varkappa), \tag{14.6}$$

где $E_B(\widehat{x},\varkappa)$ — множество $\varkappa$-п. п. (п. п. по Бору) функции $\widehat{x}$.

Заметим, что в силу определения константы $l > 0$ и выбора точек τ_i, при каждом $i \in \mathbb{Z}_+$ имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} t_0 + i\,l < t_1 + i\,l < t_0 + \tau_i - \vartheta < t_0 + \tau_i < t_1 + \tau_i < t_1 + \tau_i + \vartheta < \\ < t_0 + (i+1)\,l - \vartheta < t_0 + (i+1)\,l. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Поскольку система (13.15) обладает свойством C) относительно $\gamma(\widehat{x};[t_0,\infty))$, то (см. определения 13.2– 13.6) при всяком $i \in \mathbb{Z}_+$ для точки $\widehat{x}_{t_0}(0) \in O_\varkappa[\widehat{x}_{t_0+\tau_i}(0)]$ найдется такое управление $\nu_i^- \in \mathcal{M}_\vartheta \doteq \mathcal{M}_{[0,\vartheta]}$, что

$$\|\widehat{\mu}_{\theta_i^-} - \nu_i^-\|_{w,[0,\vartheta]} \leqslant \eta|\widehat{x}_{t_0+\tau_i}(0) - \widehat{x}_{t_0}(0)| \overset{(14.6)}{\leqslant} \eta\varkappa, \quad \theta_i^- \doteq t_0 + \tau_i - \vartheta, \tag{14.8}$$

и система $\dot{x} = \langle \nu_i^-(t), f(t+\theta_i^-, x, u)\rangle$ имеет решение $y_i^-(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}_{\theta_i^-}(t)] \subset K$, $t \in [0,\vartheta]$, удовлетворяющее условиям:

$$y_i^-(0) = \widehat{x}_{\theta_i^-}(0), \quad y_i^-(\vartheta) = \widehat{x}_{t_0}(0). \tag{14.9}$$

Аналогично, для точки $\widehat{x}_{t_1}(0) \in O_\varkappa[\widehat{x}_{t_1+\tau_i}(0)]$ найдется такое $\nu_i^+ \in \mathcal{M}_\vartheta$, что

$$\|\widehat{\mu}_{t_1+\tau_i} - \nu_i^+\|_{w,[0,\vartheta]} \leqslant \eta|\widehat{x}_{t_1+\tau_i}(0) - \widehat{x}_{t_1}(0)| \overset{(14.6)}{\leqslant} \eta\varkappa, \tag{14.10}$$

система $\dot{x} = \langle \nu_i^+(t), f(t+t_1+\tau_i, x, u)\rangle$ имеет решение $y_i^+(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}_{t_1+\tau_i}(t)]$, $t \in [0,\vartheta]$, удовлетворяющее условиям:

$$y_i^+(0) = \widehat{x}_{t_1+\tau_i}(0), \quad y_i^+(\vartheta) = \widehat{x}_{\theta_i^+}(0), \quad \theta_i^+ \doteq t_1 + \tau_i + \vartheta. \tag{14.11}$$

Далее для доказательства понадобятся два следующих утверждения.

Л е м м а 14.1. *Для любого $\Delta > 0$ существует такое $\varkappa_1 > 0$, что для всякого $\varkappa \in (0, \varkappa_1]$ и каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ при любом $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x}, \varkappa)$ будут выполнены неравенства:*

$$\begin{cases} \mathbb{I}_i^- \doteq \Big|\displaystyle\int_0^\vartheta \langle \widehat{\mu}_{\theta_i^-}(t) - \nu_i^-(t), \mathfrak{f}_0(t + t_0 - \vartheta, u)\rangle dt\Big| < \Delta, \\ \mathbb{I}_i^+ \doteq \Big|\displaystyle\int_0^\vartheta \langle \widehat{\mu}_{t_1+\tau_i}(t) - \nu_i^+(t), \mathfrak{f}_0(t + t_1, u)\rangle dt\Big| < \Delta. \end{cases} \tag{14.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как отображение $(t, u) \mapsto \mathfrak{f}_0(t + t_0 - \vartheta, u)$ принадлежит пространству $\mathfrak{V}_{1,\vartheta} \doteq \mathfrak{V}([0, \vartheta] \times \mathcal{U}, \mathbb{R})$, то найдется такая функция φ_k, принадлежащая (см. (1.9)) фиксированному счетному всюду плотному в $\mathfrak{V}_{1,\vartheta}$ множеству $\Upsilon([0, \vartheta] \times \mathcal{U}, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{V}_{1,\vartheta}$, определяющему (см. § 2) норму в $\mathcal{M}_\vartheta$, что $\|\mathfrak{f}_0 - \varphi_k\|_{\mathfrak{V}_{1,\vartheta}} < \Delta/4$. Теперь полагаем $\varkappa_1^- \doteq \Delta/\eta 2^{k+1}(1 + \|\varphi_k\|_{\mathfrak{V}_{1,\vartheta}})$. Тогда для любого $\varkappa \in (0, \varkappa_1^-]$, зафиксировав произвольное $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x}, \varkappa)$, получаем, что

$$\mathbb{I}_i^- \leqslant \Delta/2 + 2^k(1 + \|\varphi_k\|_{\mathfrak{V}_{1,\vartheta}})\|\widehat{\mu}_{\theta_i^-} - \nu_i^-\|_{w,[0,\vartheta]} \overset{(14.8)}{\leqslant} \Delta/2 + \eta 2^k(1 + \|\varphi_k\|_{\mathfrak{V}_{1,\vartheta}})\varkappa < \Delta.$$

Точно так же, используя (14.10), доказывается существование такого $\varkappa_1^+ > 0$, что при $\varkappa \in (0, \varkappa_1^+]$ для всякого $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x}, \varkappa)$ $(i \in \mathbb{Z}_+)$ $\mathbb{I}_i^- < \Delta$. Поэтому константа $\varkappa \doteq \min(\varkappa_1^-, \varkappa_1^+)$ искомая.

Л е м м а 14.2. *Для любого $\Delta > 0$ существует такое $\varkappa_2 > 0$, что для всякого $\varkappa \in (0, \varkappa_2]$ и каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ при любом $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x}, \varkappa) \cap E_S(\mathfrak{f}, \varkappa)$ будут выполнены неравенства:*

$$\gamma_i^- \doteq \max_{t\in[0,\vartheta]} |\widehat{x}_{\theta_i^-}(t) - y_i^-(t)| < \Delta, \ \gamma_i^+ \doteq \max_{t\in[0,\vartheta]} |\widehat{x}_{t_1+\tau_i}(t) - y_i^+(t)| < \Delta. \tag{14.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение (см. (14.5)) $(t, u) \mapsto \mathfrak{f}(t + t_0 - \vartheta, u)$ принадлежит пространству $\mathfrak{V}_{n,\vartheta} \doteq \mathfrak{V}([0, \vartheta] \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$. Поэтому по теореме Лебега об абсолютной непрерывности интеграла для константы $\Delta_0 \doteq \Delta/(16e^{\gamma\sigma(\vartheta)})$, где

$$\gamma \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{(x,u)\in K\times\mathcal{U}} |f'_x(s, x, u)|ds, \tag{14.14}$$

а константа $\sigma(\vartheta)$, здесь и далее, определена равенством, аналогичным (3.11), найдется такое $\alpha > 0$, что для всякого измеримого множества $E \subset [0, \vartheta]$, мера Лебега которого не превосходит α, выполнено неравенство $\int\limits_E \max\limits_{u\in\mathcal{U}} |\mathfrak{f}(t + t_0 - \vartheta, u)|ds < \Delta_0$. Фиксируем, далее, точки $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{N(\alpha)} \in [0, \vartheta]$, образующие конечную α-сеть отрезка $[0, \vartheta]$, и для отображений $(t, u) \mapsto \psi_p(t, u) \doteq \chi_{[0,\mathfrak{t}_p]}(t)\, \mathfrak{f}(t + t_0 - \vartheta, u)$, $p = 1, \ldots, N(\alpha)$, принадлежащих $\mathfrak{V}_{n,\vartheta}$, выбираем такие функции (см. (1.9)) $\varphi_{l_1}, \ldots, \varphi_{l_{N(\alpha)}} \in \Upsilon([0, \vartheta] \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, что при каждом $p = 1, \ldots, N(\alpha)$ выполнено неравенство $I(p) \doteq \|\psi_p - \varphi_{l_p}\|_{\mathfrak{V}_{n,\vartheta}} < \Delta_0$. Полагаем, далее, $g \doteq \max\limits_{1\leqslant p\leqslant N(\alpha)} 2^{l_p}(1 + \|\varphi_{l_p}\|_{\mathfrak{V}_{n,\vartheta}})$, и пусть $\varkappa_2^- \doteq \min\{\Delta/4\sigma(\vartheta), \Delta/4\eta g\}/e^{\gamma\sigma(\vartheta)}$. Тогда, если $\varkappa \in (0, \varkappa_2^-]$, то при каждом $i \in \mathbb{Z}_+$ и любом $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x}, \varkappa) \cap E_S(\mathfrak{f}, \varkappa)$, выбирая для $t \in [0, \vartheta]$ такое $\mathfrak{t}_p$, что $|t - \mathfrak{t}_p| \leqslant \alpha$, получаем (см. обозначение для θ_i^- в (14.8)):

$$J_i(t) \doteq \Big|\int_0^t \langle \widehat{\mu}_{\theta_i^-}(s) - \nu_i^-(s), \mathfrak{f}(s + t_0 - \vartheta, u)\rangle ds\Big| \leqslant 2I(p) + 2^{l_p}\big(1 + \|\varphi_{l_p}\|_{\mathfrak{V}_n}\big)\|\widehat{\mu}_{\theta_i^-} - \nu_i^-\|_{w,[0,\vartheta]} +$$

$$+\Big|\int_{\mathfrak{t}_p}^{t}\langle\widehat{\mu}_{\theta_i^-}(s)-\nu_i^-(s),\mathfrak{f}(s+t_0-\vartheta,u)\rangle ds\Big|<4\Delta_0+\eta\varkappa g<\Delta/2e^{\gamma\sigma(\vartheta)},$$

то есть при каждом $i\in\mathbb{Z}_+$

$$\max_{t\in[0,\vartheta]}J_i(t)\leqslant\Delta/2e^{\gamma\sigma(\vartheta)}. \tag{14.15}$$

Далее, так как при каждом $i\in\mathbb{Z}_+$ и всех $t\in[0,\vartheta]$

$$y_i^-(t)=\widehat{x}_{\theta_i^-}(0)+\int_0^t\langle\nu_i^-(s),f(s+\theta_i^-,y_i^-(s),u)\rangle ds$$

и содержится в K, то из соотношений

$$|\widehat{x}_{\theta_i^-}(t)-y_i^-(t)|\leqslant\int_0^t|\langle\nu_i^-(s),f(s+\theta_i^-,\widehat{x}_{\theta_i^-}(s),u)-f(s+\theta_i^-,y_i^-(s),u)\rangle ds|+J_i(t)+$$

$$+\Big|\int_0^t\langle\widehat{\mu}_{\theta_i^-}(s)-\nu_i^-(s),\mathfrak{f}(s+\theta_i^-,u)-\mathfrak{f}(s+t_0-\vartheta,u)\rangle ds\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t\max_{(x,u)\in K\times\mathcal{U}}|f_x'(s+\theta_i^-,x,u)|\cdot|\widehat{x}_{\theta_i^-}(s)-y_i^-(s)|ds+$$

$$+J_i(t)+2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\vartheta}\max_{u\in\mathcal{U}}|\,\mathfrak{f}(s+\tau_i,u)-\mathfrak{f}(s,u)|ds,$$

в силу неравенства Гронуолла–Беллмана, учитывая выбор $\varkappa$, получаем, что

$$\gamma_i^-\leqslant\big(2\sigma(\vartheta)\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{u\in\mathcal{U}}|\,\mathfrak{f}(s+\tau_i,u)-\mathfrak{f}(s,u)|ds+\max_{t\in[0,\vartheta]}J_i(t)\big)e^{\gamma\sigma(\vartheta)}\overset{(14.15)}{<}\Delta.$$

Точно так же, принимая во внимание, что функция $(t,u)\mapsto\mathfrak{f}(t+t_1,u)$ принадлежит пространству $\mathfrak{V}_{n,\vartheta}$, неравенство (14.10) и определение $y_i^+(t)$, получим существование такого $\varkappa_2^+>0$, что для каждого $\varkappa\in(0,\varkappa_2^+]$ и всякого $\tau_i\in\mathbb{T}_i\cap E_B(\widehat{x},\varkappa)\cap E_S(\mathfrak{f},\varkappa)$ будет выполнено неравенство $\gamma_i^+<0$. Поэтому $\varkappa_2\doteq\min(\varkappa_2^-,\varkappa_2^+)>0$ искомое.

Продолжим доказательство теоремы 14.1 .

Рассмотрим управление $\mathfrak{m}_0\in\mathcal{M}_{[t_0,t_0+l\,]}$, определенное равенством

$$\mathfrak{m}_0(t)=\begin{cases}\mu(t), & t\in[t_0,t_1],\\ \widehat{\mu}(t), & t\in[t_1,t_0+l\,].\end{cases} \tag{14.16}$$

Тогда (см. (14.3)) решение $y_0(t)$, $t\in[t_0,t_0+l\,]$ системы (13.15), отвечающее управлению $\mathfrak{m}_0\in\mathcal{M}_{[t_0,t_0+l\,]}$, представимо в виде

$$y_0(t)=\begin{cases}x(t), & t\in[t_0,t_1],\\ \widehat{x}(t), & t\in[t_1,t_0+l\,].\end{cases}$$

Далее, последовательно по $j\in\mathbb{N}$ рассмотрим управления $\mathfrak{m}_j\in\mathcal{M}_{[t_0,t_0+(j+1)l\,]}$, определенные равенством

$$\mathfrak{m}_j(t)=\begin{cases}\mathfrak{m}_0(t), & t\in[t_0,t_0+l],\\ \mathfrak{m}^{(1)}(t), & t\in[t_0+l,t_0+2l],\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \mathfrak{m}^{(j)}(t), & t\in[t_0+j\,l,t_0+(j+1)\,l],\end{cases} \tag{14.17}$$

в котором $\mathfrak{m}^{(i)} \in \mathcal{M}_{[t_0+i\,l, t_0+(i+1)\,l]}$, $1 \leqslant i \leqslant j$ задано (см. принятые для θ_i^- и θ_i^+ обозначения в (14.8) и (14.11), соответственно) равенством:

$$
\mathfrak{m}^{(i)}(t) = \begin{cases} \widehat{\mu}(t), \ t \in [t_0 + i\,l, \theta_i^-], \\ \nu_i^-(t - \theta_i^-), \ t \in [\theta_i^-, t_0 + \tau_i], \\ \mu(t - \tau_i), \ t \in [t_0 + \tau_i, t_1 + \tau_i], \\ \nu_i^+(t - t_1 - \tau_i), \ t \in [t_1 + \tau_i, \theta_i^+], \\ \widehat{\mu}(t), \ t \in [\theta_i^+, t_0 + (i+1)\,l\,]. \end{cases} \tag{14.18}
$$

Тогда отвечающее $\mathfrak{m}_j \in \mathcal{M}_{[t_0, t_0+(j+1)\,l]}$ решение $y_j(t)$, $t \in [t_0, t_0 + (j+1)\,l\,]$ системы (13.15) представимо в виде

$$
y_j(t) = \begin{cases} y_0(t), \ t \in [t_0, t_0 + l], \\ y^{(1)}(t), \ t \in [t_0 + l, t_0 + 2l], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(j)}(t), \ t \in [t_0 + j\,l, t_0 + (j+1)\,l], \end{cases} \tag{14.19}
$$

в котором функции $y^{(i)}(t)$, $t \in [t_0 + i\,l, t_0 + (i+1)\,l\,]$, $1 \leqslant i \leqslant j$ заданы равенством:

$$
y^{(i)}(t) = \begin{cases} \widehat{x}(t), \ t \in [t_0 + i\,l, \theta_i^-], \\ y_i^-(t - \theta_i^-), \ t \in [\theta_i^-, t_0 + \tau_i], \\ x(t - \tau_i), \ t \in [t_0 + \tau_i, t_1 + \tau_i], \\ y_i^+(t - t_1 - \tau_i), \ t \in [t_1 + \tau_i, \theta_i^+], \\ \widehat{x}(t), \ t \in [\theta_i^+, t_0 + (i+1)\,l\,]. \end{cases} \tag{14.20}
$$

При каждом $j \in \mathbb{Z}_+$, в силу определения (см. (14.16) – (14.20)) процесса $(y_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot))$, принадлежащего $\mathfrak{A}_c[t_0, t_0 + (j+1)\,l]$, имеем следующие соотношения:

$$
J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)); t_0, t_0 + (j+1)\,l) - J(y_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot)); t_0, t_0 + (j+1)\,l) =
$$

$$
= \sum_{i=0}^{j} (I^-(i) + I(i) + I^+(i)), \tag{14.21}
$$

где

$$
I^-(i) \doteq \int_{\theta_i^-}^{t_0+\tau_i} \big(\langle \widehat{\mu}(t), f_0(t, \widehat{x}(t), u)\rangle - \langle \nu_i^-(t - \theta_i^-), f_0(t, y_i^-(t - \theta_i^-), u)\rangle\big) dt,
$$

$$
I(i) \doteq J(\widehat{x}_{\tau_i}(\cdot), \widehat{\mu}_{\tau_i}(\cdot)); t_0, t_1) - J(x(\cdot), \mu(\cdot)); t_0, t_1),
$$

$$
I^+(i) \doteq \int_{t_1+\tau_i}^{\theta_i^+} \big(\langle \widehat{\mu}(t), f_0(t, \widehat{x}(t), u)\rangle - \langle \nu_i^+(t - t_1 - \tau_i), f_0(t, y_i^+(t - t_1 - \tau_i), u)\rangle\big) dt.
$$

Укажем первое ограничение на $\varkappa > 0$ при ее выборе.

Пусть $\varkappa_0 \doteq \delta/12\sigma(t_1 - t_0)$, где константа $\sigma(t_1 - t_0) > 0$ определена аналогично (3.11) при $a = t_1 - t_0$. Тогда, принимая во внимание (14.5) – (14.7) и (14.4) при $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$, получаем при $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap \mathcal{E}(\varkappa)$, $i = 0, \dots, j$, следующие соотношения:

$$
I(i) = \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{F}_0(s + \tau_i) - \mathfrak{F}_0(s)) ds + J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)); t_0, t_1) - J(x(\cdot), \mu(\cdot)); t_0, t_1) +
$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\langle\mu(s),f_0(s,x(s),u)-f_0(s+\tau_i,x(s),u)\rangle ds>\delta-\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+(t_1-t_0)}|\mathfrak{F}_0(s+\tau_i)-\mathfrak{F}_0(s)|ds-$$

$$-\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+(t_1-t_0)}\max_{(x,u)\in K\times\mathcal{U}}|f_0(s+\tau_i,x,u)-f_0(s,x,u)|ds>\gamma-2\varkappa\sigma(t_1-t_0)>5\delta/6.$$

Приведем следующее ограничение на константу $\varkappa$ при выборе.

Поскольку функция $f_0\in S(\mathbb{R},C(K\times\mathcal{U},\mathbb{R}))$, то по лемме 1.3 при $\mathfrak{X}=K\times\mathcal{U}$, получим, что для константы $18\sigma(\vartheta)$ найдется такое $\mathfrak{h}_0>0$, что при всех $\mathfrak{h}\in(0,\mathfrak{h}_0]$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_{\mathfrak{h}}[f_0(s,\cdot,\cdot),K\times\mathcal{U}]ds<\delta/18\sigma(\vartheta),$$

в котором (см. (1.3) при $\mathfrak{X}=K\times\mathcal{U}$) $\omega_{\mathfrak{h}}[f_0(s,\cdot,\cdot),K\times\mathcal{U}]$ — $\mathfrak{h}$-колебание непрерывной функции $(x,u)\mapsto f_0(s,x,u)$ на компактном множестве $K\times\mathcal{U}$. Теперь, по лемме 14.2 для указанной константы $\mathfrak{h}_0$ найдется $\varkappa_2=\varkappa_2(\mathfrak{h}_0)>0$ такое, что при каждом $\varkappa$ из $(0,\varkappa_2]$ и всяком i (см. обозначения в (14.13)) справедливы неравенства $\gamma_i^-,\gamma_i^+<\mathfrak{h}_0$. Следовательно, при $\varkappa\in(0,\varkappa_2]$

$$\Omega_i\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\big(\omega_{\gamma_i^-}[f_0(s,\cdot,\cdot),K\times\mathcal{U}]+\omega_{\gamma_i^+}[f_0(s,\cdot,\cdot),K\times\mathcal{U}]\big)ds<\delta/9\sigma(\vartheta).\qquad(14.22)$$

Далее, по лемме 14.1 для константы $\delta/18>0$ найдется такое $\varkappa_1=\varkappa_1(\delta/18)>0$, что при $\varkappa\in(0,\varkappa_1]$ для каждого $i=0,\ldots,j$ будут выполнены (здесь см. обозначения в (14.12) и (14.5)) неравенства

$$\mathbb{I}_i^-,\ \mathbb{I}_i^+<\delta/18.\qquad(14.23)$$

В силу сказанного, для $\varkappa\in(0,\varkappa_3]$, где $\varkappa_3\doteq\min\{\varkappa_1,\varkappa_2,\delta/36\sigma(\vartheta)\}$, при τ_i принадлежащих $\mathbb{T}_i\cap\mathcal{E}(\varkappa)$, $i=0,\ldots,j$ будут выполняться неравенства (14.22) и (14.23), а так как

$$|I^-(i)|+|I^+(i)|\leqslant 4\sigma(\vartheta)\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{u\in\mathcal{U}}|\mathfrak{f}_0(s+\tau_i,u)-\mathfrak{f}_0(s,u)|ds+\mathbb{I}_i^-+\mathbb{I}_i^++\sigma(\vartheta)\Omega_i,$$

то при каждом $i=0,\ldots,j$ и любом $\tau_i\in\mathbb{T}_i\cap\mathcal{E}(\varkappa)$ $|I^-(i)|+|I^+(i)|<\delta/3$. Следовательно, при $\varkappa\in(0,\varkappa_4]$, где $\varkappa_4\doteq\min(\varkappa_0,\varkappa_3)$, учитывая приведенную выше оценку снизу для $I(i)$, получаем, что $\sum\limits_{i=0}^{j}(I^-(i)+I(i)+I^-(i))>\delta(j+1)/2$.

Таким образом, при любом фиксированном $\varkappa\in(0,\varkappa_4]$ для каждого $j\in\mathbb{Z}_+$

$$\frac{1}{(j+1)l}(J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot));t_0,t_0+(j+1)\,l)-J(y_j(\cdot),\mathfrak{m}_j(\cdot));t_0,t_0+(j+1)\,l))>\delta/2\,l.$$

С другой стороны, в силу свойств среднего значения п. п. функций [107, с. 23] найдется такое $\widehat{j}\in\mathbb{N}$, что при всех $j\geqslant\widehat{j}$ будет выполнено неравенство

$$\Big|\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))-\frac{1}{(j+1)l}\int_{t_0}^{t_0+(j+1)l}\langle\widehat{\mu}(t),f_0(t,\widehat{x}(t),u)\rangle dt\Big|<\delta/4\,l,$$

а следовательно, при каждом $j \geqslant \widehat{j}$ для построенного процесса $(\mathfrak{m}_j(\cdot), y_j(\cdot))$, принадлежащего $\mathfrak{A}_c([t_0,\infty); K)$, выполнено неравенство

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) > \frac{1}{(j+1)l} \int_{t_0}^{t_0+(j+1)l} \langle \mathfrak{m}_j(t), f_0(t, y_j(t), u)\rangle dt + \delta/4\, l. \tag{14.24}$$

Далее, так как процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$, то по определению множества D_c, функция $t \mapsto \widehat{x}(t)$ является п. п. по Бору решением системы (13.15), отвечающим п. п. управлению $\widehat{\mu} \in \mathrm{APM}_1$ и, как отмечалось, при этом управлении отображение (см. обозначение в (14.5)) $(t,u) \mapsto \mathfrak{f}_0(t,u)$ принадлежит пространству п. п. по Степанову функций $S(\mathbb{R}, C(\mathcal{U},\mathbb{R}))$. Поэтому (см. лемму 1.5 и [187]) множество их общих $\varkappa$–п. п., являющихся целыми кратными числа l, относительно плотно. Следовательно, найдется такое $j_0 > \widehat{j}$, что будет выполнено неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u\in\mathcal{U}} |\mathfrak{f}_0(s+j_0' l, u) - \mathfrak{f}_0(s,u)| ds + \sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{x}(t+j_0' l) - \widehat{x}(t)| < \varkappa, \tag{14.25}$$

в котором $j_0' \doteq j_0 + 1$.

Теперь, используя свойство C) системы (13.15) относительно $\gamma(\widehat{x}; [t_0,\infty))$, для точки $\widehat{x}(t_0) \in O_\varkappa[\widehat{x}(t_0 + j_0'\, l)]$ найдем такое управление $\mathfrak{n} \in \mathcal{M}_{[0,\vartheta]}$, что

$$\|\widehat{\mu}_{\zeta_0} - \mathfrak{n}\|_{w,[0,\vartheta]} \leqslant \eta |\widehat{x}(t_0 + j_0'\, l) - \widehat{x}(t_0)| \overset{(14.25)}{<} \eta\, \varkappa, \quad \zeta_0 \doteq t_0 + j_0'\, l - \vartheta, \tag{14.26}$$

и при котором система $\dot{x} = \langle \mathfrak{n}(t), f_0(t+\zeta_0, x, u)\rangle$ имеет решение $z(t) \in K,\ t \in [0,\vartheta]$, удовлетворяющее условиям:

$$z(0) = \widehat{x}(\zeta_0), \quad z(\vartheta) = \widehat{x}(t_0). \tag{14.27}$$

Далее строим управление $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{[t_0, t_0+j_0'\, l]}$ $(j_0' \doteq j_0+1)$, определенное равенством (здесь см. (14.8) при $j = j_0$, (14.19) при $i = 1,\ldots,j_0$ и (14.7) при $j = j_0$)

$$\mathfrak{m}(t) \doteq \begin{cases} \mathfrak{m}_{j_0}(t),\ t \in [t_0, \zeta_0], \\ \mathfrak{n}(t-\zeta_0),\ t \in [\zeta_0, t_0 + j_0'\, l]. \end{cases}$$

Тогда (см. (14.19) при $j = j_0$, (14.20) при $i = 1,\ldots,j_0$)

$$y(t) \doteq \begin{cases} y_{j_0}(t),\ t \in [t_0, \zeta_0], \\ z(t-\zeta_0),\ t \in [\zeta_0, t_0 + j_0'\, l] \end{cases}$$

является решением системы (13.15), отвечающим управлению $\mathfrak{m}$, и так как (см. равенства (14.3) и (14.27)) $y(t_0) = \widehat{x}(t_0) = z(\vartheta) = y(t_0 + j_0'\, l)$, то построенный процесс $(y(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_0 + j_0'\, l]$ может быть $j_0'\, l$-периодическим образом продолжен на $\mathbb{R}$. Полученный таким образом процесс $(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot))$ принадлежит множеству D_c, поскольку D_c наряду с п. п. процессами содержит и все периодические процессы.

Покажем, что $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) > \mathfrak{T}(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot))$. В самом деле, в силу (14.7), а также (14.16) – (14.20) и определения процесса $(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot))$, имеем следующие соотношения:

$$\Big|\int_{t_0}^{t_0+j_0'\, l} \langle \mathfrak{m}_{j_0}(t), f_0(t, y_{j_0}(t), u)\rangle dt - \int_{t_0}^{t_0+j_0'\, l} \langle \mathfrak{m}(t), f_0(t, y(t), u)\rangle dt\Big| =$$

$$= \Big| \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+\vartheta} \big(\langle \widehat{\mu}(t), f_0(t, \widehat{x}(t), u)\rangle - \langle \mathfrak{n}(t-\zeta_0), f_0(t, z(t-\zeta_0), u)\rangle\big) dt \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \int_0^{\vartheta} \langle \widehat{\mu}_{\zeta_0}(t) - \mathfrak{n}(t), f_0(t+\zeta_0, \widehat{x}_{\zeta_0}(t), u) - f_0(t+t_0-\vartheta, \widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t), u)\rangle dt \Big| +$$

$$+ \Big| \int_0^{\vartheta} \langle \widehat{\mu}_{\zeta_0}(t) - \mathfrak{n}(t), f_0(t+t_0-\vartheta, \widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t), u)\rangle dt \Big| +$$

$$+ \Big| \int_0^{\vartheta} \langle \mathfrak{n}(t), f_0(t+\zeta_0, \widehat{x}_{\zeta_0}(t), u) - f_0(t+\zeta_0, z(t), u)\rangle dt \Big| \leqslant \mathbb{I},$$

где

$$\mathbb{I} \doteq 2\sigma(\vartheta) \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u\in\mathfrak{U}} |\mathfrak{f}_0(s+j_0' l, u) - \mathfrak{f}_0(s, u)| ds + J_1 + \sigma(\vartheta) J_2,$$

и где, в свою очередь,

$$J_1 \doteq \Big| \int_0^{\vartheta} \langle \widehat{\mu}_{\zeta_0}(t) - \mathfrak{n}(t), \mathfrak{f}_0(t+t_0-\vartheta, \widehat{x}_{\zeta_0}(t), u)\rangle dt \Big|, \;\; J_2 \doteq \int_0^{\vartheta} \omega_{\mathfrak{h}}[f_0(t, \cdot, \cdot), K\times\mathfrak{U}] dt,$$

а константа $\mathfrak{h} \doteq \max\limits_{t\in[0,\vartheta]} |\widehat{x}_{\zeta_0}(t) - z(t)|$.

Поскольку $\varkappa < \varkappa_1 = \varkappa_1(\delta/18)$, то (см. доказательство первого неравенства в (14.12) леммы 14.1 при $\Delta = \delta/18$, с учетом неравенства (14.26)) $J_1 < \delta/18$. Далее, учитывая, что при всех $t \in [0, \vartheta]$ $\;z(t) = \widehat{x}_{\zeta_0}(0) + \int\limits_0^t \langle \mathfrak{n}(s), f(s+\zeta_0), z(s), u)\rangle ds$, как и при доказательстве леммы 14.2, получаем, что

$$\mathfrak{h} \leqslant \Big(2\sigma(\vartheta) \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u\in\mathfrak{U}} | \mathfrak{f}(s+j_0' l, u) - \mathfrak{f}(s, u)| ds + \max_{t\in[0,\vartheta]} J(t)\Big) e^{\gamma\sigma(\vartheta)},$$

где $J(t) \doteq \Big|\int\limits_0^t \langle \widehat{\mu}_{\zeta_0}(s) - \mathfrak{n}(s), \mathfrak{f}(s+t_0-\vartheta, u)\rangle ds\Big|$, а так как $\varkappa < \varkappa_2 = \varkappa_2(\mathfrak{h}_0)$, то (см. доказательство первого неравенства в (14.13) в лемме 14.2 при $\Delta = \mathfrak{h}_0$, с учетом (14.26)) $\mathfrak{h} < \mathfrak{h}_0$, следовательно $J_2 < \gamma/18\sigma(\vartheta)$. Поэтому $J_1 + \sigma(\vartheta) J_2 \leqslant \delta/9$. Учитывая, что $\varkappa < \delta/36\sigma(\vartheta)$, получаем, что $\mathbb{I} < 2\delta/9$, а значит,

$$\frac{1}{j_0' l} \int_{t_0}^{t_0+j_0' l} \langle \mathfrak{m}_{j_0}(t), \mathfrak{f}_0(t, y_{j_0'}(t), u)\rangle dt > \frac{1}{j_0' l} \int_{t_0}^{t_0+j_0' l} \langle \mathfrak{m}(t), \mathfrak{f}_0(t, y(t), u)\rangle dt - \frac{2\delta}{9 j_0' l},$$

откуда, в силу неравенства (14.24), выполненного при всех $j > \widehat{j}$, и выбора j_0, следует, что

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) > \mathfrak{T}(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot)) + \frac{\delta}{4\,l} - \frac{2\delta}{9 j_0'\, l} > \mathfrak{T}(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot)).$$

Тем самым неравенство $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) > \mathfrak{T}(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot))$ доказано, которое, в свою очередь, противоречит условию теоремы 14.1 о том, что п. п. процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ является решением задачи (14.2).

3. Доказательству следующего свойства решения задачи (14.2) предпошлем ряд обозначений и утверждений, связанных с системой (13.15), в предположении, что функция f удовлетворяет условию I).

Для заданных $X \subset G$ и промежутка $\mathbb{T}$ числовой прямой полагаем

$$\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}; X) \doteq \{(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{T}) : \text{ для всех } t \in \mathbb{T} \quad x(t) \in X\}. \tag{14.28}$$

Поскольку f удовлетворяет условию I), то, используя компактность множества $\mathcal{M}_{\mathbb{T}} \subset (\mathbb{M}(\mathbb{T}, \operatorname{frm}(\mathcal{U})), \|\cdot\|_{w,\mathbb{T}})$, получаем следующее утверждение.

Л е м м а 14.3. *Для каждого отрезка $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ и любого $X \in \operatorname{comp}(G)$ множество $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}; X) \subset C(\mathbb{T}, X) \times \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ (при условии, что оно непусто) секвенциально компактно.*

Далее рассматриваем следующее условие:

$\mathcal{B}$) существует такое $K \in \operatorname{comp}(G)$, что для каждого отрезка $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ множество $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}; K) \neq \emptyset$.

Отметим, что для выполнения условия $\mathcal{B}$) достаточно существования такого процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$, что $\overline{\operatorname{orb}}(x) \doteq \overline{\operatorname{orb}}(x; \mathbb{R}) \in \operatorname{comp}(G)$ (в этом случае, в качестве K можно рассматривать любую компактную окрестность $\overline{\operatorname{orb}}(x)$, содержащуюся в области G). Кроме того, при выполнении условия $\mathcal{B}$), в силу непрерывности функционала (14.1) (напомним, что f_0 удовлетворяет условию, аналогичному условию I) для функции f), из леммы 14.3 вытекает следствие.

С л е д с т в и е 14.1. *Пусть выполнено условие $\mathcal{B}$). Тогда для каждого отрезка $[t_0, t_1]$ задача*

$$J(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \to \inf, \; (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c([t_0, t_1]; K) \tag{14.29}$$

имеет (глобальное) решение.

Теперь по аналогии с определением множества $O\mathcal{P}[t_0, t_1]$ (см. определение 14.1) зададим множество $O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K) \subset \mathfrak{A}_c([t_0, t_1]; K)$. Более точно, скажем, что процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K)$, если $J(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0, t_1)$ для любого другого процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c([t_0, t_1]; K)$, такого, что $x(t_0) = \widehat{x}(t_0)$, $x(t_1) = \widehat{x}(t_1)$. Кроме того, аналогично $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$ определяем множество

$$O\mathcal{P}(\mathbb{R}; K) \doteq$$
$$\doteq \{(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; K) : \text{для каждого } [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \;\; (\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))|_{[t_0, t_1]} \in O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K)\}.$$

Отметим, далее, что поскольку каждое (глобальное) решение задачи (14.29) принадлежит $O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K)$, то по следствию 14.1 получаем, что при выполнении условия $\mathcal{B}$), для каждого отрезка $[t_0, t_1]$ множество $O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K) \neq \emptyset$. Тем самым мы подошли к важному вопросу об описании характера поведения множества оптимальных процессов из $O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K)$ при $t_1 - t_0 \to \infty$.

Укажем сейчас на один из возможных способов такого описания, используя задачу (14.2) оптимального управления почти периодическими движениями.

С этой целью отметим сначала, что если множество допустимых (п. п.) процессов D_c системы (13.15) с функцией f, удовлетворяющей условиям, приведенным в начале второго пункта, не пусто, то условие $\mathcal{B}$) для такой системы выполнено. Отметим также, что приведенное в теореме 14.1 свойство выполнено в предположении, что п. п. процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ является глобальным решением задачи (14.2). В случае, если под решением этой задачи понимать такой процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$, что при некотором $\alpha>0$ для всех $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in D_c$, в которых $\|\widehat{x}-x\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\leqslant\alpha$, выполняется неравенство $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\leqslant\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot))$, то аналогично доказательству теоремы 14.1 можно показать, что если система (13.15) обладает свойством С) относительно $\gamma_+(\widehat{x})$, то это решение будет принадлежать $O\mathcal{P}(\mathbb{R};X)$, где

$$X\doteq\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x})+O_\varepsilon[0],\tag{14.30}$$

а ε — константа, фигурирующая в определении свойства С) системы (13.15) относительно $\gamma_+(\widehat{x})$. В следующей теореме 14.2 и в дальнейшем, если не оговорено особо, под решением задачи (14.2) понимаем процесс, удовлетворяющий указанным сейчас условиям.

Т е о р е м а 14.2. *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$ *является решением задачи* (14.2) *и система* (13.15) *обладает свойством* С) *относительно* $\gamma_+(\widehat{x})$. *Пусть, далее,* $O\mathcal{P}([0,T];X)$ — *совокупность решений задачи* (14.29) *при* $X\in\mathrm{comp}(G)$, *определенном равенством* (14.30). *Тогда равномерно по* $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,T];X)$ *существует*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\langle\mu_T(t),f_0(t,x_T(t),u)\rangle dt\doteq c_0$$

и при этом выполнено равенство $c_0=\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что равномерно по $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))$, принадлежащих $O\mathcal{P}([0,T];X)$ (см. обозначение (14.1))

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\leqslant\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}J(x_T(\cdot)\mu_T(\cdot);0,T).\tag{14.31}$$

В самом деле, допустив противное, получим, что найдутся такие последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j\to\infty}\tau_j=\infty$ и $\{(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\}_{j=1}^\infty$, $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,\tau_j];X)$, что

$$c_1\doteq\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\tau_j}J(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot);0,\tau_j)<\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)).\tag{14.32}$$

Далее для доказательства понадобится следующее утверждение, доказательство которого в целом аналогично доказательству леммы 1 в [127, с. 85], и мы его опускаем.

Л е м м а 14.4. *Пусть заданы d–ограниченная последовательность функций* $\{F_j\}_{j=1}^\infty\subset L_1^{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и последовательность* $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty\subset(0,\infty)$, *такая что* $\lim\limits_{j\to\infty}\tau_j=\infty$. *Тогда для каждого* $T>0$ *при любом* $j\in\mathbb{N}$ *найдется* $\theta_j(T)\in[0,\tau_j-T]$ *такое, что*

$$\lim_{j\to\infty}\Big|\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}F_j(t)dt-\frac{1}{T}\int_{\theta_j(T)}^{\theta_j(T)+T}F_j(t)dt\Big|=0.$$

Поскольку функция $f_0\in S(\mathbb{R},C(K,\mathbb{R}))$, то она d-непрерывна и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{(x,u)\in K\times\mathfrak{U}}|f_0(s,x,u)|ds\doteq\gamma_0<\infty.\tag{14.33}$$

Поэтому по лемме 14.4 при $F_j(t) \doteq \langle \mu_j(t), f_0(t, x_j(t), u)\rangle$ получим, что для каждого $T \geqslant 2\vartheta$ найдутся такие точки $\theta_j(T) \in [0, \tau_j - T]$, что

$$\lim_{j\to\infty}\Big|\frac{1}{\tau_j}J(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot); 0, \tau_j) - \frac{1}{T}J(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot); \theta_j(T), \theta_j(T)+T)\Big| = 0. \tag{14.34}$$

Поскольку $x_j(t) \in K$, а система (13.15) $\varepsilon, \vartheta, \eta$ –РЛУ на $\gamma_+(\widehat{x})$ и $\varepsilon, \vartheta, \eta$ –РЛД с $\gamma_+(\widehat{x})$, то (см. определения 13.2 и 13.3) найдется такое управление $\nu_j^- \in \mathcal{M}_{[\theta_j, \theta_j+\vartheta]}$, где $\theta_j \doteq \theta_j(T)$, что

$$\|\widehat{\mu} - \nu_j^-\|_{w,[\theta_j,\theta_j+\vartheta]} \leqslant \eta\,|\widehat{x}(\theta_j+\vartheta) - x_j(\theta_j+\vartheta)|,$$

и при котором система (13.15) имеет решение $y_j^-(t) \in X$, $t \in [\theta_j, \theta_j+\vartheta]$ такое, что

$$y_j^-(\theta_j) = \widehat{x}(\theta_j), \quad y_j^-(\theta_j+\vartheta) = x_j(\theta_j+\vartheta), \tag{14.35}$$

а также такое управление $\nu_j^+ \in \mathcal{M}_{[\theta_j+T-\vartheta, \theta_j+T]}$, что

$$\|\widehat{\mu} - \nu_j^+\|_{w,[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T]} \leqslant \eta\,|\widehat{x}(\theta_j+T-\vartheta) - x_j(\theta_j+T-\vartheta)|,$$

и при котором система (13.15) имеет решение $y_j^+(t) \in K$, $t \in [\theta_j+T-\vartheta, \theta_j+T]$, удовлетворяющее также условиям:

$$y_j^+(\theta_j+T-\vartheta) = x_j(\theta_j+T-\vartheta), \quad y_j^-(\theta_j+T) = \widehat{x}(\theta_j+T). \tag{14.36}$$

Теперь рассмотрим управление

$$\mathfrak{m}_j(t) \doteq \begin{cases} \nu_j^-(t), \ t \in [\theta_j, \theta_j+\vartheta], \\ \mu_j(t), \ t \in [\theta_j+\vartheta, \theta_j+T-\vartheta], \\ \nu_j^+(t), \ t \in [\theta_j+T-\vartheta, \theta_j+T]. \end{cases}$$

Тогда отвечающее ему решение системы (13.15) (см. (14.35) и (14.36)) имеет вид

$$y_j(t) \doteq \begin{cases} y_j^-(t), \ t \in [\theta_j, \theta_j+\vartheta], \\ x_j(t), \ t \in [\theta_j+\vartheta, \theta_j+T-\vartheta], \\ y_j^+(t), \ t \in [\theta_j+T-\vartheta, \theta_j+T]. \end{cases}$$

Из определения $(x_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot))$, учитывая, что процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in O\mathcal{P}(\mathbb{R}; X)$, а значит, он будет принадлежать и $O\mathcal{P}([\theta_j, \theta_j+T]; X)$, в силу равенств (14.35) и (14.36), имеем следующие соотношения:

$$\frac{1}{T}J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); \theta_j, \theta_j+T) \leqslant \frac{1}{T}J(y_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot); \theta_j, \theta_j+T) =$$

$$= \frac{1}{T}\Big\{J\big(y_j^-(\cdot), \nu_j^-(\cdot); \theta_j, \theta_j+\vartheta\big) + J\big(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot); \theta_j+\vartheta, \theta_j+T-\vartheta) +$$

$$+ J\big(y_j^+(\cdot), \nu_j^+(\cdot); \theta_j+T-\vartheta, \theta_j+T)\Big\} = \frac{1}{T}\Big\{J(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot); \theta_j, \theta_j+T\big) +$$

$$+ \int_{\theta_j}^{\theta_j+\vartheta}\big[\langle \nu_j^-(t), f_0(t, y_j^-(t), u)\rangle - \langle \mu_j(t), f_0(t, x_j(t), u)\rangle\big]dt +$$

$$+\int_{\theta_j+T-\vartheta}^{\theta_j+T}\big[\langle\nu_j^+(t),f_0(t,y_j^+(t),u)\rangle-\langle\mu_j(t),f_0(t,x_j(t),u)\rangle\big]dt\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4\gamma_0\varkappa(\vartheta)}{T}+\frac{1}{T}J(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot);\theta_j,\theta_j+T),$$

где $\gamma_0>0$ определено равенством (14.33), а $\varkappa(\vartheta)$ — равенством (3.11) при $a=\vartheta$.

Пусть, далее, $T_i\geqslant 2\vartheta$, $i\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{i\to\infty}T_i=\infty$. В силу (14.34) для каждого $i\in\mathbb{N}$ найдется такой индекс j_i, что будет выполнено неравенство

$$\Big|\frac{1}{\tau_{j_i}}J(x_{j_i}(\cdot),\mu_{j_i}(\cdot);0,\tau_{j_i})-\frac{1}{T_i}J(x_{j_i}(\cdot),\mu_{j_i}(\cdot);\theta_{j_i},\theta_{j_i}+T_i)\Big|<\frac{1}{T_i},\tag{14.37}$$

в котором $\theta_{j_i}\doteq\theta_j(T_i)$. Поэтому

$$\frac{1}{T_i}J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);\theta_{j_i},\theta_{j_i}+T_i)\leqslant\frac{4\gamma_0\varkappa(\vartheta)}{T_i}+\frac{1}{T_i}+\frac{1}{\tau_{j_i}}J(x_{j_i}(\cdot),\mu_{j_i}(\cdot);0,\tau_{j_i}).\tag{14.38}$$

Далее, так как для каждой п. п. (как по Бору, так и по Степанову) функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равномерно по $a\in\mathbb{R}$ $\quad M\{g(t+a)\}=M\{g(t)\}$, то

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{T_i}J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);\theta_{j_i},\theta_{j_i}+T_i)=M\{\langle\widehat{\mu}(t),f_0(t,\widehat{x}(t),u)\rangle\}\doteq\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)).\tag{14.39}$$

Следовательно, в силу (14.38),

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\leqslant\lim_{i\to\infty}\frac{1}{\tau_{j_i}}J(x_{j_i}(\cdot),\mu_{j_i}(\cdot);0,\tau_{j_i})=c_1.$$

Последнее противоречит (14.32), и тем самым неравенство (14.31) доказано.

Аналогично доказывается, что равномерно по $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,T];X)$

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\geqslant\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}J(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot);0,T).\tag{14.40}$$

В самом деле, в противном случае найдутся такие последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ из $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j\to\infty}\tau_j=\infty$ и $\{(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$, $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,\tau_j];X)$, что

$$c_2\doteq\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\tau_j}J(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot);0,\tau_j)>\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)).\tag{14.41}$$

Далее, для $T\geqslant 2\vartheta$ рассмотрим точки $\theta_j=\theta_j(T)$, удовлетворяющие при каждом $j\in\mathbb{N}$ неравенствам $0\leqslant\theta_j<\theta_j+T\leqslant\tau_j$, и для которых выполняется равенство (14.34). Теперь фиксируем управление $\nu_j^+\in\mathcal{M}_{[\theta_j,\theta_j+T]}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\mathfrak{m}-\nu_j^-\|_{w,[\theta_j,\theta_j+\vartheta]}\leqslant\eta\,|\widehat{x}(\theta_j)-x_j(\theta_j)|,$$

при котором система (13.15) имеет такое решение $y_j^+(t)\in X$, $t\in[\theta_j,\theta_j+T]$, что

$$y_j^+(\theta_j)=x(\theta_j),\quad y_j^+(\theta_j+\vartheta)=\widehat{x}(\theta_j+\vartheta),\tag{14.42}$$

а также управление $\nu_j^-\in\mathcal{M}_{[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T]}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\mathfrak{m}-\nu_j^-\|_{w,[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T]}\leqslant\eta\,|\widehat{x}(\theta_j+T)-x_j(\theta_j+T)|,$$

при котором система (13.15) имеет решение $y_j^-(t)\in X$, $t\in[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T]$ такое, что

$$y_j^-(\theta_j+T-\vartheta)=x_j(\theta_j+T-\vartheta),\quad y_j^-(\theta_j+T)=\widehat{x}(\theta_j+T). \tag{14.43}$$

Далее рассмотрим управление

$$\mathfrak{m}_j(t)\doteq\begin{cases}\nu_j^+(t),\ t\in[\theta_j,\theta_j+\vartheta],\\ \mathfrak{m}(t),\ t\in[\theta_j+\vartheta,\theta_j+T-\vartheta],\\ \nu_j^-(t),\ t\in[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T].\end{cases}$$

Тогда отвечающее ему решение системы (13.15) (см. (14.42) и (14.43)) представимо в виде

$$y_j(t)\doteq\begin{cases}y_j^-(t),\ t\in[\theta_j,\theta_j+\vartheta],\\ \mathfrak{x}(t),\ t\in[\theta_j+\vartheta,\theta_j+T-\vartheta],\\ y_j^+(t),\ t\in[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T].\end{cases}$$

Из определения процесса $(x_j(\cdot),\mathfrak{m}_j(\cdot))$, принимая во внимание, что $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ принадлежит $O\mathcal{P}([\theta_j,\theta_j+T];X)$, и равенства (14.42), (14.43), получаем, что

$$\frac{1}{T}J(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot);\theta_j,\theta_j+T)\leqslant\frac{1}{T}J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot),\theta_j,\theta_j+T)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4\gamma_0\varkappa(\vartheta)}{T}+\frac{1}{T}J(y_j(\cdot),\mathfrak{m}_j(\cdot);\theta_j,\theta_j+T),$$

откуда, в силу (14.37), вытекает неравенство

$$\frac{1}{\tau_{j_i}}J(x_{j_i}(\cdot),\mu_{j_i}(\cdot);0,\tau_{j_i})<\frac{4\gamma_0\varkappa(\vartheta)}{T_i}+\frac{1}{T_i}+\frac{1}{T_i}J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);\theta_{j_i},\theta_{j_i}+T_i).$$

Отсюда, в силу (14.39) следует, что

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\geqslant\lim_{i\to\infty}\frac{1}{\tau_{j_i}}J(x_{j_i}(\cdot),\mu_{j_i}(\cdot);0,\tau_{j_i})=c_2.$$

Последнее противоречит неравенству (14.41).

Доказанные неравенства (14.31) и (14.40), которые выполняются равномерно по всем $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,T];X)$, завершают доказательство теоремы 14.2 .

Таким образом, в доказанных теоремах 14.1 и 14.2 приведены свойства решения $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$ задачи оптимального управления п. п. движениями (14.2), позволяющие интерпретировать его как *магистральный процесс*, в том смысле, что оно определено на всей числовой прямой, его сужение на каждый отрезок $[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}$ является решением задачи (см. обозначение (14.1))

$$\begin{cases}J(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\to\inf,\ (x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c[t_0,t_1],\\ x(t_0)=\widehat{x}(t_0),\ x(t_1)=\widehat{x}(t_1),\end{cases}$$

с интегральным функционалом и закрепленными концами в точках $\widehat{x}(t_0)$ и $\widehat{x}(t_1)$, и, наконец, позволяет описать поведение при $T\to\infty$ множества $\{\frac{1}{T}J(x(\cdot),\mu(\cdot);0,T)\}_{T>0}$ усреднений, отвечающего всем $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,T];X)$.

Отметим, что указанные свойства будут выполнены и для решения автономной задачи (12.45) оптимального управления п. п. движениями, являющейся расширением задачи (12.44) оптимального управления периодическими движениями. В точности повторив рассуждения, приведенные в [127, с. 36] получаем, что если периодический процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathbb{P}_{c,\omega}$ некоторого периода $\omega > 0$ является решением (см. п. 3 в § 12) задачи (12.44), то его сужение на каждый отрезок $[t_0, t_1]$ будет решением задачи, определенной на множестве $\mathfrak{A}_c[t_0, t_1]$ управляемых процессов (автономной) системы (12.42), с интегральным функционалом $J(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1)$ и закрепленными концами в точках $\widehat{x}(t_0)$ и $\widehat{x}(t_1)$. Далее, если окажется, что система (12.42) обладает свойством C) относительно интегральной кривой $\gamma_+(\widehat{x})$, совпадающей с $\gamma(\widehat{x}; [0, \omega])$, то в этом случае будет выполняться свойство множества оптимальных процессов $O\mathcal{P}([0,T], K)$[11], указанное в теореме 14.2, где в качестве c_0 будет выступать константа $c_0 = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}\langle\widehat{\mu}(t), f_0(\widehat{x}(t), u)\rangle dt$. Следовательно, в случае если задача (12.44) имеет решение и система (12.42) обладает свойством C) относительно интегральной кривой, отвечающей оптимальному решению, то это периодическое решение будет магистральным процессом. Этим и объясняется роль задачи периодической оптимизации при описании поведения оптимальных процессов $O\mathcal{P}([0,T], K)$ при $T \to \infty$. Вместе с тем, задача (12.44) может не иметь решения, а отвечающая ей задача (12.45) будет иметь (п. п.) решение $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$. В этом случае, при условии, что система (12.42) обладает свойством C) относительно $\gamma_+(\widehat{x})$, получаем п. п. магистральный процесс. При этом справедливо следующее утверждение, в формулировке и доказательстве которого используем обозначения из п. 3 двенадцатого параграфа.

Т е о р е м а 14.3. *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ *является решением задачи* (12.45) *и система* (12.42) *является* $\varepsilon, \vartheta, \eta$ — РЛД *в малом с* $\gamma_+(\widehat{x})$. *Тогда*

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = \inf\{\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)),\ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathbb{P}_c\} \doteq \iota_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $t \mapsto \widehat{x}(t)$ п. п. по Бору, а отображение $t \mapsto \langle\widehat{\mu}(t), f_0(\widehat{x}(t), u)\rangle$ п. п. по Степанову, то для $\varkappa \in (0, \varepsilon]$ найдется такая последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ общих их $\varkappa$-почти периодов, что $\lim\limits_{j\to\infty}\tau_j = \infty$, при каждом $j \in \mathbb{N}\quad \tau_{j+1} - \tau_j > \vartheta$ и будет выполнено неравенство

$$|\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) - \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\langle\widehat{\mu}(t), f_0(\widehat{x}(t), u)\rangle dt| \leqslant \frac{1}{j}. \tag{14.44}$$

Кроме того, поскольку система (12.42) $\varepsilon, \vartheta, \eta$ — РЛД в малом с $\gamma_+(\widehat{x})$, то для точки $\widehat{x}(0) \in O_{\varkappa}[\widehat{x}_{\tau_j}(0)]$ при каждом $j \in \mathbb{N}$ найдется такое управление $\nu_j^- \in \mathcal{M}_{[\tau_j - \vartheta, \tau_j]}$, что $\|\widehat{\mu} - \nu_j^-\|_{w,[\tau_j-\vartheta,\tau_j]} \leqslant \eta|\widehat{x}(0) - \widehat{x}(\tau_j)|$, и при котором система (12.42) имеет решение $y_j^-(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}_{\tau_j}(t)])$, $t \in [\tau_j - \vartheta, \tau_j]$, удовлетворяющее условиям:

$$y_j^-(\tau_j - \vartheta) = \widehat{x}(\tau_j - \vartheta),\ y_j^-(\tau_j) = \widehat{x}(0). \tag{14.45}$$

Теперь рассмотрим управление

$$\mu_j(t) \doteq \begin{cases}\widehat{\mu}(t),\ t \in [0, \tau_j - \vartheta),\\ \nu_j^-(t),\ t \in [\tau_j - \vartheta, \tau_j]\end{cases}$$

[11] Это множество, в отличие от задачи с управлениями из множества $\mathcal{U}_{[0,T]}$, не пусто.

и (здесь см. (14.45)) отвечающее ему решение системы (12.42)

$$x_j(t) \doteq \begin{cases} \widehat{x}(t), \ t \in [0, \tau_j - \vartheta), \\ y_j^-(t), \ t \in [\tau_j - \vartheta, \tau_j]. \end{cases}$$

В силу (14.45), построенный процесс $(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[0, \tau_j]$ допускает τ_j-периодическое продолжение $(\tilde{x}_j(\cdot), \tilde{\mu}_j(\cdot))$ на $\mathbb{R}$. Теперь, учитывая, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ и всех $t \in [\tau_j - \vartheta, \tau_j]$ $\quad y_j^-(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}_{\tau_j}(t)]) \subset X$, где $X \in \mathrm{comp}(G)$, определено в (14.30), принимая во внимание определение τ_j-периодического процесса $(\tilde{x}_j(\cdot), \tilde{\mu}_j(\cdot))$, получаем, что

$$\Big|\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) - \frac{1}{\tau_j} \int_0^{\tau_j} \langle \tilde{\mu}_j(t), f_0(\tilde{x}_j(t), u) \rangle dt \Big| \overset{(14.44)}{\leqslant} \frac{1}{j} + \frac{2k}{\tau_j},$$

где $k \doteq \sup\limits_{(x,u) \in K \times \mathfrak{U}} |f_0(x, u)|$. Поэтому

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{\tau_j} \int_0^{\tau_j} \langle \tilde{\mu}_j(t), g(\tilde{x}_j(t), u) \rangle dt.$$

Отсюда, в силу неравенств (12.46), следует нужное равенство.

З а м е ч а н и е 14.1. Требование свойства $\varepsilon, \vartheta, \eta$ — РЛД в малом системы (12.42) с $\gamma_+(\widehat{x})$ для выполнения указанного в теореме 14.3 равенства существенно. В [80] Е. Л. Тонковым приведен пример, в котором задача вида (12.44) не имеет решения, а отвечающая ей задача (12.45) имеет решение, и в котором значение целевого функционала строго меньше инфимума значений этого функционала на допустимых периодических процессах. В этом примере рассматриваемая система управления не обладает свойством РЛД с точек, лежащих на интегральной кривой.

§15. Динамическая система сдвигов

В данном параграфе определена динамическая система сдвигов, играющая важную роль при исследовании структуры множества управляемости систем из пространства $\mathfrak{S}$, а также в вопросах, связанных с достаточными условиями существования решения задачи оптимального управления п. п. движениями и магистральных п. п. процессов.

1. Пусть $(\mathfrak{Y}, \rho)$ — метрическое пространство. На множестве (см. § 1) $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ введем расстояние

$$\varrho(f, g) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \big[\min\big\{\int_t^{t+1} \rho(f(s), g(s)) ds, |t|^{-1}\big\}\big], \ f, g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}). \tag{15.1}$$

Несложно показать, что пространство

$$\mathfrak{B} \doteq (L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}), \varrho) \tag{15.2}$$

является метрическим, и в нем неравенство: $\varrho(f, g) < \varepsilon$ равносильно неравенству: $\max\limits_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} \int\limits_t^{t+1} \rho(f(s), g(s)) ds < \varepsilon$. Отсюда, поскольку при каждом заданном $\vartheta > 0$

$$\max_{|t| \leqslant \vartheta} \int_t^{t+1} \rho(f(s), g(s)) ds \leqslant \mathfrak{p}_\vartheta(f, g), \quad \mathfrak{p}_\vartheta(f, g) \leqslant (2[\vartheta] + 1) \max_{|t| \leqslant \vartheta} \int_t^{t+1} \rho(f(s), g(s)) ds,$$

где, здесь и далее,

$$\mathfrak{p}_\vartheta(f,g) \doteq \int_\vartheta^{\vartheta+1} \rho(f(s),g(s))ds, \tag{15.3}$$

получаем следующее утверждение.

Л е м м а 15.1. *Пусть* $(\mathbb{A},\prec)$ *— направленное множество и функции* f_α, f *принадлежат* $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. *Тогда* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}} \varrho(f_\alpha,f)=0$ *в том и только в том случае, если для каждого* $\vartheta>0$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}} \mathfrak{p}_\vartheta(f_\alpha,f)=0$, *или, что равносильно,* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}(\max\limits_{|t|\leqslant\vartheta} \int\limits_t^{t+1} \rho(f_\alpha(s),f(s))ds)=0$.

Используя лемму 15.1 и теорему Фреше [111] об изометрии сепарабельного метрического пространства $\mathfrak{Y}$ части некоторого сепарабельного банахова пространства $\mathbb{B}$, которая является замкнутой, если $\mathfrak{Y}$ — полное сепарабельное метрическое пространство, можно доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а 15.1. *Пусть метрическое пространство* $(\mathfrak{Y},\rho)$ *сепарабельно. Тогда для каждой функции* $f\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ $\lim\limits_{\tau\to 0}\varrho(f_\tau,f)=0 \quad (f_\tau(\cdot)\doteq f(\cdot+\tau))$, *и если к тому же пространство* $\mathfrak{Y}$ *полное, то метрическое пространство* $\mathfrak{B}$ *является полным.*

З а м е ч а н и е 15.1. Напомним (см. § 1, п. 1), что на $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ определено также d-расстояние и функция $f\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ называется d-ограниченной, если $d(\varphi,y)<\infty$ при некотором $y\in\mathfrak{Y}$. Как и в случае $\mathfrak{Y}=\mathbb{R}$ [107], подмножество $\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})\subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, состоящее из d -ограниченных функций, называем пространством Степанова. Поскольку $\varrho(f,g)\leqslant d(f,g)$ для любых $f,g\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, то топология $\mathcal{T}_d$ на $\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, индуцированная метрикой d, содержится в топологии $\mathcal{T}_\varrho$, индуцированной метрикой ϱ. Отметим также, что если $(\mathfrak{Y},\rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, то пространство $(\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}),d)$ является полным.

Далее, на метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ введем однопараметрическое семейство отображений $g^t\colon \mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, $t\in\mathbb{R}$, определенных равенством $g^t(f)=f_t$, $f\in\mathfrak{B}$, и в дальнейшем через $\mathrm{orb}_g(f)$, $\mathrm{orb}_g^+(f)$ и $\mathrm{orb}_g^-(f)$ обозначаем, соответственно, траекторию, положительную и отрицательную полутраектории движения $t\mapsto g^t(f)$.

Из леммы 15.1 и теоремы 15.1 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 15.2. $(\mathfrak{B},g^t)$ *— динамическая система (в смысле Маркова).*

З а м е ч а н и е 15.2. Введенная на $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ метрика ϱ (см. (15.1)) является естественным распространением метрики Бебутова ϱ_c [11, 123, 171], заданной на пространстве $C(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ равенством:

$$\varrho_c(f,g)\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}[\min\{\rho(f(t),g(t)),|t|^{-1}\}],$$

и в которой неравенство $\varrho_c(f,g)<\varepsilon$ равносильно тому, что $\max\limits_{|t|\leqslant\varepsilon^{-1}}\rho(f(t),g(t))<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{j\to\infty}\varrho_c(f,f_j)=0$ в том и только в том случае, если для любых

$\varepsilon, \vartheta > 0$ найдется такое $j_0 = j_0(\varepsilon, \vartheta) \in \mathbb{N}$, что $\max\limits_{|t| \leqslant \vartheta} \rho(f_j(t), f(t)) < \varepsilon$ при $j \geqslant j_0$. Отметим, что динамическая система (ДС) сдвигов на пространстве непрерывных функций, описанная, например, в [11, 123, 171], играет важную роль в теории ДС и ее приложениях (см., например, [11, 20], [115]–[117], [123, 126, 142], [169]–[172] и приведенную там библиографию). Важной ее особенностью является то, что точками ее фазового пространства служат функции, а движениями — сдвиги функций. Это позволяет использовать результаты и методы общей теории ДС, например, при исследовании тех или иных свойств отображений [171, 172], при указании достаточных условий существования рекуррентных [170, 171] и п. п. по Бору [115, 117] решений систем дифференциальных уравнений, при изучении вопросов управляемых систем [144, 145]. ДС сдвигов на множестве функций с введенной на нем топологией посредством оператора замыкания использовалась в [127, 128] при изучении магистральных процессов.

В данной работе, с целью изучения структуры множества управляемости систем из пространства $\mathfrak{S}$ (см. (13.1)) и исследования ряда свойств задач оптимального управления п. п. движениями, вводится ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$. Ниже приведем ряд необходимых ее свойств.

2. В следующей теореме и далее, если не оговорено специально, рассматриваем метрическое пространство $\mathfrak{B}$, определеное равенством (15.2) и $\mathrm{cl}A$ — замыкание множества $A \subset \mathfrak{B}$.

Т е о р е м а 15.3. *Пусть $(\mathfrak{Y}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство и $\mathcal{K} \subset \mathfrak{B}$. Тогда $\mathrm{cl}\,\mathcal{K} \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ в том и только в том случае, если множество $\mathcal{K}$ равностепенно непрерывно*[12] *и существует такое $y \in \mathfrak{Y}$, что для любого $\vartheta > 0$ $\sup\limits_{f \in \mathcal{K}} \mathfrak{p}_\vartheta(f, y)\, ds < \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий теоремы 15.3 является очевидным следствием теоремы Хаусдорфа о предкомпактности подмножества метрического пространства [111] и теоремы 15.1. Достаточность условий следует из теорем Фреше и Рисса о предкомпактности в пространстве $L_1([-\vartheta, \vartheta+1], Y)$ (здесь Y — сепарабельное банахово пространство) и определениея метрики ϱ. $\Box$

Поскольку при каждом $\vartheta > 0$ и всяком $y \in \mathfrak{Y}$ $\mathfrak{p}_\vartheta(f, y) \leqslant 2([\vartheta]+1) d(f, y)$, то для всякого d-ограниченного множества функций $F \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ (то есть такого, что при некотором $y \in \mathfrak{Y}$ $\sup\limits_{f \in F} d(\varphi, y) < \infty$) для каждого $\vartheta > 0$ выполняется неравенство: $\sup\limits_{\varphi \in F} \mathfrak{p}_\vartheta(f, y) \leqslant 2([\vartheta]+1) \sup\limits_{f \in F} d(\varphi, y)$. Поэтому из теоремы 15.3 получаем следствие.

С л е д с т в и е 15.1. *Если множество $\mathcal{K} \subset \mathfrak{B}$ d-ограничено и равностепенно непрерывно, то $\mathrm{cl}\,\mathcal{K} \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$.*

Напомним (см. замечание 15.1), что $\mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{B}$.

[12] То есть, при каждом $\vartheta > 0$ (см. обозначение (15.2)) $\lim\limits_{\tau \to 0} (\sup\limits_{f \in \mathcal{K}} \mathfrak{p}_\vartheta(f_\tau, f)) = 0$, или, что равносильно, $\lim\limits_{\tau \to 0} (\sup\limits_{f \in \mathcal{K}} \varrho(f_\tau, f)) = 0$.

Т е о р е м а 15.4. *Пусть $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. Тогда множество $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$ является d-ограниченным и принадлежит $\mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ в том и только в том случае, если функция f d-непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{K} \doteq \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$. По определению, для каждой функции $\widehat{f} \in \mathcal{K}$ найдется такая числовая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{j\to\infty} \varrho(g^{t_j}(f), \widehat{f}) = 0. \tag{15.4}$$

Поэтому для каждого $t \in \mathbb{R}$ существует такое $j = j(t) \in \mathbb{N}$, что (см. обозначение (15.3)) $\mathfrak{p}_{|t|}(f_{t_j}, \widehat{f}) \leqslant 1$, и так как при $y \in \mathfrak{Y}$ $\int\limits_t^{t+1} \rho(\widehat{f}(s), y)\, ds \leqslant \mathfrak{p}_{|t|}(f_{t_j}, \widehat{f}) + d(f, y)$, то $d(\widehat{f}, y) \leqslant 1 + d(f, y)$. Следовательно, множество $\mathcal{K}$ является d-ограниченным.

Допустим, теперь, что f d-непрерывна, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0,1]$, что $d(f_\tau, f) \leqslant \varepsilon/2$ при всех $\tau \in (-\delta,\delta)$. Фиксируем, далее, произвольную функцию $\widehat{f} \in \mathcal{K}$. В силу (15.4), по лемме 15.1 для каждого $\vartheta = |t| + 1$, отвечающего заданному $t \in \mathbb{R}$, найдется такое t_j, что $\mathfrak{p}_\vartheta(g^{t_j}(f), \widehat{f}) < \varepsilon/4$. Поэтому из соотношений $\int_t^{t+1} \rho(\widehat{f}_\tau(s), \widehat{f}(s)) ds \leqslant \mathfrak{p}_\vartheta(g^{t_j}(f), \widehat{f}) + d(f_\tau, f) < \varepsilon$ получаем, что $d(\widehat{f}_\tau, \widehat{f}) \leqslant \varepsilon$, то есть множество $\mathcal{K}$ d-равностепенно непрерывно, а значит и равностепенно непрерывно в метрике ϱ. По следствию 15.1 $\mathcal{K} \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$).

Обратно, если $\mathcal{K} \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$), то по теореме 15.3 $\mathcal{K}$ равностепенно непрерывно. Поэтому (см. сноску 1 и лемму 15.1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всяком $\tau \in (-\delta,\delta)$ для каждой функции $\widehat{f} \in \mathcal{K}$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{p}_1(\widehat{f}_\tau, \widehat{f}) < \varepsilon$. Теперь, учитывая, что $g^t(f) \in \mathcal{K}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, получаем (см. (15.3) при $\vartheta = 1$), что $d(f_\tau, f) \leqslant \varepsilon$ при $|\tau| < \delta$, то есть f является d-непрерывной.

3. Здесь определим гомоморфизм произвольно заданной ДС $(\mathfrak{X}, f^t)$, где $(\mathfrak{X}, \rho_{\mathfrak{X}})$ — метрическое пространство, на указанную в теореме 15.2 ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$.

Рассмотрим отображение $p \mapsto \sigma(p) \in \mathfrak{Y}$, $p \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющее условиям:

1) при каждом $p \in \mathfrak{X}$ функция (реализация точки p)

$$t \mapsto \mathfrak{r}(t,p) \doteq \sigma(f^t(p)),\ t \in \mathbb{R} \tag{15.5}$$

принадлежит множеству $\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, определенному в замечании 15.1;

2) при каждом $p \in \mathfrak{X}$ отображение

$$t \mapsto h(p)(\cdot) \doteq \mathfrak{r}(t,p) \tag{15.6}$$

принадлежит пространству $C(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$.

Отображение h сопрягает потоки f^t и g^t, то есть

$$h \circ f^t = g^t \circ h. \tag{15.7}$$

Это следует из приведенной ниже цепочки равенств, выполненной при всех $s \in \mathbb{R}$:

$$h(f^t(p))(s) \overset{(15.7)}{=} \mathfrak{r}(s, f^t(p)) \overset{(15.6)}{=} \sigma(f^s(f^t(p))) =$$
$$= \sigma(f^{s+t}(p)) = \mathfrak{r}(s+t,p) \overset{(15.5)}{=} h(p)(s+t) = g^t(h(p))(s).$$

Отображение h, вообще говоря, не является гомеоморфизмом. Поэтому отметим ряд его свойств, необходимых в дальнейшем, доказанных в случае, когда h — гомеоморфизм [171], либо диффеоморфизм, сопрягающий гладкие потоки [6, 19].

Если $K \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$ и инвариантно (относительно потока f^t), то из (15.7), принимая во внимание, что $h \in C(\mathfrak{X}, \mathfrak{H})$, получаем, что множество $h(K) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{H})$ и инвариантно (относительно потока g^t).

Л е м м а 15.2. *Пусть инвариантное множество $K \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$. Тогда, если $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех его минимальных подмножеств, то система множеств $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$, где $\mathcal{E}_\alpha \doteq h(E_\alpha)$, и только она, составляет совокупность всех минимальных подмножеств инвариантного множества $h(K) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной точки $p \in E_\alpha$, учитывая (15.7) и компактность множества $\mathcal{K} \doteq h(K)$, имеем следующие соотношения:

$$\mathcal{E}_\alpha \doteq h(E_\alpha) = h(\overline{\mathrm{orb}}_f(p)) = \mathrm{cl}(h(\mathrm{orb}_f(p))) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_f(h(p))),$$

где $\overline{\mathrm{orb}}_f(p)$ — замыкание траектории $\mathrm{orb}_f(p) \subset (\mathfrak{X}, \rho_{\mathfrak{X}})$, из которых получаем, что $\mathcal{E}_\alpha$ — минимальное подмножество в $\mathcal{K}$. Теперь, если $\mathcal{E}$ — минимальное множество из $\mathcal{K}$, то для произвольной точки $p \in h^{-1}(\mathcal{E})$ $\mathcal{E} = h(\overline{\mathrm{orb}}_f(p))$, а так как $\overline{\mathrm{orb}}_f(p) \in \mathrm{comp}(K)$, то найдется такое $\alpha \in \mathbb{I}$, что $E_\alpha \in \overline{\mathrm{orb}}_f(p)$. Поэтому $\mathcal{E}_\alpha \doteq h(E_\alpha) \subset \mathcal{E}$, откуда, в силу минимальности множества $\mathcal{E}$, получаем равенство $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}$.

З а м е ч а н и е 15.3. По теореме 15.4 для каждой d–непрерывной функции $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$. Поэтому множество $\Omega(f) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(f))$ омега–предельных точек отвечающего ей движения $t \mapsto g^t(f)$, непусто, компактно и инвариантно. Следовательно (см. определение отображения h), для каждой точки $p \in \mathfrak{X}$ множество $\Omega(h(p)) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(h(p)))$ есть непустое компактное, инвариантное множество. Однако множество $\Omega(p)$ может быть пустым.

П р и м е р 15.1. Пусть $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, $f^t(p) \doteq p+t$ — поток на $\mathbb{R}$ и $\sigma(p) \doteq \mathrm{arctg}(p)$. Тогда $h(p)(t) = \mathrm{arctg}(p+t)$ и, следовательно, при всяком $p \in \mathbb{R}$ $\Omega(h(p)) = \{1\}$, тогда как $\Omega(p) = \varnothing$.

В случае если $\Omega(p) \neq \varnothing$, справедлива следующая лемма.

Л е м м а 15.3. *Если $\Omega(p) \neq \varnothing$, то $h(\Omega(p)) \subset \Omega(h(p))$ и, если замыкание множества $\mathrm{orb}^+_f(p) \subset \mathfrak{X}$ принадлежит $\mathrm{comp}(\mathfrak{X})$, то $h(\Omega(p)) = \Omega(h(p))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $h(\Omega(p)) \subset \Omega(h(p))$ очевидным образом вытекает из непрерывности отображения h и равенства (15.7). Покажем, что в случае $\overline{\mathrm{orb}}^+_f(p) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$ имеет место и обратное включение. Действительно, если $\xi \in \Omega(h(p))$, то найдется такая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = \infty$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(g^{t_j} h(p)), \xi) = \lim\limits_{j\to\infty} \varrho(h(f^{t_j}(p)), \xi) = 0$. Далее, т.к. $\overline{\mathrm{orb}}^+_f(p) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$, то [123] $\lim\limits_{j\to\infty} \rho_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{f}^{t_j}(p), \Omega(p)) = 0$. Отсюда, в силу компактности $\Omega(p)$, вытекает, что существует такая точка $q \in \Omega(p)$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \rho_{\mathfrak{X}}(f^{t_j}(p), q) = 0$. Из последнего равенства, учитывая, что $h \in C(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, получаем: $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(h(f^{t_j}(p), h(q)) = 0$. Следовательно $\xi = h(q)$, а значит, $h(\Omega(p)) \subset \Omega(h(p))$.

4. В этом пункте приведем вид ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$, отвечающей рассматриваемым далее метрическим пространствам $(\mathfrak{Y}, \rho)$, и укажем некоторые их особенности.

П р и м е р 15.2. При $\mathfrak{Y} = \mathcal{P}_0$ (здесь см. § 13) имеем метрическое пространство $\mathfrak{B}_0 = (L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0), \varrho)$ с метрикой

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big[\min\Big\{\int_t^{t+1} \big(|A_1(s) - A_2(s)| + \mathrm{dist}(V_1(s), V_2(s))\big)ds,\ |t|^{-1}\Big\}\Big], \qquad (15.8)$$

где $\varphi_j(\cdot) = (A_j(\cdot), V_j(\cdot)) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0),\ j = 1, 2.$

Для указанного $\mathfrak{Y}$, множество $\mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$ совпадает с пространством $\mathfrak{S}$ систем управления, определенным равенством (13.1). Тем самым получаем ДС $(\mathfrak{S}, g^t)$, фазовым пространством которой является пространство систем управления.

Приведем, далее, ряд определений, связанных с введенным в предыдущем пункте гомоморфизмом h при $\mathfrak{Y} = \mathcal{P}_0$.

Заданной паре $\{(\mathfrak{X}, f^t), \sigma\}$, где $(\mathfrak{X}, f^t)$ — динамическая система, а функция $\sigma\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{P}_0$ удовлетворяет условиям 1), 2) предыдущего пункта, отвечает семейство $h(\mathfrak{X})$ систем управления из $\mathfrak{S}$. Действительно, если $\sigma(p) = (A(p), V(p)) \in \mathcal{P}_0$, $p \in \mathfrak{X}$, то в силу (15.6), (15.7) при каждом $p \in \mathfrak{X}$ имеем систему управления $h(p)(t) = \sigma(f^t(p)) = (A(f^t(p)), V(f^t(p)))$, $t \in \mathbb{R}$ из $\mathfrak{S}$, или, что то же самое, систему управления $\dot{x} = A(f^t(p))x + v,\ v \in V(f^t(p)),\ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, в которой p рассматриваем как параметр. В связи с этим, совокупность так заданных систем $h(\mathfrak{X})$ из $\mathfrak{S}$ называем *динамически параметризованным семейством систем управления,* отвечающим паре $\{(\mathfrak{X}, f^t), \sigma\}$.

Отметим, что если рассмотреть пару $\{(\mathfrak{B}, g^t), \sigma\}$, в которой $\sigma\colon \mathfrak{B} \to \mathcal{P}_0$ задается равенством $\sigma(\varphi) \doteq \varphi(0)$, то $\sigma(g^t(\varphi)) \equiv \varphi(t)$ (то есть $h = id_{\mathfrak{B}}$). Следовательно, в этом случае совокупность систем $\sigma(g^t(\varphi))$, $\varphi \in \mathfrak{S}$ совпадает с $\mathfrak{S}$.

Далее, совокупность измеримых сечений отображения $t \mapsto V(f^t(p))$ называем множеством допустимых управлений системы $h(p) \in \mathfrak{S}$ и через $X(t, s; p)$ обозначим оператор Коши системы $\dot{x} = A(f^t(p))x$. Поскольку при каждом τ и всех t, s $X_\tau(t, s; p) \doteq X(t + \tau, s + \tau; p)$ — оператор Коши системы $\dot{x} = A(f^{t+\tau}(p))x$, а $f^{t+\tau}(p) = f^t(f^\tau(p))$, то

$$X_\tau(t, s; p) = X(t, s; f^\tau(p)). \qquad (15.9)$$

В дальнейшем множество управляемости $D_\tau(h(p), \vartheta)$ системы $h(p)$ на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ обозначаем $D_\tau(p, \vartheta)$ и, для краткости, вместо $D_0(p, \vartheta)$ пишем $D(p, \vartheta)$. Согласно (13.4), справедливо равенство

$$D_\tau(p, \vartheta) = -\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau, s; p)V(f^s(p))ds, \qquad (15.10)$$

откуда, в частности, принимая во внимание (15.9), получаем, что

$$D_\tau(p, \vartheta) = D(f^\tau(p), \vartheta). \qquad (15.11)$$

Введем теперь в рассмотрение следующие множества (здесь см. (13.10), (13.11))

$$\mathfrak{L}_{\varepsilon,\vartheta} \doteq h^{-1}(\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}), \quad \mathfrak{L} \doteq \bigcup_{\varepsilon,\vartheta>0} \mathfrak{L}_{\varepsilon,\vartheta}, \tag{15.12}$$

$$\mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta} \doteq \{p \in \mathfrak{X} : \mathrm{orb}^+_f(p) \subset \mathfrak{L}_{\varepsilon,\vartheta}\}, \quad \mathfrak{L}^0 \doteq \bigcup_{\varepsilon,\vartheta>0} \mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}. \tag{15.13}$$

Из определения 13.1 следует, что $\mathfrak{L}_{\varepsilon,\vartheta}$ ($\mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$) — это совокупность тех точек $p \in \mathfrak{X}$, в которых система $h(p)$, отвечающая движению $t \mapsto f^t(p)$, является ε,ϑ-локально управляемой (ε,ϑ-равномерно локально управляемой).

Поскольку

$$D(p,\vartheta) \doteq D(h(p),\vartheta),$$

то в силу (15.12), (15.13) следует, что $p \in \mathfrak{L}_{\varepsilon,\vartheta}$ (или $p \in \mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$) в том и только в том случае, когда $h(p) \in L_{\varepsilon,\vartheta}$ (соответственно $h(p)$ принадлежит $L^0_{\varepsilon,\vartheta}$). Тем не менее, условие принадлежности p множеству $\mathfrak{L}_{\varepsilon,\vartheta}$ ($\mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$) характеризует условие ε,ϑ - локально (ε,ϑ - равномерно локальной) управляемости системы $h(p)$ в терминах исходной динамической системы $(\mathfrak{X}, f^t)$.

П р и м е р 15.3. Рассмотрим случай, когда в качестве полного сепарабельного метрического пространства $(\mathfrak{Y},\rho)$ берется (см. § 2) $(\mathrm{frm}(\mathcal{U}),\rho_w)$, где ρ_w — метрика, индуцированная нормой $|\cdot|_w$ на $\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$. Отметим, что $\mathbb{M}(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathfrak{U})) \subset \mathbb{S}(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ и (см. (15.1) при $\mathfrak{Y} = \mathrm{frm}(\mathcal{U})$) на $\mathbb{M}(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ определено расстояние

$$\varrho_w(\mu,\nu) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big[\min\Big\{\int_t^{t+1} \rho_w(\mu(s),\nu(s))\,ds, |t|^{-1}\Big\}\Big],\ \mu,\nu \in \mathbb{M}(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U})), \tag{15.14}$$

в котором (см. лемму 15.1) равенство $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_w(\mu,\mu_j) = 0$ равносильно тому, что при каждом $\vartheta > 0$ $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta+1} \rho_w(\mu(s),\mu_j(s))\,ds = 0$. Поэтому из определения нормы $\|\cdot\|_{w,\mathbb{T}}$ на $\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ вытекает

Л е м м а 15.4. *Пусть $\mu,\mu_j \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_w(\mu,\mu_j) = 0$. Тогда при каждом $\vartheta > 0$* $\lim\limits_{j\to\infty} \|\mu - \mu_j\|_{w,[-\vartheta,\vartheta+1]} = 0$.

Отметим также, что на $\mathbb{M}(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U}))$ определено также $d_w \doteq d_{\rho_w}$-расстояние:

$$d_w(\mu,\nu) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \rho_w(\mu(s),\nu(s))ds,\ \mu,\nu \in \mathbb{M}(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathcal{U})). \tag{15.15}$$

П р и м е р 15.4. При $\mathfrak{Y} = C(\mathbb{V},\mathbb{R}^n)$, где $\mathbb{V}$ — компактное подмножество конечномерного евклидова пространства, метрику ϱ на $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathbb{V},\mathbb{R}^n))$ будем обозначать ϱ_1, а поток g^t — через g_1^t. Поскольку [22, с.158] для каждого отрезка $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ $L_1(\mathbb{T}, C(\mathbb{V},\mathbb{R}^n))$ алгебраически изоморфно пространству $\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times K,\mathbb{R}^n)$, то, как и ранее, каждую функцию $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathbb{V},\mathbb{R}^n)$ представляем в виде отображения $(t,v) \mapsto f(t,v)$, считая его элементом пространства $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{V},\mathbb{R}^n)$. В связи с этим (см. теоремы 15.1 и 15.2 при $\mathfrak{Y} \doteq C(\mathbb{V}, \mathbb{R}^n)$), в дальнейшем рассматриваем полное сепарабельное метрическое пространство

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1(\mathbb{V}) \doteq (\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{V}, \mathbb{R}^n), \varrho_1) \tag{15.16}$$

с метрикой

$$\varrho_1(f^{(1)}, f^{(2)}) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big[\min\Big\{\int_t^{t+1} \max_{v\in\mathbb{V}} |f^{(1)}(s,v) - f^{(2)}(s,v)|\, ds, |t|^{-1}\Big\}\Big], \tag{15.17}$$

где $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{V}, \mathbb{R}^n)$, а также ДС $(\mathfrak{B}_1, g_1^t)$, в которой

$$g_1^t(f)(s,v) \doteq f(s+t,v),\ (s,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V},\ f \in \mathfrak{V}^{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{V}, \mathbb{R}^n). \tag{15.18}$$

Далее, поскольку d-ограниченность и d-непрерывность функций из пространства $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathbb{V}, \mathbb{R}^n))$ равносильна d-ограниченности и d-непрерывности при рассмотрении их как элементов из $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{V}, \mathbb{R}^n)$ (см. §1), то в силу теоремы 15.3 получаем, что для всякой d-ограниченной функции $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{V}, \mathbb{R}^n)$ множество $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_{g_1}(f)) \subset \mathfrak{B}_1$ d-ограничено и является компактным в том и только в том случае, если эта функция d-непрерывна.

Отметим также, что всякой функции $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{V}, \mathbb{R}^n)$ при каждом $h > 0$ отвечает непрерывное отображение (ее стекловское усреднение)

$$(t,v) \mapsto f(t,v;h) \doteq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s,v)ds,\ (t,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}, \tag{15.19}$$

и в дальнейшем используем следующее несложно доказываемое (см., например [62]) утверждение.

Л е м м а 15.5. *Пусть функция $f \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{V}, \mathbb{R}^n)$ является d-ограниченной и d-непрерывной. Тогда при каждом $h > 0$ ее стекловское усреднение равномерно непрерывно на $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$, $\sup\limits_{(t,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{V}} |f(t,v;h)| < \infty$ и, кроме того, удовлетворяет следующему предельному равенству* $\lim\limits_{h\downarrow 0}\big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max\limits_{v\in\mathbb{V}} |f(s,v) - f(s,v;h)|ds\big) = 0.$

5. Всюду далее, если не оговорено, предполагаем, что в определении метрического пространства $\mathfrak{B}$ (см. (15.2)) $(\mathfrak{Y}, \rho)$ есть полное сепарабельное метрическое пространство.

О п р е д е л е н и е 15.1. Функция $f \in \mathfrak{B}$ называется *рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R}\colon\ \varrho(f_\tau, f) < \varepsilon\}$ относительно плотно.

Совокупность рекуррентных функций из $\mathfrak{B}$ обозначим $\mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

Из определения метрики ϱ и леммы 15.1 вытекает, что $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ в том и только в том случае (здесь см. обозначение (15.3)), если для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ множество

$$E_{\mathcal{R}}(f, \varepsilon, \vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}\colon\ \mathfrak{p}_\vartheta(f_\tau, f) < \varepsilon\}$$

ее ε, ϑ-п. п. относительно плотно.

Так же как и в работах [117, 170] для функций из $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, скажем, что функция $f\in C(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ рекуррентна, если для любого $\varepsilon>0$ множество $\{\tau\in\mathbb{R}\colon\ \varrho_c(f_\tau,f)<\varepsilon\}$ относительно плотно. Множество рекуррентных функций из $C(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ обозначим $\mathcal{R}_c(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. Ясно, что $\mathcal{R}_c(\mathbb{R},\mathfrak{Y})\subset\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ и из определения метрики ϱ_c (см. замечание 15.2) получаем, что функция $f\in\mathcal{R}_c(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ в том и только в том случае, если для любых $\varepsilon,\vartheta>0$ множество $E_{\mathcal{R}_c}(f,\varepsilon,\vartheta)\doteq\{\tau\in\mathbb{R}:\ \max\limits_{|t|\leqslant\vartheta}\rho(f_\tau(t),f(t))<\varepsilon\}$ ее ε,ϑ-п. п. относительно плотно.

Приведем ряд утверждений о структуре пространства $\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$.

Л е м м а 15.6. *Если $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, то $\lim\limits_{h\to 0}d(f_h,f)=0$ и при каждом фиксированном $y\in\mathfrak{Y}$ $\quad d(f,y)<\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольное $t\in\mathbb{R}$, и пусть l — это положительная константа, входящая в определение относительной плотности множества $E_{\mathcal{R}}(f,1,|t|)$. Тогда при каждом $\tau\in E_{\mathcal{R}}(f,1,|t|)\cap[-t,-t+l]$ и $y\in\mathfrak{Y}$ имеем

$$\int_t^{t+1}\rho(f(s),y)ds\leqslant\mathfrak{p}_{|t|}(f_\tau,f)+\int_t^{t+1}\rho(f_\tau(s),y)ds<1+\int_0^{l+1}\rho(f(s),y)ds\doteq k,$$

и, стало быть, $d(f,0)\leqslant k$.

Далее, для заданного $\varepsilon>0$ возьмем точку $\tau\in E_{\mathcal{R}}(f,\frac{\varepsilon}{2},-|t|-1)\cap[-t,-t+l]$, здесь $l>0$ — число, входящее в определение относительной плотности первого множества в указанном пересечении, и выбираем (см. теорему 15.1) $\delta\in(0,1]$ таким, что при $|h|<\delta\quad\mathfrak{p}_{l+1}(f_h,f)<\varepsilon/4$. Тогда, если $|h|<\delta$, то из неравенств

$$\int_t^{t+1}\rho(f_h(s),f(s))ds\leqslant 2\mathfrak{p}_{|t|+1}(f_\tau,f)+\mathfrak{p}_{l+1}(f_h,f)<2\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

получаем, что $d(f_h,f)\leqslant\varepsilon$ при $|h|<\delta$.

Из доказанной леммы 15.6 и теоремы 15.4 получаем

С л е д с т в и е 15.2. *Имеет место включение $\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})\subset\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, и для каждой функции $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ множество $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))\in\mathrm{comp}(\mathfrak{B})$* [13].

Эта же лемма 15.6 позволяет рассмотреть метрическое пространство $(\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}),d)$.

Л е м м а 15.7. *Пространство $(\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}),d)$ является полным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как метрическое пространство $(L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}),d)$ является полным, то для доказательства леммы 15.7 достаточно показать, что если последовательность $\{f_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ такова, что $\lim\limits_{j\to\infty}d(f_j,f)=0$, то $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. Действительно, если $\lim\limits_{j\to\infty}d(f_j,f)=0$, то, используя неравенство,

$$\mathfrak{p}_\vartheta(g^\tau(f),f)\leqslant 2d(f_j,f)+\mathfrak{p}_\vartheta(g^\tau(f_j),f_j),$$

выполненное для всех $j\in\mathbb{N}$, $\tau\in\mathbb{R}$ и $\vartheta>0$, получим, что для любых $\varepsilon,\vartheta>0$ и каждого достаточно большого j, относительно плотное множество $E_{\mathcal{R}}(f_j,\frac{\varepsilon}{2},\vartheta)$ содержится в $E_{\mathcal{R}}(f,\varepsilon,\vartheta)$. $\square$

[13] Множество $\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})\subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ определено в замечании 15.1, и его можно рассматривать как подпространство пространства $\mathfrak{B}$.

Далее, по теореме 15.2 $(\mathfrak{B}, g^t)$ есть динамическая система. Поэтому можно определить рекуррентные и п. п. движения [123]. Следуя [123], говорим, что движение $t \mapsto g^t(f)$ рекуррентно, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $l > 0$, что при каждом $t \in \mathbb{R}$ и любом $t_0 \in \mathbb{R}$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} \colon \varrho(g^{t+\tau}(f), g^t(f)) < \varepsilon\} \cap [t_0, t_0 + l] \neq \emptyset$. В силу следствия 15.2, по теореме 29 в [123, с. 405] получаем следующую лемму.

Л е м м а 15.8. *Функция $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ в том и только в том случае, если отвечающее ей движение $t \mapsto g^t(f)$ рекуррентно.*

Напомним также [123], что движение $t \mapsto g^t(f)$ называется п. п. , если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} \colon \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \varrho(g^{t+\tau}(f), g^t(f)) < \varepsilon\}$ относительно плотно. Отсюда, принимая во внимание определение метрики ϱ (см. (15.1)) и пространства $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ п. п. по Степанову функций, получаем следующее утверждение.

Л е м м а 15.9. *Движение $t \mapsto g^t(f)$ п. п. в том и только в том случае, если функция $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.*

Л е м м а 15.10. *Пусть $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Тогда замыкание $\mathcal{H}(f)$ множества $\mathrm{orb}_g(f)$ в метрике d совпадает с $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку (см. замечание 15.1) $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_\varrho$, то $\mathcal{H}(f)$ содержится в $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$. Докажем теперь, что верно и обратное включение. В самом деле, по лемме 15.9 движение $t \mapsto g^t(f)$ п. п. Следовательно [123], движение $t \mapsto g^t(\widehat{f})$, отвечающее $\widehat{f} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$, является п. п. и, стало быть, $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Так как $f, \widehat{f} \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $l > 0$, что при каждом $t \in \mathbb{R}$ найдется $\tau \in E_S(f, \varepsilon/3) \cap E_S(\widehat{f}, \varepsilon/3) \cap [-t, -t+1]$. Далее, так как $\widehat{f} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$, то найдется такая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, что $\lim\limits_{j \to \infty} \varrho(g^{t_j}(f), \widehat{f}) = 0$. Поэтому, по лемме 15.1, найдется такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geqslant j_0$ (см. обозначение (15.3)) $\mathfrak{p}_l(g^{t_j}(f), \widehat{f}) < \varepsilon/3$. Но тогда, при каждом $t \in \mathbb{R}$, учитывая выбор τ, для всех $j \geqslant j_0$ получаем, что

$$\int_t^{t+1} \rho(g^{t_j}(f)(s), \widehat{f}(s))ds \leqslant d(g^\tau(\widehat{f}), \widehat{f}) + d(g^\tau(f), f) + \mathfrak{p}_l(g^{t_j}(f), \widehat{f}) < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что при всех $j \geqslant j_0$ $d(g^{t_j}(f), \widehat{f}) \leqslant \varepsilon$, то есть $\widehat{f} \in \mathcal{H}(f)$. Таким образом, $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f)) \subset \mathcal{H}(f)$.

З а м е ч а н и е 15.4. По теореме 15.2 $(\mathfrak{B}, g^t)$ — ДС. Поэтому для указания достаточных условий п. п. движения $t \mapsto g^t(f) \doteq f_t$, конечно, можно воспользоваться какими–либо известными достаточными условиями общей теории ДС, например, теоремой Маркова [123, с. 416], согласно которой получаем, что для п. п. движения $t \mapsto g^t(f) \in \mathfrak{B}$ достаточно, чтобы это движение было положительно устойчиво по Лагранжу (то есть $\mathrm{cl}(\overline{\mathrm{orb}}_g^+(f)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$) и являлось равномерно отрицательно устойчивым по Ляпунову относительно $\mathrm{orb}_g(f)$, то есть обладало свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только $\varrho(f_{t_1}, f_{t_2}) < \delta$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, то при всех $t \leqslant 0$ справедливо неравенство $\varrho(f_{t+t_1}, f_{t+t_2}) < \varepsilon$. Вместе с тем, как уже отмечалось, точками фазового пространства ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$ служат функции, а движениями

— сдвиги функций, что позволяет (см. теорему 15.4, а также леммы 15.8 и 15.9) в терминах свойств функций указать характер движений этой ДС. В следующем пункте, используя определение метрики ϱ и указанную специфику рассматриваемой ДС, используя общие утверждения А. А. Маркова и В. В. Немыцкого [122, 123], укажем ряд достаточных условий п. п. по Степанову функций из пространства $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, а значит (см. лемму 15.8), и п. п. движений в ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$.

6. Приведем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 15.2. Функция $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ называется *устойчивой относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие константы $\delta, T > 0$, что для всякого $\vartheta < 0$, при котором

$$\max_{t\in[0,T]} \int_t^{t+1} \rho(f_\vartheta(s), f(s))ds \leqslant \delta, \tag{15.20}$$

для любого $t > T$ будет выполняться неравенство

$$\int_t^{t+1} \rho(f_\vartheta(s), f(s))ds \leqslant \varepsilon. \tag{15.21}$$

З а м е ч а н и е 15.5. По смыслу, в определении 15.2 можно считать $\delta \leqslant \varepsilon$, а $T \leqslant \delta^{-1}$.

Т е о р е м а 15.5. *Пусть $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ и устойчива относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении. Тогда $f \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ и (см. замечание 15.5) $T \in (0, \delta^{-1}]$ такие, что для каждого $\vartheta < 0$, при котором верно (15.20), следует, что при всех $\zeta > T$

$$\int_\zeta^{\zeta+1} \rho(f_\vartheta(s), f(s))ds \leqslant \varepsilon/2. \tag{15.22}$$

Далее следуем схеме доказательства теоремы А.А.Маркова [123, с. 416]. Фиксируем (см. определение 15.1) точку $\tau \in E_{\mathcal{R}}(f, \frac{\delta}{2})$, то есть такой $\frac{\delta}{2}$-п.п. рекуррентной функции f, что

$$I_1(\delta) \doteq \max_{|\xi|\leqslant\frac{2}{\delta}} \int_\xi^{\xi+1} \rho(f_\tau(s), f(s))ds < \frac{\delta}{2}. \tag{15.23}$$

Поскольку $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, то, по следствию 15.2 и лемме 15.8, f принадлежит множеству $\mathbb{A}(f)$ альфа–предельных точек рекуррентного движения $t \mapsto g^t(f)$. Поэтому для произвольно фиксированного $t \in \mathbb{R}$ и константы

$$\alpha \doteq \frac{\delta}{2+\delta|\tau|} > 0 \tag{15.24}$$

найдется такая точка $\widehat{t} < -|t| - |\tau| - T$, что

$$I_2(\alpha) \doteq \max_{|\xi|\leqslant\frac{1}{\alpha}} \int_\xi^{\xi+1} \rho(f_{\widehat{t}}(s), f(s))ds < \alpha, \tag{15.25}$$

а так как

$$I_3(\delta) \doteq \max_{|\xi|\leqslant\frac{2}{\delta}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho(f_\tau(s), f_{\tau+\widehat{t}}(s))ds \overset{(15.24)}{\leqslant} I_2(\alpha),$$

то, принимая во внимание (см. (15.24)), что $\alpha < \frac{\delta}{2}$, получаем:

$$\max_{|\xi|\leqslant\frac{2}{\delta}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho(f(s), f_{\tau+\widehat{t}}(s))ds \leqslant I_1(\delta) + I_3(\delta) \overset{(15.23)}{\underset{}{\overset{(15.25)}{<}}} \delta.$$

Отсюда, в силу выбора $\delta > 0$, вытекает, что для всех $\zeta > T$ будет выполняться неравенство (15.22) при $\vartheta \doteq \tau + \widehat{t} < 0$. В частности, при $\zeta = t - \widehat{t} > T$ будем иметь

$$\int_t^{t+1} \rho(f_{-\widehat{t}}(s), f_\tau(s))ds \leqslant \varepsilon/2,$$

и при этом же ζ, в силу (15.25), из (15.24) получаем, что

$$\int_t^{t+1} \rho(f_{-\widehat{t}}(s), f(s))ds \leqslant \varepsilon/2.$$

Следовательно, $\int\limits_t^{t+1} \rho(f_\tau(s), f(s))ds \leqslant \varepsilon$, а значит, в силу произвольности выбора точки $t \in \mathbb{R}$, относительно плотное множество $E_{\mathcal{R}}(f, \frac{\delta}{2})$ содержится в $E_S(f, \varepsilon)$.

О п р е д е л е н и е 15.3. Функция $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ называется *равномерно устойчивой относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $T > 0$, что при всех $\vartheta', \vartheta'' < 0$, при которых

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_t^{t+1} \rho(f_{\vartheta'}(s), f_{\vartheta''}(s))ds \leqslant \delta,$$

для всех $t > T$ будет выполняться неравенство

$$\int_t^{t+1} \rho(f_{\vartheta'}(s), f_{\vartheta''}(s))ds \leqslant \varepsilon.$$

Сравнивая определения 15.2 и 15.3, из теоремы 15.5 получаем

С л е д с т в и е 15.3. *Равномерно устойчивая относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении функция $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.*

Для формулировки еще одного следствия теоремы 15.5 понадобится следующая

Л е м м а 15.11. *Пусть функция $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ равномерно устойчива относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении. Тогда каждая функция $\widehat{f} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^-(f))$ устойчива относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\widehat{f} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^-(f))$ найдется такая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (-\infty, 0)$, что будет выполняться равенство

$$\lim_{j\to\infty} \varrho(\widehat{f}, f_{t_j}) = 0. \tag{15.26}$$

Сейчас для заданного $\varepsilon > 0$ фиксируем константы $\delta = \delta(\varepsilon/3) > 0$ и $T \in (0, \delta^{-1}]$, входящие в определение 15.3. Тогда, если $\vartheta < 0$ такое, что

$$I_1(\vartheta) \doteq \max_{t\in[0,T]} \int_t^{t+1} \rho(\widehat{f}_\vartheta(s), \widehat{f}(s))ds < \delta/3,$$

то из неравенства

$$I_{2,j}(\vartheta) \doteq \max_{t\in[0,T]} \int_t^{t+1} \rho(f_{t_j+\vartheta}(s), f_{t_j}(s))ds \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[0,T]} \int_t^{t+1} \rho(f_{t_j+\vartheta}(s), \widehat{f}(s))ds + I_1(\vartheta) + \max_{t\in[0,T]} \int_t^{t+1} \rho(f_{t_j}(s), \widehat{f}(s))ds,$$

в силу (15.26), вытекает, что найдется такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $j \geqslant j_0 \quad I_{2,j}(\vartheta) < \delta$. Отсюда, принимая во внимание (15.26), определение 15.3, лемму 15.1 и неравенство

$$I_2(\vartheta, t) \doteq \int_t^{t+1} \rho(\widehat{f}_\vartheta(s), \widehat{f}(s))ds \leqslant \int_t^{t+1} \rho(\widehat{f}_\vartheta(s), f_{t_j+\vartheta}(s))ds+$$

$$+ \int_t^{t+1} \rho(f_{t_j+\vartheta}(s), f_{t_j}(s))ds + \int_t^{t+1} \rho(f_{t_j}(s), \widehat{f}_\vartheta(s))ds,$$

получим, что для каждого $t > T \quad I_2(\vartheta, t) < \varepsilon$, и лемма 15.11 доказана.

В силу леммы 15.11 из теоремы 15.5 получаем

С л е д с т в и е 15.4. *Пусть функция $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ равномерно устойчива относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении и множество $\mathbb{A}(f) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$. Тогда каждое минимальное множество $\mathcal{M}(f)$ из $\mathbb{A}(f)$ содержится в $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.*

З а м е ч а н и е 15.6. Аналогично, с естественными изменениями в формулировках определений 15.2 и 15.3, определяются *устойчивость и равномерная устойчивость относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении*, и в этих терминах аналогично доказываются соответствующие условия п. п. по Степанову функции f, принадлежащей $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Например, такая функция будет называться устойчивой относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие константы $\delta, T > 0$, что для всякого $\vartheta > 0$, при котором $\max\limits_{t\in[-T,0]} \int\limits_t^{t+1} \rho(f_\vartheta(s), f(s))ds \leqslant \delta$, для любого $t < -T$ будет выполняться неравенство (15.21), и аналогично теореме 15.5 доказывается, что всякая рекуррентная функция, устойчивая в указанном смысле, принадлежит $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Отметим также, что непосредственно из определений вытекает, что всякая функция $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ является равномерно устойчивой относительно отрицательных (положительных) сдвигов в положительном (соответственно отрицательном) направлении. В самом деле, для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $l = l(\varepsilon/3)$, входящее в определение относительной плотности множества $E_S(f, \varepsilon/3)$. Полагаем $\delta = \min(l^{-1}, \varepsilon/3)$, и пусть $\vartheta', \vartheta'' > 0$ такие, что $\max\limits_{t\in[0,l]} \int\limits_t^{t+1} \rho(f_{\vartheta'}(s), f_{\vartheta''}(s))ds \leqslant \delta$. Тогда для каждого $t > l$, выбрав $\tau \in [-t, -t + l] \cap E_S(f, \varepsilon/3)$, получаем, что $\int\limits_t^{t+1} \rho(f_{\vartheta'}(s), f_{\vartheta''}(s))ds \leqslant d(f_\tau, f) + \max\limits_{t\in[0,l]} \int_t^{t+1} \rho(f_{\vartheta'}(s), f_{\vartheta''}(s))ds \leqslant \varepsilon$.

7. В этом пункте используем следующие два определения.

Определение 15.4. Функция $\widehat{f} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f)) \subset \mathfrak{B}$ называется *устойчивой относительно* $\mathrm{orb}_g^+(f)$ *в отрицательном (положительном) направлении*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta = \delta(\varepsilon, \widehat{f}) > 0$ и $T > 0$, что при каждом $\vartheta > 0$, для которого

$$\max_{t\in[-T,0]} \int_t^{t+1} \rho(\widehat{f}(s), f_\vartheta(s))ds \leqslant \delta \quad \big(\max_{t\in[0,T]} \int_t^{t+1} \rho(\widehat{f}(s), f_\vartheta(s))ds \leqslant \delta\big), \tag{15.27}$$

для всех $t < -T$ $(t > T)$ будет выполняться неравенство:

$$\int_t^{t+1} \rho(\widehat{f}(s), f_\vartheta(s))ds \leqslant \varepsilon, \tag{15.28}$$

Определение 15.5. Множество $\mathfrak{F} \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$ называется *устойчивым относительно* $\mathrm{orb}_g^+(f)$ *в отрицательном (положительном) направлении*, если каждая функция $\widehat{f} \in \mathfrak{F}$ устойчива (в смысле определения 15.4) относительно $\mathrm{orb}_g^+(f)$ в этом же направлении и это множество называется равномерно устойчивым относительно $\mathrm{orb}_g^+(f)$ в отрицательном (положительном) направлении, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $T > 0$, что для каждой функции $\widehat{f} \in \mathfrak{F}$ и любого $\vartheta > 0$, удовлетворяющих (15.27), для всех $t < -T$ $(t > T)$ будет выполняться неравенство (15.28).

В силу определений 15.4 и 15.5, используя определение метрики ϱ и лемму 15.1, следуя схеме доказательства теоремы 34 [123, с. 412] (см. также [171, с. 42]), получаем следующее утверждение.

Лемма 15.12. *Пусть компактное множество* $\mathfrak{F} \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$ *устойчиво относительно* $\mathrm{orb}_g^+(f)$ *в отрицательном направлении. Тогда оно равномерно устойчиво относительно* $\mathrm{orb}_g^+(f)$ *в отрицательном направлении.*

Следствие 15.5. *В условиях леммы* 15.12 *множество* $\mathfrak{F}$ *является равномерно устойчивым относительно* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$ *в отрицательном направлении*[14].

Всюду далее через $\Omega(f)$ обозначаем множество омега–предельных точек движения $t \mapsto g^t(f)$, отвечающего функции $f \in \mathfrak{B}$.

[14] То есть для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $T > 0$, что для любых $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{g} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$, удовлетворяющих неравенству $\max\limits_{t\in[-T,0]} \int\limits_t^{t+1} \rho(\mathfrak{f}(s), \mathfrak{g}(s))ds < \delta$, при всех $t < -T$ будет выполняться неравенство $\int\limits_t^{t+1} \rho(\mathfrak{f}(s), \mathfrak{g}(s))ds < \varepsilon$.

Т е о р е м а 15.6. *Пусть множество* $\Omega(f) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ *и устойчиво относительно* $\mathrm{orb}_g^+(f)$ *в отрицательном направлении. Тогда* $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Omega(f)$ — компактное инвариантное (относительно потока g^t) множество, то [123] оно необходимо содержит минимальное компактное множество $\mathcal{M}$. Докажем сначала, как и при доказательстве теоремы А. А. Маркова [123, с. 416], что движение $t \mapsto g^t(f)$ рекуррентно. Допустив противное, получим (см. теорему Биркгофа [123], теорему 15.1 и лемму 15.8), что $\varrho(f, \mathcal{M}) \doteq \varkappa > 0$. Далее, для $\varepsilon \doteq \frac{\varkappa}{2}$ найдем $\delta > 0$ и $T \in (0, \delta^{-1}]$, входящие (см. следствие 15.5) в определение равномерной устойчивости множества $\Omega(f)$ относительно $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$ в отрицательном направлении, и зафиксируем произвольную функцию $\widehat{f} \in \mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M} \subset \Omega(f)$, то найдется такая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = \infty$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(f_{t_j}, \widehat{f}) = 0$. Из последнего равенства, используя свойство интегральной непрерывности ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$, для указанных $\delta > 0$ и $\varkappa^{-1}$ найдется такое $t_j > 2\varkappa^{-1} + T$, что $\max\limits_{|\xi| \leqslant 2\varkappa^{-1}} \varrho(g^{\xi}(f_{t_j}), g^{\xi}(\widehat{f})) < \delta$, а значит, при всех $|\xi| \leqslant 2\varkappa^{-1}$ $\max\limits_{t\in[-T,0)} \int\limits_t^{t+1} \rho(f_{\xi+t_j}(s), \widehat{f}_{\xi}(s))ds < \delta$. Отсюда, учитывая, что $\xi + t_j > 0$, по лемме 15.12 при всех $t < -T$ получаем неравенство $\int\limits_t^{t+1} \rho(f_{\xi+t_j}(s), \widehat{f}_{\xi}(s))ds < \varkappa/2$. Учитывая, что $-t_j < -T$, из последнего неравенства при $t = -t_j$ получим, что при всех $|\xi| \leqslant 2\varkappa^{-1}$ $\int\limits_{\xi}^{\xi+1} \rho(f(s), \widehat{f}(s - t_j))ds < \varkappa/2$, то есть $\varrho(f, g^{-t_j}(\widehat{f})) < \varkappa/2$. Поскольку $g^{-t_j}(\widehat{f}) \in \mathcal{M}$, то $\varkappa \doteq \varrho(f, \mathcal{M}) \leqslant \varrho(f, g^{-t_j}(\widehat{f})) < \varkappa/2$. Полученное противоречие показывает, что в условиях теоремы 15.6 движение $t \mapsto g^t(f)$ рекуррентно. Поэтому $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$ — минимальное компактное множество, а значит $\Omega(f) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$. Кроме того, $f \in \Omega(f)$. По следствию 15.5 $\Omega(f)$ равномерно устойчиво относительно $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$ в отрицательном направлении, откуда в силу равенства $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f)) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$ следует, что рекуррентная функция f устойчива относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении. Следовательно (здесь см. замечание 15.6), $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

С л е д с т в и е 15.6. *Пусть* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ *и* f *равномерно устойчива относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении. Тогда* $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

З а м е ч а н и е 15.7. Аналогично определению 15.4 с соответствующими изменениями определяется устойчивость множества $\mathbb{A}(f)$ альфа–предельных точек движения $t \mapsto g^t(f)$ относительно $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^-(f))$ в положительном направлении, и в этих терминах можно привести условия, когда $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

Т е о р е м а 15.7. *Пусть множество* $\Omega(f) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ *и устойчиво относительно* $\mathrm{orb}_g^+(f)$ *в положительном направлении. Тогда* $\Omega(f) \subset S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.[15] Для произвольно зафиксированной функции $\widehat{f}$ из $\in \Omega(f)$ и заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2}, \widehat{f})$ и $T \in (0, \delta^{-1}]$, входящие в определение устойчивости $\widehat{f}$ относительно $\mathrm{orb}_g^+(f)$ в положительном направлении. Поскольку

[15] Здесь используем идею доказательства теоремы 2 в [122].

$\widehat{f} \in \Omega(f)$, то для указанного $\delta > 0$ найдется $t_1 > 0$, при котором $\varrho(\widehat{f}, f_{t_1}) < \delta$, а значит (см. (15.1) и определение 15.5), при всех $t > T$

$$\int_t^{t+1} \rho(\widehat{f}(s), f_{t_1}(s))ds < \varepsilon/2. \tag{15.29}$$

Фиксируем далее произвольную функцию $h \in \Omega(f)$. По определению $\Omega(f)$ найдется такое $t_2 > \frac{2}{\varepsilon} + t_1 + T$, что $\varrho(h, f_{t_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку для каждого $\xi \in [-\frac{2}{\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon}]$ $t = \xi + t_2 - t_1 > T$, то при этих t из (15.29) получаем, что $\varrho(\widehat{f}_{t_2-t_1}, f_{t_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, $\varrho(h, \widehat{f}_{t_2-t_1}) < \varepsilon$, то есть $h \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\widehat{f}))$. Отсюда в силу произвольности выбора $h \in \Omega(f)$ получаем, что $\Omega(f) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\widehat{f}))$. С другой стороны, так как $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\widehat{f})) \subset \Omega(f)$, то $\Omega(f) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\widehat{f}))$. Поэтому $\Omega(f)$ — минимальное компактное множество, состоящее, в силу теоремы Биркгофа, из рекуррентных движений, или (см. лемму 15.8) каждая функция $\widehat{f}$ из $\Omega(f)$ рекуррентна. Далее, так как движение $t \mapsto g^t(\widehat{f})$ рекуррентно, то

$$\mathbb{A}(\widehat{f}) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^-(\widehat{f})) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\widehat{f})) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\widehat{f})) = \Omega(f) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f)). \tag{15.30}$$

Из устойчивости множества $\Omega(f)$ относительно $\mathrm{orb}_g^+(f)$ в положительном направлении вытекает его устойчивость относительно $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$ в том же направлении, а значит, всякая рекуррентная функция $\widehat{f} \in \Omega(f) \overset{(15.30)}{=} \mathbb{A}(\widehat{f})$ устойчива относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, то есть (см. теорему 15.5) $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Отсюда, в силу произвольности выбора функции $\widehat{f} \in \Omega(f)$, получаем нужное включение $\Omega(f) \subset S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

С л е д с т в и е 15.7. *Пусть* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ *и* f *равномерно устойчива относительно положительных сдвигов в положительном направлении. Тогда* $\Omega(f) \subset S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *и найдется такая (п. п. по Степанову) функция* $\widehat{f} \in \Omega(f)$, *что*

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \rho(f(s), \widehat{f}(s))ds = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равномерной устойчивости функции f относительно положительных сдвигов в положительном направлении, в силу того, что $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$, аналогично утверждению леммы 15.11, получаем, что каждая функция $\widehat{f} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$ устойчива относительно положительных сдвигов в положительном направлении, то есть множество $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$, а значит и его компактное подмножество $\Omega(f)$, устойчиво (равномерно устойчиво (см. лемму 15.12)) относительно $\mathrm{orb}_g^+(f)$ в положительном направлении. Поэтому по теореме 15.7 $\Omega(f) \subset S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и (см. [119, 122]) найдутся такая функция $\widehat{f} \in \Omega(f)$ и последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(f_{t_j}, \widehat{f}_{t_j}) = 0$. Из этого равенства, в силу определения равномерной устойчивости множества $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(f))$ относительно себя в положительном направлении, получаем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+1} \rho(f(s), \widehat{f}(s))ds = 0$.

8. Здесь приведем достаточные условия п.п. по Бору функций из $C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, вытекающие из приведенных в двух предыдущих пунктах утверждений. С этой целью докажем сначала следующее утверждение.

Л е м м а 15.13. *Равномерно непрерывная функция* $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$ *устойчива относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении в том и только в том случае, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $\delta > 0$ *и* $T > 0$, *что для каждого* $\vartheta < 0$ *неравенство* $\max\limits_{t \in [0,T]} \rho(f_\vartheta(t), f(t)) \leqslant \delta$ *влечет для всех* $t > T$ *неравенство* (15.21).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий очевидна. Докажем достаточность. С этой целью для заданного $\varepsilon > 0$ найдем входящие в условия константы $\delta, T > 0$, и пусть $\gamma \in (0, \delta]$ такое, что γ-колебание на $\mathbb{R}$ функции f не превосходит $\delta/2$. Рассмотрим далее произвольное $\vartheta < 0$, при котором выполнено неравенство (15.20) при $\delta \doteq \frac{\gamma^2}{2}$, и покажем, что $\max\limits_{t \in [0,T]} \rho(f_\vartheta(t), f(t)) \leqslant \delta$. Действительно, если найдется $\widehat{t} \in [0, T]$, при котором $\rho(f_\vartheta(\widehat{t}), f(\widehat{t})) > \delta$, то в силу выбора $\gamma > 0$ при всех $t \in [\,\widehat{t}, \widehat{t} + \gamma]$ $\rho(f_\vartheta(t), f(t)) > \delta/2$. Поэтому $\frac{\gamma^2}{2} \geqslant \int\limits_{\widehat{t}}^{\widehat{t}+1} \rho(f_\vartheta(s), f(s))ds \geqslant \frac{\gamma\delta}{2} > \frac{\gamma^2}{2}$, что невозможно. Таким образом, $\max\limits_{t \in [0,T]} \rho(f_\vartheta(t), f(t)) \leqslant \delta$ и следовательно при всех $t > T$ верно (15.21), то есть неравенство (15.20) при $\delta \doteq \frac{\gamma^2}{2}$ влечет для всех $t > T$ неравенство (15.21). $\square$

Далее, аналогично определениям 15.2 и 15.3 дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 15.6. Функция $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ называется устойчивой относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $T > 0$, что для каждого $\vartheta < 0$ неравенство $\max\limits_{t \in [0,T]} \rho(c_\vartheta(t), c(t)) \leqslant \delta$ влечет для всех $t > T$ неравенство $\rho(c_\vartheta(t), c(t)) \leqslant \varepsilon$, и называется равномерно устойчивой относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $T > 0$, что для любых $\vartheta', \vartheta'' \leqslant 0$ неравенство $\max\limits_{t \in [0,T]} \rho(c_{\vartheta'}(t), c_{\vartheta''}(t)) \leqslant \delta$, влечет для всех $t > T$ неравенство: $\rho(c_{\vartheta'}(t), c_{\vartheta''}(t)) \leqslant \varepsilon$.

З а м е ч а н и е 15.8. Аналогично, с естественными изменениями в формулировке определения 15.6, для функции $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ определяются устойчивость и равномерная устойчивость относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении. Например, такая функция будет называться устойчивой относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие константы $\delta, T > 0$, что для всякого $\vartheta > 0$, при котором $\max\limits_{t \in [-T,0]} \rho(c_\vartheta(t), c(t))ds \leqslant \delta$, для всех $t > T$ будет выполняться неравенство $\rho(c_{\vartheta'}(t), c_{\vartheta''}(t)) \leqslant \varepsilon$.

Из определения множества $B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ п.п. по Бору функций вытекает

Л е м м а 15.14. *Всякая функция* $f \in B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *равномерно устойчива относительно отрицательных (положительных) сдвигов в положительном (отрицательном) направлении.*

Используя лемму 15.13, учитывая, что всякая функция из пространства $\mathcal{R}_c(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ непрерывных рекуррентных функций ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, а также то, что всякая равномерно непрерывная п. п. по Степанову функция является п. п. по Бору [107], и из теоремы 15.5 и ее следствий 15.3 и 15.4 (см. также замечания 15.6 и 15.8) получаем следующее

С л е д с т в и е 15.8. *Пусть* $c \in \mathcal{R}_c(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *и устойчива (равномерно устойчива) относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении. Тогда* c *принадлежит* $B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$*. Кроме того, если функция* $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *равномерно устойчива относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении и* $\Omega(c) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B}_c)$, *то каждое минимальное множество из* $\Omega(c)$ *содержится в* $B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

В следующих двух утверждениях для ДС $(\mathfrak{B}_c, g^t)$, в которой (см. замечание 15.2) $g^t(c) \doteq c_t$ для каждой функции $c \in \mathfrak{B}_c$, используем определения, аналогичные определениям 15.4 и 15.5, приведенным для ДС $(\mathfrak{B}, g^t)$, изменения в которых аналогичны сделанным изменениям в определениях 15.2 и 15.3 при формулировке определения 15.6.

Из теоремы 15.6 и ее следствия 15.6, рассуждая как и при доказательстве следствия 15.8, получаем

С л е д с т в и е 15.9. *Пусть* $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *и множество* $\Omega(c) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B}_c)$ *устойчиво относительно положительной полутраектории* $\mathrm{orb}_g^+(c)$ *в отрицательном направлениии. Тогда* $c \in B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$*. Следовательно, если такая функция равномерно устойчива относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении, то она п. п. по Бору.*

Изменив в предыдущем следствии направление устойчивости, из теоремы 15.6 и ее следствия 15.6 получаем

С л е д с т в и е 15.10. *Пусть* $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *и множество* $\Omega(c) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B}_c)$ *устойчиво относительно* $\mathrm{orb}_g^+(c)$ *в положительном направлениии. Тогда* $\Omega(c)$ *содержится в* $B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$*. Следовательно, если* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(c)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B}_c)$ *и* c *равномерно устойчива относительно положительных сдвигов в положительном направлении, то* $\Omega(c) \subset B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *и найдется такая (п. п. по Бору) функция* $\widehat{c} \in \Omega(c)$, *что* $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(\widehat{c}(t), c(t)) = 0$.

Отметим, далее, что аналогично определелению 15.6 можно дать следующее определение.

О п р е д е л е н и е 15.7. Пусть $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. *Точка* $c(0) \in \mathfrak{Y}$ *называется устойчивой относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $\vartheta < 0$ неравенство $\rho(c_\vartheta(0), c(0)) \leqslant \delta$ влечет для всех $t > 0$ неравенство $\rho(c_\vartheta(t), c(t)) \leqslant \varepsilon$, и называется равномерно устойчивой относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\vartheta', \vartheta'' < 0$ неравенство $\rho(c_{\vartheta'}(0), c_{\vartheta''}(0)) \leqslant \delta$ влечет для всех $t > 0$ неравенство: $\rho(c_{\vartheta'}(t), c_{\vartheta''}(t)) \leqslant \varepsilon$.

Точно так же для $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ можно определить равномерную устойчивость точки $c(0)$ относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении.

Очевидно, что всякая функция $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, в которой точка $c(0) \in \mathfrak{Y}$ является устойчивой (равномерно устойчивой) относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, будет являться устойчивой (равномерно устойчивой) относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении и, следовательно, будет п. п. по Бору. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Например, функция $c(t) = \sin t$ (см. лемму 15.14) равномерно устойчива относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, однако точка $c(0)$ не будет устойчивой относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении. Вместе с тем, имеет место следующее утверждение.

Л е м м а 15.15. *Если функция $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ совпадает с движением некоторой ДС $(\mathfrak{Y}, f^t)$, то она устойчива относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении в том и только в том случае, если аналогичным свойством устойчивости обладает и точка $c(0)$. Кроме того, если это движение отрицательно устойчиво по Лагранжу, то $c(0)$ будет равномерно устойчивой относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении в том и только в том случае, если аналогичным свойством устойчивости обладает и функция c.*

П р и м е р 15.5. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x), \quad F \in C(G, \mathbb{R}^n)$, где G — область в $\mathbb{R}^n$, имеющую ограниченное решение $x(t),\ t \in \mathbb{R}$. Тогда, при выполнении условий одного из следствий 15.8 – 15.10, эта система будет иметь п. п. по Бору решение. В частности, само это решение будет п. п. по Бору, если оно равномерно устойчиво относительно положительных (отрицательных) сдвигов в отрицательном (положительном) направлении. Указанное свойство, в силу леммы 15.5, равносильно соответствующему свойству устойчивости точки $x(0)$. Аналогичное условие п. п. по Бору ограниченного решения приведено в [187] при условии, что это решение удовлетворяет условию: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $|x_{\vartheta'}(0) - x_{\vartheta''}(0)| \leqslant \delta,\ \vartheta', \vartheta'' \in \mathbb{R}$ влечет при всех $t \in \mathbb{R}$ неравенство $|x_{\vartheta'}(t) - x_{\vartheta''}(t)| \leqslant \varepsilon$, которое доказано с использованием ряда свойств ε–п. п. для п. п. по Бору функции.

§16. О существовании п. п. магистральных процессов

Приводятся достаточные условия существования п. п. процесса, принадлежащего множеству $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$, являющегося решением задачи оптимального управления п. п. движениями.

1. Рассмотрим систему (13.15) с функцией $f : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию I), и предполагаем, что для нее выполнено (см. п. 3 в § 14) условие $\mathcal{B}$). В этом случае множество $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; K) \neq \emptyset$. Кроме того, для любой фиксированной функции $g : \mathbb{R} \to K$ найдется такое $r > 0$, что для всякого промежутка $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ множество

$$\mathcal{O}(\mathbb{T}, g, r) \doteq \big\{(t, x) : t \in \mathbb{T},\ x \in O_r[g(t)]\big\} \tag{16.1}$$

содержится в $\mathbb{T} \times G$. Полагаем далее

$$\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}, g, r) \doteq \big\{(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{T}) : \mathrm{gr}_{\mathbb{T}}(x) \subset \mathcal{O}(\mathbb{T}, g, r)\big\}, \tag{16.2}$$

и рассмотрим (см. обозначение в (14.1)) задачу

$$J(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\to\min,\ (x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([t_0,t_1],g,r),\tag{16.3}$$

для которой на каждом отрезке $[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}$ существует (глобальное) решение[16]. Совокупность таких решений обозначим $\mathcal{R}([t_0,t_1],g,r)$. Далее, наряду с указанным множеством решений, будем рассматривать также совокупность оптимальных процессов $O\mathcal{P}([t_0,t_1],g,r)$. По аналогии с определением 14.1 говорим, что процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([t_0,t_1],g,r)$ является оптимальным для задачи (16.3), если $J(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\geqslant J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0,t_1)$ для любого другого управляемого процесса $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([t_0,t_1],g,r)$, такого, что $x(t_0)=\widehat{x}(t_0)$, $x(t_1)=\widehat{x}(t_1)$. Поскольку для каждого отрезка $[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}$ множество $\mathcal{R}([t_0,t_1],g,r)$ непусто и содержится в $O\mathcal{P}([t_0,t_1],g,r)$, то и $O\mathcal{P}([t_0,t_1],g,r)\neq\emptyset$ для каждого $[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}$. Тем самым, как уже отмечалось, корректно определена следующая задача — одна из основных задач теории магистральных процессов (см. [33, 127, 128] и приведенную там библиографию), а также теории асимптотически достижимых элементов [162, 182, 183]: определить характер поведения оптимальных процессов, определенных на конечном временном промежутке, и отвечающих им значений целевых функционалов, при неограниченном увеличении длины этого промежутка. В данном случае речь идет о поведении при $T\doteq t_1-t_0\to\infty$ процессов, принадлежащих $\mathcal{R}([t_0,t_1],g,r)$ и $O\mathcal{P}([t_0,t_0+T],g,r)$.

Л е м м а 16.1. *Для фиксированной системы отрезков $\mathbb{T}_1\subset\mathbb{T}_2\subset\ldots$, исчерпывающей $\mathbb{R}$, и каждой последовательности $(\widehat{x}_j(\cdot),\widehat{\mu}_j(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_j,g,r)$, $j\in\mathbb{N}$, можно выделить подпоследовательность $\{(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся на каждом отрезке $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ в пространстве $C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ к некоторому процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$, принадлежащему $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R},g,r)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 14.3 при $\mathbb{T}=\mathbb{T}_1$, получаем, что из заданной в условии леммы 16.1 последовательности $\{(\widehat{x}_j(\cdot),\widehat{\mu}_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$ можно извлечь подпоследовательность $\{(\widehat{x}_j^{(1)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(1)}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся при $j\to\infty$ в топологии пространства $C(\mathbb{T}_1)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}_1}$ $(C(\mathbb{T}_1)\doteq C(\mathbb{T}_1,\mathbb{R}^n))$ к некоторому процессу $(z_1(\cdot),\nu_1(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}_1,g,r)$ и, кроме того, $(\widehat{x}_j^{(1)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(1)}(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_1,g.r)$ при всех $j\in\mathbb{N}$. Теперь из последовательности $\{(\widehat{x}_j^{(1)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(1)}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$ извлекаем подпоследовательность $(\widehat{x}_j^{(2)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(2)}(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_2,g,r)$, $j\in\mathbb{N}$, сходящуюся при $j\to\infty$ в топологии пространства $C(\mathbb{T}_2)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}_2}$ к некоторому процессу $(z_2(\cdot),\nu_2(\cdot))$, принадлежащему $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}_2,g,r)$. Продолжив указанную процедуру, получим совокупность последовательностей $\{(\widehat{x}_j^{(i+1)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(i+1)}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}\subset\{(\widehat{x}_j^{(i)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(i)}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$, $i\in\mathbb{N}$ и такую, что при каждом i и всяком $\mathbb{T}\subset\mathbb{T}_i$ $(\widehat{x}_j^{(i)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(i)}(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T},g,r)$, $j\in\mathbb{N}$, и сходящуюся при $j\to\infty$ в пространстве $C(\mathbb{T}_i)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}_i}$ к некоторому процессу $(z_i(\cdot),\nu_i(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}_i,g,r)$. Поскольку $(z_i(\cdot),\nu_i(\cdot))|_{\mathbb{T}_l}=(z_l(\cdot),\nu_l(\cdot))$, $l=1,\ldots,i-1$, то процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R},g,r)$, такой что $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))|_{\mathbb{T}_k}=(z_k(\cdot),\nu_k(\cdot))$, $k\in\mathbb{N}$, и диагональная последовательность $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\doteq(\widehat{x}_j^{(j)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(j)}(\cdot))$, $j\in\mathbb{N}$ будут удовлетворять указанным в утверждении леммы 16.1 свойствам. □

Поскольку $\mathcal{R}([t_0,t_1],g,r)\subset O\mathcal{P}([t_0,t_1],g,r)$, а сужение $(x(\cdot),\mu(\cdot))|_{[t_0',t_1']}$ решения $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in O\mathcal{P}([t_0,t_1],g,r)$ на каждый подотрезок $[t_0',t_1']\subset[t_0,t_1]$ принадлежит

[16] То есть найдется такой процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([t_0,t_1],g,r)$, что для всех управляемых процессов $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([t_0,t_1],g,r)$ выполняется неравенство $J(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\geqslant J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0,t_1)$.

$O\mathcal{P}([t_0,t_1],g,r)$ [127, с. 24], то сужение пары $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{R}([t_0,t_1],g,r)$ на каждый подотрезок $[t_0',t_1'] \subset [t_0,t_1]$ также принадлежит $O\mathcal{P}([t_0',t_1'],g,r)$. Поэтому из леммы 16.1 получаем

С л е д с т в и е 16.1. *Для каждой системы отрезков* $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}_2 \subset \ldots$, *исчерпывающей* $\mathbb{R}$, *из последовательности* $(\widehat{x}_j(\cdot),\widehat{\mu}_j(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\mathbb{T}_j,g,r)$, $j \in \mathbb{N}$ *можно выделить подпоследовательность* $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_j,g,r)$, $j \in \mathbb{N}$, *сходящуюся на каждом отрезке* $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ *в пространстве* $C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ *к некоторому процессу* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R},g,r)$.

2. Фиксируем процесс $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+;K)$. Выберем $\varepsilon > 0$ пока таким, чтобы (см. (16.1) при $g = x$ и $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$) ε-трубка $\mathcal{O}(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon) \subset \mathbb{R}_+ \times G$, и (см. (16.2)) рассмотрим множество $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$. Далее, зафиксировав набор точек $0 < \mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t}_2 < \ldots$, $\lim\limits_{j\to\infty} \mathfrak{t}_j = \infty$ из последовательности решений $(\widehat{x}_j(\cdot),\widehat{\mu}_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,\mathfrak{t}_j],x,\varepsilon)$, $j \in \mathbb{N}$ (можно считать также, что $(\widehat{x}_j(\cdot),\widehat{\mu}_j(\cdot)) \in \mathfrak{R}([0,\mathfrak{t}_j],x,\varepsilon)$) по лемме 16.1 (соответственно, по следствию 16.1) можно выделить подпоследовательность

$$(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,\mathfrak{t}_j],x,\varepsilon),\ \ j \in \mathbb{N}$$

и указать процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$ такие, что для каждого отрезка $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ будет выполнено равенство

$$\lim_{j\to\infty}(\|\widehat{x}-x_j\|_{C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)} + \|\widehat{\mu}-\mu_j\|_{w,\mathbb{T}}) = 0. \tag{16.4}$$

Таким образом, расширение множества управлений $\mathcal{U}_{\mathbb{R}_+}$ до мерозначных (обобщенных) управлений $\mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}$ позволяет в некоторой степени описать поведение оптимальных процессов в ε-трубке заданного решения системы (13.15), определенных на любых конечных отрезках $[0,\mathfrak{t}_j]$, в которых $\mathfrak{t}_j \to \infty$ при $j \to \infty$, в том смысле, что любая последовательность решений из $\mathfrak{R}([0,\mathfrak{t}_j],x,\varepsilon)$ (либо из $O\mathcal{P}([0,\mathfrak{t}_j],x,\varepsilon)$) содержит подпоследовательность, сходящуюся на каждом отрезке $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}_+$ в топологии пространства $C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ (см. (16.4)) к некоторому предельному процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$ системы (13.15). Чтобы указать свойства этого предельного процесса и значений целевых функционалов $J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);0,T)$, отвечающих $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot) \in O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$, при $T \to \infty$, как и в [127, 128], обоснуем процедуру усреднения. В самом деле, рассмотрение $\overline{\lim\limits_{T\to\infty}}\, J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);0,T)$ сразу накладывает ограничения на функцию f_0, связанные с существованием интеграла на $[0,\infty)$. Вместе с тем очевидно, что всякий процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$ будет оптимальным (в этом же смысле) при каждом фиксированном $T > 0$ и для задачи

$$\frac{1}{T}J(x(\cdot),\mu(\cdot);0,T) \to \min,\ \ (x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c([0,T],x,\varepsilon), \tag{16.3$_T$}$$

с усредненным функционалом. Однако значения функционала в задаче (16.3$_T$), при условии d-ограниченности функции $f_0 : \mathbb{R} \times X \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, где

$$X = X(\varepsilon) \doteq \overline{\mathrm{orb}}_+(x) + O_\varepsilon[0], \tag{16.5}$$

отличает от значений функционала $J(x(\cdot),\mu(\cdot);0,T)$ исходной задачи (16.3) то, что равномерно по всем процессам $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([0,T];X)$ (а значит, и по всем процессам $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([0,T],g,\varepsilon)$)

$$\sup_{T\geqslant 1}\Big|\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\langle\mu(t),f_0(t,x(t),u)\rangle dt\Big|\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{(x,u)\in X\times\mathcal{U}}|f_0(t,x,u)|dt<\infty.$$

Тем самым получаем, что если функция f_0 удовлетворяет условиям, аналогичным условиям I), II) для функции f, то на $\mathfrak{A}(\mathbb{R}_+;X)$ определен ограниченный функционал

$$(z(\cdot),\nu(\cdot))\mapsto\mathbb{I}(z(\cdot),\nu(\cdot))\doteq\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\langle\nu(t),f_0(t,z(t),u)\rangle dt,\tag{16.6}$$

который далее и будем рассматривать.

Отметим сразу одно его свойство, используемое в дальнейшем: для каждого процесса $(z(\cdot),\nu(\cdot))\in\mathfrak{A}(\mathbb{R}_+;X)$ при любом фиксированном $t_0\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{I}(z(\cdot),\nu(\cdot))=\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\langle\nu(t),f_0(t,z(t),u)\rangle dt.\tag{16.7}$$

Всюду далее предполагаем, что фиксирован такой процесс $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+;K)$, что система (13.15) обладает (см. определение 13.6) свойством C) относительно интегральной кривой $\gamma_+(x)$, и $\varepsilon,\eta,\vartheta$ — положительные константы, входящие в определение этого свойства.

Л е м м а 16.2. *Для всякого $T\geqslant 4\vartheta$ найдется такой индекс $j(T)\in\mathbb{N}$, что $\mathsf{t}_{j(T)}>T$ и*

$$\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\langle\mu_{j(T)}(t),f_0(t,x_{j(T)}(t),u)\rangle dt.\tag{16.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $T>0$ (см. (16.4) при $\mathbb{T}=[0,T]$) найдется такое $j(T)$, что $\mathsf{t}_{j(T)}>T$ и одновременно будет выполнено неравенство $|J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);0,T)-J(x_{j(T)}(\cdot),\mu_{j(T)}(\cdot);0,T)|\leqslant 1$, и, стало быть,

$$\frac{1}{T}J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);0,T)\leqslant\frac{1}{T}+\frac{1}{T}J(x_{j(T)}(\cdot),\mu_{j(T)}(\cdot);0,T).\tag{16.9}$$

Далее, на отрезке $[0,T]$, $T\geqslant 4\vartheta$, для каждого процесса $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))$, принимая во внимание, что $\mathrm{gr}_{[0,T]}(x_j),\mathrm{gr}_{[0,T]}(\widehat{x})\subset\mathcal{O}([0,T],x,\varepsilon)$, построим аналог большой вариаций следующим образом. Для точки $x_j(0)$ найдем управление $\mu_j^+\in\mathcal{M}_{[0,\vartheta]}$, удовлетворяющее неравенству $\|\mu-\mu_j^+\|_{w,[0,\vartheta]}\leqslant\eta|x_j(0)-x(0)|$, и при котором система (13.15) имеет решение $y_j^+(t)\in O_\varepsilon[x(t)]$, $t\in[0,\vartheta]$, удовлетворяющее условиям:

$$y_j^+(0)=x_j(0),\ y_j^+(\vartheta)=x(\vartheta),\tag{16.10}$$

а для $x_j(T)$ выберем такое $\mu_j^-\in\mathcal{M}_{[T-\vartheta,T]}$, что $\|\mu-\mu_j^-\|_{w,[T-\vartheta,T]}\leqslant\eta|x_j(T)-x(T)|$, и при котором система (13.15) имеет решение $y_j^-(t)\in O_\varepsilon[x(t)]$, $t\in[T-\vartheta,T]$, удовлетворяющее условиям:

$$y_j^-(T-\vartheta)=x(T-\vartheta),\ y_j^-(T)=x_j(T).\tag{16.11}$$

Далее, для точки $x(\vartheta)$ выберем управление ν^-, принадлежащее $\mathcal{M}_{[\vartheta,2\vartheta]}$, такое, что $\|\mu-\nu^-\|_{w,[\vartheta,2\vartheta]} \leqslant \eta|x(2\vartheta)-\widehat{x}(2\vartheta)|$, при котором система (13.15) будет иметь решение $z^-(t)\in O_\varepsilon[x(t)]$, $t\in[\vartheta,2\vartheta]$, удовлетворяющее условиям:

$$z^-(\vartheta)=x(\vartheta),\ z^-(2\vartheta)=\widehat{x}(2\vartheta), \tag{16.12}$$

а для точки $\widehat{x}(T-2\vartheta)$ выберем управление ν^+, принадлежащее $\mathcal{M}_{[T-2\vartheta,T-\vartheta]}$, такое что $\|\mu-\nu^+\|_{w,[T-2\vartheta,T-\vartheta]} \leqslant \eta|x(T-2\vartheta)-\widehat{x}(T-2\vartheta)|$, и при котором система (13.15) имеет решение $z^+(t)\in O_\varepsilon[x(t)]$, $t\in[T-2\vartheta,T-\vartheta]$, удовлетворяющее условиям:

$$z^+(T-2\vartheta)=\widehat{x}(T-2\vartheta),\ z^+(T-\vartheta)=x(T-\vartheta). \tag{16.13}$$

Теперь рассмотрим управление $\mathfrak{m}_j\in\mathcal{M}_{[0,T]}$, определенное равенством

$$\mathfrak{m}_j(t) \doteq \chi_{[0,\vartheta]}(t)\mu_j^+(t)+\chi_{[\vartheta,2\vartheta]}(t)\nu^-(t)+\chi_{[2\vartheta,T-2\vartheta]}(t)\widehat{\mu}(t)+ \\ +\chi_{[T-2\vartheta,T-\vartheta]}(t)\nu^+(t)+\chi_{[T-\vartheta,T]}(t)\mu_j^-(t).$$

Тогда

$$z_j(t) \doteq \chi_{[0,\vartheta]}(t)y_j^+(t)+\chi_{[\vartheta,2\vartheta]}(t)z^-(t)+\chi_{[2\vartheta,T-2\vartheta]}(t)\widehat{x}(t)+ \\ +\chi_{[T-2\vartheta,T-\vartheta]}(t)y^+(t)+\chi_{[T-\vartheta,T]}(t)y_j^-(t)$$

будет решением системы (13.15), отвечающим $\mathfrak{m}_j\in\mathcal{M}_{[0,T]}$ и которое, в силу равенств (16.10) – (16.13), удовлетворяет условиям:

$$z_j(0)=x_j(0),\ z_j(T)=x_j(T). \tag{16.14}$$

Полученный процесс $(z_j(\cdot),\mathfrak{m}_j(\cdot))$, принадлежащий $\mathfrak{A}_c([0,T],x,\varepsilon)$, будем, так же как и в [127], называть большой вариацией процесса $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([0,T],x,\varepsilon)$, отвечающей $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([0,T],x,\varepsilon)$.

Теперь, поскольку процесс $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,\mathfrak{t}_j],x,\varepsilon)$, то при всех j, для которых $\mathfrak{t}_j\geqslant T$, этот процесс будет принадлежать $O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$. Поэтому, в силу (16.14), учитывая способ построения $(z_j(\cdot),\mathfrak{m}_j(\cdot))$, имеем следующие соотношения:

$$\frac{1}{T}J(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot);0,T)\leqslant\frac{1}{T}J(z_j(\cdot),\mathfrak{m}_j(\cdot);0,T)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8}{T}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\vartheta}\max_{(x,u)\in X\times\mathcal{U}}|f_0(s,x,u)|ds+\frac{1}{T}J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);0,T),$$

из которых, в силу (16.9), получаем равенство (16.8).

Сейчас рассмотрим (см. (16.6)) задачу

$$\mathbb{I}(z(\cdot),\nu(\cdot))\to\min,\ (z(\cdot),\nu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon), \tag{16.15}$$

в которой процесс $(\widehat{z}(\cdot),\widehat{\nu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$ называется решением, если для всякого процесса $(z(\cdot),\nu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$ выполнено неравенство $\mathbb{I}(\widehat{z}(\cdot),\widehat{\nu}(\cdot))\leqslant\mathbb{I}(z(\cdot),\nu(\cdot))$.

Т е о р е м а 16.1. *Процесс* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$ *является решением задачи* (16.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольный процесс $(z(\cdot),\nu(\cdot))$, принадлежащий $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$, и рассмотрим указанную в лемме 16.2 совокупность процессов $\{(x_{j(T)}(\cdot),\mu_{j(T)}(\cdot))\}$, отвечающую $T\geqslant 4\vartheta$. Построив, как и при доказательстве леммы 16.2, для $(x_{j(T)}(\cdot),\mu_{j(T)}(\cdot))$ большую вариацию, отвечающую $(z(\cdot),\nu(\cdot))$, получим неравенство

$$\frac{1}{T}J(x_{j(T)}(\cdot),\mu_{j(T)}(\cdot);0,T)\leqslant\frac{8}{T}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\vartheta}\max_{(x,u)\in X\times\mathcal{U}}|f_0(s,x,u)|ds+\frac{1}{T}J(z(\cdot),\nu(\cdot);0,T),$$

из которого, в силу равенства (16.8) получаем, что $\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\leqslant\mathbb{I}(z(\cdot),\nu(\cdot))$.

3. В этом пункте и далее для краткости изложения предполагаем, что функции f и f_0 не зависят от переменной t, то есть приведенные выше обозначения и утверждения для системы (13.15) используем для автономной системы (12.42) с функцией $f\in C(G\times\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$, а вместо функционала (14.1) рассматриваем функционал

$$(x(\cdot),\mu(\cdot))\mapsto J(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\doteq\int_{t_0}^{t_1}\langle\mu(s),f_0(x(s),u)\rangle ds, \tag{16.16}$$

в котором $f_0\in C(G\times\mathcal{U},\mathbb{R})$.

Приведем необходимое далее свойство усреднений $\{\frac{1}{T}J(x(\cdot),\mu(\cdot);0,T)\}_{T\geqslant 1}$. С этой целью на множестве $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$ рассмотрим метрику (здесь см. (15.15))

$$\rho\big((z_1(\cdot),\nu_1(\cdot)),(z_2(\cdot),\nu_2(\cdot))\big)\doteq\|z_1-z_2\|_{C(\mathbb{R},X)}+d_w(\nu_1,\nu_2), \tag{16.17}$$

индуцированную метрикой метрического пространства $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}$.

Л е м м а 16.3. *Пусть последовательность* $\{(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$ *и процесс* $(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$ *такие, что* $\lim\limits_{j\to\infty}\rho\big((z_j(\cdot),\nu_j(\cdot)),(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))\big)=0$. *Тогда*

$$I_j(T)\doteq\Big|\frac{1}{T}\big(J(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot);0,T)-J(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot);0,T)\big)\Big|\underset{T\geqslant 1}{\rightrightarrows}0 \text{ при } j\to\infty. \tag{16.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку при каждом $T>0$ и любом $j\in\mathbb{N}$ $I_j(T)\leqslant I_j^{(1)}(T)+I_j^{(2)}(T)$, где

$$I_j^{(1)}(T)\doteq\frac{1}{T}\int_0^T\big|\langle\nu_j(s),f_0(\mathfrak{x}(s),u)-f_0(z_j(s),u)\rangle\big|ds,$$

$$I_j^{(2)}(T)\doteq\Big|\frac{1}{T}\big(J(\mathfrak{m}(\cdot),\mathfrak{x}(\cdot);0,T)-J(\nu_j(\cdot),\mathfrak{x}(\cdot);0,T)\big)\Big|,$$

то для доказательства леммы 16.3 достаточно показать, что

$$\lim_{j\to\infty}(\sup_{T\geqslant 1}I_j^{(i)}(T))=0,\ \ i=1,2. \tag{16.19}$$

Введем при $\gamma>0$ обозначение

$$\boldsymbol{w}_\gamma(f_0;X\times\mathcal{U})\doteq\underset{\substack{(x_1,u),(x_2,u)\in X\times\mathcal{U}\\|x_1-x_2|\leqslant\gamma}}{\operatorname{maximum}}|f_0(x_1,u)-f_0(x_2,u)|. \tag{16.20}$$

Из условия леммы 16.3 вытекает (см. (16.17)), что $\lim\limits_{j\to\infty}\|\mathfrak{x}-z_j\|_{C(\mathbb{R},X)}=0$. Отсюда, принимая во внимание, что $f_0\in C(X\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и для любого фиксированного $T>0$ $I_j^{(1)}(T)\leqslant \boldsymbol{w}_{\gamma_j}(f_0;X\times\mathfrak{U})$, где $\gamma_j\doteq\|\mathfrak{x}-z_j\|_{C(\mathbb{R},X)}$, получаем (16.19) при $i=1$.

Теперь для заданного $\alpha>0$ выберем такое $\gamma>0$, что

$$\boldsymbol{w}_\gamma(f_0;X\times\mathfrak{U})<\alpha/4, \tag{16.21}$$

и рассмотрим точки $y_1,\dots,y_N\in X$, образующие конечную γ-сеть компакта X. С каждой точкой y_k свяжем множество $\mathbb{T}_k\doteq\{t\in\mathbb{R}:\mathfrak{x}(t)\in O_\gamma[y_k]\}$ и рассмотрим дизъюнктную систему множеств $\mathfrak{T}_1\doteq\mathbb{T}_1$, $\mathfrak{T}_k=\mathbb{T}_k\setminus\bigcup\limits_{i=2}^{k}\mathbb{T}_i$, $k=2,\dots,N$, образующую покрытие $\mathbb{R}$.

Далее, поскольку (см. условие леммы 16.3 и (16.17)) $\lim\limits_{j\to\infty}d_w(\mathfrak{m},\nu_j)=0$, или (см. (15.15)), что равносильно, для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$

$$\lim_{j\to\infty}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mathfrak{m}(s)-\nu_j(s),c(u)\rangle|ds)=0,$$

то найдется такое j_0, что для каждого $k=1,\dots,N$, при всех $j\geqslant j_0$ будет выполнено неравенство

$$\lim_{j\to\infty}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mathfrak{m}(s)-\nu_j(s),f_0(y_k,u)\rangle|ds\leqslant\alpha/4N.$$

Поэтому при этих j для любого $T\geqslant1$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}I_j^{(2)}(T)\leqslant\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathfrak{T}_k\cap[0,T]}|\langle\mathfrak{m}(s)-\nu_j(s),f_0(\mathfrak{x}(s),u)-f_0(y_k,u)\rangle|ds+\\ \leqslant\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathfrak{T}_k\cap[0,T]}|\langle\mathfrak{m}(s)-\nu_j(s),f_0(y_k,u)\rangle|ds\leqslant\\ \leqslant2\boldsymbol{w}_\gamma(f_0;X\times\mathfrak{U})+2\sum_{k=1}^{N}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mathfrak{m}(s)-\nu_j(s),f_0(y_k,u)\rangle|ds\overset{(16.21)}{<}2\frac{\alpha}{4}+2N\frac{\alpha}{4N}=\alpha.\end{aligned}$$

Тем самым, равенство (16.19) доказано при $i=2$, а вместе с ним и (16.18).

4. Рассмотрим метрическое пространство

$$\mathfrak{P}\doteq(C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M},\varrho_{\mathrm{c},w}) \tag{16.22}$$

с метрикой $\varrho_{\mathrm{c},w}$, индуцированной (см. замечание 15.2 и пример 15.3) метриками ϱ_{c} и ϱ_w, определенными на $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ и подмножестве $\mathcal{M}\subset\mathbb{M}(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, соответственно. Так как $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{M}$ — полные сепарабельные метрические пространства, то (см. [123, 171] и теорему 15.1 при $\mathfrak{Y}\doteq\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$) пространство $\mathfrak{P}$, определенное в (16.22), также является полным сепарабельным метрическим пространством и пара (см. [123, 171] и теорему 15.2 при $\mathfrak{Y}\doteq\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$) $(\mathfrak{P},g^t)$, где

$$g^t(x(\cdot),\mu(\cdot))\doteq(x_t(\cdot),\mu_t(\cdot)),\ (x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{P}, \tag{16.23}$$

является динамической системой (ДС), отвечающей (см. замечание 15.2 и пример 15.3) ДС $(\mathfrak{B}_c,g^t)$ и $(\mathfrak{B}_w,g^t)$, где (см. (15.14)) $\mathfrak{B}_w\doteq(\mathcal{M},\varrho_w)$.

В дальнейшем $\mathrm{cl}\, P$ — замыкание (в метрике $\varrho_{c,w}$) множества $P \subset \mathfrak{P}$, и используем определения и утверждения, приведенные в § 15 при $\mathfrak{Y} = \mathfrak{P}$. Так, в соответствии с определением 15.4, пара $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m})$, принадлежащая $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(x,\mu))$ — замыканию положительной полутраектории $\mathrm{orb}_g^+(x,\mu) \subset \mathfrak{P}$ движения $t \mapsto g^t(x,\mu)$, будет называться устойчивой относительно $\mathrm{orb}_g^+(x,\mu)$ в отрицательном направлении, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta \in (0,\varepsilon)$ и $T \in (0, \delta^{-1}]$, что при каждом $\vartheta > 0$, для которого

$$\max_{t\in[-T,0]} |\mathfrak{x}(t) - x_\vartheta(t)| + \max_{t\in[-T,0]} \int_t^{t+1} \rho_w(\mathfrak{m}(s), \mu_\vartheta(s))ds \leqslant \delta,$$

при всех $t \leqslant -T$ будет выполнено неравенство

$$|\mathfrak{x}(t) - x_\vartheta(t)| + \int_t^{t+1} \rho_w(\mathfrak{m}(s), \mu_\vartheta(s))ds \leqslant \varepsilon,$$

и множество $\mathfrak{F} \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(x,\mu))$ называется устойчивым относительно $\mathrm{orb}_g^+(x,\mu)$ в отрицательном направлении, если каждая пара $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{F}$ устойчива относительно $\mathrm{orb}_g^+(x,\mu)$ в отрицательном направлении.

В дальнейшем всякую пару $(z,\nu) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; X) \subset \mathfrak{P}$, в которой управление $\nu \in \mathcal{M}$ является (см. (15.15) d_w-непрерывным, называем допустимой. Для всякого такого процесса, учитывая, что решение $t \mapsto z(t)$ ограничено и равномерно непрерывно на $\mathbb{R}$, по теореме 15.4 получаем, что $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(z,\nu)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{P})$. Следовательно, множество $\Omega(z,\nu)$ омега-предельных точек движения (см. 16.23) $t \mapsto g^t(z,\nu)$ непусто и является компактным инвариантным множеством. При этом, если окажется, что это множество устойчиво относительно $\mathrm{orb}_g^+(z,\nu)$ в отрицательном направлении, то (см. теорему 15.6) функция $t \mapsto (z(t), \nu(t))$ будет п. п. по Степанову, то есть для любого $\alpha > 0$ множество

$$\{\tau : \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \big(|z_\tau(s) - z(s)| + \rho_w(\nu_\tau(s), \nu(s))\big)ds \leqslant \alpha\}$$

относительно плотно. Отсюда получаем, что (z,ν) принадлежит (см. (16.5)) множеству $\mathcal{A}_c \subset \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; X)$, состоящему из п. п. управляемых процессов (автономной) задачи (14.45) оптимального управления п. п. движениями.

Сейчас, используя указанное свойство управляемых процессов автономной системы (12.42), укажем следующее свойство решения $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+, x, \varepsilon)$ задачи (16.15) с функцией f_0, не зависящей от t, то есть решения задачи

$$\mathbb{I}(z(\cdot), \nu(\cdot)) \doteq \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \nu(t), f_0(z(t), u)\rangle dt \to \min,\ (z(\cdot), \nu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+, x, \varepsilon). \quad (16.24)$$

Т е о р е м а 16.2. *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+, x, \varepsilon)$ — *решение задачи* (16.24). *Тогда, если множество* $\Omega(\widehat{x}, \widehat{\mu})$ *устойчиво относительно* $\mathrm{orb}_g^+(\widehat{x}, \widehat{\mu})$ *в отрицательном направлении, то равномерно по* $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T], x, \varepsilon)$ *существует* $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \langle \mu_T(t), f_0(x_T(t), u)\rangle dt \doteq c_0$ *и* $c_0 = \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \overset{(14.2)}{=} M\{\langle \widehat{\mu}(t), f_0(\widehat{x}(t), u)\rangle\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что равномерно по $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot))$, принадлежащих $O\mathcal{P}([0,T], x, \varepsilon)$, (см. обозначение (16.16)) выполнено неравенство

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} J(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot); 0, T). \quad (16.25)$$

Допустив противное, получим, что найдутся такие последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j\to\infty} \tau_j = \infty$ и $(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,\tau_j], x, \varepsilon)$, $j \in \mathbb{N}$, что

$$c_1 \doteq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\tau_j} J(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot); 0, \tau_j) < \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)). \tag{16.26}$$

Далее, поскольку процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ является предельным для последовательности $(x_k(\cdot), \mu_k(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0, \mathsf{t}_k], x, \varepsilon)$, $k \in \mathbb{N}$, где $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{t}_k = \infty$, то (см. (16.4) при $\mathbb{T} = [0, \tau_j]$) найдется такое k, что $[0, \tau_j] \subset [0, \mathsf{t}_k]$ и будет выполняться неравенство

$$\big| J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); 0, \tau_j) - J(x_k(\cdot), \mu_k(\cdot); 0, \tau_j) \big| \leqslant 1. \tag{16.27}$$

Теперь, используя свойство C) системы (12.42) относительно $\gamma_+(x)$, для $(x_k(\cdot), \mu_k(\cdot))$ построим на $[0, \tau_j]$, $\tau_j \geqslant 4\vartheta$ большую вариацию, отвечающую процессу $(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot))$. Учитывая, что $[0, \tau_j] \subset [0, \mathsf{t}_k]$, а значит $(x_k(\cdot), \mu_k(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0, \tau_j], x, \varepsilon)$, получим неравенство

$$\frac{1}{\tau_j} J(x_k(\cdot), \mu_k(\cdot); 0, \tau_j) \leqslant \frac{8\gamma_0 \vartheta}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_j} J(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot); 0, \tau_j),$$

в котором $\gamma_0 \doteq \max\limits_{(x,u)\in X\times\mathcal{U}} |f_0(x,u)|$. Поэтому, в силу (16.27),

$$\frac{1}{\tau_j} J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); 0, \tau_j) \leqslant \frac{8\gamma_0 \vartheta + 1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_j} J(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot); 0, \tau_j).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \to \infty$, получим

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\tau_j} J(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot); 0, \tau_j) = c_1.$$

Последнее противоречит (16.26), и тем самым неравенство (16.25) доказано.

Сейчас докажем, что равномерно по $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T], x, \varepsilon)$

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \geqslant \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} J(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot)); 0, T). \tag{16.28}$$

В самом деле, в противном случае найдутся такие последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ из $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j\to\infty} \tau_j = \infty$ и $(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,\tau_j], x, \varepsilon))$, что

$$c_2 \doteq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\tau_j} J(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot); 0, \tau_j) > \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)). \tag{16.29}$$

Далее, при $\tau_j \geqslant 4\vartheta$, используя свойство C) системы (12.42) относительно $\gamma_+(x)$, для $(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot))$ построим на отрезке $[0, \tau_j]$ большую вариацию, отвечающую процессу $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$. Учитывая, что $(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,\tau_j], x, \varepsilon)$, получим неравенство

$$\frac{1}{\tau_j} J(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot); 0, \tau_j) \leqslant \frac{8\gamma_0 \vartheta}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_j} J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); 0, \tau_j),$$

из которого следует, что $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \geqslant \lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{\tau_j} J(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot); 0, \tau_j) = c_2$. Последнее противоречит (16.29). Тем самым, неравенство (16.28) доказано.

Доказанные неравенства (16.25) и (16.28), которые выполняются равномерно по всем $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T], x, \varepsilon)$ завершают доказательство теоремы 16.2 .

З а м е ч а н и е 16.1. В [127, с. 82] (см. также [128]) рассматривается система $\dot{x} = f(x, u)$ при условии, что для некоторого множества $H \in \mathrm{comp}(G)$, отвечающая ему совокупность $\mathfrak{A}(\mathbb{R}; H) \doteq \{(x(\cdot), u(\cdot)) : ((x(\cdot), \delta_{u(\cdot)} \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; H))\}$ управляемых процессов непуста. Предполагается также, что при каждом $T > 0$ множество оптимальных процессов $O\mathcal{P}_1([0, T]; H) \doteq \{(x(\cdot), u(\cdot)) : ((x(\cdot), \delta_{u(\cdot)} \in O\mathcal{P}_1([0, T]; H)\}$ задачи (см. (16.16) при $\mu(\cdot) = \delta_{u(\cdot)}$) $J(x(\cdot), u(\cdot); 0, T) \to \min$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}; H)$ непусто, а рассматриваемая система обладает свойством равномерной управляемости на H, означающим, что найдется такое $\sigma > 0$, что для любых $x_0, x_1 \in H$ существует управление $u : [0, \sigma] \to \mathfrak{U}$, при котором система $\dot{x} = f(x, u(t))$ имеет решение $x(t) \in H$, $t \in [0, \sigma]$, удовлетворяющее условиям: $x(0) = x_0$, $x(\sigma) = x_1$. Показано, что при выполнении этих условий, равномерно по $(x_T(\cdot), u_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}_1([0, T]; X)$ существует $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} J(x_T(\cdot), u_T(\cdot); 0, T)$, совпадающий с точной нижней гранью целевого функционала задачи (12.44) периодической оптимизации, определенной на $\mathbb{P} \subset \mathfrak{A}(\mathbb{R}; H)$, чем и мотивировалась роль задач периодической оптимизации при исследовании магистральных процессов. При этом обращалось внимание на целесообразность расширения в последней задаче множества ее $\mathbb{P}$ допустимых периодических процессов до п. п. процессов и ставились задачи [127, с. 84], [128, с. 531]: определить п. п. магистраль и минимизировать усредненный по T функционал $\frac{1}{T} J(x(\cdot), u(\cdot); 0, T)$ на множестве процессов, для которых предел $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} J(x(\cdot), u(\cdot); 0, T)$ существует.

Как показано выше, расширив множество управлений $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$ до мерозначных управлений $\mathcal{M}$, получаем (см. следствие 14.1), что для каждого отрезка $[t_0, t_1]$ множество $O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K) \neq \emptyset$. При этом, аналогично доказательству леммы 16.1 и ее следствия 16.1 можно показать, что всегда существует предельный процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$, принадлежащий $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; K)$ (в смысле, указанном во втором пункте данного параграфа), для множества $O\mathcal{P}(\mathbb{T}_j; K)$, $j \in \mathbb{N}$ оптимальных процессов с расширяющейся системой отрезков, исчерпывающей $\mathbb{R}$. Это свойство оптимальных процессов позволяет, в терминах свойства C) системы (13.15) относительно $\gamma_+(x)$ (достаточные условия выполнения которого приведены в § 13), доказать (см. теорему 16.1), что этот предельный процесс будет решением задачи (16.15), а введение динамической системы сдвигов на множестве управляемых процессов позволило указать (см. теорему 16.2) достаточные условия его п. п., то есть когда он будет допустимым процессом задачи оптимального управления п. п. движениями. Таким образом, этот процесс будет магистральным п. п. процессом, поскольку он является решением задачи (16.15) и характеризует поведение при $T \to \infty$ усредненных значений целевых функционалов $J(z(\cdot), \nu(\cdot); 0, T)$, отвечающих оптимальным процессам $(z(\cdot), \nu(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0, T], x, \varepsilon)$. Это, наряду с теоремами 15.1 и 15.2, обосновывает роль задачи оптимального управления п. п. движениями в задачах, связанных с описанием поведения решений оптимизационных задач, определенных на конечном временном промежутке, при неограниченном увеличении длины этого промежутка.

Приведем другое достаточное условие существования процессов $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$, принадлежащих множеству $\mathcal{A}_c$ допустимых процессов задачи оптимального управления п. п. движениями, для которых значение $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$ целевого функционала этой задачи будет совпадать со значением $\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ целевого функционала задачи (16.24), и при которых можно также описать поведение совокупности множеств

$$\Big\{\frac{1}{T}\int_0^T \langle \mu_T(t), f_0(x_T(t),u)\rangle dt\Big\}_{T\geqslant 1},$$

отвечающих $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$, при $T\to\infty$.

Напомним, что в соответствии с определением 15.4, процесс $(\mathfrak{x},\mathfrak{m})\in \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(\widehat{x},\widehat{\mu}))$ будет называться устойчивым относительно $\operatorname{orb}_g^+(x,\mu)$ в положительном направлении, если для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие $\delta\in(0,\varepsilon)$ и $T\in(0,\delta^{-1}]$, что при каждом $\vartheta>0$, для которого

$$\max_{t\in[0,T]}|\mathfrak{x}(t)-\widehat{x}_\vartheta(t)|+\max_{t\in[0,T]}\int_t^{t+1}\rho_w(\mathfrak{m}(s),\widehat{\mu}_\vartheta(s))ds\leqslant\delta,$$

при всех $t\geqslant T$ будет выполнено неравенство

$$|\mathfrak{x}(t)-\widehat{x}_\vartheta(t)|+\int_t^{t+1}\rho_w(\mathfrak{m}(s),\widehat{\mu}_\vartheta(s))ds\leqslant\varepsilon.$$

Из этого определения, принимая во внимание, что $\lim\limits_{j\to\infty}\varrho_{c,w}(g^{t_j}(\widehat{x},\widehat{\mu}),(\mathfrak{x},\mathfrak{m}))=0$ в том и только в том случае (см. лемму 15.1 и замечание 15.1), если для каждого $\vartheta>0$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\max_{|t|\leqslant\vartheta}|x_{t_j}(t)-\mathfrak{x}(t)|+\max_{|t|\leqslant\vartheta}\int_t^{t+1}\rho(\mu_{t_j}(s),\mathfrak{m}(s))ds\Big)=0,$$

получаем следующее утверждение.

Л е м м а 16.4. *Пусть* $g^{t_j}(\widehat{x},\widehat{\mu})\to(\mathfrak{x},\mathfrak{m})\in\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(\widehat{x},\widehat{\mu}))$ *при* $j\to\infty$. *Тогда, если пара* $(\mathfrak{x},\mathfrak{m})$ *устойчива относительно* $\operatorname{orb}_g^+(\widehat{x},\widehat{\mu})$ *в положительном направлении, то* $\lim\limits_{j\to\infty}\big(\|\widehat{x}_{t_j}-\mathfrak{x}\|_{C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)}+\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}\int\limits_t^{t+1}\rho(\widehat{\mu}_{t_j}(s),\mathfrak{m}(s))ds\big)=0.$

Теперь предположим (см. определение 15.5 при $\mathfrak{Y}=\mathfrak{P}$), что множество $\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ устойчиво относительно $\operatorname{orb}_g^+(\widehat{x},\widehat{\mu})$ в положительном направлении. Тогда, по теореме 15.7, каждая функция $t\mapsto(\mathfrak{x}(t),\mathfrak{m}(t))$ из $\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ является п. п. по Степанову, то есть $\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ содержится в множестве $\mathcal{A}_c\subset\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$ п. п. управляемых процессов задачи (14.45) оптимального управления п. п. движениями.

Т е о р е м а 16.3. *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+,x,\varepsilon)$ — *решение задачи* (16.24). *Тогда, если множество* $\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ *устойчиво относительно* $\operatorname{orb}_g^+(\widehat{x},\widehat{\mu})$ *в положительном направлении, то для каждого п. п. процесса* $(\mathfrak{x},\mathfrak{m})\in\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ *выполнено равенство* $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))=\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$. *При этом, равномерно по* $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))$, *принадлежащим* $O\mathcal{P}([0,T],x,\varepsilon)$, *существует* $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\langle\mu_T(t),f_0(x_T(t),u)\rangle dt\doteq c_0$ *и* $c_0=\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $(\mathfrak{x},\mathfrak{m})\in\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ найдем положительную последовательность $\{t_j\}_{j=1}^\infty$, $\lim\limits_{j\to\infty}t_j=\infty$, такую, что $g^{t_j}(\widehat{x},\widehat{\mu})\to(\mathfrak{x},\mathfrak{m})$ при $j\to\infty$. Так как $\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ устойчиво относительно $\operatorname{orb}_g^+(\widehat{x},\widehat{\mu})$ в положительном направлении, то (см. определение 15.5) пара $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m})$ также устойчива относительно $\operatorname{orb}_g^+(\widehat{x}, \widehat{\mu})$ в положительном направлении. Отсюда, по леммам 16.3 и 16.4, получаем (здесь см. обозначение (16.16)), что

$$\Big|\frac{1}{T}\big(J(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot); 0, T) - J(\widehat{x}_{t_j}(\cdot), \widehat{\mu}_{t_j}(\cdot); 0, T)\big)\Big| \underset{T \geqslant 1}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } j \to \infty.$$

Поэтому, для произвольно заданного $\alpha > 0$ найдется такое j_α, что при всех $T \geqslant 1$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{T \geqslant 1}\Big|\frac{1}{T}\big(J(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot); 0, T) - J(\widehat{x}_{t_{j_\alpha}}(\cdot), \widehat{\mu}_{t_{j_\alpha}}(\cdot); 0, T)\big)\Big| \leqslant \alpha/3. \qquad (16.30)$$

Рассмотрим, далее, последовательность $\{T_i\}_{i=1}^\infty$, при которой

$$\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{T_i} J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); 0, T_i).$$

Из этого равенства, принимая во внимание (16.7) при $t_0 = t_{t_{j_\alpha}}$, получаем, что найдется i_α, начиная с которого

$$\Big|\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) - \frac{1}{T_i} J(\widehat{x}_{t_{j_\alpha}}(\cdot), \widehat{\mu}_{t_{j_\alpha}}(\cdot); 0, T_i)\Big| \leqslant \alpha/3. \qquad (16.31)$$

Наконец, по определению среднего значения, найдется такое $\widehat{T} \geqslant T_{i_\alpha}$, что при всех $T \geqslant \widehat{T}$ будет выполнено неравенство

$$\Big|\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) - \frac{1}{T} J(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot); 0, T)\Big| \leqslant \alpha/3,$$

из которого, совместно с неравенствами (16.30), (16.31) при $T_i \geqslant \widehat{T}$, получим, что $\big|\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) - \mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))\big| \leqslant \alpha$. Отсюда, в силу произвольности $\alpha > 0$, получаем нужное равенство.

Фиксируем, сейчас, произвольный (п. п.) процесс $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \in \Omega(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ и покажем сначала, что равномерно по $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot))$, принадлежащим $O\mathcal{P}([0, T], x, \varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \leqslant \varliminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} J(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot); 0, T).$$

Далее рассуждаем, как и при доказательстве теоремы 16.2. Допустив противное, получим, что найдутся такие последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j \to \infty} \tau_j = \infty$ и $(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0, \tau_j], x, \varepsilon)$, $j \in \mathbb{N}$, что

$$c_1 \doteq \lim_{j \to \infty} \frac{1}{\tau_j} J(z_j(\cdot), \nu_j(\cdot); 0, \tau_j) < \mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)).$$

Теперь фиксируем такой индекс i, при котором

$$\sup_{j \in \mathbb{N}}\Big|\frac{1}{\tau_j}\big(J(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot); 0, \tau_j) - J(\widehat{x}_{t_i}(\cdot), \widehat{\mu}_{t_i}(\cdot); 0, \tau_j)\big)\Big| \leqslant 1.$$

Поскольку процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ является "предельным" для последовательности $(x_k(\cdot),\mu_k(\cdot))\in \mathcal{OP}([0,\mathfrak{t}_k],x,\varepsilon)$, $k\in\mathbb{N}$, где $\lim\limits_{k\to\infty}\mathfrak{t}_k=\infty$, то (см. (16.4) при $\mathbb{T}=[t_i,t_i+\tau_j]$) найдется такое k, что $[t_i,t_i+\tau_j]\subset[0,\mathfrak{t}_k]$ и будет выполняться неравенство

$$\Big|J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_i,t_i+\tau_j)-J(x_k(\cdot),\mu_k(\cdot);t_i,t_i+\tau_j)\Big|\leqslant 1.$$

Используя свойство C) системы (12.42) относительно $\gamma_+(x)$, для $(x_k(\cdot),\mu_k(\cdot))$ построим на $[t_i,t_i+\tau_j]$, $\tau_j\geqslant 4\vartheta$ большую вариацию, отвечающую процессу $(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot))$. Учитывая, что $[t_i,t_i+\tau_j]\subset[0,\mathfrak{t}_k]$, а значит, $(x_k(\cdot),\mu_k(\cdot))\in\mathcal{OP}([t_i,t_i+\tau_j],x,\varepsilon)$, получим неравенство

$$\frac{1}{\tau_j}J(x_k(\cdot),\mu_k(\cdot);t_i,t_i+\tau_j)\leqslant\frac{8\gamma_0\vartheta}{\tau_j}+\frac{1}{\tau_j}J(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot);t_i,t_i+\tau_j),$$

в котором $\gamma_0\doteq\max\limits_{(x,u)\in X\times\mathcal{U}}|f_0(x,u)|$. Поэтому, в силу приведенных выше неравенств, получаем, что

$$\frac{1}{\tau_j}J(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot);0,\tau_j)\leqslant\frac{1}{\tau_j}+\frac{1}{\tau_j}J(\widehat{x}_{t_i}(\cdot),\widehat{\mu}_{t_i}(\cdot);0,\tau_j))\leqslant$$
$$\leqslant\frac{8\gamma_0\vartheta+2}{\tau_j}+\frac{1}{\tau_j}J(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot);t_i,t_i+\tau_j)\leqslant\frac{8\gamma_0\vartheta+2}{\tau_j}+\frac{2\gamma_0t_i}{\tau_j}+\frac{1}{\tau_j}J(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot);0,\tau_j).$$

Переходя к пределу при $j\to\infty$, получим $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))\leqslant c_1$. Последнее противоречит сделанному предположению. Тем самым нужное неравенство доказано.

Сейчас докажем, что равномерно по $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))\in\mathcal{OP}([0,T],x,\varepsilon)$

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))\geqslant\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}J(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot));0,T).$$

Действительно, в противном случае найдутся такие последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ из $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j\to\infty}\tau_j=\infty$ и $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\in\mathcal{OP}([0,\tau_j],x,\varepsilon))$, что

$$c_2\doteq\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\tau_j}J(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot);0,\tau_j)>\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)).$$

Далее, при $\tau_j\geqslant 4\vartheta$, используя свойство C) системы (12.42) относительно $\gamma_+(x)$, для $(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot))$ построим на отрезке $[t_i,t_i+\tau_j]$ большую вариацию, отвечающую процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$. Учитывая, что $(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot))\in\mathcal{OP}([t_i,t_i+\tau_j],x,\varepsilon)$, получим соотношения:

$$\frac{1}{\tau_j}J(z_j(\cdot),\nu_j(\cdot);t_i,t_i+\tau_j)\leqslant\frac{8\gamma_0\vartheta}{\tau_j}+\frac{1}{\tau_j}J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_i,t_i+\tau_j)\leqslant\frac{8\gamma_0\vartheta+1}{\tau_j}+\frac{1}{\tau_j}J(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot);0,\tau_j),$$

из которых получаем, что $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))\geqslant c_2$. Последнее противоречит сделанному предположению. Тем самым, нужное неравенство доказано, что завершает доказательство второго утверждения теоремы 16.3.

З а м е ч а н и е 16.2. Отметим, что если множество $\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ устойчиво относительно $\mathrm{orb}_g^+(\widehat{x},\widehat{\mu})$ в положительном направлении, то оно является минимальным компактным множеством, состоящим из п. п. движений. Следовательно, для любых $(x,\nu),(\mathfrak{x},\mathfrak{m})\in\Omega(\widehat{x},\widehat{\mu})$ $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(z,\nu))=\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\mathfrak{x},\mathfrak{m}))$. Поэтому, зафиксировав (п. п.) пару $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}) \in \Omega(\widehat{x}, \widehat{\mu})$, получим, что для всякой пары $(x, \nu) \in \Omega(\widehat{x}, \widehat{\mu})$ найдется такая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_{c,w}(g^{t_j}(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}), (z, \nu)) = 0$. Отсюда, учитывая лемму 15.10 и то, что сходимость п. п. по Бору функций в метрике ϱ_c равносильна равномерной сходимости на прямой, получаем (см. (15.15) и (16.23)), что $\lim\limits_{j\to\infty} \big(\|z - \mathfrak{x}_{t_j}\|_{C(\mathbb{R},X)} + d_w(\nu, \mathfrak{m}_{t_j})\big) = 0$. Из этого равенства следует (см. лемму 2.1), что множество $\Omega(\widehat{x}, \widehat{\mu}) \subset B(\mathbb{R}, X) \times \mathrm{APM}_1$ равностепенно п. п. Поэтому (см. [107, 187] и теорему 2.3) отображение $(z(\cdot), \nu(\cdot)) \mapsto \mathfrak{T}(z(\cdot), \nu(\cdot))$ непрерывно на компактном множестве $\Omega(\widehat{x}, \widehat{\mu})$. Отсюда получаем, что задача $\mathfrak{T}(z(\cdot), \nu(\cdot)) \to \min$, $(z(\cdot), \nu(\cdot)) \in \Omega(\widehat{x}, \widehat{\mu})$ имеет решение $(\widehat{\mathfrak{x}}(\cdot), \widehat{\mathfrak{m}}(\cdot)) \in \Omega(\widehat{x}, \widehat{\mu})$. Кроме того, если для процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ выполняются условия теоремы 16.3, то $\mathfrak{T}(\widehat{\mathfrak{x}}(\cdot), \widehat{\mathfrak{m}}(\cdot)) = \mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$.

5. В § 14 были приведены достаточные условия, при которых всякое решение задачи оптимального управления п. п. движениями будет магистральным процессом, принадлежащим множеству $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (см. теоремы 14.1 и 14.2). В этом пункте, на примере задачи (14.29), определенной на множестве $\mathfrak{A}_c([t_0, t_1]; K)$ управляемых процессов автономной системы (12.42), с функционалом, заданным равенством (16.16), покажем, что верно и обратное, в том смысле, что при наличии процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in O\mathcal{P}(\mathbb{R}_+; K)$ можно указать условия, обеспечивающие существование решения задачи (12.45) оптимального управления п. п. движениями, которое будет магистральным процессом. С этой целью, докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

Л е м м а 16.5. *Пусть* $q(\cdot) \doteq (\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}, K)$ *и система* (12.42) *является* $\varepsilon, \vartheta, \eta$ –РЛУ *в малом на* $\gamma(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$. *Тогда для каждой пары* $\mathfrak{p}(\cdot) \doteq (\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$, *принадлежащей* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(q(\cdot); [\tau_0, \infty))$, *при любом фиксированном* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ *система* (12.42) *будет* $\varepsilon_1, \vartheta, \eta$ –РЛУ *на* $\gamma(\mathfrak{x}; [\tau_0, \infty))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathfrak{p}(\cdot) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\widehat{q}(\cdot); [\tau_0, \infty))$, то найдется такая последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [\tau_0, \infty)$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_{c,w}((\mathfrak{p}(\cdot), q_{\tau_j}(\cdot)) = 0$. Фиксируем, сейчас, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ и произвольные $\tau \geqslant \tau_0$ и $x_0 \in O_{\varepsilon_1}[\mathfrak{x}(\tau)]$. Из предыдущего предельного равенства и леммы 15.4 (см. также замечание 15.2) получаем, что

$$\lim_{j\to\infty} \big(\max_{t\in[\tau,\tau+\vartheta]} |\mathfrak{x}(t) - \widehat{x}_{\tau_j}(t)| + \|\mathfrak{m} - \widehat{\mu}_{\tau_j}\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\big) = 0. \tag{16.32}$$

Следовательно, существует $\widehat{j} \in \mathbb{N}$, начиная с которого $x_0 \in O_{\varepsilon}[\widehat{x}_{\tau_j}(\tau)]$. Далее, так как система (12.42) $\varepsilon, \eta, \vartheta$ - РЛУ на $\gamma(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$, то (см. определение 13.4) для каждого $j \geqslant \widehat{j}$ найдется управление $\nu_j \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\widehat{\mu}_{\tau_j} - \nu_j\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta |\widehat{x}_{\tau_j}(\tau) - x_0|, \tag{16.33}$$

при котором система (12.42) имеет решение (см. обозначение (14.30))

$$y_j(t) = x_0 + \int_{\tau}^{t} \langle \nu_j(s), f(y_j(s), u)\rangle ds \in X, \ t \in [\tau, \tau+\vartheta],$$

такое, что

$$y_j(\tau) = x_0, \ y_j(\tau+\vartheta) = x_{\tau_j}(\tau+\vartheta). \tag{16.34}$$

Рассмотрим сейчас последовательность $\{y_j(\cdot),\nu_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}_c([\tau,\tau+\vartheta];X)$. По лемме 13.7, из нее можно выделить подпоследовательность $\{y_{j_i}(\cdot),\nu_{j_i}(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся при $i \to \infty$ в пространстве $C[\tau,\tau+\vartheta]\times\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ к некоторому процессу $(y(\cdot),\nu(\cdot)) \subset \mathfrak{A}_c([\tau,\tau+\vartheta];X)$. Принимая во внимание (16.32) – (16.34), получаем, что для каждой точки $x_0 \in O_{\varepsilon_1}[\mathfrak{x}(\tau)]$ существует $\nu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству $\|\mathfrak{m}-\nu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta|\mathfrak{x}(\tau)-x_0|$, и при котором система (12.42) имеет решение $y(t)\in X$, $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$, и такое, что $y(\tau)=x_0,\ y(\tau+\vartheta)=\mathfrak{x}(\tau+\vartheta)$. □

Аналогично (здесь см. определение 13.5), используя лемму 13.8, доказывается

Л е м м а 16.6. *Пусть* $q(\cdot)\doteq(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R},K)$ *и система* (12.42) *является* $\varepsilon,\vartheta,\eta$ –РЛД *в малом с* $\gamma(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$. *Тогда для каждой пары* $\mathfrak{p}(\cdot)\doteq(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))$, *принадлежащей* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(q(\cdot);[\tau_0,\infty))$, *при любом фиксированном* $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon)$ *система* (12.42) *будет* $\varepsilon_1,\vartheta,\eta$ –РЛД *с* $\gamma(\mathfrak{x};[\tau_0,\infty))$.

В следующем утверждении в качестве X рассматривается либо вся область G, либо фиксированная компактная окрестность для $\mathrm{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$, содержащаяся в G.

Л е м м а 16.7. *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in O\mathcal{P}([\tau_0,\infty);X)$ $(\tau_0\geqslant 0)$. *Тогда при каждом* $\tau\geqslant\tau_0$ $\ (\widehat{x}_\tau(\cdot),\widehat{\mu}_\tau(\cdot))\in O\mathcal{P}([\tau_0,\infty);X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что в $[\tau_0,\infty)$ найдутся точки $t_0<t_1$ и процесс (см. (14.28)) $(y(\cdot),\nu(\cdot))\in\mathfrak{A}([t_0,t_1];K)$ такие, что $y(t_0)=x_\tau(t_0)$ $y(t_1)=x_\tau(t_1)$ и при которых выполнено неравенство $\mathfrak{T}(y(\cdot),\nu(\cdot);t_0,t_1)<\mathfrak{T}(\widehat{x}_\tau(\cdot),\widehat{\mu}_\tau(\cdot);t_0,t_1)$. Теперь, если рассмотреть $\tilde{y}(t)\doteq y(t-\tau)$, $\tilde{\nu}(t)\doteq\nu(t-\tau)$, $t\in[t_0+\tau,t_1+\tau]$, то получим соотношения: $\mathfrak{T}(\tilde{y}(\cdot),\tilde{\nu}(\cdot);t_0+\tau,t_1+\tau)=\mathfrak{T}(y(\cdot),\nu(\cdot);t_0,t_1)<\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0+\tau,t_1+\tau)$, а это противоречит (см. п. 3 в § 14) тому, что $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in O\mathcal{P}([\tau_0,\infty);K)$.

Л е м м а 16.8. *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+;K)$, *система* (12.42) *обладает свойством* C) *относительно* $\gamma_+(\widehat{x})$ *и* $\varepsilon,\vartheta,\eta$ — *положительные константы, входящие в определение этого свойства. Пусть, далее, множество* $X\in\mathrm{comp}(G)$ *определено равенством* (16.5) *и последовательность* $\{(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}\subset O\mathcal{P}(\mathbb{R}_+;X)$ *такая, что для каждого отрезка* $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}_+$ *выполнено предельное равенство* (16.5). *Тогда найдется такое* $T_0>0$, *что* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in O\mathcal{P}([T_0,\infty);X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем $T_0\doteq\vartheta$ и покажем, что $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ принадлежит $O\mathcal{P}([T_0,\infty);X)$. Действительно, в противном случае найдется отрезок $[t_0,t_1]\subset[T_0,\infty)$ и такой процесс $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([t_0,t_1];X)$, что

$$x(t_0)=\widehat{x}(t_0),\ x(t_1)=\widehat{x}(t_1), \tag{16.35}$$

и при некотором $\delta>0$ выполнено неравенство (см. обозначение в (16.16))

$$J(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)<J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0,t_1)-\delta. \tag{16.36}$$

Далее, в силу условий леммы 16.8, при $\mathbb{T}\doteq[t_0-\vartheta,t_1+\vartheta]\subset\mathbb{R}_+$ будет выполняться равенство (16.5). Поэтому для всех j, начиная с некоторого $\widehat{j}\in\mathbb{N}$, $x_j(t)\in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$ для всех $t\in\mathbb{T}$. Фиксируем теперь $j\geqslant\widehat{j}$ и для точки $x_j(t_0-\vartheta)\in O_\varepsilon[\widehat{x}(t_0-\vartheta)]$ рассмотрим $\mu_j^+\in\mathcal{M}_{[t_0-\vartheta,t_0]}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\widehat{\mu}-\mu_j^+\|_{w,[t_0-\vartheta,t_0]}\leqslant\eta\,|\widehat{x}(t_0-\vartheta)-x_j(t_0-\vartheta)|, \tag{16.37}$$

и при котором система (12.42) имеет решение $y_j^+(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)],\ t \in [t_0-\vartheta, t_0]$, удовлетворяющее также условиям:

$$y_j^+(t_0-\vartheta) = x_j(t_0-\vartheta),\ y_j^+(t_0) = \widehat{x}(t_0). \tag{16.38}$$

Для точки $x_j(t_1+\vartheta) \in O_\varepsilon[\widehat{x}(t_1+\vartheta)]$ рассмотрим $\mu_j^- \in \mathcal{M}_{[t_1,t_1+\vartheta]}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\widehat{\mu} - \mu_j^-\|_{w,[t_1,t_1+\vartheta]} \leqslant \eta|\widehat{x}(t_1+\vartheta) - x_j(t_1+\vartheta)| \tag{16.39}$$

и при котором система (12.42) имеет решение $y_j^-(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)],\ t \in [t_0, t_1+\vartheta]$, удовлетворяющее условиям:

$$y_j^-(t_1) = \widehat{x}(t_1),\ y_j^-(t_1+\vartheta) = x_j(t_1+\vartheta). \tag{16.40}$$

Теперь рассмотрим $\nu_j \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, определенное равенством

$$\nu_j(t) \doteq \begin{cases} \mu_j^+(t),\ t \in [t_0-\vartheta, t_0], \\ \mu(t),\ t \in [t_0, t_1], \\ \mu_j^-(t),\ t \in [t_1, t_1+\vartheta]. \end{cases}$$

Тогда (см. (16.35), (16.38) и (16.40)) отвечающее ему решение $y_j^+(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)],\ t \in \mathbb{T}$ системы (12.42) имеет вид:

$$y_j(t) \doteq \begin{cases} y_j^+(t),\ t \in [t_0-\vartheta, t_0], \\ y(t),\ t \in [t_0, t_1], \\ y_j^-(t),\ t \in [t_1, t_1+\vartheta], \end{cases}$$

причем

$$y_j(t_0-\vartheta) = x_j(t_0-\vartheta),\ y_j(t_1+\vartheta) = x_j(t_1+\vartheta). \tag{16.41}$$

Далее, в силу определения процесса $(y_j(\cdot), \nu_j(\cdot))$ имеем следующие соотношения

$$J(y_j(\cdot), \nu_j(\cdot); t_0-\vartheta, t_1+\vartheta) = J(y_j^+(\cdot), \mu_j^+(\cdot); t_0-\vartheta, t_0) + J(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) +$$

$$+J(y_j^-(\cdot), \nu_j^-(\cdot); t_1, t_1+\vartheta) \overset{(16.36)}{<} J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0-\vartheta, t_1+\vartheta) - \delta + I_j^{(1)} + I_j^{(2)},$$

в которых

$$I_j^{(1)} \doteq \int_{t_0-\vartheta}^{t_0} (\langle \mu_j^+(t), f_0(y_j^+(t), u)\rangle - \langle \widehat{\mu}(t), f_0(\widehat{x}(t), u)\rangle) dt,$$

$$I_j^{(2)} \doteq \int_{t_1}^{t_1+\vartheta} (\langle \mu_j^-(t), g(y_j^-(t), u)\rangle - \langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle) dt.$$

Покажем, что

$$\lim_{j\to\infty} I_j^{(k)} = 0,\ k = 1, 2. \tag{16.42}$$

В самом деле (см. обозначение (16.20)),

$$|I_j^{(1)}| \leqslant \vartheta\omega_{\gamma_j}[f_0, X \times \mathfrak{U}] + |\int_{t_0-\vartheta}^{t_0} \langle \mu_j^+(t) - \widehat{\mu}(t), f_0(\widehat{x}(t), u)\rangle dt|, \tag{16.43}$$

где $\gamma_j \doteq \|y_j^+ - \widehat{x}\|_{C[t_0-\vartheta,t_0]}$. По лемме 13.7, в силу (16.5) и (16.38), $\gamma_j \to 0$ при $j \to \infty$. Следовательно

$$\lim_{j\to\infty} \omega_{\gamma_j}[f_0, K \times \mathfrak{U}] = 0, \tag{16.44}$$

а так как $\lim\limits_{j\to\infty} \|\mu_j^+ - \widehat{\mu}\|_{w,[t_0-\vartheta,t_0]} = 0$ (см. (16.5) и (16.37)), то

$$\lim_{j\to\infty} \Big|\int_{t_0-\vartheta}^{t_0} (\langle \mu_j^+(t) - \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle) dt\Big| = 0.$$

Из последнего равенства, учитывая (16.43) и (16.44), получаем (16.42) при $k = 1$. Аналогично, используя лемму 13.8, равенства (16.5), (16.40) и неравенство (16.39), доказываем (16.42) при $k = 2$. Поэтому найдется такое $j_1 \geqslant \widehat{j}$, что при всех $j \geqslant j_1$ будет выполнено неравенство

$$J(y_j(\cdot), \nu_j(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta) < J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta) - \delta/2. \tag{16.45}$$

С другой стороны, $\lim\limits_{j\to\infty} J(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta) \overset{(16.5)}{=} J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta)$. Следовательно, $J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta) < J(x_{j_0}(\cdot), \mu_{j_0}(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta) + \delta/4$ при некотором $j_0 \geqslant j_1$. Отсюда, учитывая (16.45), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J(y_{j_0}(\cdot), \nu_{j_0}(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta) < J(x_{j_0}(\cdot), \mu_{j_0}(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta) - \delta/4 < \\ < J(x_{j_0}(\cdot), \mu_{j_0}(\cdot); t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta), \end{aligned}$$

что (см. (16.41)) противоречит тому, что $(x_{j_0}(\cdot), \mu_{j_0}(\cdot)) \in \mathcal{OP}([t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta]; X)$.

Т е о р е м а 16.4. *Пусть* $q(\cdot) \doteq (\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+; K)$, *система* (12.42) *обладает свойством* C) *относительно* $\gamma_+(\widehat{x})$ *и* $\varepsilon, \vartheta, \eta$ — *положительные константы, входящие в определение этого свойства. Пусть, далее, при некотором* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{OP}(\mathbb{R}_+; X_1)$, *где* $X_1 \doteq \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_+(\widehat{x})) + O_{\varepsilon_1}[0]$. *Тогда найдется такое* $T_0 > 0$, *что всякий процесс* $\mathfrak{p}(\cdot) \doteq (\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$ *из* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(q(\cdot))$ *принадлежит множеству оптимальных процессов* $\mathcal{OP}([T_0, \infty); X_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу лемм 16.5 и 16.6 для каждого процесса $\mathfrak{p}(\cdot)$, принадлежащего $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(q(\cdot))$, система (12.42) будет $\varepsilon_1, \vartheta, \eta$ – РЛУ на $\gamma_+(\mathfrak{x})$ и $\varepsilon_1, \vartheta, \eta$ – РЛД с $\gamma_+(\mathfrak{x})$. Кроме того, (см. (16.22) и (16.23)) найдется такая последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, что

$$\lim_{j\to\infty} \varrho_{c,w}(q_{\tau_j}(\cdot), \mathfrak{p}(\cdot)) = 0. \tag{16.46}$$

Далее, поскольку $q(\cdot) \in \mathcal{OP}(\mathbb{R}_+; X_1)$, то по лемме 16.7 при каждом $j \in \mathbb{N}$ процесс $q_{\tau_j}(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{OP}(\mathbb{R}_+; X_1)$. Следовательно для каждого отрезка $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}_+$ $q_{\tau_j}(\cdot)\big|_{\mathbb{T}} \in \mathcal{OP}(\mathbb{T}; X_1)$. Поскольку (см. лемму 15.4 и замечание 15.2) равенство (16.45) влечет для каждого отрезка $\mathbb{T}$ равенство (16.5) при $(x_j, \mu_j) = (\widehat{x}_{\tau_j}, \widehat{\mu}_{\tau_j})$, то для завершения доказательства теоремы 16.4 осталось воспользоваться леммой 16.8. $\square$

Теперь, чтобы, используя утверждение теоремы 16.4, указать достаточные условия существования п. п. процесса, в следующем пункте приведем ряд свойств множества $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; K)$ управляемых процессов системы (12.42) в терминах динамических систем $(\mathfrak{B}_w, g^t)$ и $(\mathfrak{B}_c, g^t)$, в которых (см. пример 15.3 и замечание 15.2) $\mathfrak{B}_c \doteq (\mathcal{M}, \varrho_w)$, $\mathfrak{B}_c \doteq (C(\mathbb{R}, K), \varrho_c)$, а также отвечающей им динамической системе $(\mathfrak{P}, g^t)$, в которой (см. (16.22)) $\mathfrak{P} \doteq (C(\mathbb{R}, K) \times \mathcal{M}, \varrho_{c,w})$.

6. В дальнейшем $\mathfrak{S}_K(\mu)$ — совокупность решений системы (12.42), определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в $K \in \operatorname{comp}(G)$, отвечающих $\mu \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}$). Поскольку, напомним, предполагается, что для системы (12.42) выполнено условие $\mathcal{B}$), то существуют $\mu \in \mathcal{M}$, для которых $\mathfrak{S}_K(\mu) \neq \emptyset$. Отметим, что в этом случае, для каждого $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(x)) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{B}_c)$ и (см. (15.15) и теорему 15.4), если μ d_w-непрерывно, то (см. теорему 15.4) $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mu)) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{B}_w)$. Поэтому, используя лемму 13.4 и определение сходимости в метриках ϱ_w и ϱ_c, получаем следующее утверждение.

Л е м м а 16.9. *Пусть $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ и $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_w(\mu_{t_j}, \mathfrak{m}) = 0$. Тогда из последовательности $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ можно извлечь подпоследовательность $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которой (в $\mathfrak{B}_c$) существует $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = \mathfrak{x}$ и $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$. Обратно, если $\mu \in \mathcal{M}$ d_w-непрерывно и $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_c(x_{t_j}, \mathfrak{x}) = 0$, то из последовательности $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ можно извлечь подпоследовательность $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которой (в $\mathfrak{B}_w$) существует $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_j = \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$.*

Далее, как было отмечено выше, для каждого $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(x)) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{B}_c)$. Поэтому множество $\Omega(x)$ омега-предельных точек движения $t \mapsto g^t(x)$ суть непустое компактное инвариантное множество, а значит [123], содержит минимальное компактное множество, состоящее (в силу теоремы Биркгофа [123]) из рекуррентных движений, или, что то же самое (см. лемму 15.8), — из рекуррентных функций. Аналогичные свойства, конечно, выполняются и для омега-предельного множества $\Omega(\mu)$ движения $t \mapsto g^t(\mu)$, если $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mu)) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{B}_w)$. Последнее верно, если $\mu \in \mathcal{M}$ d_w-непрерывно.

Т е о р е м а 16.5. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ d_w-непрерывно и отвечающее ему множество $\mathfrak{S}_K(\mu) \neq \emptyset$. Тогда для любого минимального множества $E(\mu)$ из $\Omega(\mu)$ и всякого $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ для каждого $\mathfrak{m} \in E(\mu)$ в $\Omega(x)$ существует такая функция $z \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$, что каждое минимальное множество $E(z) \subset \Omega(z)$ содержит рекуррентное решение $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$ такое, что пара $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m})$ принадлежит минимальному подмножеству омега-предельного множества $\Omega(x, \mu)$, отвечающего движению $t \mapsto g^t(x, \mu)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольное решение $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ и минимальное множество $E(\mu) \subset \Omega(\mu)$, а также любую (рекуррентную) функцию $\mathfrak{m}$ из $E(\mu)$, для которой, в силу леммы 16.9, найдется $z \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$, принадлежащее омега–предельному множеству $\Omega(x) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(x))$. Поскольку $\Omega(x) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{B}_c)$, то отвечающее движению $t \mapsto g^t(z)$ омега–предельное множество $\Omega(z) \in \operatorname{comp}(\Omega(x))$ и, следовательно, содержит минимальные подмножества. Пусть $E(z)$ одно из них. Теперь для (рекуррентной) функции $\widehat{z} \in E(z)$ выберем такую последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_c(z_{t_j}, \widehat{z}) = 0$, а так как $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mathfrak{m})) = E(\mu) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{B}_w)$, то найдутся такая последовательность $\{t'_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ и функция $\widehat{\mathfrak{m}} \in E(\mu)$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_w(\mathfrak{m}_{t'_j}, \widehat{\mathfrak{m}}) = 0$. Учитывая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_c(z_{t'_j}, \widehat{z}) = 0$ и $z_{t'_j} \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{m}_{t'_j})$, получаем, что $\widehat{z} \in \mathfrak{S}_K(\widehat{\mathfrak{m}})$. С другой стороны, так как $E(\mu)$ — минимальное множество, содержащее рекуррентные функции $\mathfrak{m}$ и $\widehat{\mathfrak{m}}$, то (см. лемму 15.8) $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mathfrak{m})) = \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\widehat{\mathfrak{m}})) = E(\mu)$. Следовательно, найдется такая последовательность $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_w(\widehat{\mathfrak{m}}_{s_j}, \mathfrak{m}) = 0$. Поскольку $\widehat{z}_{s_j} \in \mathfrak{S}_K(\widehat{\mathfrak{m}}_{s_j})$ и $\widehat{z}_{s_j} \in E(z)$, $j \in \mathbb{N}$, то в силу минимальности компактного множества $E(z)$ можно без ограничения общности считать, что найдется (рекуррентная) функция $\mathfrak{x} \in E(z)$, такая что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_c(\widehat{z}_{s_j}, \mathfrak{x}) = 0$, принадлежащая также множеству $\mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$ ограниченных решений системы $\dot{x} = \langle \mathfrak{m}(t), f(x,u)\rangle$. При этом, так как $\lim\limits_{j\to\infty} g^{s_j}(\widehat{z}, \widehat{\mathfrak{m}}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{m})$, то в силу приведенных построений пара $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m})$ принадлежит минимальному подмножеству $E(z) \times E(\mu)$ омега - предельного множества движения $t \mapsto g^t(x, \mu)$.

Аналогичным образом доказывается следующая

Т е о р е м а 16.6. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ d_w-непрерывно и отвечающее ему множество $\mathfrak{S}_K(\mu) \neq \emptyset$. Тогда для всякого $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ и любого минимального множества $E(x)$ из $\Omega(x)$ для каждого $\mathfrak{x} \in E(x)$ в $\Omega(\mu)$ существует такая функция $\mathfrak{n}$, что каждое минимальное множество $E(\mathfrak{n}) \subset \Omega(z)$ содержит такое рекуррентное управление $\mathfrak{m}$, что $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$ и пара $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m})$ принадлежит минимальному подмножеству омега-предельного множества $\Omega(x, \mu)$, отвечающего движению $t \mapsto g^t(x, \mu)$.*

Сейчас с $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ свяжем ряд условий почти периодичности по Бору непрерывных функций, указанных в следствиях 15.8– 15.10.

$\boldsymbol{s}_1$) Множество $\Omega(x)$ устойчиво относительно $\operatorname{orb}_g^+(x)$ в отрицательном направлении.

$\boldsymbol{s}_2$) Множество $\Omega(x)$ устойчиво относительно $\operatorname{orb}_g^+(x)$ в положительном направлении.

$\boldsymbol{s}_3$) Функция $x(\cdot)$ равномерно устойчива относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении.

$\boldsymbol{s}_4$) Множество $\Omega(x)$ содержит минимальное множество $\mathcal{E}(x)$, в котором существует (рекуррентная) функция $\mathfrak{x}$, устойчивая относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении.

При выполнении условия $\boldsymbol{s}_1$) по следствию 15.8 само решение будет принадлежать пространству $B(\mathbb{R}, K)$ п. п. по Бору функций; при выполнении любого из условий $\boldsymbol{s}_2$)–$\boldsymbol{s}_4$), в силу следствий 15.9, 15.10, в омега-предельном множестве $\Omega(x)$ существуют п. п. по Бору функции. Покажем, что этого достаточно для существования п. п. по Бору решений системы (12.42) при $\mu \in \mathrm{APM}_1$. Но прежде укажем используемые далее свойства п. п. управлений.

Пусть $\mu \in \mathrm{APM}_1$, или (см. лемму 2.1), что равносильно, $\mu \in S(\mathbb{R}, \operatorname{rpm}(\mathcal{U}))$. Поскольку $S(\mathbb{R}, \operatorname{rpm}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}, \operatorname{rpm}(\mathcal{U}))$, то по следствию 15.2 (см. также лемму 15.8) множество $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mu)) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{B}_w)$ является минимальным и (см. лемму 2.1 и лемму 15.9 при $\mathfrak{Y} = \operatorname{rpm}(\mathcal{U})$) состоит из п. п. движений $t \mapsto g^t(\mathfrak{m})$ $\big(\mathfrak{m} \in \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mu))\big)$. При этом (см. [123, с. 419] и лемму 15.9) множество $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mu)) \subset \mathrm{APM}_1$, является равностепенно п. п. и совпадает с $\mathcal{H}(\mu)$ — замыканием в (см. (15.15)) метрике d_w множества $\operatorname{orb}_g(\mu)$. Следовательно, при каждом $\nu \in \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mu))$

$$\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\nu) = \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mu) = \mathcal{H}(\mu) = \Omega(\mu). \tag{16.47}$$

Т е о р е м а 16.7. *Пусть $\mu \in \mathrm{APM}_1$ и для некоторого решения $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ выполнено одно из условий $\boldsymbol{s}_1$)–$\boldsymbol{s}_4$). Тогда для каждого $\mathfrak{m} \in \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\mu))$ в $\mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$ существует п. п. по Бору решение, принадлежащее $\Omega(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условий $\boldsymbol{s}_1$)–$\boldsymbol{s}_3$), получаем, соответственно, что (см. следствие 15.9) $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(x)) = \Omega(x) \subset B(\mathbb{R}, K)$, (см. следствие 15.10) $\Omega(x) \subset B(\mathbb{R}, K)$ и все (см. следствие 15.8) минимальные множества из $\Omega(x)$ также принадлежат пространству п. п. по Бору функций. Поэтому при выполнении этих условий утверждение теоремы 16.7 следует из теоремы 16.5 и указанных выше свойств для $\mu \in \mathrm{APM}_1$. Наконец, если выполнено условие $\boldsymbol{s}_4$), то (см. следствие 15.8) $\mathcal{E}(x) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mathfrak{x}))$ и состоит из п. п. по Бору функций. По теореме 16.6 для каждой функции $z \in \mathcal{E}(x)$ найдется такое $\nu \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mu))$, что $z \in \mathfrak{S}_K(\nu)$. Поэтому для каждого $\mathfrak{m} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mu)) \overset{(16.47)}{=} \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\nu))$, по теореме 16.5, в $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(z)) = \mathcal{E}(x) \subset \Omega(x)$ найдется (п. п. по Бору) решение, отвечающее $\mathfrak{m}$. □

Теперь для d_w-непрерывного управления $\nu \in \mathcal{M}$ рассмотрим (см. определения 15.2– 15.5 и сделанные к ним замечания при $\mathfrak{Y} = (\mathrm{rpm}(\mathcal{U}), \rho_w)$) условия:

$\boldsymbol{u}_1$) Множество $\Omega(\nu)$ устойчиво относительно $\mathrm{orb}_g^+(\nu)$ в отрицательном направлении.

$\boldsymbol{u}_2$) Множество $\Omega(\nu)$ устойчиво относительно $\mathrm{orb}_g^+(\nu)$ в положительном направлении.

$\boldsymbol{u}_3$) Функция $\nu(\cdot)$ равномерно устойчива относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении.

$\boldsymbol{u}_4$) Множество $\Omega(\nu)$ содержит минимальное множество $\mathcal{E}(\nu)$, в котором существует (рекуррентная) функция, устойчивая относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении.

При выполнении условия $\boldsymbol{u}_1$), по теореме 15.6 при $\mathfrak{Y} = \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, само μ будет принадлежать (см. лемму 2.1) пространству APM_1 . При выполнении любого из условий $\boldsymbol{u}_2$) – $\boldsymbol{u}_4$), в силу теорем 15.7 и 15.5 (см. также следствие 15.4 и замечание 15.6) при $\mathfrak{Y} = \mathrm{rpm}(\mathcal{U})$, получим, что в омега-предельном множестве $\Omega(\nu)$ существуют отображения, принадлежащие APM_1 .

Отсюда, используя теорему 16.7, получаем следующие достаточные условия существования п. п. управляемых процессов системы (12.42).

Т е о р е м а 16.8. *Пусть для d_w-непрерывного управления $\nu \in \mathcal{M}$ множество решений $\mathfrak{S}_K(\nu) \neq \emptyset$ и выполнено одно из условий $\boldsymbol{u}_1$) – $\boldsymbol{u}_4$). Тогда, если для некоторого п. п. $\mu \in \Omega(\nu)$ найдется $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$, для которого выполнено одно из условий $\boldsymbol{s}_1$)– $\boldsymbol{s}_4$), то для каждого $\mathfrak{m} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mu))$ в $\mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$ существует п. п. по Бору решение, принадлежащее $\Omega(x)$.*

З а м е ч а н и е 16.3. В теореме 16.8 достаточные условия существования п. п. управляемых процессов системы (12.42) были приведены, используя сначала достаточные условия для существования п. п. управления, а затем для ограниченных решений, отвечающих этому управлению, использованы достаточные условия для его почти периодичности. Аналогичным образом можно показать, что если для некоторого решения $x \in \mathfrak{S}_K(\nu)$, отвечающего d_w-непрерывному управлению $\nu \in \mathcal{M}$, выполнено одно из условий $\boldsymbol{s}_1$)– $\boldsymbol{s}_4$) и для некоторого п. п. по Бору решения $\mathfrak{x} \in \Omega(x)$ найдется $\mu \in \Omega(\nu)$, такое, что $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K(\mu)$ и для μ выполнено одно из условий $\boldsymbol{u}_1$)–$\boldsymbol{u}_4$), то для каждого п. п. управления $\mathfrak{m} \in \Omega(\mu)$ в $\mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$ существует п. п. по Бору решение, принадлежащее $\Omega(\mathfrak{x})$.

З а м е ч а н и е 16.4. Утверждения в § 15 о достаточных условиях почти периодичности функций в смысле Степанова и Бора были использованы для указания достаточных условий п. п. процессов системы (12.42). Сейчас кратко опишем аналогичную схему получения утверждений о достаточных условиях п. п. по Бору решений систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = F(t, x), \ (t, x) \in \mathbb{R} \times G, \tag{16.48}$$

с функцией $F \in \mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times G, \mathbb{R}^n)$, и предположим, что при некотором $K \in \mathrm{comp}(G)$ множество $\mathfrak{S}_K(F)$ ее решений, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в K не пусто. Будем считать также, что $F : \mathbb{R} \times K \to \mathbb{R}^n$ d-ограничена и d-непрерывна. Введем, далее, в рассмотрение (здесь см. пример 15.2 при $\mathbb{V} = K$) ДС $(\mathfrak{B}_1, g_1^t)$, в которой фазовым пространством служит метрическое пространство $\mathfrak{B}_1 \doteq (\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times K, \mathbb{R}^n), \varrho_1)$, с метрикой ϱ_1 определенной равенством (15.17) при $\mathbb{V} = K$, а поток $g_1^t : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_1$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ и всякой функции $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_1$ задается равенством

$$g_1^t(\mathcal{F})(s, x) \stackrel{(15.18)}{=} \mathcal{F}(s + t, x), \ (s, x) \in \mathbb{R} \times K.$$

В силу ограничений, наложенных на F, по теореме 15.4 при $\mathfrak{Y} = C(K, \mathbb{R}^n)$, получаем, что $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_{g_1}(F)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B}_1)$. Следовательно, множество $\Omega(F)$ омега-предельных точек движения $t \mapsto g^t(F)$ есть непустое компактное инвариантное множество, а значит [123], содержит минимальные компактные множества, состоящие (в силу теоремы Биркгофа [123]) из рекуррентных движений, или, что то же самое (см. лемму 15.8) — из рекуррентных функций, совокупность которых обозначаем $\mathcal{R}(\mathbb{R}, C(K, \mathbb{R}^n))$. Далее, учитывая, что для каждого решения $x \in \mathfrak{S}_K(F)$ $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(x)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B}_c)$, получим соответствие между $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(x))$ и $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_{g_1}(F))$, аналогичное указанному в лемме 16.9 соответствию между $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(x))$ и $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mu))$. Поэтому, в точности повторив доказательства теорем 16.5 и 16.6 с заменой в них множества решений $\mathfrak{S}_K(\mu)$ на множество решений $\mathfrak{S}_K(F)$, и минимальных подмножеств $E(\mu)$ из омега–предельного множества $\Omega(\mu) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\mu))$ на минимальные подмножества $E(F)$ из омега–предельного множества $\Omega(F) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_{g_1}^+(F))$, получим следующие два утверждения о рекуррентных решениях системы (16.48).

Т е о р е м а 16.9. *Пусть* $\mathfrak{S}_K(F) \neq \emptyset$. *Тогда, для любого минимального множества* $E(F)$ *из* $\Omega(F)$ *и всякого* $x \in \mathfrak{S}_K(F)$, *для каждой функции* $\mathfrak{F} \in E(F)$ *в* $\Omega(x)$ *существует такая функция* $z \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{F})$, *что каждое минимальное множество* $E(z) \subset \Omega(z)$ *содержит рекуррентное решение* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{F})$, *такое, что пара* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{F})$ *принадлежит минимальному подмножеству омега-предельного множества* $\Omega(x, F)$, *отвечающего движению* $t \mapsto (g^t(x), g_1^t(F))$.

Т е о р е м а 16.10. *Пусть* $\mathfrak{S}_K(F) \neq \emptyset$. *Тогда, для всякого* $x \in \mathfrak{S}_K(F)$ *и любого минимального множества* $E(x)$ *из* $\Omega(x)$, *для каждого* $\mathfrak{x} \in E(x)$ *в* $\Omega(F)$ *существует такая функция* $\mathcal{F}$, *что каждое минимальное множество* $E(\mathcal{F}) \subset \Omega(\mathcal{F})$ *содержит такую рекуррентную функцию* $\mathfrak{F}$, *что* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{F})$ *и пара* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{F})$ *принадлежит минимальному подмножеству омега-предельного множества* $\Omega(x, F)$, *отвечающего движению* $t \mapsto (g^t(x), g_1^t(F))$.

Отметим, что функции, принадлежащие минимальным множествам из $\Omega(x)$ названные в [115, 117] предельными решениями системы (16.48), вообще говоря, не являются ее решениями. Вместе с тем, в силу теоремы 16.10 каждому решению $x \in \mathfrak{S}_K(F)$ этой системы можно поставить в соответствие (рекуррентную) функцию $\mathfrak{x} \in \mathcal{R}_c(\mathbb{R}, K)$, являющуюся решением системы $\dot{x} = \mathfrak{F}(t, x)$, в которой функция $\mathfrak{F}$ принадлежит минимальному подмножеству из $\Omega(F) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_{g_1}(F))$, а по теореме 16.9 имеет место и обратное соответствие. Кроме того, если изначально рассматривается система (16.48) с функцией $F \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, C(K, \mathbb{R}^n))$, то (см. следствие 15.1 при $\mathfrak{Y} \doteq C(K, \mathbb{R}^n))$ множество $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_{g_1}(F)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B}_1)$ и минимально. В этом случае утверждения теорем 16.9 и 16.10 дополняют основные результаты работы [170] о существовании рекуррентного решения системы (16.49) с непрерывной рекуррентной функцией F.

Далее, для решения $x \in \mathfrak{S}_K(F)$ рассмотрим условия $\boldsymbol{s}_1)$–$\boldsymbol{s}_4)$, аналогичные условиям для $x \in \mathfrak{S}_K(\mu)$. Аналогично доказательству теоремы 16.7, используя теоремы 16.9 и 16.10, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 16.11. *Пусть $F \in S(\mathbb{R}, C(K, \mathbb{R}^n))$ и для некоторого решения $x \in \mathfrak{S}_K(F)$ выполнено одно из условий $\boldsymbol{s}_1)$–$\boldsymbol{s}_4)$. Тогда для каждой (п. п.) функции $\mathfrak{F} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_{g_1}(F))$ в $\mathfrak{S}_K(\mathfrak{F})$ существует п. п. по Бору решение, принадлежащее $\Omega(x)$.*

Заметим, что в силу теоремы 16.11 ограниченное решение системы уравнений 16.48 с п. п. по Степанову функцией F будет п.п. по Бору, если для него выполнено условие $\boldsymbol{s}_1)$ (а также вытекающее из этого условия свойство равномерной устойчивости x относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении). Тем самым достаточное условие п. п. по Бору ограниченного решения, приведенное в [187] (см. также пример 15.5) для автономных систем уравнений, имеет место, при более слабых ограничениях на это решение, и для неавтономных систем дифференциальных уравнений. Отметим также, что в указанном утверждении п. п. ограниченного решения условие его равномерной устойчивости относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении существенно. В [197] приведен пример (см. также пример в [123]) скалярного уравнения с функцией, являющейся п. п. по t в смысле Бора равномерно на компактах, в котором каждое ограниченное решение не является п.п. по Бору. Можно показать, что эти решения не обладают указанным в условии $\boldsymbol{s}_1)$ свойством устойчивости.

Теперь для функции F рассмотрим (см. определения 15.2– 15.5 и сделанные к ним замечания при $\mathfrak{Y} = C(K, \mathbb{R}^n))$ условия:

$\boldsymbol{f}_1)$ Множество $\Omega(F)$ устойчиво относительно $\mathrm{orb}^+_{g_1}(F)$ в отрицательном направлении.

$\boldsymbol{f}_2)$ Множество $\Omega(F)$ устойчиво относительно $\mathrm{orb}^+_{g_1}(F)$ в положительном направлении.

$\boldsymbol{f}_3)$ Функция F равномерно устойчива относительно положительных сдвигов в отрицательном направлении.

$\boldsymbol{f}_4)$ Множество $\Omega(F)$ содержит минимальное множество $\mathcal{E}(F)$, в котором существует (рекуррентная) функция, устойчивая относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении.

Сейчас, используя теорему 16.11, получаем следующие достаточные условия существования п. п. по Бору решений систем дифференциальных уравнений.

Т е о р е м а 16.12. *Пусть множество решений $\mathfrak{S}_K(F)$ системы* (16.48) *с d-непрерывной и d-ограниченной функцией $F \in \mathfrak{V}^{loc}(\mathbb{R} \times K, \mathbb{R}^n)$ непусто. Пусть, далее, для F выполнено одно из условий $\boldsymbol{f}_1)$ – $\boldsymbol{f}_4)$. Тогда, если для некоторой п. п. по Степанову функции $\mathfrak{F} \in \Omega(F)$ найдется $x \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{F})$, для которого выполнено одно из условий $\boldsymbol{s}_1)$– $\boldsymbol{s}_4)$, то для каждой п. п. по Степанову функции $\mathcal{F} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_{g_1}(\mathfrak{F}))$ в $\mathfrak{S}_K(\mathcal{F})$ существует п. п. по Бору решение, принадлежащее $\Omega(x)$.*

Аналогично утверждению, приведенному в замечании 16.4, имеет мето следующее утверждение.

Т е о р е м а 16.13. *Пусть множество решений $\mathfrak{S}_K(F)$ системы* (16.48) *с d-непрерывной и d-ограниченной функцией $F \in \mathfrak{V}^{loc}(\mathbb{R} \times K, \mathbb{R}^n)$ непусто. Пусть, далее, для некоторого $x \in \mathfrak{S}_K(F)$ выполнено одно из условий $\boldsymbol{s}_1)$– $\boldsymbol{s}_4)$, и предположим, что для некоторого (п. п. по Бору) решения $\mathfrak{x} \in \Omega(x)$ найдется такая функция $\mathcal{F} \in \Omega(F)$, что $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K(\mathcal{F})$, и для которой выполнено одно из условий $\boldsymbol{f}_1)$ – $\boldsymbol{f}_4)$. Тогда, для каждой (п. п. по Степанову) функции $\mathfrak{F} \in \Omega(\mathcal{F})$ в $\mathfrak{S}_K(\mathfrak{F})$ существует п. п. по Бору функция, принадлежащая $\Omega(\mathfrak{x})$.*

7. В этом пункте рассматриваем процесс $q(\cdot) = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+; K)$, для которого выполнены условия, указанные в теореме 16.4, и используем принятые в ней обозначения. По этой теореме, найдется такое $T_0 > 0$, что будет выполнено включение

$$\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(q(\cdot))) \subset \mathcal{OP}([T_0, \infty); X_1). \tag{16.49}$$

В дальнейшем, не оговаривая, предполагаем, что в рассматриваемом процессе $q(\cdot) = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+; K)$ управление $\widehat{\mu} \in \mathcal{M}$ является d_w-непрерывным. В этом случае, по теореме 16.5, в любом минимальном множестве $E(\mu)$ из $\Omega(\mu)$ для каждого $\mathfrak{m} \in E(\mu)$ в $\Omega(x)$ существует такая функция $z \in \mathfrak{S}_K(\mathfrak{m})$, что каждое минимальное множество $E(z) \subset \Omega(z)$ содержит рекуррентное решение $\mathfrak{x}$ системы (12.42), отвечающее $\mathfrak{m}$ и такое, что функция $\mathfrak{p}(\cdot) = (\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$ будет рекуррентной функцией[17], принадлежащей минимальному подмножеству омега-предельного множества $\Omega(q(\cdot))$ движения $t \mapsto g^t(q(\cdot)) \doteq (\widehat{x}_t(\cdot), \widehat{\mu}_t(\cdot))$. Поэтому, в силу (16.49), этот рекуррентный процесс будет принадлежать $\mathcal{OP}([T_0, \infty); X_1)$. Покажем, что на самом деле он принадлежит $\mathcal{OP}(\mathbb{R}; X_1)$. Действительно, в силу леммы 15.8, используя определение рекуррентного движения [123, с. 402], получаем, что $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mathfrak{p}(\cdot))) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mathfrak{p}(\cdot); T_0, \infty))$. Следовательно, в силу (16.49), при каждом $s \in \mathbb{R}$ $\mathfrak{p}_s(\cdot) \in \mathcal{OP}([T_0, \infty); X_1)$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}) \in \mathcal{OP}(\mathbb{R}; X_1)$. В самом деле, если найдутся такие $t_0 < t_1 < T_0$ и процесс $(z, \nu) \in \mathfrak{A}_c([t_0, t_1]; X_1)$, что $z(t_0) = \mathfrak{x}(t_0)$, $z(t_1) = \mathfrak{x}(t_1)$, при которых $J(z(\cdot), \nu(\cdot); t_0, t_1) < J(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot); t_0, t_1)$, то при $t \in [t_0 + \tau, t_1 + \tau]$ рассмотрим $\tilde{z}(t) \doteq z(t - \tau)$, $\tilde{\nu}(t) \doteq \nu(t - \tau)$, где $\tau > -t_0 + T_0$. Тогда $(\tilde{z}, \tilde{\nu}) \in \mathfrak{A}_c([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; X_1)$, $\tilde{t}_0 \doteq t_0 + \tau$, $\tilde{t}_1 \doteq t_1 + \tau$ и $J(\mathfrak{x}_{-\tau}(\cdot), \mathfrak{m}_{-\tau}(\cdot); \tilde{t}_0, \tilde{t}_1) = J(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot); t_0, t_1) > J(\tilde{z}(\cdot), \tilde{\nu}(\cdot); \tilde{t}_0, \tilde{t}_1)$,

[17] То есть для любого $\alpha > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \varrho_{c,w}(\mathfrak{p}_\tau(\cdot), \mathfrak{p}(\cdot)) \doteq \varrho_c(\mathfrak{x}_\tau(\cdot), \mathfrak{x}(\cdot)) + \varrho_w(\mathfrak{m}_\tau(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) < \alpha\}$ относительно плотно.

а так как $\tilde{z}(\tilde{t}_0) = \mathfrak{x}_{-\tau}(\tilde{t}_0)$, $\tilde{z}(\tilde{t}_1) = \mathfrak{x}_{-\tau}(\tilde{t}_1)$, то получаем противоречие с тем, что процесс $(\mathfrak{x}_{-\tau}, \mathfrak{m}_{-\tau})$ принадлежит $O\mathcal{P}([T_0, \infty); X_1)$. Таким образом, $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}) \in O\mathcal{P}(\mathbb{R}; X_1)$. Поскольку каждый п. п. процесс является рекуррентным, то каждый п. п. процесс $(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(q(\cdot)))$ также будет принадлежать $O\mathcal{P}(\mathbb{R}; X_1)$. Поэтому из теорем 16.4 и 16.8 получаем следующие достаточные условия существования п. п. процесса, принадлежащего $O\mathcal{P}(\mathbb{R}; X_1)$.

Т е о р е м а 16.14. *Пусть для процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+; K)$ *выполняются условия, указанные в теореме* 16.4, *и для управления* $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathcal{M}$ *выполнено одно из условий* $\boldsymbol{u}_1)$ – $\boldsymbol{u}_4)$. *Тогда, если для некоторого* $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ *из* $\Omega(\widehat{\mu}) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\widehat{\mu}))$, *для отвечающего ему решения* $x(\cdot)$ *системы* (12.42) *выполнено одно из условий* $\boldsymbol{s}_1)$– $\boldsymbol{s}_4)$, *то каждому управлению* $\mathfrak{m}(\cdot)$ *из* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mu)) \subset \mathrm{APM}_1$ *отвечает п. п. по Бору решение* $\mathfrak{x}(\cdot)$ *системы* (12.42), *принадлежащее множеству* $\Omega(x)$, *и* $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \in O\mathcal{P}(\mathbb{R}; X_1)$.

З а м е ч а н и е 16.5. Отметим, что аналогичным образом можно указать достаточные условия существования п. п. процесса, принадлежащего $O\mathcal{P}(\mathbb{R}; X_1)$, используя теорему 16.9.

Т е о р е м а 16.15. *Указанный в теореме* 16.14 *п. п. процесс* $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$ *является решением задачи* (12.45) *оптимального управления п. п. движениями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 16.5 система (12.42) является $\varepsilon_1, \vartheta, \eta$-РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\mathfrak{x})$. Рассмотрим любой процесс $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{A}_c$ (то есть допустимый процесс задачи (12.45)), в котором $\|x - \mathfrak{x}\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon_1$. Строя, используя этот процесс, большую вариацию для $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$, учитывая, что $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \in O\mathcal{P}(\mathbb{R}; X_1)$, получим, что при каждом $T > 2\vartheta$ будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{T} J(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot); 0, T) \leqslant \frac{4\gamma_0\,\vartheta}{T} + \frac{1}{T} J(x(\cdot), \mu(\cdot); 0, T),$$

где $\gamma_0 \doteq \max\limits_{(x,u) \in X_1 \times \mathfrak{U}} |f_0(x, u)|$, из которого, в свою очередь, устремляя T к бесконечности, получаем, что $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot))$. $\square$

Таким образом, в теореме 16.14 (см. также замечание 16.5) указаны достаточные условия существования п. п. магистрального процесса. В самом деле, п. п. процесс $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$ принадлежит $O\mathcal{P}(\mathbb{R}; X_1)$ и является, в силу теоремы 16.15, решением задачи (12.45) оптимального управления п. п. движениями. Кроме того, поскольку (см. лемму 16.5) система (12.42) обладает свойством C) относительно $\mathrm{orb}_+(\mathfrak{x})$, то по теореме 14.2 равномерно по $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0, T]; X_1)$ существует $\lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \langle \mu_T(t), f_0(x_T(t), u) \rangle dt$, значение которого совпадает с $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$.

Глава 6. Равномерная локальная управляемость

Изучаются условия равномерной локальной управляемости линейных систем из пространства $\mathfrak{S}$, введенного в тринадцатом параграфе диссертации. Так же как и в предыдущей главе, в данной главе при исследовании вопроса о равномерной локальной управляемости используется динамическая система сдвигов. В § 19 введены понятия колеблемости и равномерной колеблемости линейной системы относительно заданного конуса и показано, что свойство локальной и равномерной локальной управляемости систем управления тесно связано с введенными понятиями колеблемости и равномерной колеблемости линейной системы относительно конуса, соответственно. В связи с этим, в двадцатом параграфе, используя условия локальной и равномерной локальной управляемости систем управления, полученные в § 18, приведены соответствующие утверждения о колеблемости и равномерной колеблемости линейной системы относительно заданного конуса и доказана теорема сравнения для линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

§17. О структурной устойчивости множества $\mathbb{L}^0$

Приводятся необходимые в дальнейшем свойства опорной функции и доказан ряд утверждений о равномерной локальной управляемости систем из $\mathfrak{S}$, из которых, в частности, получено свойство устойчивости равномерной локальной управляемости систем из $\mathfrak{S}$ к малым возмущениям.

1. Рассмотрим (см. (13.1)) систему управления $\varphi = (A, V) \in \mathfrak{S}$ и через $X(t, s; \varphi)$ обозначим матрицу Коши отвечающей ей однородной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$. Сейчас приведем ряд простых, но часто используемых далее свойств отображения $\varphi \mapsto X(t, s; \varphi)$.

Отметим, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$X(t, s; \varphi_\tau) = X_\tau(t, s; \varphi), \tag{17.1}$$

где[18] $\varphi_\tau \doteq g^\tau(\varphi)$ и $X_\tau(t, s; \varphi) \doteq X(t+\tau, s+\tau; \varphi)$. Далее, из равенства

$$X(0, t; \varphi) = E - \int_0^t X(0, s; \varphi) A(s) ds, \tag{17.2}$$

используя неравенство Гронуолла–Беллмана, получаем, что при каждом $\vartheta > 0$ для всех $(t, \tau) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|X(0, t; \varphi_\tau)| \leqslant \exp(\int_0^\vartheta |A_\tau(s)| ds) \leqslant \exp(\int_0^\vartheta \rho(\varphi_\tau(s), 0) ds) \leqslant e^{\varkappa d(\varphi, 0)}, \tag{17.3}$$

[18] Всюду далее, если не оговорено специально, рассматриваем ДС сдвигов $(\mathfrak{S}, g^t)$, определенную в примере 15.2.

где константа $\varkappa = \varkappa(\vartheta) > 0$ определяется равенством (3.11), ρ — метрика на множестве $\mathcal{P} \doteq \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ (см. п. 1 в § 13) и $d(\varphi, 0) \doteq \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} (|A(s)| + |V(s)|) ds$. Из (17.3) вытекает, что для всякого d-ограниченного множества $\mathcal{F} \subset \mathfrak{S}$

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \bigl(\sup\{|X(0,t;\varphi_\tau)|,\ (t,\tau) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}\}\bigr) \leqslant k(\vartheta, \mathcal{F}), \tag{17.4}$$

где

$$k(\vartheta, \mathcal{F}) \doteq \exp\bigl(\varkappa \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} d(\varphi, 0)\bigr). \tag{17.5}$$

В свою очередь, поскольку (см. пример 15.2, замечание 15.1 и (13.1)) множество $\mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$ из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$, состоящее из d-ограниченных отображений, совпадает с пространством систем управления $\mathfrak{S}$, то из (17.4), в силу теоремы 15.4, получаем, что для каждой системы $\varphi \in \mathfrak{S}$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{\xi \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\varphi))} \bigl(\sup\{|X(0,t;\xi_\tau)|,\ (t,\tau) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}\}\bigr) \leqslant k(\vartheta, \varphi), \tag{17.6}$$

где $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\varphi))$ — замыкание множества $\mathrm{orb}_g(\varphi)$ в метрике ϱ, определенной равенством (15.8), а константа $k(\vartheta, \varphi)$ задается равенством (17.5) при $\mathcal{F} = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\varphi))$, то есть

$$k(\vartheta, \varphi) \doteq \exp\bigl(\varkappa \sup\{d(\xi, 0),\ \xi \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\varphi))\}\bigr). \tag{17.7}$$

Отметим также, что в силу непрерывности отображения (см. лемму 15.1 и (15.8))

$$\varphi \mapsto \int_0^\vartheta \rho(\varphi(t), 0) dt,\ \varphi \in \mathfrak{B}_0 \doteq (L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0), \varrho),$$

из (17.3) следует, что для всякого компактного инвариантного (относительно потока g^t) множества $\mathcal{E} \subset \mathfrak{S}$ имеет место неравенство

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{E}} \bigl(\sup\{|X(0,t;\varphi_\tau)|,\ (t,\tau) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}\}\bigr) \leqslant \exp\bigl(\sup_{\varphi \in \mathcal{E}} \int_0^\vartheta \rho(\varphi(t), 0) dt\bigr). \tag{17.8}$$

Далее, из равенства (17.2) получаем, что для любых $\varphi', \varphi'' \in \mathfrak{S}$

$$\left\{\begin{aligned} &\max_{0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |X(0,t;\varphi') - X(0,t;\varphi'')| \leqslant \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |X(0,t;\varphi'')| \cdot \int_0^\vartheta \rho(\varphi'(s), \varphi''(s)) ds \cdot \exp\bigl(\int_0^\vartheta \rho(\varphi'(s), 0) ds\bigr). \end{aligned}\right. \tag{17.9}$$

Откуда очевидно следует, что для любых $\varphi', \varphi'' \in \mathfrak{S}$

$$\left\{\begin{aligned} &\max_{0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |X(0,t;\varphi') - X(0,t;\varphi'')| \leqslant \\ &\leqslant e^{2\varkappa d(\varphi'', 0)} \cdot \int_0^\vartheta \rho(\varphi'(s), \varphi''(s)) ds \cdot \exp\bigl(\int_0^\vartheta \rho(\varphi'(s), \varphi''(s)) ds\bigr). \end{aligned}\right. \tag{17.10}$$

2. Используя приведенные в первом пункте оценки, укажем ряд свойств опорной функции и непосредственно вытекающих из них следствий. С этой целью на множестве $\mathbb{R}^{n^*} \times \mathfrak{S}$ введем метрику, определенную для всех $(\psi_j, \varphi_j) \in \mathbb{R}^{n^*} \times \mathfrak{S}$, $j = 1, 2$ равенством: $|\psi_1 - \psi_2| + \varrho(\varphi_1, \varphi_2)$, и для каждой пары $(\psi, \varphi) \in \mathbb{R}^{n^*} \times \mathfrak{S}$ полагаем

$$\mathfrak{C}(\psi, \varphi) = \mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta) \doteq \int_0^{\vartheta} c(\psi X(0, t; \varphi), V(t))dt. \tag{17.11}$$

В следующей лемме и далее для Ψ_1 используем обозначение (13.8).

Л е м м а 17.1. *Отображение* $(\psi, \varphi) \mapsto \mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta)$, $(\psi, \varphi) \in \Psi_1 \times \mathfrak{S}$, *при каждом фиксированном* $\vartheta > 0$, *непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства липшицевости по каждому аргументу опорной функции [15, с. 24], для любых $(\psi', \varphi'), (\psi'', \varphi'')$, принадлежащих $\Psi_1 \times \mathfrak{S}$, имеем следующие соотношения (здесь см. обозначения (17.11), (15.3)):

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{C}(\psi', \varphi') - \mathfrak{C}(\psi'', \varphi'')| \leqslant & \int_0^{\vartheta} |c(\psi' X(0, t; \varphi'), V'(t)) - c(\psi'' X(0, t; \varphi'), V'(t))| dt + \\
& + \int_0^{\vartheta} |c(\psi'' X(0, t; \varphi'), V'(t)) - c(\psi'' X(0, t; \varphi''), V''(t))| dt \leqslant \\
& \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |X(0, t; \varphi')| \big(|\psi' - \psi''| \varkappa\, d(\varphi', 0) + \mathfrak{p}_{\vartheta}(\varphi', \varphi'') \big) + \\
& + \max_{0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |X(0, t; \varphi') - X(0, t; \varphi'')| \big(\varkappa\, d(\varphi', 0) + \mathfrak{p}_{\vartheta}(\varphi', \varphi'') \big).
\end{aligned}$$

Теперь для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 15.1 и неравенствами (17.3), (17.10). $\square$

Из полученного при доказательстве леммы 17.1 неравенства вытекает, что для любых $\varphi', \varphi'' \in \mathfrak{S}$ и $\psi \in \Psi_1$

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{C}(\psi, \varphi'; \vartheta) - \mathfrak{C}(\psi, \varphi''; \vartheta)| \leqslant & \max_{0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |X(0, t; \varphi')| \mathfrak{p}_{\vartheta}(\varphi', \varphi'') + \\
& + \max_{0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |X(0, t; \varphi') - X(0, t; \varphi'')| \big(\varkappa\, d(\varphi', 0) + \mathfrak{p}_{\vartheta}(\varphi', \varphi'') \big).
\end{aligned} \tag{17.12}$$

Отсюда, принимая во внимание лемму 15.1 и неравенства (17.5), (17.10), получаем следующее утверждение.

Л е м м а 17.2. *Пусть* $(\mathbb{A}, \prec)$ — *заданное направленное множество, системы* $\varphi_{\alpha}, \varphi \in \mathfrak{S}$, $\alpha \in \mathbb{A}$, *и* $\lim\limits_{\alpha \in \mathbb{A}} \varrho(\varphi_{\alpha}, \varphi) = 0$. *Тогда при каждом* $\vartheta > 0$

$$\mathfrak{C}(\psi, \varphi_{\alpha}; \vartheta) \underset{\psi \in \Psi_1}{\rightrightarrows} \mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta) \text{ при } \alpha \in \mathbb{A}.$$

Сейчас, используя леммы 17.1 и 17.2, укажем необходимые и достаточные условия равномерной локальной управляемости систем из пространства $\mathfrak{S}$ в терминах (см. пример 15.2) ДС $(\mathfrak{S}, g^t)$.

Непосредственно из лемм 17.2, 13.2 и следствия 13.1 (см. также обозначения (13.10), (13.11) и (17.11)) вытекает

Л е м м а 17.3. *Для каждой системы $\varphi \in \mathfrak{S}$ следующие утверждения являются эквивалентными.*

1) *Система φ принадлежит $\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$.*

2) *Имеет место включение $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\varphi)) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$.*

3) *Для каждой пары $(\psi, \widehat{\varphi} \in \Psi_1 \times \mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\varphi)) \quad \mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta) \geqslant \varepsilon$.*

Далее, всякой паре $(\psi, \varphi) \in \Psi_1 \times \mathfrak{S}$, при $\vartheta, \beta > 0$, поставим в соответствие множества

$$\begin{cases} \Xi_\vartheta(\psi,\varphi) \doteq \{t \in [0,\vartheta]\colon\ c(\psi X(0,t;\varphi), V(t)) > 0\}, \\ \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi,\varphi) \doteq \{t \in [0,\vartheta]\colon\ c(\psi X(0,t;\varphi), V(t)) \geqslant \beta\}. \end{cases} \tag{17.13}$$

Л е м м а 17.4. *Пусть система $\varphi \in \mathfrak{S}$ и является d-непрерывной. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Для каждой пары $(\psi, \widehat{\varphi}) \in \Psi_1 \times \mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\varphi)) \quad \mathrm{mes}\, \Xi_\vartheta(\psi, \widehat{\varphi}) > 0$.*

2) *Система $\varphi \in \mathbb{L}^0$.*

3) *Существуют такие $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для всех $(\psi, \widehat{\varphi}) \in \Psi_1 \times \mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\varphi))$ справедливо неравенство $\mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \widehat{\varphi}) \geqslant \varepsilon$.*

4) *Существуют такие $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для всех $(\psi, \tau) \in \Psi_1 \times \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $\mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \varphi_\tau) \geqslant \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из третьего утверждения леммы 17.4, в силу включений $\Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \widehat{\varphi}) \subset \Xi_\vartheta(\psi, \widehat{\varphi})$ и $\mathrm{orb}^+_g(\varphi) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\varphi))$, очевидно следуют первое и четвертое утверждения. Из неравенств Чебышева (см. также леммы 17.3 и 13.2) $\mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \widehat{\varphi}) \leqslant \beta^{-1}\mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta)$ и $\mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \varphi_\tau) \leqslant \beta^{-1}\mathfrak{C}(\psi, \varphi_\tau; \vartheta)$ получаем, что из третьего и четвертого утверждений следует второе утверждение. Покажем, что из второго утверждения вытекает третье утверждение. Пусть $\varphi = (A, V) \in \mathbb{L}^0$. Тогда (см. (13.10)) по лемме 17.3 найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что для всех $(\psi, \widehat{\varphi})$ из $\Psi_1 \times \mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\varphi))$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta) \geqslant \varepsilon$. Для $\widehat{\varphi}$ рассмотрим последовательность $\{\varphi_{\tau_j}\}_{j=1}^\infty \subset \mathrm{orb}^+_g(\varphi)$ такую, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(\varphi_{\tau_j}, \widehat{\varphi}) = 0$. По лемме 17.2 найдется такое j_0, что при всех $\psi \in \Psi_1 \ \ \mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}_{\tau_{j_0}}; \vartheta) \geqslant \varepsilon/2$. Следовательно, зафиксировав $\beta \in (0, \varepsilon_1/\vartheta)$ получим, что при всех $\psi \in \Psi_1$

$$I_{j_0} \doteq \int_{\Xi_{\vartheta,\beta}(\psi,\widehat{\varphi})} c(\psi X(0,t;\varphi_{\tau_{j_0}}, V_{\tau_{j_0}}))dt \geqslant \varepsilon/4.$$

Далее, при $h > 0$ для измеримого отображения $t \mapsto V(t)$ рассмотрим его стекловское усреднение $t \mapsto V(t;h) \doteq \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} V(s)ds$. Очевидно, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |V(t;h)| \leqslant d_h(V(\cdot), 0)$. Кроме того (см. [62]), принимая во внимание компактность (см. теорему 15.4 при $\mathfrak{Y} = \mathcal{P}_0$) множества $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\varphi))$ имеет место равенство $\lim\limits_{h\downarrow 0} d(V(\cdot), V(\cdot\,;h)) = 0$, из которого, в силу топологической эквивалентности d_l-расстояний, получаем, что найдется такое $h_0 > 0$, при котором $d_\vartheta(V(\cdot), V(\cdot\,;h_0)) \leqslant \varepsilon/(8k\vartheta)$, где $k > 0$ определено равенством (17.7). Поэтому из соотношений

$$\varepsilon/4 \leqslant I_{j_0} \leqslant k\vartheta d_\vartheta(V(\cdot), V(\cdot\,;h_0)) + k\vartheta d_{h_0}(V(\cdot), 0)\, \mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \widehat{\varphi})$$

получаем, что $\mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \widehat{\varphi}) \geqslant \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 \doteq \varepsilon/(8k\vartheta d_{h_0}(V(\cdot), 0))$. Тем самым доказано, что из из второго утверждения следует третье утверждение. Покажем, что первое утверждение влечет справедливость второго утверждения. Действительно, из леммы 17.1 и компактности множества $K \doteq \Psi_1 \times \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$ вытекает существование такой пары $(\psi_*, \varphi_*) \in K$, что $\mathfrak{C}(\psi_*, \varphi_*; \vartheta) = \min\{\mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta) : (\psi, \widehat{\varphi}) \in K\}$. Поэтому, если выполнено первое утверждение леммы 17.4, то $\mathfrak{C}(\psi_*, \varphi_*; \vartheta) \geqslant \varepsilon_1$ для некоторого $\varepsilon_1 > 0$. В силу определения (ψ_*, φ_*) из леммы 17.3 получаем, что φ принадлежит $\mathbb{L}^0_{\varepsilon_1,\vartheta} \subset \mathbb{L}^0$, то есть из утверждения 1) следует 2). $\square$

Аналогичным образом, используя непрерывность отображения $\psi \mapsto \mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta)$, $\psi \in \Psi_1$, а также следствие 13.1 доказывается

Л е м м а 17.5. *Для каждой системы $\varphi \in \mathfrak{S}$ следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Существует такое $\vartheta > 0$, что для всех $\psi \in \Psi_1$ выполнено неравенство* $\mathrm{mes}\, \Xi_\vartheta(\psi, \varphi) > 0$.

2) *Система $\varphi \in \mathbb{L}$.*

3) *Существуют такие $\varepsilon, \beta > 0$, что для всех $\psi \in \Psi_1$ справедливо неравенство* $\mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \widehat{\varphi}) \geqslant \varepsilon$.

В заключение этого пункта приведем еще ряд утверждений, вытекающих из леммы 17.2. С этой целью заметим, что в силу леммы 13.1, равенств (13.4), (13.6), учитывая принятое обозначение (17.11), при каждом $\vartheta > 0$ и любых $\varphi', \varphi'' \in \mathfrak{S}$ имеем равенство

$$\mathrm{dist}(D(\varphi', \vartheta), D(\varphi'', \vartheta)) = \max_{\psi \in \Psi_1} |\mathfrak{C}(\psi, \varphi'; \vartheta) - \mathfrak{C}(\psi, \varphi''; \vartheta)|, \tag{17.14}$$

из которого по лемме 17.2 получаем, что

$$D(\cdot, \vartheta) \in C(\mathfrak{S}, \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)).$$

Отсюда, в силу теоремы 15.1, получаем, что отображение $t \mapsto D(\varphi_t, \vartheta)$ принадлежит пространству $C(\mathbb{R}, \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n))$.

Пусть, далее, пара $\{(\mathfrak{X}, f^t), \sigma\}$ задает (см. пример 15.2) параметризованное семейство систем управления $h(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{S}$. Из непрерывности указанных выше отображений, а также равенств

$$D(f^t(p), \vartheta) \doteq D(h(f^t(p)), \vartheta) \overset{(15.7)}{=} D(g^t(h(p)), \vartheta)$$

и ограничений на отображение $\sigma : \mathfrak{X} \to \mathcal{P}_0$ (см. п. 3 в § 15) следует, что отображения $p \mapsto D(p, \vartheta)$, $t \mapsto D(f^t(p), \vartheta)$ принадлежат пространствам $C(\mathfrak{X}, \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n))$ и $C(\mathbb{R}, \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n))$, соответственно. Кроме того, из леммы 17.3 следует, что $p \in \mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$ в том и только в том случае, если $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(h(p))) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$.

3. Напомним [107], что множество $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}_+$ (или $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$) называется относительно плотным, если существует такое $l > 0$, что при каждом $x \geqslant 0$ (соответственно $x \in \mathbb{R}$) $\mathbb{T} \cap [x, x+l] \neq \varnothing$, и множество $\mathbb{T}(\alpha) \subset \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{T}(\alpha) \subset \mathbb{R}$) называется [123, с. 407] равномерно по параметру α, принадлежащего заданному множеству параметров $\mathbb{A}$, относительно плотным, если существует такое $l > 0$, что для всех $\alpha \in \mathbb{A}$ при каждом $x \geqslant 0$ ($x \in \mathbb{R}$) $\mathbb{T} \cap [x, x+l] \neq \varnothing$.

Т е о р е м а 17.1. *Пусть d-ограниченное множество $\mathcal{F}$ из $\mathfrak{S}$ при некоторых $\varepsilon, \vartheta > 0$ содержится в $\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что для каждой d-ограниченной совокупности систем $\Sigma \subset \mathfrak{S}$, для которой множество*

$$\mathbb{T}(\varphi) \doteq \{t \geqslant 0\colon\ \varrho(\varphi_\tau, \mathcal{F}) \leqslant \delta\} \tag{17.15}$$

равномерно по $\varphi \in \mathfrak{S}$ относительно плотно, при некоторых $\varepsilon_1, \vartheta_1 > 0$ имеет место включение $\Sigma \subset \mathbb{L}^0_{\varepsilon_1,\vartheta_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем δ, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} \delta k\theta^2(ke^{4\delta\theta} + 1) \leqslant \varepsilon/8, \\ (2\delta)^{-1} \geqslant \theta, \end{cases} \tag{17.16}$$

где $\theta \doteq [\vartheta] + 1$, а константа $k \doteq k(\vartheta, \mathcal{F})$ определена равенством (17.5). Рассмотрим, далее, d-ограниченное множество систем $\Sigma \subset \mathfrak{S}$, для которых множество (17.15) равномерно по $\varphi \in \mathfrak{S}$ относительно плотно, то есть существует такое $l > 0$, что для всех $\varphi \in \mathfrak{S}$ и каждого $\tau \in \mathbb{R}_+$ $\;[\tau, \tau + l] \cap \mathbb{T}(\varphi) \neq \varnothing$. Берем теперь произвольную систему $\varphi = (A, V)$ из Σ и покажем сначала что для всякого $\tau \geqslant 0$ найдется $\tau_1 \geqslant \tau$ такое, что при всех $\psi \in \Psi_1$ будет выполняться неравенство

$$\mathfrak{C}(\psi, \varphi_{\tau_1}; \vartheta) \geqslant \varepsilon/2.$$

С этой целью возьмем точку $\tau_1 \in [\tau, \tau + l] \cap \mathbb{T}(\varphi)$. Для этой точки, в силу условий теоремы 17.1, будет выполнено неравенство $\varrho(\varphi_{\tau_1}, \mathcal{F}) \leqslant \delta$. Следовательно, существует такая система $\widehat{\varphi} = (\widehat{A}, \widehat{V}) \in \mathcal{F}$, что $\varrho(\varphi_{\tau_1}, \widehat{\varphi}) < 2\delta$. Откуда, учитывая выбор константы $\delta > 0$, а также определение метрики ϱ (см. (15.1)), получаем, что

$$\mathfrak{p}_\theta(\varphi_{\tau_1}, \widehat{\varphi}) \overset{(15.3)}{=} \int_{-\theta}^{\theta+1} \rho_\Phi(\varphi_{\tau_1}(s), \widehat{\varphi}(s))ds < 2\delta. \tag{17.17}$$

Теперь, используя подходящим образом последовательно неравенства (17.12), (17.10) и (17.4), имеем следующие соотношения:

$$|\mathfrak{C}(\psi, \varphi_{\tau_1}; \vartheta) - \mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta)| \leqslant$$
$$\leqslant k\vartheta \int_0^\vartheta \rho_\Phi(\varphi_{\tau_1}(s), \widehat{\varphi}(s))ds \cdot \big(k\ \exp(\int_0^\vartheta \rho(\varphi_{\tau_1}(s), \widehat{\varphi}(s))ds) + 1\big) \leqslant$$
$$\leqslant 2k\theta\mathfrak{p}_\theta(\varphi_{\tau_1}, \widehat{\varphi})\ \big(k\ \exp(2\theta\mathfrak{p}_\theta(\varphi_{\tau_1}, \widehat{\varphi})) + 1\big) \overset{(17.17)}{<} 4\delta k\theta^2(ke^{4\delta\theta} + 1) \overset{(17.16)}{<} \varepsilon/2.$$

Так как $\widehat{\varphi} \in \mathcal{F}$, а $\mathcal{F} \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$, то $\mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta) \geqslant \varepsilon$ для всех $\psi \in \Psi_1$. Поэтому из полученных выше соотношений получаем, что, действительно, $\mathfrak{C}(\psi, \varphi_{\tau_1}; \vartheta) \geqslant \varepsilon/2$ при каждом векторе $\psi \in \Psi_1$.

Далее, полагаем $\vartheta_1 \doteq \vartheta + l$ и для всякой пары $(\tau, \psi) \in \mathbb{R}_+ \times \Psi_1$ рассмотрим единичный вектор

$$q(\tau, \psi) \doteq \psi X(\tau, \tau_1; \varphi)/|X(\tau, \tau_1; \varphi)|,$$

где $\tau_1 \in [\tau, \tau + l] \cap \mathbb{T}(\varphi)$. Поскольку $\min\limits_{\psi \in \Psi_1} \mathfrak{C}(\psi, \varphi_{\tau_1}; \vartheta) \geqslant \varepsilon/2$, то

$$\mathfrak{C}(q(\tau, \psi), \varphi_{\tau_1}; \vartheta) \geqslant \varepsilon/2$$

для всех $(\tau,\psi)\in\mathbb{R}_+\times\Psi_1$. Поэтому, представив каждое $\tau_1\in[\tau,\tau+l]\cap\mathbb{T}(\varphi)$ в виде $\tau_1=\tau+\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}\in[0,l]$, учитывая равенство (17.1) и неравенство $\tau_1+\vartheta\leqslant\tau+\vartheta+l\doteq\tau+\vartheta_1$, имеем следующие соотношения:

$$\mathfrak{C}(\psi,\varphi_\tau;\vartheta_1)\overset{(17.11)}{=}\int_\tau^{\tau+\vartheta_1}c(\psi X(\tau,s;\varphi),V(s))ds=$$

$$=|X(\tau,\tau_1;\varphi)|\int_\tau^{\tau+\vartheta_1}c(q(\tau,\psi)X(\tau_1,s;\varphi),V(s))ds\geqslant$$

$$\geqslant|X(0,\boldsymbol{l};\varphi_\tau)|\cdot\mathfrak{C}(q(\tau,\psi),\varphi_{\tau_1};\vartheta)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}k^{-1}(l,\Sigma),$$

где константа $k(l,\Sigma)$ определена равенством (17.5) при $\vartheta=l$ и $\mathcal{F}=\Sigma$. Таким образом, доказано, что для всех $(\tau,\psi)\in\mathbb{R}_+\times\Psi_1$

$$\mathfrak{C}(\psi,\varphi_\tau;\vartheta_1)\overset{(17.11)}{=}\int_0^{\vartheta_1}c(\psi X(0,s;\varphi_\tau),V(s))ds\geqslant\varepsilon_1,\qquad(17.18)$$

где $\varepsilon_1\doteq\frac{\varepsilon}{2}k^{-1}(l,\Sigma)$. Откуда, по лемме 13.2, получаем, что $\varphi\in\mathbb{L}^0_{\varepsilon_1,\vartheta_1}$.

С л е д с т в и е 17.1. *Пусть d - ограниченное множество $\mathcal{F}$ из $\mathfrak{S}$ содержится при некоторых $\varepsilon,\vartheta>0$ в $\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Тогда найдется такое $\delta>0$, что всякая система φ из $\mathfrak{S}$, для которой либо множество $\mathbb{T}(\varphi)$ (см. (17.15)) относительно плотно, либо существует точка $t_0\geqslant 0$ такая, что $\varrho(\varphi_t,\mathcal{F})\leqslant\delta$ при всех $t\geqslant t_0$, принадлежит $\mathbb{L}^0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\delta>0$, удовлетворяющее системе неравенств (17.16). Теперь, если система $\varphi\in\mathfrak{S}$ такая, что множество $\mathbb{T}(\varphi)$ относительно плотно, то, полагая в теореме 17.1 $\Sigma\doteq\{\varphi\}$, получим, что $\varphi\in\mathbb{L}^0$. При этом, для такой системы при всех $(\tau,\psi)\in\mathbb{R}_+\times\Psi_1$ будет выполнено неравенство (17.18), где $\vartheta_1=\vartheta+l$, $\varepsilon_1\doteq\frac{\varepsilon}{2}k^{-1}(l,\varphi)$, и где, в свою очередь, $l>0$ - константа, входящая в определение относительной плотности множества $\mathbb{T}(\varphi)$, а константа $k(l,\varphi)$ задается равенством (17.7) при $\vartheta=l$. Далее, если существует $t_0\geqslant 0$ такое, что $\varrho(\varphi_t,\mathcal{F})\leqslant\delta$ при всех $t\geqslant t_0$, то в этом случае $\mathbb{T}(\varphi_{t_0})=\mathbb{R}_+$. Следовательно, при всех $\tau\geqslant 0\quad[\tau,\tau+t_0]\cap\mathbb{T}(\varphi)\neq\varnothing$, а стало быть, в силу рассмотренного выше случая, для системы φ при всех $(\tau,\psi)\in\mathbb{R}_+\times\Psi_1$ будет выполнено неравенство (17.18) с константами $\vartheta_1=\vartheta+t_0$, $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}k^{-1}(t_0,\varphi)$, то есть $\varphi\in\mathbb{L}^0_{\varepsilon_1,\vartheta_1}$. $\square$

В свою очередь, из следствия 17.1 вытекает

С л е д с т в и е 17.2. *Пусть d - ограниченное множество $\mathcal{F}$ из $\mathfrak{S}$ содержится при некоторых $\varepsilon,\vartheta>0$ в $\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Тогда $\{\varphi\in\mathfrak{S}\colon\lim\limits_{t\to\infty}\varrho(\varphi_t,\mathcal{F})=0\}\subset\mathbb{L}^0$.*

С л е д с т в и е 17.3. *Пусть $\widehat{\varphi}\in\mathbb{L}^0$. Тогда найдется такое $\delta>0$, что всякая система φ из $\mathfrak{S}$, для которой либо множество $\{t\geqslant 0:\ \varrho(\varphi_t,\xi)\leqslant\delta\}$ при некоторой системе $\xi\in\mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\widehat{\varphi}))$ относительно плотно, либо существуют такие $t_0\geqslant 0$ и $\xi\in\mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\widehat{\varphi}))$, что $\varrho(\varphi_t,\xi)\leqslant\delta$ при всех $t\geqslant t_0$, принадлежит $\mathbb{L}^0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (13.10) $\varphi\in\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$ при некоторых $\varepsilon,\vartheta>0$. Кроме того, по теореме 15.4 множество $\mathcal{F}\doteq\mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\widehat{\varphi}))$ является d-ограниченным и по лемме 17.3 содержится в $\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Теперь, по следствию 17.1, примененному к рассматриваемому множеству $\mathcal{F}$, учитывая включение $\{t \geqslant 0\colon \varrho(\varphi_t, \xi) \leqslant \delta\} \subset \mathbb{T}(\varphi)$ и неравенство $\varrho(\varphi_t, \mathcal{F}) \leqslant \varrho(\varphi_t, \xi)$, получаем, что всякая система φ из $\mathfrak{S}$, для которой выполнено одно из условий следствия 17.3 принадлежит $\mathbb{L}^0$. $\square$

Далее понадобится следующее утверждение.

Л е м м а 17.6. *Пусть $\varphi \in \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$ при некоторых $\varepsilon, \vartheta > 0$. Тогда найдется такое $\widehat{\delta}$, что $\{\varphi \in \mathfrak{S}\colon \varrho(\varphi, \widehat{\varphi}) \leqslant \widehat{\delta}\} \subset \mathbb{L}_{\varepsilon/2,\vartheta}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\widehat{\delta} \doteq 2\delta$, где $\delta > 0$ удовлетворяет системе неравенств (17.16) с константой $k \doteq k(\vartheta, \widehat{\varphi})$, определенной равенством (17.7) при $\varphi = \widehat{\varphi}$. Теперь, если $\varrho(\varphi, \widehat{\varphi}) < \widehat{\delta}$, то в силу выбора $\delta > 0$ получим, что $\mathfrak{p}_\vartheta(\varphi, \widehat{\varphi}) < \widehat{\delta}$. Далее, как и при доказательстве теоремы 17.1, используя соответствующим образом неравенства (17.12), (17.10) и (17.6), будем иметь (см. обозначение (17.11)) следующие соотношения:

$$\max_{\psi \in \Psi_1} |\mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta) - \mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta)| \leqslant 2k\vartheta \mathfrak{p}_\vartheta(\varphi, \widehat{\varphi})\big(k \exp(2\vartheta \mathfrak{p}_\vartheta(\varphi, \widehat{\varphi})) + 1\big) <$$

$$< 2k\widehat{\delta}\vartheta^2(k \exp(2\widehat{\delta}\vartheta) + 1) < \varepsilon/2,$$

из которых, учитывая, что $\varphi \in \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$ (а значит, $\mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta) \geqslant \varepsilon$ для всех $\psi \in \Psi_1$), получаем, что при всех $\psi \in \Psi_1$ $\quad \mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta) \geqslant \varepsilon/2$. $\square$

П р и м е р 17.1. Пусть пара (см. п. 3 в § 15 и пример 15.2) $\{(\mathfrak{X}, f^t), \sigma\}$ определяет динамически параметризованное семейство систем управления $h(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{S}$, и пусть E — компактное инвариантное множество из $\mathfrak{S}$. Покажем, что если E содержится при некоторых $\varepsilon, \vartheta > 0$ в $\mathfrak{L}_{\varepsilon,\vartheta}$, то найдется такое $\delta > 0$, что всякая точка p, для которой множество $\{p \in \mathfrak{X}\colon \varlimsup\limits_{t\to\infty} \rho_{\mathfrak{X}}(f^t(p), E) \leqslant \delta\}$ относительно плотно, принадлежит $\mathfrak{L}^0$ и множество $\{p \in \mathfrak{X}\colon \lim\limits_{t\to\infty} \rho_{\mathfrak{X}}(f^t(p), E) = 0\}$ содержится при некоторых $\varepsilon_1, \vartheta_1 > 0$ в $\mathfrak{L}^0_{\varepsilon_1,\vartheta_1}$. Действительно, как показано в четвертом пункте § 15, множество $\mathcal{F} \doteq h(E)$ является компактным и инвариантным (относительно потока g^t) множеством в $\mathfrak{S}$. Кроме того, $\mathcal{F} \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Теперь указанные утверждения вытекают из следствия 17.1 и приводимого ниже утверждения.

Л е м м а 17.7. *Всякое компактное инвариантное относительно потока g^t множество $\mathcal{E}$ из $\mathfrak{S}$ является d-ограниченным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $\sup\limits_{\varphi \in \mathcal{E}} d(\varphi, 0) = \infty$. Тогда для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдется такая система $\varphi_j \in \mathcal{E}$, что $d(\varphi, 0) \geqslant 2j$. Следовательно, существует такая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^\infty$, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ $\quad \int\limits_0^1 \rho(g^{t_j}(\varphi_j)(s), 0) ds \geqslant j$. Далее, в силу инвариантности множества $\mathcal{E}$, последовательность $\xi_j \doteq g^{t_j}(\varphi_j)$, $j \in \mathbb{N}$ содержится в $\mathcal{E}$, а так как $\mathcal{E}$ — компактное множество, то из этой последовательности можно выделить такую подпоследовательность $\{\xi_{j_i}\}_{i=1}^\infty$, что $\lim\limits_{i\to\infty} \varrho(\xi_{j_i}, \xi) = 0$, где $\xi \in \mathcal{E}$. Отсюда, по лемме 15.1, имеем равенство $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_0^1 \rho(\xi_{j_i}(s), \xi(s)) ds = 0$. Поэтому из соотношений: $j_i \leqslant \int\limits_0^1 \rho(\xi_{j_i}(s), 0) ds \leqslant \int\limits_0^1 \rho(\xi_{j_i}(s), \xi(s)) ds + d(\xi, 0)$, получаем, что $d(\xi, 0) = \infty$. Последнее противоречит (см. 13.1) определению множества $\mathfrak{S}$.

§18. Теоремы о равномерной локальной управляемости

В терминах динамической системы сдвигов приводятся достаточные, а также необходимые и достаточные условия равномерной локальной управляемости систем из пространства $\mathfrak{S}$.

1. Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 18.1. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное инвариантное (относительно потока g^t) множество из $\mathfrak{S}$ и $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если при каждом $\alpha \in \mathbb{I}$ $\quad \mathcal{E}_\alpha \cap \mathbb{L} \neq \varnothing$, то найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что $\mathcal{E} \subset \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $j \in \mathbb{N}$ на $\Psi_1 \times \mathcal{E}$ рассмотрим отображение

$$(\psi, \varphi) \mapsto \mathfrak{C}(\psi, \varphi; j) \overset{(17.11)}{=} \int_0^j c(\psi X(0, s; \varphi), V(s))ds \quad (\varphi = (A, V)),$$

которое, согласно лемме 17.1, непрерывно. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, для каждого j найдется такая пара $(\psi_j, \varphi_j) \in \Psi_1 \times \mathcal{E}$ (здесь j — индекс), что

$$\mathfrak{C}(\psi_j, \varphi_j; j) = \underset{(\varphi,\varphi)\in\Psi_1\times\mathcal{E}}{\text{minimum}}\, \mathfrak{C}(\psi, \varphi; j).$$

Покажем, далее, что при некоторых $\varepsilon_1, \vartheta_1 > 0$ справедливо включение

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{E}} \mathcal{E}_\alpha \subset \mathbb{L}_{\varepsilon_1,\vartheta_1}. \tag{18.1}$$

Для этого, в силу следствия 13.1 и выбора последовательности $\{(\psi_j, \varphi_j)\}_{j=1}^\infty \subset \Psi_1 \times \mathcal{E}$, достаточно показать, что $\mathfrak{C}(\psi_j, \varphi_j; j) > 0$ при некотором $j \in \mathbb{N}$. В самом деле, допустим, что при всех $j \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{C}(\psi_j, \varphi_j; j) = 0.$$

Теперь, в силу компактности множества $\mathcal{E}$, из последовательности $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{E}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\widehat{\varphi} = (\widehat{A}, \widehat{V}) \in \mathcal{E}$. Чтобы не загромождать обозначений, будем считать, что

$$\lim_{j\to\infty} \varrho(\varphi_j, \widehat{\varphi}) = 0.$$

Далее, в силу инвариантности множества $\mathcal{E}$, $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}^+_g(\widehat{\varphi})) \in \operatorname{comp}(\mathcal{E})$ и, стало быть, непустое компактное инвариантное множество $\Omega(\widehat{\varphi})$ омега-предельных точек движения $t \mapsto g^t(\widehat{\varphi})$ также содержится в $\mathcal{E}$. При этом, $\Omega(\widehat{\varphi})$ содержит некоторое минимальное множество, которое (напомним, что $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — это совокупность всех минимальных множеств из $\mathcal{E}$) необходимо совпадает с некоторым $\mathcal{E}_{\widehat{\alpha}}$ ($\widehat{\alpha} \in \mathbb{I}$). По условию, $\mathcal{E}_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbb{L} \neq \varnothing$. Следовательно, найдутся константы $\varepsilon_0, \vartheta_0 > 0$ и система ξ, принадлежащая $\mathcal{E}_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbb{L}_{\varepsilon_0,\vartheta_0}$. С другой стороны, так как $\mathcal{E}_{\widehat{\alpha}} \subset \Omega(\widehat{\varphi})$, то $\xi \in \Omega(\widehat{\varphi})$. Поэтому существует такая последовательность $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = \infty$, что $\lim\limits_{i\to\infty} \varrho(g^{\tau_i}(\widehat{\varphi}), \xi) = 0$.

Отсюда, по лемме 17.1, принимая во внимание, что $\xi \in \mathbb{L}_{\varepsilon_0,\vartheta_0}$, получаем, что при некотором i_0 $\quad g^{\tau_{i_0}}(\widehat{\varphi}) \in \mathbb{L}_{\varepsilon_0/2,\vartheta_0}$, то есть (см. следствие 13.1)

$$\min_{\psi\in\Psi_1} \mathfrak{C}(\psi, \varphi_{\tau_{i_0}}; \vartheta_0) \geqslant \varepsilon_0/2. \tag{18.2}$$

Рассмотрим, далее, последовательность

$$\eta_j \doteq \psi_j X(0, \tau_{i_0}; \varphi)/|\psi_j X(0, \tau_{i_0}; \varphi)|, \ j \in \mathbb{N}$$

векторов из Ψ_1. Так как при каждом $j > \tau_{i_0} + \vartheta_0$

$$0 \leqslant \mathfrak{C}(\eta_j, g^{\tau_{i_0}}(\varphi_j); \vartheta_0) \leqslant \mathfrak{C}(\psi_j, \varphi_j; j)/|\psi_j X(0, \tau_{i_0}; \varphi)| = 0,$$

то при этих j имеет место равенство:

$$\mathfrak{C}(\eta_j, g^{\tau_{i_0}}(\varphi_j); \vartheta_0) = 0. \tag{18.3}$$

Далее, поскольку $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Psi_1$, то можно считать, что $\lim\limits_{j\to\infty} \eta_j = \eta \in \Psi_1$. Теперь, при всех $j > \tau_{i_0} + \vartheta_0$, получаем следующие соотношения:

$$\mathfrak{C}(\eta, g^{\tau_{i_0}}(\widehat{\varphi}); \vartheta_0) \overset{(18.3)}{=} \mathfrak{C}(\eta, g^{\tau_{i_0}}(\widehat{\varphi}); \vartheta_0) - \mathfrak{C}(\eta_j, g^{\tau_{i_0}}(\varphi_j); \vartheta_0) \overset{(17.6)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \vartheta_0 k(\tau_{i_0}, \widehat{\varphi}) \cdot |\eta - \eta_j| + \max_{\psi\in\Psi_1} |\mathfrak{C}(\psi, g^{\tau_{i_0}}(\widehat{\varphi}); \vartheta_0) - \mathfrak{C}(\psi, g^{\tau_{i_0}}(\varphi_j); \vartheta_0)|,$$

где константа $k(\tau_{i_0}, \widehat{\varphi})$ определена равенством (17.7) при $\vartheta = \tau_{i_0}$ и $\varphi = \widehat{\varphi}$. Поскольку $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(\varphi_j, \widehat{\varphi}) = 0$, то (см. теорему 15.2) $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(g^{\tau_{i_0}}(\varphi_j), g^{\tau_{i_0}}(\widehat{\varphi})) = 0$. Поэтому (здесь см. лемму 17.2), переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \to \infty$, получаем равенство $\mathfrak{C}(\eta, g^{\tau_{i_0}}(\widehat{\varphi}); \vartheta_0) = 0$, которое противоречит (18.2).

Таким образом, доказано существование такого $j \in \mathbb{N}$, что $\mathfrak{C}(\psi_j, \varphi_j; j) > 0$, а значит, для констант $\vartheta_1 \doteq j$ и $\varepsilon_1 \doteq \mathfrak{C}(\psi_j, \varphi_j; j)$ будет выполнено включение (18.1).

Завершим доказательство теоремы 18.1. С этой целью рассмотрим множество

$$\mathcal{F} \doteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{E}} \mathcal{E}_\alpha,$$

которое, во–первых, как подмножество компактного инвариантного множества $\mathcal{E}$ (см. лемму 17.7) является d-ограниченным, а во–вторых, как было показано выше, содержится в $\mathbb{L}_{\varepsilon_1,\vartheta_1}$, и наконец, в силу утверждения, приведенного в [123, с. 407], это множество обладает свойством: для любого $\gamma > 0$ множество $\{t \geqslant 0\colon\ \varrho(\varphi_t, \mathcal{F}) \leqslant \gamma\}$ равномерно по $\varphi \in E$ относительно плотно. В силу этого свойства из теоремы 17.1, примененной к указанному d-ограниченному множеству $\mathcal{F} \subset \mathbb{L}_{\varepsilon_1,\vartheta_1}$ и множеству $\Sigma \doteq \mathcal{E}$, получаем, что $\mathcal{E} \subset \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$ при некоторых константах $\varepsilon, \vartheta > 0$. $\square$

Из теоремы 18.1 и следствия 17.1, примененного к множеству $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, получаем

С л е д с т в и е 18.1. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное инвариантное множество из $\mathfrak{S}$ и $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если при каждом $\alpha \in \mathbb{I}$ $\quad \mathcal{E}_\alpha \cap \mathbb{L} \neq \varnothing$, то найдется такое $\delta > 0$, что всякая система φ из $\mathfrak{S}$, для которой множество $\{t \geqslant 0 :\ \varrho(\varphi_t, \mathcal{E}) \leqslant \delta\}$ относительно плотно, принадлежит $\mathbb{L}^0$.*

С л е д с т в и е 18.2. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное минимальное множество из $\mathfrak{S}$ такое, что $\mathcal{E}\cap\mathbb{L}\neq\varnothing$. Тогда $\mathcal{E}\subset\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$ при некоторых $\varepsilon,\vartheta>0$.*

Т е о р е м а 18.2. *Пусть система $\varphi\in\mathfrak{S}$ d-непрерывна и $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех минимальных подмножеств из $\Omega(\varphi)$. Тогда $\varphi\in\mathbb{L}^0$ в том и только в том случае, если $\mathcal{E}_\alpha\cap\mathbb{L}\neq\varnothing$ при каждом $\alpha\in\mathbb{I}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 15.4 $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}^+_g(\varphi))\in\mathrm{comp}(\mathfrak{B}_0)$. Следовательно, $\Omega(\varphi)$ — компактное инвариантное множество, причем [123, с. 361]

$$\lim_{t\to\infty}\varrho(\varphi_t,\Omega(\varphi))=0.$$

Поэтому, если $\mathcal{E}_\alpha\cap\mathbb{L}\neq\varnothing$ при всех $\alpha\in\mathbb{I}$, то по теореме 18.1 при некоторых $\varepsilon,\vartheta>0$ $\Omega(\varphi)\subset\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$, и значит, по следствию 18.2, примененному к d-ограниченному множеству $\Omega(\varphi)$, получаем, что $\varphi\in\mathbb{L}^0$. Тем самым, достаточность условий теоремы 18.2 доказана. Необходимость условий этой теоремы является следствием леммы 17.3. □

Приведем одно следствие теоремы 18.2. С этой целью напомним (см., например [6]), что множество

$$W^s(\mathcal{H})\doteq\{\varphi\in\mathfrak{S}\colon\,\Omega(\varphi)\subset\mathcal{H}\}$$

называется *зоной притяжения множества* $\mathcal{H}$ в пространстве $\mathfrak{S}$.

С л е д с т в и е 18.3. *Если $\mathcal{H}\subset\mathbb{L}$, то $W^s(\mathcal{H})\subset\mathbb{L}^0$.*

П р и м е р 18.1. Пусть $\mathfrak{Y}$ - объединение произвольной совокупности минимальных множеств из $\mathfrak{S}$, каждое из которых имеет непустое пересечение с $\mathbb{L}$. Покажем, что в этом случае $W^s(\mathfrak{Y})\subset\mathbb{L}^0$. Действительно, если $\varphi\in W^s(\mathfrak{Y})$, то по определению $\Omega(\varphi)\subset\mathfrak{Y}$ и, значит, совпадает с одним из минимальных подмножеств множества $\mathfrak{Y}$. Поскольку $\Omega(\varphi)\bigcap\mathbb{L}\neq\varnothing$, то по следствию 18.3 $\Omega(\varphi)\subset\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$. Откуда, в свою очередь, по теореме 18.2 $\varphi\in\mathbb{L}^0$.

З а м е ч а н и е 18.1. Теорема 18.2, являющаяся по сути следствием теоремы 18.1, доказывалась в ряде частных случаев в работах [44, 145]. Так, в [145] она доказывалась для систем вида (13.14) при условии, что $\Omega(\varphi)$ (здесь $\varphi(\cdot)\doteq(A(\cdot),B(\cdot))$) является минимальным компакным множеством. В работе [44] это утверждение было обобщено для систем из пространства Степанова в предположении, что $\Omega(\varphi)$ представимо в виде объединения минимальных компактных множеств. Вместе с тем, уже несложные примеры показывают, что объединение минимальных множеств, вообще говоря, составляет истинную часть $\Omega(\varphi)$.

П р и м е р 18.2. На системе полуинтервалов $I_1=[0,\frac{\pi}{2})$, $I_2=[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\pi)$, $I_j=[\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{i=1}^{j-1}2^j\pi,\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{i=1}^{j}2^j\pi)$, $j\geqslant 3$ зададим четную функцию $f:\mathbb{R}\to[-1;1]$ следующим образом:

$$f(t)=\begin{cases}1,\ t\in\bigcup\limits_{j\in N}I_{2j-1},\\ \sin t,\ t\in\bigcup\limits_{j\in N}I_{2j},\end{cases}$$

и рассмотрим систему управления $\varphi(t) = (A(t), V(t))$, $t \in \mathbb{R}$, в которой

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ [0, \quad \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}t]. \end{pmatrix}$$

Для движения $t \mapsto g^t(f)$ множество $\Omega(f)$ содержит функции $a(t) \equiv 1$, $b(t) = \sin t$,

$$c(t) = \begin{cases} 1, \ t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin t, \ t > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad d(t) = \begin{cases} \sin t, \ t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1, \ t > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

а также их сдвиги. Но минимальными здесь будут лишь два множества: $\mathcal{E}_1 = \{1\}$, $\mathcal{E}_2 = \mathrm{orb}_g(b)$, то есть $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ составляет истинную часть множества $\Omega(f)$. Далее, поскольку омега-предельным множеством функции $t \mapsto \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}t$ является функция тождественно равная единице, то системы управления, отвечающие минимальным множествам из $\Omega(\varphi)$, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \ u \in [0, 1], \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(t + \tau)x_1 + u, \ u \in [0, 1], \ \tau \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

В следующем параграфе будет показано, что каждая из этих систем является локально управляемой и, следовательно, по теореме 18.2, рассматриваемая система φ равномерно локально управляема.

З а м е ч а н и е 18.2. Теорема 18.1 и ее следствия доказаны в терминах динамической системы сдвигов, определенной на пространстве функций. Приводимая ниже теорема позволяет привлечь методы теории динамических систем к исследованию вопросов управляемости.

Т е о р е м а 18.3. *Пусть пара* $\{(\mathfrak{X}, f^t), \sigma\}$ *определяет динамически параметризованное семейство систем управления* $h(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{S}$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1) *Пусть* E *— компактное инвариантное (относительно потока* f^t*) множество из* $\mathfrak{X}$ *и* $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *— совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если при каждом* $\alpha \in I \quad E_\alpha \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, *то найдутся такие* $\varepsilon, \vartheta > 0$, *что* $E \subset \mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$.

2) *Пусть* $\overline{\mathrm{orb}}_f(p) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$ *и* $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *— совокупность всех минимальных подмножеств из* $\Omega(p)$. *Тогда, если при каждом* $\alpha \in I \quad E_\alpha \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, *то* $p \in \mathfrak{L}^0$.

3) *Если* E *— минимальное компактное множество из* $\mathfrak{X}$ *и* $E \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, *то найдутся такие* $\varepsilon, \vartheta > 0$, *что* $E \subset \mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$.

4) *Если* $H \subset \mathfrak{L}$, *то* $W^s(H) \doteq \{p \in \mathfrak{X} \colon \Omega(p) \subset H\} \subset \mathfrak{L}^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 15.9 $\mathcal{E} \doteq h(E)$ — компактное инвариантное относительно потока g^t множество в $\mathfrak{S}$ и $\mathcal{E}_\alpha \doteq h(E_\alpha)$, $\alpha \in I$ — это совокупность всех его минимальных подмножеств. Если $E_\alpha \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, то в силу (15.11) – (15.13) $\mathcal{E}_\alpha \cap \mathbb{L} \neq \varnothing$ при всех $\alpha \in I$. По теореме 18.1 найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что $h(E) \subset \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$, а это означает (см. (15.12), (15.13)), что $E \subset \mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$. Первое утверждение теоремы 18.3 доказано.

Аналогично, используя лемму 15.10 и теорему 18.2 доказывается второе утверждение теоремы 18.3.

Третье утверждение вытекает из леммы 15.3 и следствия 18.2. Наконец, если H — компактное инвариантное множество, содержащееся в $\mathfrak{L}$, и $\Omega(p) \subset H$, то всякое минимальное подмножество из $\Omega(p)$ имеет непустое пересечение с $\mathfrak{L}$. Согласно второму утверждению теоремы 18.3, $p \in \mathfrak{L}^0$. $\Box$

В следующих примерах подразумевается, что пара $\{(\mathfrak{X}, f^t), \sigma\}$ задает динамически параметризованное семейство систем управления $h(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{S}$.

Пример 18.3. Напомним [6], что компактное инвариантное множество $\mathcal{A}$ динамической системы $(\mathfrak{X}, f^t)$ называется аттрактором, если существует такая его окрестность G, что для всякой точки $p \in G \quad \mathrm{orb}_f^+(p) \subset G$ и $\Omega(p) \subset \mathcal{A}$. Пусть, далее, $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — совокупность всех минимальных подмножеств аттрактора $\mathcal{A}$, и допустим, что $E_\alpha \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$ при каждом $\alpha \in I$. Тогда, по первому утверждению теоремы 18.3, найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что $\Omega(p) \subset \mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$, а по второму утверждению этой теоремы G содержится в $\mathfrak{L}^0$.

Пример 18.4. Допустим, что динамическая система $(\mathfrak{X}, f^t)$ имеет конечное число точек покоя $p_1, \ldots, p_k$ и периодических движений $t \mapsto f^t(q_j)$, $j = 1, \ldots, l$, причем множества $\{p_1\}, \ldots, \{p_k\}$, $\mathrm{orb}_f(q_1), \ldots, \mathrm{orb}_f(q_l)$ составляют всю совокупность минимальных множеств данной динамической системы. Выделим, далее, совокупность точек $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$, $q_{j_1}, \ldots, q_{j_l}$, принадлежащих $\mathfrak{L}$. Используя третье утверждение теоремы 18.3 получаем, что существуют такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что компактное инвариантное множество $H \doteq \bigcup\limits_{m=1}^{k} \{p_{i_m}\} \bigcup \big(\bigcup\limits_{n=1}^{l} \mathrm{orb}_f(q_{j_n}) \big)$ содержится в $\mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$, а по четвертому утверждению теоремы 18.3, учитывая, что $\mathfrak{L}^0_{\varepsilon,\vartheta} \subset \mathfrak{L}^0$, получаем включение - $W^s(H) \subset \mathfrak{L}^0$.

Замечание 18.3. Как видно из приведенных выше утверждений, при исследовании вопроса о равномерной локальной управляемости важную роль играют минимальные множества динамических систем, которые, в свою очередь, в силу теоремы Биркгофа [123] тесно связаны с рекуррентностью движений, а последние (см. п. 5 в § 15) — с рекуррентными функциями. Поэтому в следующем пункте рассмотрим вопрос об управляемости рекуррентной и почти периодической системы.

2. Рассмотрим подмножество $\mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0) \subset \mathfrak{S}$, состоящее из рекуррентных систем управления, то есть (см. определение 15.1 при $\mathfrak{Y} = \mathcal{P}_0$) таких $\varphi \in \mathfrak{S}$, что для любых $\varepsilon, N > 0$ множество $E_{\mathcal{R}}(\varphi, \varepsilon, N) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \mathfrak{p}_N(\varphi_\tau, \varphi) \leqslant \varepsilon\}$ их ε, N-п. п. относительно плотно, где, напомним, $\mathfrak{p}_N(\varphi_\tau, \varphi) \overset{(15.3)}{=} \int\limits_{-N}^{N+1} \rho(\varphi_\tau(s), \varphi(s))ds$.

В силу полноты пространства $\mathcal{P}_0$, по следствию 15.2 получаем, что для каждой рекуррентной системы φ $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\varphi))$ — компактное инвариантное множество, состоящее из рекуррентных движений. Отсюда, в силу следствия 18.2, получаем, что если $\varphi \in \mathbb{L} \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$, то найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что (здесь см. лемму 15.8) $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\varphi)) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta} \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$. Отсюда, в частности, следует, что рекуррентная система φ равномерно локально управляема в том и только в том случае, если она локально управляема, при этом [145, с. 43], в этом утверждении рекуррентность системы φ существенна, в том смысле, что это условие нельзя ослабить до устойчивости по Пуассону [123] движения $t \mapsto g^t(\varphi)$.

Далее, как отмечалось в конце второго пункта § 17, для каждой системы φ отображение $t \mapsto D(\varphi_t, \vartheta)$ принадлежит пространству $C(\mathbb{R}, \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n))$. Для рекуррентных систем, помимо указанного свойства множества управляемости, имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 18.4. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \Phi)$. *Тогда при каждом* $\vartheta > 0$ *отображение* $t \mapsto D(\varphi_t, \vartheta)$ *принадлежит пространству* $\mathcal{R}_c(\mathbb{R}, \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя последовательно, при $\varphi' \doteq \varphi_{t+\tau}$ и $\varphi'' \doteq \varphi_t$, равенство (17.14), неравенства (17.12), (17.9) и оценку (17.9), получим, что для каждого $N > 0$

$$\max_{|t| \leqslant N} \operatorname{dist}(D(\varphi_{t+\tau}, \vartheta) D(\varphi_t, \vartheta)) \leqslant \beta\, \mathfrak{p}_{\vartheta+N}(\varphi_\tau, \varphi),$$

где $\beta = \max\{k(\vartheta, \varphi), 3\varkappa k^2(\vartheta, \varphi) d(\varphi, 0)\}$, а константы $k(\vartheta, \varphi)$ и $\varkappa = \varkappa(\vartheta)$ определены равенствами (17.9) и (13.11), соответственно. Поэтому относительно плотное множество $E_{\mathcal{R}}(\varphi, \varepsilon/\beta, N + \vartheta)$ $\varepsilon/\beta, N + \vartheta$-почти периодов рекуррентной функции φ содержится в множестве ε, N-почти периодов непрерывного отображения $t \mapsto D(\varphi_t, \vartheta)$, то есть это отображение принадлежит $\mathcal{R}_c(\mathbb{R}, \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n))$.

Отметим, наконец, свойства систем из пространства $S(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$. Поскольку $S(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$ содержится в $\mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$, то для каждой системы $\varphi \in S(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$ $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\varphi))$ — компактное инвариантное множество, состоящее из п. п. движений. При этом (см. лемму 15.9 и 15.10) $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\varphi)) \subset S(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$. Поэтому (см. следствие 18.2), если $\varphi \in \mathbb{L} \cap S(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$, то найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\varphi)) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta} \cap S(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$.

Далее, если $\varphi \in S(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$, то по лемме 15.9 движение $t \mapsto g^t(\varphi) \doteq \varphi_t$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}, \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\varphi)))$. Так как множество $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(\varphi)) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{S})$, а $D(\cdot, \vartheta) \in C(\mathfrak{S}, \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n))$, то отображение $t \mapsto D(\varphi_t, \vartheta)$ принадлежит $B(\mathbb{R}, \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n))$ как суперпозиция п. п. по Бору отображения и равномерно непрерывного отображения.

§19. Геометрические условия равномерной локальной управляемости

Показано, что исследование вопроса о локальной и равномерной локальной управляемости систем из пространства $\mathfrak{S}$ можно свести, соответственно, к исследованию вопроса о колеблемости и равномерной колеблемости однородной системы дифференциальных уравнений относительно выпуклого замкнутого конуса с вершиной в нуле.

1. Обозначим через $\operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех выпуклых замкнутых конусов в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле и полагаем

$$\operatorname{Cone}_1(\mathbb{R}^n) \doteq \operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n) \cap O_1[0],$$

$$\mathcal{P}_{\operatorname{Cone}} \doteq \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{P}_{\operatorname{Cone}_1} \doteq \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{Cone}_1(\mathbb{R}^n)$$

Выделим, далее, в $\mathfrak{S}$ подмножество

$$\Sigma_1 \doteq \{\sigma \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_{\operatorname{Cone}_1}) \colon\ d(\sigma, 0) < \infty\} \tag{19.1}$$

и в дальнейшем, не оговаривая специально, через Σ обозначаем множество, состоящее из таких функций $t \mapsto (P(t), \mathcal{H}(t)) \in \mathcal{P}_{\mathrm{Cone}}$, $t \in \mathbb{R}$, что отвечающее им отображение $t \mapsto (P(t), \mathcal{H}(t) \cap O_1[0])$ принадлежит Σ_1. Непосредственно из определения получаем, что отображение $\boldsymbol{g} : \Sigma \to \Sigma_1$, определенное для всякой пары $(P, \mathcal{H}) \in \Sigma$ равенством

$$\boldsymbol{g}(P, \mathcal{H})(t) \doteq (P(t), \mathcal{H}(t) \cap O_1[0]), \; t \in \mathbb{R}, \tag{19.2}$$

является биективным.

Далее, как было отмечено в замечании 13.1 при исследовании условий локальной и равномерной локальной управляемости линейных систем не ограничивая общности достаточно изначально рассматривать системы с выпуклозначным множеством допустимых управлений. Поэтому в дальнейшем, не оговаривая, при исследовании условий управляемости систем $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot)) \in \mathfrak{S}$ считаем, что $V(t) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$.

Теперь введем в рассмотрение отображение $\boldsymbol{h} : \mathfrak{S} \to \Sigma$, определенное для каждой системы $(A, V) \in \mathfrak{S}$ равенством

$$\boldsymbol{h}(A, V)(t) \doteq (A(t), \mathcal{K}_V(t)), \; \mathcal{K}_V(t) \doteq \overline{\mathrm{cone}}\, V(t), \; t \in \mathbb{R}, \tag{19.3}$$

где $\overline{\mathrm{cone}} V(t)$ — замыкание в $\mathbb{R}^n$ конуса $\mathrm{cone}\, V(t)$, порожденного множеством $V(t)$ [90, с. 174]. Отметим (см. [90, с. 173]), что

$$\mathrm{cone} V(t) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda V(t).$$

Поэтому $\Sigma = \boldsymbol{h}(\Sigma_1)$ и для каждого $p \in \Sigma_1 \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}(\sigma)) = p$.

Зададим, наконец, отображение

$$\varphi \mapsto \boldsymbol{f}(\varphi) \doteq (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h})(\varphi) \in \Sigma_1, \; \varphi \in \mathfrak{S}, \tag{19.4}$$

или иначе (см. (19.2), (19.3))

$$\varphi = (A, V) \mapsto \boldsymbol{f}(\varphi) = (A, K_V), \quad K_V(\cdot) \doteq \mathcal{K}_V(\cdot) \cap O_1[0]. \tag{19.5}$$

Отметим, что если $\varphi \in \Sigma$, то $\boldsymbol{f}(\varphi) = \varphi$. Кроме того, для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\boldsymbol{f}(\varphi_\tau)(\cdot) = \boldsymbol{f}_\tau(\varphi)(\cdot) \doteq \boldsymbol{f}(\varphi)(\cdot + \tau) \tag{19.6}$$

и, если $V(t) \subset K_V(t)$, $t \in \mathbb{R}$, то (см. лемму 13.1) при каждом фиксированном $\vartheta > 0$ и всех τ получаем следующие соотношения:

$$D(\varphi_\tau, \vartheta) \subset D(\boldsymbol{f}(\varphi_\tau), \vartheta) \overset{(19.6)}{=} D(\boldsymbol{f}_\tau(\varphi), \vartheta). \tag{19.7}$$

Далее, поскольку $\Sigma_1 \subset \mathfrak{S}$, то каждой паре $(\psi, \sigma) \in \Psi \times \Sigma_1$ можно поставить в соответствие множества $\Xi_\vartheta(\psi, \sigma)$ и $\Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \sigma)$, определенные равенствами (17.13) для $\varphi = \sigma$. При этом, если $\sigma = \boldsymbol{f}(\varphi)$, $\varphi = (A, V)$, то (см. (19.5))

$$\begin{cases} \Xi_\vartheta(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) = \{t \in [0, \vartheta] \colon \; c(\psi X(0, t; \varphi), K_V(t)) > 0\}, \\ \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) = \{t \in [0, \vartheta] \colon \; c(\psi X(0, t; \varphi), K_V(t)) \geqslant \beta\}. \end{cases} \tag{19.8}$$

Т е о р е м а 19.1. *Следующие утверждения являются равносильными:*

1) *система* $\varphi \in \mathbb{L}$;

2) *система* $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}$;

3) *существуют такие* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что* $\operatorname{mes} \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) \geqslant \varepsilon$ *при всех* $\psi \in \Psi_1$;

4) *существует такое* $\vartheta > 0$, *что* $\operatorname{mes} \Xi_{\vartheta}(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) > 0$ *при всех* $\psi \in \Psi_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi = (A, V) \in \mathbb{L}$. Тогда (см. обозначения (13.10), (17.11) и следствие 13.1) найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta > 0$, что при всех $\psi \in \Psi_1$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta) \geqslant \varepsilon$, из которого, в частности, следует, что $\boldsymbol{v} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,\vartheta]} |V(t)| \geqslant \varepsilon(\vartheta k)^{-1}$, где $k > 0$ задано равенством (17.7). В случае, если $\boldsymbol{v} < \infty$, то $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}$, поскольку в этом случае шар $O_{\varepsilon_1}[0]$, где $\varepsilon_1 \doteq \varepsilon/\boldsymbol{v}$ содержится множестве $D(\widetilde{\varphi}, \vartheta)$ управляемости системы $\widetilde{\varphi}(\cdot) \doteq (A(\cdot), \widetilde{V}(\cdot))$, в которой $\widetilde{V}(\cdot) \doteq \boldsymbol{v}^{-1} V(\cdot)$. Так как при п. в. $t \in [0, \vartheta]$ $|\widetilde{V}(t)| \leqslant 1$ и (см. (19.5)) $\mathcal{K}_{\widetilde{V}}(t) = \mathcal{K}_V(t)$, то (см. лемму 13.1 и (19.5)) $O_{\varepsilon_1}[0] \subset D(\boldsymbol{f}(\widetilde{\varphi}), \vartheta) = D(\boldsymbol{f}(\varphi), \vartheta)$. Следовательно $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}_{\varepsilon_1,\vartheta} \subset \mathbb{L}$. В случае, если $\boldsymbol{v} = \infty$, при каждом $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение $t \mapsto V_N(t) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, определенное равенством

$$V_N(t) \doteq \begin{cases} V(t), \text{ если } |V(t)| < N, \\ \frac{N}{|V(t)|} V(t) \text{ если } |V(t)| \geqslant N. \end{cases}$$

Из неравенства $\int\limits_0^{\vartheta} \operatorname{dist}(V(t), V_N(t))dt \leqslant 2 \int\limits_{E(N)} |V(t)|dt$, где $E(N) \doteq \{t \in [0, \vartheta] : |V(t)| \geqslant N\}$, получаем, что $\lim\limits_{N \to \infty} \int\limits_0^{\vartheta} \operatorname{dist}(V(t), V_N(t))dt = 0$. Отсюда, в силу леммы 17.2, следует существование такого $N_0 \in \mathbb{N}$, что для системы $\varphi_{N_0}(\cdot) = (A(\cdot), V_{N_0})$ при всех $\psi \in \Psi_1$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{C}(\psi, \varphi_{N_0}; \vartheta) \geqslant \varepsilon/2$ Поскольку $|V_{N_0}(t)| \leqslant N_0$, то шар $O_{\varepsilon_0}[0]$ радиуса $\varepsilon_0 \doteq \varepsilon/(2N_0)$ содержится в множестве управляемости $D(\varphi_0, \vartheta)$ системы $\varphi_0(\cdot) = (A(\cdot), V_0(\cdot))$, в которой $V_0(\cdot) \doteq N_0^{-1} V_{N_0}(\cdot)$. Принимая во внимание, что при п. в. $t \in [0, \vartheta]$ $|V_0(t)| \leqslant 1$ и $\mathcal{K}_{V_0}(t) = \mathcal{K}_V(t)$ получаем, что $O_{\varepsilon_0}[0]$ содержится в $D(\boldsymbol{f}(\varphi_0), \vartheta) = D(\boldsymbol{f}(\varphi), \vartheta)$, то есть $\boldsymbol{f}(\varphi) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon_0,\vartheta} \subset \mathbb{L}$. Тем самым доказано, что из первого утверждения следует второе утверждение. Из леммы 17.5, примененной для системы $\boldsymbol{f}(\varphi)$, получаем равносильность второго, третьего и четвертого утверджений теоремы 19.1. Покажем, далее, что из третьего утверждения этой теоремы следует существование такого $\varepsilon > 0$, что $\varphi \in \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Допустив противное получим существование такого вектора $\psi \in \Psi_1$, что $\mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta) = 0$. Далее, рассуждая как и при доказательстве аналогичного утверждения, приведенного в [85, 87] для системы φ при условии, что $\boldsymbol{v} \leqslant 1$, получим, что найдется измеримое отображение $t \mapsto \mathfrak{F}(t) \in \operatorname{Cone}(\mathbb{R}^n)$, $t \in [0, \vartheta]$, удолвлетворяющее условиям: 1) для любого $f \in \mathfrak{F}(t)$ найдутся такие $\lambda > 0$ и $v \in V(t)$, что $f = \lambda v$; 2) $\mathfrak{F}(t) \subset \mathcal{K}_V(t)$ при $t \in [0, \vartheta]$; 3) $\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \operatorname{dist}(F(t), K_V(t)) \leqslant k^{-1}\beta/2\}$, где $F(t) = \mathfrak{F}(t) \cap O_1[0]$, а $k > 0$ определено равенством (17.7). Из первого и последнего свойств отображения $t \mapsto \mathfrak{F}(t)$ получаем, что $\Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) \subset \{t \in [0, \vartheta] : c\,(X(0, t; \varphi), F(t)) \geqslant \beta/2\} \subset \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \doteq \{t \in [0, \vartheta] : c\,(X(0, t; \varphi), F(t) \cap V(t)) > 0\}$. Поэтому $\operatorname{mes} \mathfrak{M} \geqslant \varepsilon$, и следовательно $\mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta) \geqslant \int\limits_{\mathfrak{M}} c\,(X(0, t; \varphi), F(t) \cap V(t))dt > 0$. Последнее противоречит равенству $\mathfrak{C}(\psi, \varphi; \vartheta) = 0$. Таким образом, при выполнении условий третьего утверждения следует, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\varphi \in \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$, и значит выполнено первое утверждение. $\square$

Из теоремы 19.1 в силу следствия 18.2 получаем

С л е д с т в и е 19.1. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathcal{P}_0)$. *Тогда, если* $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}$, *то* $\varphi \in \mathbb{L}^0$.

Т е о р е м а 19.2. *Пусть система* $\varphi \in \mathfrak{S}$ *d-непрерывна. Тогда следующие утверждения являются равносильными:*

1) *система* $\varphi \in \mathbb{L}^0$;

2) *существуют такие* $\varepsilon, \vartheta > 0$, *что для всех* $\widehat{\varphi} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$ *система* $\boldsymbol{f}(\widehat{\varphi}) \in \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$;

3) *существуют такие* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что при всех* $(\psi, \widehat{\varphi}) \in \Psi_1 \times \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$ *справедливо неравенство* $\mathrm{mes}\ \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\widehat{\varphi})) > \varepsilon$;

4) *существует такое* $\vartheta > 0$, *что при всех* $(\psi, \widehat{\varphi}) \in \Psi_1 \times \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$ *выполнено неравенство* $\mathrm{mes}\ \Xi_\vartheta(\psi, \boldsymbol{f}(\widehat{\varphi})) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi = (A, V) \in \mathbb{L}^0$. Тогда (см. (13.10) и лемму 17.3) найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что каждая система $\widehat{\varphi} = (\widehat{A}, \widehat{V})$ из $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$ принадлежит $\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Если $v \doteq \sup\limits_{\tau \geqslant 0}(\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in [0,\vartheta]} |V_\tau(t)|) < \infty$, то (см. лемму 15.1 и пример 15.2) найдется такое $\boldsymbol{v} \in (0, \infty)$, что для каждого $\widehat{V} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(V))$ $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in [0,\vartheta]} |\widehat{V}(t)| \leqslant \boldsymbol{v}$. Отсюда следует, что для каждой системы $\widehat{\varphi}$ шар $O_{\varepsilon_0}[0]$ радиуса $\varepsilon_0 \doteq \varepsilon \boldsymbol{v}^{-1}$ будет содержаться в множестве управляемости $D(\widetilde{\varphi}, \vartheta)$ системы $\widetilde{\varphi}(\cdot) = (\widehat{A}(\cdot), \widetilde{V}(\cdot))$ в которой $\widetilde{V}(\cdot) \doteq \boldsymbol{v}^{-1}\widehat{V}(\cdot)$. Поскольку $\mathcal{K}_{\widetilde{V}}(t) = \mathcal{K}_{\widehat{V}}(t)$ и $|\widetilde{V}(t)| \leqslant 1$, то $O_{\varepsilon_0}[0]$ содержится в $D(\boldsymbol{f}(\widetilde{\varphi}), \vartheta) = D(\boldsymbol{f}(\widehat{\varphi}), \vartheta)$, то есть в рассматриваемом случае выполнено второе утверждение. Чтобы доказать его справедливость в случае, когда $v = \infty$ рассмотрим при каждом $N \in \mathbb{N}$ отображение

$$t \mapsto \widehat{V}_N(t) \doteq \begin{cases} \widehat{V}(t), \text{ если } |\widehat{V}(t)| < N, \\ \frac{N}{|\widehat{V}(t)|}\widehat{V}(t) \text{ если } |\widehat{V}(t)| \geqslant N, \end{cases}$$

и докажем сначала следующее предельное соотношение:

$$\int_0^\vartheta \mathrm{dist}(\widehat{V}(t), \widehat{V}_N(t))dt \underset{\widehat{V} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(V))}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } N \to \infty. \tag{19.9}$$

В самом деле, для любого $\widehat{V} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(V))$ найдется такая последовательность $\{V_{\tau_j}\}_{j=1}^\infty \subset \mathrm{orb}_g^+(V)$, что $\lim\limits_{j \to \infty} \int\limits_0^\vartheta \mathrm{dist}(\widehat{V}(t), V_{\tau_j}(t))dt = 0$. Рассмотрим, далее, при $h > 0$ стекловское усреднение $t \mapsto V(V(t;h))$, отвечающее отображению $t \mapsto V(t)$. Как отмечалось при доказательстве леммы 17.4 $\lim\limits_{h \downarrow 0} d_\vartheta(V(\cdot), V(\cdot\, h)) = 0$. Учитывая эти предельные равенства, а также (см. теорему 15.4) d-ограниченность множества $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(V))$, из соотношений

$$\int_0^\vartheta \mathrm{dist}(\widehat{V}(t), \widehat{V}_N(t))dt \leqslant 2\int_{E(N)} |\widehat{V}(t)|dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\Big[\int_0^\vartheta \mathrm{dist}(\widehat{V}(t), V_{\tau_j}(t))dt + \vartheta d_\vartheta(V(\cdot), V(\cdot\, h)) + \frac{\vartheta}{N} d_h(V(\cdot), 0) d_\vartheta(\widehat{V}(\cdot), 0)\Big],$$

где $E(N) \doteq \{t \in [0,\vartheta] : |\widehat{V}(t)| \geqslant N\}$, получим предельное соотношение (19.9). Из этого соотношения по лемме 17.2 следует существование такого $N_0 \in \mathbb{N}$, что для каждой системы $\widehat{\varphi} = (\widehat{A}, \widehat{V})$ из $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$ при всех $\psi \in \Psi_1$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}_{N_0}; \vartheta) \geqslant \varepsilon/2$, где $\widehat{\varphi}_{N_0}(\cdot) = (\widehat{A}(\cdot), \widehat{V}_{N_0})$. Далее, рассуждая как и при доказательстве теоремы 19.1 получим, что при $\varepsilon_0 \doteq \varepsilon/(2N_0)$ шар $O_{\varepsilon_0}[0] \subset D(\boldsymbol{f}(\widehat{\varphi}), \vartheta)$, то есть $\boldsymbol{f}(\widehat{\varphi}) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon_0,\vartheta} \subset \mathbb{L}$. Тем самым доказано, что из первого утверждения теоремы 19.2 следует второе утверждение, из которого, в свою очередь, при $\beta \in (0, \varepsilon/(2\vartheta))$ получаем третье утверждение. Поскольку $\Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\widehat{\varphi})) \subset \Xi_{\vartheta}(\psi, \boldsymbol{f}(\widehat{\varphi}))$, то из третьего утверждения, очевидно, следует четвертое утверждение. Покажем, что если выполнено четвертое утверждение, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\varphi \in \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$. Допустив противное, в силу компактности множеств Ψ_1 и $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi)) \subset \mathfrak{B}_0$ получим, что найдется такая пара $(\psi, \widehat{\varphi}) \in \Psi_1 \times \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$ при которой будет выполнено равенство $\mathfrak{C}(\psi, \widehat{\varphi}; \vartheta) = 0$. Из этого равенства следует, что для пары $(\widehat{\psi}, \widetilde{\varphi})$, в которой система $\widetilde{\varphi}(\cdot) = (\widehat{A}(\cdot), \widetilde{V}(\cdot))$, где $\widetilde{V}(\cdot) \doteq \widehat{V}(\cdot) \cap O_1[0]$, также будет справедливо равенство $\mathfrak{C}(\widehat{\psi}, \widetilde{\varphi}; \vartheta) = 0$. С другой стороны, поскольку $\mathcal{K}_{\widehat{V}}(t) = \mathcal{K}_{\widetilde{V}}(t)$, то в силу условий четвертого утверждения $\mathrm{mes}\,\Xi_{\vartheta}(\widehat{\psi}, \boldsymbol{f}(\widetilde{\varphi})) > 0$. Следовательно найдется такое $\beta > 0$, что $\mathrm{mes}\,\Xi_{\vartheta,\beta}(\widehat{\psi}, \boldsymbol{f}(\widetilde{\varphi})) \doteq \varepsilon > 0$. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 19.1 прийдем к противоречию. Действительно, для отображения $t \mapsto \widetilde{V}(t)$ рассмотрим отображение $t \mapsto \mathfrak{F}(t) \in \mathrm{Cone}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее условиям 1) – 3) аналогичным для отображения, отвечающего $t \mapsto V(t)$, указанным в доказательстве теоремы 19.1. В силу этих условий множество $\Xi_{\vartheta,\beta}(\widehat{\psi}, \boldsymbol{f}(\widetilde{\varphi})) \subset \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \doteq \{t \in [0,\vartheta] : c\,(\widehat{\psi}X(0,t;\widehat{\varphi}), F(t) \cap \widetilde{V}(t))\}$, и $F(t) \doteq \mathfrak{F}(t) \cap O_1[0]$. Следовательно $\mathrm{mes}\,\mathfrak{M} \geqslant \varepsilon$ и, значит, $\mathfrak{C}(\widehat{\psi}, \widetilde{\varphi}; \vartheta) \geqslant \int\limits_{\mathfrak{M}} c\,(\widehat{\psi}X(0,t;\widehat{\varphi}), F(t) \cap \widetilde{V}(t))dt > 0$, что противоречит равенству $\mathfrak{C}(\widehat{\psi}, \widetilde{\varphi}; \vartheta) = 0$. Тем самым доказано, что четвертое утверждение влечет существование такого $\varepsilon > 0$, что $\varphi \in \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$. $\square$

С л е д с т в и е 19.2. *Если* $\varphi \in \mathbb{L}^0$, *то* $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}^0$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varphi \in \mathbb{L}^0$, то из второго утверждения теоремы 19.2 (см. также лемму 17.3) в силу (19.6) следует, что для всех $\tau \geqslant 0$ $\boldsymbol{f}_{\tau}(\varphi) \in \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$, то есть (см. определение 13.1) $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}^0$.

З а м е ч а н и е 19.1. В силу теоремы 19.1 свойство локальной управляемости системы $\varphi = (A, V)$ из $\mathfrak{S}$ равносильно локальной управляемости системы $\boldsymbol{f}(\varphi) \overset{(19.5)}{=} (A, K_V)$, а в силу следствия 19.1 равномерная локальная управляемость системы φ влечет равномерную локальную управляемость отвечающей ей системы $\boldsymbol{f}(\varphi)$. Обратное же утверждение, вообще говоря, неверно. Действительно, рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x} = x + v(t)$, где $v(t) \in V(t) \doteq [-e^{-t}, e^{-t}]$, $t \geqslant 0$. Поскольку $\mathcal{K}_V(t) = \mathbb{R}$, то $K_V(t) = [-1, 1]$ при всех $t \geqslant 0$. Уравнение $\dot{x} = x + v(t)$ при $v(t) \in [-1, 1]$ является равномерно локально управляемым, тогда как исходное уравнение не является равномерно локально управляемым. Вместе с тем, если в рассматриваемой системе $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot))$ функция $V(\cdot)$ такая, что для каждого $\widehat{V} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(V))$ отображение $t \mapsto K_{\widehat{V}}(t) \doteq \mathcal{K}_{\widehat{V}}(t) \cap O_1[0]$ принадлежит $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(K_V))$, то из условия $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}^0$ следует, что $\varphi \in \mathbb{L}^0$. В самом деле, если $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}^0$, то по лемме 17.3 найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\boldsymbol{f}(\varphi))) \subset \mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Покажем, теперь, что найдется $\varepsilon_1 > 0$ при котором $\varphi \in \mathbb{L}^0_{\varepsilon_1,\vartheta}$. Допустив противное получим, что найдутся такие $\widehat{\psi} \in \Psi_1$ и $\widehat{\varphi} = (\widehat{A}, \widehat{V}) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$ при которых будет выполнено равенство $\mathfrak{C}(\widehat{\psi}, \widehat{\varphi}; \vartheta) = 0$. Теперь, в силу сделанного предположения на $V(\cdot)$, система $(\widehat{A}(\cdot), K_{\widehat{V}}(\cdot))$ принадлежит множеству $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\boldsymbol{f}(\varphi)))$, содержащемуся в $\mathbb{L}_{\varepsilon,\vartheta}$. Следовательно $\mathrm{mes}\, \Xi_\vartheta(\widehat{\psi}, \boldsymbol{f}(\widehat{\varphi})) > 0$. Рассуждая как и при доказательстве импликации 4) $\Rightarrow$ 1) в теореме 19.2 получим противоречие. Тем самым получаем, что при указанном ограничении на $V(\cdot)$ из условия $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \mathbb{L}^0$ следует, что $\varphi \in \mathbb{L}^0$.

Таким образом, исследование вопроса о принадлежности системы φ множествам $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}^0$ тесно связано с вопросом о принадлежности этим множествам системы $\boldsymbol{f}(\varphi)$ (см. (19.4), (19.5)) с более простой геометрической структурой множества допустимых управлений, и в ряде случаев исследование вопроса о локальной или равномерной локальной управляемости системы $\boldsymbol{f}(\varphi) \in \Sigma_1$ проще, нежели исходной системы φ. Отметим, что вопрос о локальной и равномерной локальной управляемости систем из Σ_1 (а значит, по теоремам 19.1, 19.2, и систем, принадлежащих $\mathfrak{S}$) тесно связан с вопросом о поведении решений однородной системы дифференциальных уравнений относительно выпуклого замкнутого конуса с вершиной в нуле. Для указания этой связи введем в следующем пункте понятия колеблемости и равномерной колеблемости системы дифференциальных уравнений относительно конуса.

2. Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x, \ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{19.10}$$

и конус $\mathcal{H}(t) \in \mathrm{Cone}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$. В дальнейшем всякую такую пару (система и конус) отождествляем с отображением $t \mapsto \sigma(t) = (P(t), \mathcal{H}(t))$ и предполагаем, что $\sigma \in \Sigma$, и через $X(\cdot, \cdot; \sigma)$ обозначаем оператор Коши системы (19.10).

Напомним, далее, что углом между $x, y \in \mathbb{R}^n$ называется число $\measuredangle(x, y) \in [0, \pi]$ такое, что $\cos \measuredangle(x, y) = x^* y / |x| \cdot |y|$, и углом между $x \in \mathbb{R}^n$ и конусом $K \in \mathrm{Cone}(\mathbb{R}^n)$ называется величина

$$\measuredangle(x, K) \doteq \min_{y \in \mathrm{pr}\, K} \measuredangle(x, y), \quad \mathrm{pr}\, K \doteq K \cap S_1(0). \tag{19.11}$$

О п р е д е л е н и е 19.1. Система (19.10) называется *колеблющейся относительно конуса* $\mathcal{H}(t)$, $t \geqslant 0$, *на полуинтервале* $[\tau, \infty)$ $(\tau \geqslant 0)$, если для каждого нетривиального решения $x(t) = x(t; \tau, x_0)$ этой системы справедливо неравенство

$$\mathrm{mes}\{t \geqslant \tau \colon \measuredangle(x(t), \mathcal{H}(t)) > 0\} > 0, \tag{19.12}$$

и называется *колеблющейся относительно конуса* $\mathcal{H}(t)$, $t \geqslant 0$, если она является колеблющейся относительно этого конуса на каждом полуинтервале $[\tau, \infty)$, $\tau \geqslant 0$.

Совокупность пар $(P, \mathcal{H}) \in \Sigma$ таких, что система (19.10) (или коротко система P) является колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t)$ на $[\tau, \infty)$, обозначим через $\mathfrak{K}(\tau)$. Тогда

$$\mathfrak{K} \doteq \bigcap_{\tau \geqslant 0} \mathfrak{K}(\tau)$$

это множество таких пар $(P, \mathcal{H}) \in \mathfrak{S}_{\mathrm{Cone}}$, что система P является колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 19.2. Система (19.10) называется *равномерно колеблющейся относительно конуса* $\mathcal{H}(t)$, $t \geqslant 0$, если найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для любого $\tau \geqslant 0$ и каждого (нетривиального) решения $x(t) = x(t; \tau, x_0)$, $x_0 \in S_1(0)$ этой системы выполнено неравенство

$$\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] \colon \measuredangle(x(t), \mathcal{H}(t)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon. \tag{19.13}$$

Совокупность пар $(P, \mathcal{H}) \in \Sigma$ таких, что система (19.10) является равномерно колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначим через $\mathfrak{K}^0$.

З а м е ч а н и е 19.2. Если

$$\mathcal{H}^{\#}(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^* y \leqslant 0 \text{ для всех } y \in \mathcal{H}(t)\}, \tag{19.14}$$

то есть [124] $\mathcal{H}^{\#}(t)$ — полярный конус для $\mathcal{H}(t)$, то, как несложно видеть, $(P, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}^0$ в том и только в том случае, если найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, причем $\beta < \frac{\pi}{2}$, что для всякого $\tau \geqslant 0$ и каждого решения $x(t) = x(t; \tau, x_0)$, $x_0 \in S_1(0)$ системы (19.10) выполнено следующее соотношение

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [\tau, \tau + \vartheta] \colon \measuredangle(x(t), \mathcal{H}^{\#}(t)) \leqslant \beta\} \geqslant \varepsilon. \tag{19.15}$$

З а м е ч а н и е 19.3. Если в системе (19.10)

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n(t) & \ldots & \ldots & \ldots & -p_1(t) \end{bmatrix}, \tag{19.16}$$

а в качестве конуса $\mathcal{H}(t)$ взять конус

$$\mathcal{H}(t) \equiv \{x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \leqslant 0\},$$

то определение 19.1 эквивалентно тому, что при любом $\tau \geqslant 0$ каждое нетривиальное решение линейного дифференциального уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t) x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t) x = 0 \tag{19.17}$$

меняет знак на $[\tau, \infty)$ (то есть все решения уравнения (19.17) колеблющиеся, см. [95, с. 950]), а определение 19.2 эквивалентно следующему свойству решений уравнения (19.17): существуют такие константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для любого $\tau \geqslant 0$ и каждого решения $x(t) = x(t; \tau, x_0)$, $x_0 \in S_1(0)$ этого уравнения справедливо неравенство $\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] \colon x(t) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$, и в этом случае уравнение (19.17) называется равномерно колеблющимся. Отметим, что если уравнение (19.17) является равномерно колеблющимся, то при любом $\tau \geqslant 0$ всякое нетривиальное решение $x(t; \tau, x_0)$ этого уравнения на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ хотя бы один раз сменит знак.

Л е м м а 19.1. *Пара $\sigma = (P, \mathcal{H})$ принадлежит $\mathfrak{K}^0$ в том и только в том случае, если существуют такие $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для всех $(\tau, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times S_1(0)$ выполнено неравенство*

$$\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\ c(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, H_\tau^{\#}(t)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon, \tag{19.18}$$

где $H_\tau^{\#}(t) \doteq \mathcal{H}_\tau^{\#}(t) \cap O_1[0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma \in \mathfrak{K}^0$. Тогда (см. замечание 19.1) найдутся такие $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для всех $(\tau, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times S_1(0)$ будет справедливо неравенство (19.15), или, что равносильно,

$$\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\ \measuredangle(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, \mathcal{H}_\tau^{\#}(t)) \leqslant \beta\} \geqslant \varepsilon. \tag{19.19}$$

Далее, поскольку для всех $x_0 \in S_1(0)$ и $(\tau, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \vartheta]$ справедливы неравенства $k^{-1} \leqslant |X(t, 0; \sigma_\tau)x_0| \leqslant k$, где константа $k = k(\vartheta, \varphi)$ определена равенством (17.7) при $\varphi \doteq (P, H^{\#})$, то из определения опорной функции получаем, что

$$c(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, H_\tau^{\#}(t)) \geqslant k^{-1} \max_{y \in H_\tau^{\#}(t)} |y| \cos \measuredangle(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, y) =$$
$$= k^{-1} \cos(\min_{y \in \operatorname{pr}\mathcal{H}_\tau^{\#}(t)} \measuredangle(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, y)) \overset{(19.11)}{=} k^{-1} \cos \measuredangle(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, \mathcal{H}_\tau^{\#}(t)).$$

Отсюда, в силу (19.19), следует, что для всех $(\tau, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times S_1(0)$

$$\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\ c(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, H_\tau^{\#}(t)) \geqslant k^{-1} \cos \beta\} \geqslant \varepsilon,$$

тем самым, необходимость условий леммы 19.1 доказана. Пусть, теперь, при некоторых $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$ и всех $(\tau, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times S_1(0)$ справедливо неравенство (19.18). В этом случае имеем следующие соотношения:

$$\varepsilon \leqslant \operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\ \max_{y \in H_\tau^{\#}(t)} \cos \measuredangle(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, y) \geqslant k^{-1}\beta\} =$$
$$= \operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\ \cos(\min_{y \in \operatorname{pr}\mathcal{H}_\tau^{\#}(t)} \measuredangle(X(t, 0; \sigma_\tau)x_0, y)) \geqslant k^{-1}\beta\},$$

из которых вытекает существование такой константы $\beta_1 \in (0, \pi/2)$, что для всех $(\tau, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times S_1(0)$ будет справедливо неравенство (19.19) при $\beta = \beta_1$.

Далее, в Σ выделим два подмножества

$$\mathfrak{K}_{\varepsilon,\vartheta,\beta} \doteq \bigl\{\sigma = (P, \mathcal{H}) \colon\ \inf_{x_0 \in S_1(0)} \operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\ \measuredangle(X(t, 0; \sigma)x_0, \mathcal{H}(t)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon\bigr\}, \tag{19.20}$$

$$\mathfrak{K}_{\vartheta} \doteq \bigl\{\sigma = (P, \mathcal{H}) \colon\ \inf_{x_0 \in S_1(0)} \operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\ \measuredangle(X(t, 0; \sigma)x_0, \mathcal{H}(t)) > 0\} > 0\bigr\}, \tag{19.21}$$

отвечающих константам $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$.

Л е м м а 19.2. *При каждом $\tau \geqslant 0$ следующие утверждения являются равносильными:*

1) *пара $(P, \mathcal{H})$ принадлежит $\mathfrak{K}(\tau)$;*
2) *пара $(P_\tau, \mathcal{H}_\tau) \in \bigcup_{\varepsilon,\vartheta,\beta>0} \mathfrak{K}_{\varepsilon,\vartheta,\beta}$;*
3) *пара $(P_\tau, \mathcal{H}_\tau) \in \bigcup_{\vartheta>0} \mathfrak{K}_{\vartheta}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma = (P, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}(\tau)$. Тогда из (19.12) и определения опорной функции, с учетом замечания 19.2, получим, что при каждом x_0, принадлежащем $S_1(0)$, найдется такое $\beta = \beta(\tau, x_0) > 0$, что будет выполнено неравенство $\operatorname{mes}\{t \geqslant \tau\colon\ c(X(t,\tau;\sigma)x_0, H^{\#}(t)) \geqslant \beta\} > 0$. Отсюда, в свою очередь, вытекает существование таких констант $\varepsilon = \varepsilon(\tau, x_0)$, $\vartheta = \vartheta(\tau, x_0)$, что для

$$I(x_0, \vartheta) \doteq \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} c(X(t,\tau;\sigma)x_0, H^{\#}(t))dt$$

будет справедливо неравенство $I(x_0, \vartheta) \geqslant \varepsilon$.

Сейчас покажем, что существуют такие положительные константы $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ и $\vartheta = \vartheta(\tau)$, что при всех $x_0 \in S_1(0)$ будет выполняться неравенство $I(x_0, \vartheta) \geqslant \varepsilon$. Действительно, если допустить противное, то найдется такая последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S_1(0)$, для которой $I(x_j, j) < 1/j$. В силу компактности $S_1(0)$ можно считать, что $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_0 \in S_1(0)$. Теперь, для этой пары (τ, x_0), как было указано выше, необходимо найдутся $\varepsilon = \varepsilon(\tau, x_0) > 0$ и $\vartheta = \vartheta(\tau, x_0) > 0$, при которых $I(x_0, \vartheta) \geqslant \varepsilon$. С другой стороны, при всех $j > \vartheta$ имеем (здесь см.(17.7)) следующие соотношения:

$$\varepsilon \leqslant (I(x_0, \vartheta) - I(x_j, \vartheta)) + I(x_j, \vartheta) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |c(X(t,\tau;\sigma)x_0, H^{\#}(t)) - c(X(t,\tau;\sigma)x_j, H^{\#}(t))|dt + \mathfrak{p}(x_j, j) \leqslant c\vartheta|x_0 - x_j| + 1/j.$$

из которых, переходя к пределу при $j \to \infty$, получим противоречивое неравенство.

Таким образом, доказано существование констант $\varepsilon, \vartheta > 0$ при которых для всех $x_0 \in S_1(0)$ $\quad I(x_0, \vartheta) \geqslant \varepsilon$. Далее, в силу непрерывности отображения $x_0 \mapsto I(x_0, \vartheta)$, следуя схеме доказательства утверждения 3) леммы 17.5, получим, что при некоторых $\varepsilon_1, \beta_1 > 0$ при всех $x_0 \in S_1(0)$ $\quad \operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta]\colon\ c(X(t,0;\sigma_\tau)x_0, H^{\#}_{\tau}(t)) \geqslant \beta_1\} \geqslant \varepsilon_1$. Сейчас, практически повторив доказательство достаточных условий в лемме 19.1, получим, что выполнено утверждение 2) в лемме 19.2, из которого (см. (19.20) и (19.21)) следует третье утверждение. В свою очередь, из этого утверждения, принимая во внимание (19.21) и определение 19.1 получаем первое утверждение. $\square$

З а м е ч а н и е 19.4. Из доказательства леммы 19.2 следует, что пара $\sigma = (P, \mathcal{H})$ принадлежит при $\tau \geqslant 0$ множеству $\mathfrak{K}(\tau)$ в том и только в том случае, если существуют такие положительные константы $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$, $\vartheta = \vartheta(\tau)$, $\beta = \beta(\tau)$, что при всех $x_0 \in S_1(0)$ будет выполняться неравенство (19.18), и что последнее утверждение равносильно существованию такого $\vartheta = \vartheta(\tau) > 0$, что при всех $x_0 \in S_1(0)$ справедливо неравенство $\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta]\colon\ c(X(t,0;\sigma_\tau)x_0, H^{\#}_{\tau}(t)) > 0\} > 0$.

С л е д с т в и е 19.3. *Пара $\sigma = (P, \mathcal{H})$ принадлежит $\mathfrak{K}$ в том и только в том случае, если для каждого $\tau \geqslant 0$ $\quad (P_\tau, \mathcal{H}_\tau) \in \mathfrak{K}(0)$.*

3. Здесь укажем связь между множествами $\mathfrak{K}$ и $\mathbb{L}$, $\mathfrak{K}^0$ и $\mathbb{L}^0$, соответственно.

Согласно сказанному в п. 1, каждой системе управления $\varphi(\cdot) = (A(\cdot), V(\cdot))$ из $\mathfrak{S}$ можно поставить в соответствие пару $\boldsymbol{h}(\varphi)(\cdot) \overset{(19.3)}{=} (A(\cdot), \mathcal{K}(\cdot)) \in \Sigma$, в которой $\mathcal{K}_V(t) \doteq \overline{\operatorname{cone}}\, V(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В свою очередь, по $\boldsymbol{h}(\varphi)(\cdot)$ построим следующее отображение $(-A^*(\cdot), \mathcal{H}(\cdot)) \in \Sigma$, где

$$\mathcal{H}(t) \doteq \mathcal{K}^{\#}_V(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{19.22}$$

(то есть $\mathcal{H}(t)$ — конус, полярный для $\mathcal{K}_V(t)$). В приводимых далее утверждениях, если не оговорено специально, $\mathcal{H}(t)$ задается при всех t равенством (19.22).

Т е о р е м а 19.3. *Система* $\varphi = (A, V)$ *из* $\mathfrak{S}$ *принадлежит* $\mathbb{L}$ *в том и только в том случае, если отвечающая ей пара* $(-A^*, \mathcal{H})$ *из* Σ *принадлежит* $\mathfrak{K}(0)$, *и для того чтобы* $\mathrm{orb}_g^+(\varphi) \subset \mathbb{L}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $(-A^*, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система $\varphi = (A, V) \in \mathbb{L}$. Тогда по теореме 19.1 существуют такие константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для всех $(\psi, \tau) \in \Psi_1 \times \mathbb{R}_+$ будет выполнено следующее неравенство

$$\varepsilon < \mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\varphi)) \overset{(19.8)}{=} \mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\, c\,(\psi X(0, t; \varphi), K_V(t)) \geqslant \beta\},$$

в котором $K_V(\cdot) \overset{(19.5)}{=} \mathcal{K}_V(\cdot) \cap O_1[0]$. Поэтому по лемме 19.2 (см. также замечание 19.4), примененной для пары $\sigma = (-A^*, \mathcal{H})$ и равенств $\mathcal{H}^\#(t) \overset{(19.22)}{=} (\mathcal{K}_V^\#(t))^\# = \mathcal{K}_V(t)$, получаем, что пара $(-A^*, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}(0)$, то есть система $\dot{x} = -A^*(t)x$ является колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t)$, определенного при всех t равенством (19.22). Обратное утверждение доказывается также с последовательным применением леммы 19.2 для пары $(-A^*, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}(0)$, а затем утверждения теоремы 19.1. Аналогичным образом доказывается равносильность включения $\mathrm{orb}_g^+(\varphi) \subset \mathbb{L}$ и условия $(-A^*, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}$. □

Сейчас для произвольно фиксированной пары $(P, \mathcal{H}) \in \Sigma$ построим множество

$$\mathfrak{M} \doteq \{(-P^*, V) \in \mathfrak{S} \colon\, (\overline{\mathrm{cone}}\, V(t))^\# = \mathcal{H}(t),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Из теоремы 19.3 получаем следующее утверждение.

С л е д с т в и е 19.4. *Если* $(P, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}(0)$, *то* $\mathfrak{M} \subset \mathbb{L}$, *и если* $\mathfrak{M} \cap \mathbb{L} \neq \varnothing$, *то* $(P, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}(0)$.

В следующей теореме 19.4 $\widehat{\mathcal{H}}(t) \doteq \mathcal{K}_{\widehat{V}}^\#(t)$.

Т е о р е м а 19.4. *Система* $\varphi = (A, V)$ *из* $\mathfrak{S}$ *принадлежит множеству* $\mathbb{L}^0$ *в том и только в том случае, если существует такое* $\vartheta > 0$, *что для каждой системы* $\widehat{\varphi} = (\widehat{A}, \widehat{V}) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$, *отвечающая ей пара* $(-\widehat{A}^*, \widehat{\mathcal{H}}) \in \mathfrak{K}_\vartheta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система $\varphi = (A, V) \in \mathbb{L}^0$. Тогда по теореме 19.2 существуют такие константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что для каждой системы $\widehat{\varphi} = (\widehat{A}, \widehat{V})$, принадлежащей $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\varphi))$, при всех $\psi \in \Psi_1$ будет выполнено неравенство

$$\varepsilon < \mathrm{mes}\, \Xi_{\vartheta,\beta}(\psi, \boldsymbol{f}(\widehat{\varphi})) \overset{(19.8)}{=} \mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] \colon\, c\,(\psi X(0, t; \widehat{\varphi}), K_{\widehat{V}}(t)) \geqslant \beta\},$$

в котором $K_{\widehat{V}}(\cdot) \overset{(19.5)}{=} \mathcal{K}_{\widehat{V}}(\cdot) \cap O_1[0]$. Поэтому по лемме 19.2, примененной для пары $\sigma = (-\widehat{A}^*, \widehat{\mathcal{H}})$ и равенств $\widehat{\mathcal{H}}^\#(t) = (\mathcal{K}_{\widehat{V}}^\#(t))^\# = \mathcal{K}_{\widehat{V}}(t)$, получаем, что пара (см. (19.20), (19.21)) $(-A^*, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}_{\varepsilon,\vartheta,\beta} \subset \mathfrak{K}_\vartheta$, то есть система $\dot{x} = -\widehat{A}^*(t)x$ является колеблющейся относительно конуса $\widehat{\mathcal{H}}(t) \doteq \mathcal{K}_{\widehat{V}}^\#(t)$. Обратное утверждение доказывается также с последовательным применением леммы 19.2 для пары $(-\widehat{A}^*, \widehat{\mathcal{H}}) \in \mathfrak{K}_\vartheta$, а затем утверждения теоремы 19.2. □

З а м е ч а н и е 19.5. Если система $\varphi \in \mathbb{L}^0$, то из теоремы 19.2 и леммы 19.1 следует, что отвечающая ей пара $(-A^*, \mathcal{H})$ принадлежит $\mathfrak{K}^0$, то есть (см. определение 19.2) система $\dot{x} = -A^*(t)x$ является равномерно колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t)$, определенного равенством (19.22). Обратное утверждение, как следует из приведенного в замечании 19.1 примера, вообще говоря, неверно. Заметим также, что достаточные условия в теореме 19.4 обеспечивают наряду с равномерной локальной управляемостью системы φ, в силу леммы 19.1, условие того, что пара $(-A^*, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}^0$.

Указанная в теоремах 19.3 и 19.4 связь между множествами $\mathfrak{K}$ и $\mathbb{L}$, $\mathfrak{K}^0$ и $\mathbb{L}^0$, соответственно, позволяет переносить результаты, полученные при исследовании вопросов локальной и равномерной локальной управляемости систем из пространства $\mathfrak{S}$, в теорию колеблемости (что будет сделано в следующем параграфе) и наоборот, позволяет использовать результаты о поведении решений однородных систем дифференциальных уравнений относительно выпуклого замкнутого конуса с вершиной в нуле в исследоваиние структуры множеств $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}^0$. Так, в частности, используя теорему 19.3, теоремы 18.1 и 18.2 можно переписать в виде следующих утверждений.

Т е о р е м а 19.5. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное инвариантное (относительно потока g^t) множество из $\mathfrak{S}$ и $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если каждое $\mathcal{E}_\alpha$ содержит такую систему $\varphi_\alpha = ((A_\alpha, V_\alpha))$, что $(-A^*_\alpha, \mathcal{H}_\alpha) \in \mathfrak{K}(0)$, где $\mathcal{H}_\alpha(t) = (\overline{\operatorname{cone}}\, V_\alpha(t))^{\#},\ t \in \mathbb{R}$, то найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что $\mathcal{E} \subset \mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$.*

Т е о р е м а 19.6. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{S}$ и $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — совокупность всех минимальных подмножеств из $\Omega(\varphi)$. Тогда $\varphi \in \mathbb{L}^0$ в том и только в том случае, если каждое $\mathcal{E}_\alpha$ содержит такую систему $\varphi_\alpha = ((A_\alpha, V_\alpha))$, что $(-A^*_\alpha, \mathcal{H}_\alpha) \in \mathfrak{K}(0)$, где $\mathcal{H}_\alpha(t) = (\overline{\operatorname{cone}}\, V_\alpha(t))^{\#},\ t \in \mathbb{R}$.*

Далее, в работе [87] доказана

Т е о р е м а 19.7. *Пусть $(P, \mathcal{H}) \in \mathcal{P}_{\mathrm{Cone}}$. Тогда эта пара принадлежит $\mathfrak{K}(0)$ в том и только в том случае, если матрица P не имеет вещественных собственных векторов, принадлежащих конусу $\mathcal{H}$, и не имеет комплексных собственных векторов, ортогональных конусу $\mathcal{H}^{\#}$ полярному к $\mathcal{H}$.*

Из этой теоремы, а также теоремы 19.4 (см. также теорему 18.4) вытекает

Т е о р е м а 19.8. *Стационарная система управления $\varphi = (A, V)$ из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathbb{L}$ (а значит и $\mathbb{L}^0$) в том и только в том случае, если матрица $-A^*$ не имеет вещественных собственных векторов, принадлежащих конусу $\mathcal{H}$ полярному к конусу $\mathcal{K} \doteq \overline{\operatorname{cone}} V$, и не имеет комплексных собственных векторов ортогональных $\mathcal{K}$.*

Теорема 19.8 была впервые доказана в [96], опираясь на непосредственное определение локальной управляемости. Отметим, далее, что доказательство теоремы 19.7, приведенное в [87], позволяет эффективно (в терминах матрицы P и конуса $\mathcal{H}$) оценивать константы $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, входящие в определение равномерной колеблемости. Нахождению этих констант и их использованию при исследовании вопросов управляемости посвящены работы [40, 43]. В заключение же этого параграфа приведем ряд примеров, иллюстрирующего его основные результаты.

П р и м е р 19.1. С фиксированным конусом $\mathcal{K} \in \mathrm{Cone}(\mathbb{R}^n)$ свяжем отображение $x \mapsto q(x) \doteq \max\limits_{y \in \mathrm{pr}\mathcal{K}} x^* y$, $x \in \mathbb{R}^n$. Легко видеть, что q — положительно-однородный выпуклый функционал, причем $\mathcal{K}^\# = \{x \in \mathbb{R}^n : \ q(x) \leqslant 0\}$ и $q(x) > 0$ в том и только в том случае, если $x \notin \mathcal{K}^\#$, или, что равносильно $\measuredangle(x, \mathcal{K}^\#) > 0$. Таким образом [97, с. 49], введенный функционал q выделяет конус $\mathcal{K}^\#$ полярный к $\mathcal{K}$. Отметим, далее, что для любых $x, h \in \mathbb{R}^n$ существует

$$q_-^{'}(x,h) \doteq \lim_{\lambda \uparrow 0} \frac{q(x+\lambda h) - q(x)}{\lambda},$$

причем, в силу определения функционала q, для каждого $x \in \partial \mathcal{K}^\#$

$$q_-^{'}(x,h) \doteq \lim_{\lambda \uparrow 0} \frac{1}{\lambda} q(x+\lambda h).$$

Теперь рассмотрим пару $(A, \mathcal{K}) \in \mathfrak{S}_{\mathrm{Cone}}$, где $A \in C(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, а $\mathcal{K}$ — постоянный конус такой, что полярный к нему конус $\mathcal{H}$ является телесным. Покажем, сейчас, что если при каждом $x \in \partial\mathcal{H}$ и всех $t \geqslant 0$

$$q_-^{'}(x, -A^*(t)x) \leqslant 0, \tag{19.23}$$

то множество

$$\boldsymbol{h}^{-1}\{(A,\mathcal{K})\} \overset{(19.3)}{=} \{(A,V) \in \mathfrak{S} : \ \boldsymbol{h}(A,V) = (A,\mathcal{K})\}$$

не принадлежит $\mathbb{L}$. Действительно, если допустить противное, то найдется такая система $\sigma = (A, V) \in \boldsymbol{h}^{-1}\{(A,\mathcal{K})\}$, которая локально управляема, а стало быть, по теореме 19.5 и лемме 19.2 найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta > 0$, что при всех $\psi \in \Psi_1$ $\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \ \measuredangle(\psi X(0,t;\sigma), \mathcal{H}) > 0\} \geqslant \varepsilon$, или, что равносильно, $\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \ q(\psi X(0,t;\sigma)) > 0\} \geqslant \varepsilon$. Из последнего неравенства вытекает, что для $x_0 \in \mathrm{int}\mathcal{H}$ существует такой отрезок $[t_1, t_2] \subset [0, \vartheta]$, что решение $\psi^*(t; 0, x_0)$ системы $\dot{x} = -A^*(t)x$ при $t = t_1$ принадлежит $\partial\mathcal{H}$, а при $t \in (t_1, t_2]$ не принадлежит конусу $\mathcal{H}$. С другой стороны, так как функционал q выделяет конус $\mathcal{H}$, то [97, с. 77] в силу (19.23) $\psi^*(t; 0, x_0)$ должно принадлежать конусу $\mathcal{H}$ при всех $t \geqslant t_1$. Полученное противоречие показывает, что $\boldsymbol{h}^{-1}\{(A,\mathcal{K})\}$ не принадлежит множеству $\mathbb{L}$.

Сейчас проиллюстрируем вышеустановленный факт на следующем примере. Пусть

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & a(t) \\ b(t) & 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{19.24}$$

а в качестве $\mathcal{K} \in \mathrm{Cone}(\mathbb{R}^2)$ возьмем конус, совпадающий с первой координатной четвертью в $\mathbb{R}^2$. Покажем, что если $a, b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, то всякая двумерная система управления (A, V) из $\mathfrak{S}$ в которой при всех $t \in \mathbb{R}$ $A(t)$ задается равенством (19.24), а $V(t)$ такое, что $\overline{\mathrm{cone}} V(t) = \mathcal{K}$, не является локально управляемой. В самом деле, в данном случае полярным конусом $\mathcal{H}$ для $\mathcal{K}$ будет третья координатная четверть в $\mathbb{R}^2$ и для каждого $x \in \partial\mathcal{H}$ $q_-^{'}(x, -A^*(t)x) \leqslant 0$. Поэтому, в силу вышесказанного множество $\boldsymbol{h}^{-1}\{(A,\mathcal{K})\}$ не принадлежит $\mathbb{L}$.

П р и м е р 19.2. Рассмотрим систему $\dot{x} = -A^*(t)x,\ x \in \mathbb{R}^2$ в которой

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & a(t) \\ -a(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad a(t) \doteq \operatorname{sign}(\sin t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{19.25}$$

Всякое решение $x(\cdot)$ этой системы 2π-периодично, и его сужение на $[0, 2\pi]$ имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} (r\sin(t+\alpha), r\cos(t+\alpha)),\ \text{если}\ t \in [0, \pi), \\ (-r\sin(t+\alpha), r\cos(t+\alpha)),\ \text{если}\ t \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \tag{19.26}$$

где пара $(r, \alpha) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi]$ задает вектор начальных условий. Из (19.26) вытекает, что траекторией решения служит полуокружность

$$\{(r\sin(t+\alpha), r\cos(t+\alpha)),\ t \in [0, \pi]\},$$

причем при изменении t от 0 до π фазовая точка движется по часовой стрелке, а затем за время от π до 2π возвращается в исходную точку, двигаясь против часовой стрелки.

Теперь, зная характер движения решений рассматриваемой системы, приведем примеры двумерных систем управления (A, V) из $\mathfrak{S}$ с матрицей $A(t),\ t \in \mathbb{R}$, определенной равенством (19.25), принадлежащих $\mathbb{L}^0$.

Рассмотрим сначала систему (A, V), в которой

$$V(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ |\sin t| \end{bmatrix} W(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{19.27}$$

и где, в свою очередь, 2π - периодическое отображение $t \mapsto W(t) \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R})$ такое, что

$$W(t) = \begin{cases} [-1, 0],\ \text{если}\ t \in [0, \pi), \\ [0, 1],\ \text{если}\ t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Для указанного $V(t)$ полярным конусом $\mathcal{H}(t)$ для $\mathcal{K}(t) \doteq \overline{\operatorname{cone}} V(t)$ будет конус, представляющий собой полупространство, причем $\mathcal{H}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_1 \geqslant 0\}$, и с возрастанием t от 0 до π он поворачивается против часовой стрелки (то есть навстречу фазовым точкам системы $\dot{x} = -A^*(t)x$), и $\mathcal{H}(\pi) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_1 \leqslant 0\}$ и при изменении t от π до 2π конус $\mathcal{H}(t)$ поварачивается по часовой стрелке(то есть снова навстречу фазовым точкам рассматриваемой системы), и при этом $\mathcal{H}(2\pi) = \mathcal{H}(0)$. Таким образом, при возрастании t от 0 до 2π всякое решение $x(t)$ (см. (19.26)) находится вне конуса $\mathcal{H}(t)$ время, равное π и такое же время в конусе $\mathcal{H}(t)$, то есть система $\dot{x} = -A^*(t)x$ с матрицей $A(t)$, определенной равенством (19.25), является колеблющейся относительно конуса $\mathcal{H}(t) = \mathcal{K}^{\#}(t)$. По теореме 19.3 система $\varphi = (A, V)$ (см. (19.25) и (19.27)) принадлежит, во-первых, $\mathbb{L}$, а во-вторых, в силу ее периодичности, по теореме 18.2 она принадлежит $\mathbb{L}^0$.

Отметим, что рассматриваемая система $\dot{x} = -A^*(t)x, x \in \mathbb{R}^2$ будет колеблющейся относительно любого постоянного конуса $\mathcal{H} \in \operatorname{Cone}(\mathbb{R}^2)$, угол раствора которого меньше π. Следовательно, всякая система $\varphi = (A, V)$ с матрицей, определенной равенством (19.25), и в которой $V(t)$ такое, что $\overline{\operatorname{cone}}\, V(t) = \mathcal{H}^{\#}$, будет локально управляемой. При этом, если $V \in S(\mathbb{R}, \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2))$, то по теореме 18.8 эта система будет принадлежать $\mathbb{L}^0$. Отсюда, в частности, следует, что каждая из систем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_j a(t)x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -r_j a(t)x_1 + u_2, \quad u_1, u_2 \in [0,1], \ j = 1,2 \quad (r_2 > r_1 > 0) \end{cases} \tag{19.28}$$

будет равномерно локально управляемой. Воспользуемся этим фактом для следующего примера.

На множестве $\mathfrak{X} \doteq O_{r_2}[0] \setminus O_{r_1}[0] \subset \mathbb{R}^2$ определим гладкое векторное поле

$$v(p) \doteq (p_2 + g(r^2)p_1, -p_1 + g(r^2)p_2),$$

где отображение $r \mapsto g(r^2)$ таково, что $g(r_1^2) = g(r_2^2) = 0$ и $g(r^2) > 0$, если r принадлежит (r_1, r_2). Тогда поток $f^t(p)$, отвечающий этому векторному полю, имеет ровно два периодических движения

$$f^t(\widehat{p}) = (r_1 \cos t, r_1 \sin t), \ \ f^t(\tilde{p}) = (r_2 \cos t, r_2 \sin t),$$

а для точек $p \in \operatorname{int} \mathfrak{X}$ траектории движений $t \mapsto f^t(p)$ по спирали наматываются на $\operatorname{orb}_f(\tilde{p})$. Таким образом, рассматриваемая динамическая система $(\mathfrak{X}, f^t)$ имеет два минимальных компактных множества $E_1 \doteq \operatorname{orb}_f(\widehat{p})$ и $E_1 \doteq \operatorname{orb}_f(\tilde{p})$. Зафиксируем теперь отображение (здесь см. п. 4 из § 15) $t \mapsto \sigma(p) = (\mathbb{A}(p), V), \ p \in \mathfrak{X}$, где

$$\mathbb{A}(p) \begin{bmatrix} 0 & |p| \operatorname{sign} p_2 \\ -|p| \operatorname{sign} p_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} [0,1] \\ [0,1] \end{bmatrix},$$

и рассмотрим совокупность систем управления $\sigma(f^t(p))$, или иначе,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = |f^t(p)|a(t)x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -|f^t(p)|a(t)x_1 + u_2, \quad u_1, u_2 \in [0,1] \end{cases} \tag{19.29}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\operatorname{sign} f_2^t = a(t)$). При этом точкам минимальных множеств E_1 и E_2 отвечают системы (19.28), которые принадлежат $\mathbb{L}^0$. Следовательно, по теореме 18.3 найдутся такие $\varepsilon, \vartheta > 0$, что при каждом $p \in \mathfrak{X}$ система (19.29) принадлежит $\mathbb{L}^0_{\varepsilon,\vartheta}$.

В следующем примере используем следующее утверждение теории дифференциальных уравнений [192]: если $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — это отличная от тождественного нуля п. п. по Бору функция и $M\{a(t)\} \geqslant 0$, то уравнение $\ddot{x} + a(t)x = 0$ является равномерно колеблющимся.

П р и м е р 19.3. Пусть отображение $(t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и имеет непрерывную частную производную по x в нуле. Допустим также, что отображение $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)$ п. п. в смысле Бора и $M\{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)\} \geqslant 0$. Покажем, что при этих предположениях система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(t,x) + u, \ \ u \in [0,1] \end{cases} \tag{19.30}$$

является равномерно локально управляемой. В самом деле, линеаризованная система для (19.30) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) + u, \quad u \in [0, 1] \end{cases}$$

и так как $M\{\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)\} \geqslant 0$, то по теореме 19.3 и следствию 19.1 (см. также замечание 19.2) данная система является равномерно локально управляемой. Теперь в силу теоремы 13.1 получаем, что система (19.30) также принадлежит $\mathbb{L}^0$.

§20. Теоремы о равномерной колеблемости

Приводятся теоремы о равномерной колеблемости систем дифференциальных уравнений относительно конуса, и доказана теорема сравнения о равномерной колеблемости линейного уравнения.

1. Так же как и в предыдущем параграфе, каждую заданную систему (19.10) (или иначе систему P) и конус $\mathcal{H}(t) \in \mathrm{Cone}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$ отождествляем с отображением $t \mapsto \eta(t) = (P(t), \mathcal{H}(t))$ и предполагаем, что оно принадлежит Σ, и (см. п. 2 в § 19) через $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^0$ обозначаем совокупность таких пар $(P, \mathcal{H})$, что система P является колеблющейся, соответственно равномерно колеблющейся, относительно конуса $\mathcal{H}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В этом пункте, используя теоремы из предыдущего параграфа, приведем ряд утверждений о структуре множеств $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}^0$.

В дальнейшем важную роль будет играть биективное отображение (см. (19.2))

$$\eta \mapsto \sigma \doteq \boldsymbol{g}(\eta) \in \Sigma_1, \ \eta \in \Sigma,$$

а также отображение $\boldsymbol{h}\colon \Sigma_1 \to \Sigma$, которое, согласно (19.3), каждой паре $\sigma = (P, H)$, принадлежащей Σ_1, ставит в соответствие пару $\eta = (P, \mathcal{H}) \in \Sigma$, где $\mathcal{H}(t) = \mathrm{cone}\ H(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что

$$(\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{g})(\eta) = \eta, \quad \eta \in \Sigma. \tag{20.1}$$

Далее, легко видеть, что для каждого $\eta \in \Sigma$ при всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $g^t(\boldsymbol{g}(\eta)) = \boldsymbol{g}(g^t(\eta))$ и так как $\Sigma_1 \subset \Sigma$, то определено следующее отображение:

$$\eta \mapsto \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\sigma)) \subset \Sigma_1,$$

где $\sigma \doteq \boldsymbol{g}(\eta)$, и (см. теорему 15.4) $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\sigma)) \in \mathrm{comp}(\Sigma_1)$, если отображение $t \mapsto \sigma(t)$ является d-непрерывным.

В дальнейшем, если $\widehat{\sigma} = (\widehat{P}, \widehat{H}) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\sigma))$, где $\sigma \doteq \boldsymbol{g}(P, \mathcal{H})$, то

$$\widehat{H}^{\#}(t) \doteq (\mathrm{cone}\ \widehat{H}(t))^{\#} \cap O_1[0], \ t \in \mathbb{R},$$

и через $X(t, s; \widehat{\sigma})$ обозначаем оператор Коши системы $\dot{x} = \widehat{P}(t)x$.

Теорема 20.1. *Пусть* $\eta = (P, \mathcal{H}) \in \Sigma$. *Тогда, если* $\sigma \doteq \boldsymbol{g}(\eta)$ d*-непрерывно, то следующие утверждения равносильны:*

1) *пара* $\eta = (P, \mathcal{H}) \in \Sigma$ *принадлежит* $\mathfrak{K}^0$;

2) *существуют такие константы* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что для любых* $x_0 \in S_1(0)$ *и* $\widehat{\sigma} = (\widehat{P}, \widehat{H}) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\sigma))$ $\quad \mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta]\colon\ c(X(0, t; \widehat{\sigma})x_0, \widehat{H}^{\#}(t)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$;

3) *для любых* $x_0 \in S_1(0)$ *и* $\widehat{\sigma} = (\widehat{P}, \widehat{H}) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\sigma))$ *выполнено следующее неравенство:* $\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta]\colon\ c(X(0, t; \widehat{\sigma})x_0, \widehat{H}^{\#}(t)) > 0\} > 0$.

Доказательство. Из определения σ, принимая во внимание сказанное в замечаниях 19.1 и 19.5, из теоремы 19.4 получаем, что пара $(P, \mathcal{H}) \in \mathfrak{K}^0$ в том и только в том случае, если система $\varphi = (-P^*, H^{\#}) \doteq \boldsymbol{g}((-P^*, \mathcal{H}^{\#}))$ принадлежит $\mathbb{L}^0$. Теперь, используя для этой системы φ лемму 17.4, получаем утверждение теоремы 20.1.

Из теоремы 20.1 и леммы 19.2 вытекает (здесь см. (19.20))

Следствие 20.1. *Для того чтобы* η *принадлежало* $\mathfrak{K}^0$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие константы* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что для каждого* $\widehat{\sigma} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\sigma))$, *где* $\sigma = \boldsymbol{g}(\eta)$, *пара* $\boldsymbol{h}(\widehat{\sigma})$ *принадлежала множеству* $\mathfrak{K}_{\varepsilon,\vartheta,\beta}$.

Теорема 20.2. *Пусть совокупность пар* $\mathcal{P} = \{(P, \mathcal{H})\} \subset \Sigma$ *такова, что множество* $\mathcal{E} \doteq \boldsymbol{g}(\mathcal{P})$ *компактно и инвариантно (относительно потока* g^t*) и пусть* $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ — *совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если* $\boldsymbol{g}(\mathcal{E}_\alpha) \cap \mathfrak{K}(0) \neq \varnothing$ *при каждом* $\alpha \in \mathbb{I}$, *то найдутся такие константы* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что для всякой пары* $(P, \mathcal{H}) \in \mathcal{P}$ *будет выполнено неравенство* (19.13) *определения* 19.2.

Доказательство. Множеству $\mathcal{E} \overset{(19.2)}{=} \{(P, H)\}$ однозначно соответствует множество $\mathcal{E}' \doteq \{(-P^*, H^{\#})\}$, в котором $H^{\#}(t) \doteq (\mathrm{cone}\ H(t))^{\#} \cap O_1[0]$, $t \in \mathbb{R}$. По условию (см. (20.1)) для каждого $\alpha \in \mathbb{I}$ существует система $(P_\alpha, \mathcal{H}_\alpha) \doteq \boldsymbol{h}(\sigma_\alpha)$, $\sigma_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$, принадлежащая $\mathfrak{K}(0)$. Поэтому по теореме 19.5 найдутся такие $\varepsilon_1, \vartheta_1 > 0$, что $\mathcal{E}' \subset \mathbb{L}^0_{\varepsilon_1,\vartheta_1}$. Откуда по теореме 19.3 (здесь см. теорему 19.2 и доказательство леммы 19.1) вытекает существование таких констант $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, определяемых $\varepsilon_1, \vartheta_1$, что для каждой пары $(P, \mathcal{H}) \in \mathcal{P}$ будет выполняться определение 19.2 с указанными константами $\varepsilon, \vartheta, \beta$.

Следствие 20.2. *Пусть множество* $\mathcal{P} \subset \Sigma$ *такое, что множество* $\mathcal{E} \doteq \boldsymbol{g}(\mathcal{P})$ *является минимальным. Тогда, если* $\mathcal{P} \cap \mathfrak{K}(0) \neq \varnothing$, *то найдутся такие константы* $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, *что для всякой пары* $(P, \mathcal{H}) \in \mathcal{P}$ *будет выполнено соотношение* (19.13).

Из этого следствия и теорем 19.3, 18.4, а также следствия 19.1 вытекает

Теорема 20.3. *Пусть пара* $\eta = (P, \mathcal{H})$ *из* Σ *такая, что* $\boldsymbol{g} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathscr{P}_{\mathrm{Cone}_1})$. *Тогда* $\eta \in \mathfrak{K}^0$ *в том и только в том случае, если* $\eta \in \mathfrak{K}(0)$.

Далее, используя теорему 19.6 получаем следующее утверждение.

Теорема 20.4. *Пусть* $\eta = (P, \mathcal{H}) \in \Sigma$, $\sigma \doteq \boldsymbol{g}(\eta)$ *и* $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ — *совокупность всех минимальных подмножеств из* $\Omega(\sigma)$. *Тогда пара* $\eta \in \mathfrak{K}^0$ *в том и только в том случае, если при каждом* $\alpha \in \mathbb{I}$ $\quad \boldsymbol{h}(\mathcal{E}_\alpha) \cap \mathfrak{K}(0) \neq \varnothing$.

Теперь приведем утверждения, связанные со структурной устойчивостью множества $\mathfrak{K}^0$ (здесь см. (19.20) и равенство (15.1), определяющее метрику ϱ).

Т е о р е м а 20.5. *Пусть множество пар $\mathcal{P} = \{P, \mathcal{H}\}$ из Σ содержится при некоторых $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$ в $\mathfrak{K}_{\varepsilon,\vartheta,\beta}$ и множество $\mathcal{F} \doteq \boldsymbol{g}(\mathcal{P})$ является d-ограниченным. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что всякая пара $\sigma = (G, \mathcal{W}) \in \Sigma$, для которой множество $\mathbb{T}(\sigma) \doteq \{t \geqslant 0\colon\ \varrho(\xi_t, \mathcal{F}) \leqslant \delta\}$, где $\xi_t \doteq \boldsymbol{g}(\sigma_t)$, относительно плотно, принадлежит $\mathfrak{K}^0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку множество $\mathcal{F} \overset{(19.2)}{=} \{(P, H)\}$ является d-ограниченным, то таким же будет и множество $\mathcal{F}^{'} \doteq \{(-P^*, H^{\#})\}$. Далее, так как $\mathcal{P} \subset \mathfrak{K}_{\varepsilon,\vartheta,\beta}$, то из доказательства леммы **??** следует существование таких констант $\varepsilon_1, \vartheta_1, \beta_1 > 0$, что для каждой пары $\sigma = (P, H) \in \mathcal{F}$ при всяком $x_0 \in S_1(0)$ будет выполняться следующее неравенство: $\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta_1]\colon\ c(X(0, t; \sigma)x_0, H^{\#}(t)) \geqslant \beta_1\} \geqslant \varepsilon_1$. Отсюда, в свою очередь, по лемме 17.4 вытекает, что d-ограниченное множество $\mathcal{F}^{'}$ содержится при некоторых $\varepsilon_0, \vartheta_0 > 0$ в $\mathbb{L}^0_{\varepsilon_0,\vartheta_0}$. Поэтому, в силу следствия 17.1, найдется такое $\delta > 0$, что всякая система φ из $\mathfrak{H}$, для которой множество $\mathbb{T}^{'}(\varphi) \doteq \{t \geqslant 0\colon\ \varrho(\varphi_t, \mathcal{F}^{'}) \leqslant \delta\}$ относительно плотно, будет принадлежать $\mathbb{L}^0$. Теперь фиксируем произвольную пару $\sigma = (G, \mathcal{W})$ из Σ такую, что для отвечающей ей системы $\varphi = (-G^*, \mathcal{W}^{\#})$ множество $\mathbb{T}^{'}(\varphi)$ было бы относительно плотно. В этом случае, как отмечалось, $\varphi \in \mathbb{L}^0$, а значит, по теореме 19.4, пара $\sigma \in \mathfrak{K}^0$. Сейчас для завершения доказательства теоремы 20.5 осталось заметить, что $\varrho(\xi_t, \mathcal{F}) = \varrho(\varphi_t, \mathcal{F}^{'})$ для всех t.

С л е д с т в и е 20.3. *Пусть пара $\eta = (P, \mathcal{H})$ из Σ принадлежит $\mathfrak{K}^0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что всякая пара $\sigma = (G, \mathcal{W}) \in \Sigma$, для которой множество $\{t \geqslant 0\colon\ \varrho(\xi_t, \sigma_t) \leqslant \delta\}$, где $\xi_t \doteq \boldsymbol{g}(\sigma_t)$, $\sigma_t \doteq \boldsymbol{g}(\eta_t)$, относительно плотно, принадлежит $\mathfrak{K}^0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 20.1 существуют такие $\varepsilon, \vartheta, \beta > 0$, что совокупность пар $\mathcal{P} \doteq \boldsymbol{h}(\operatorname{cl}(\operatorname{orb}^+_g(\sigma)))$, $\sigma \doteq \boldsymbol{g}(\eta)$ содержится в $\mathfrak{K}_{\varepsilon,\vartheta,\beta}$. Далее, так как множество $\mathcal{F} \doteq \boldsymbol{g}(\mathcal{P}) = \operatorname{cl}(\operatorname{orb}^+_g(\sigma))$ (см. теорему 15.4) является d-ограниченным, то утверждение следствия 20.3 вытекает из теоремы 20.5 и очевидного неравенства $\varrho(\xi_t, \mathcal{F}) \leqslant \varrho(\xi_t, \sigma_t)$.

2. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{20.2}$$

в котором $p_j \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $d(p_j, 0) \doteq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |p_j(s)|ds < \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Каждое такое уравнение отождествляем с функцией

$$t \mapsto \boldsymbol{p}(t) \doteq (-p_n(t), \ldots, -p_1(t)), \tag{20.3}$$

которая принадлежит $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$ и является d-ограниченной. Совокупность таких функций обозначим через $\mathcal{U}$. На $\mathcal{U}$ вводим метрику ϱ, определенную равенством (15.1), и зададим однопараметрическое семейство отображений $g^t\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, задаваемое для каждого $\boldsymbol{p} \in \mathcal{U}$ равенством $g^t(\boldsymbol{p}) \doteq \boldsymbol{p}_t$. Поскольку уравнение (20.2) эквивалентно d-ограниченной системе (19.12) с матрицей $P(t)$, определенной при каждом $t \in \mathbb{R}$ равенством (19.18), то по теореме 15.4 для каждого $\boldsymbol{p} \in \mathcal{U}$ множество $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\boldsymbol{p})) \in \mathrm{comp}(\mathcal{U})$ и является d-ограниченным, а значит $\Omega(\boldsymbol{p}) \in \mathrm{comp}(\mathcal{U})$.

Обозначим, далее, через $x(t;\tau,x_0) \doteq x(t;\tau,x_0,\boldsymbol{p}(\cdot))$ решение уравнения (20.2), начальные значения которого определяются парой $(\tau,x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. В дальнейшем

$$\mathfrak{x}(t;x_0,\boldsymbol{p}(\cdot)) \doteq x(t;0,x_0,\boldsymbol{p}(\cdot)). \tag{20.4}$$

Напомним, что уравнение (20.2), или иначе уравнение $\boldsymbol{p}(\cdot) \in \mathcal{U}$ (см. (20.3)), называется колеблющимся на полуоси $[\tau,\infty)$, $\tau \geqslant 0$, если всякое его нетривиальное решение $x(t;\tau,x_0)$ на этой полуоси хотя бы один раз сменит знак, и называется колеблющимся, если оно является колеблющимся на $[\tau,\infty)$ при каждом $\tau \geqslant 0$. Совокупность колеблющихся на $[\tau,\infty)$ и колеблющихся уравнений обозначим, соответственно, через $\mathbb{K}(\tau)$ и $\mathbb{K}$. Далее, уравнение $\boldsymbol{p}(\cdot) \in \mathcal{U}$ называется равномерно колеблющимся, если существуют такие константы $\varepsilon,\vartheta,\beta > 0$, что для каждого $\tau \geqslant 0$ и любого $x_0 \in S_1(0)$ выполнено следующее неравенство: $\mathrm{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta]\colon\ x(t;\tau,x_0) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$, которое, вследствие равенства (здесь см. (20.4)) $x(t+\tau;\tau,x_0,\boldsymbol{p}(\cdot)) = \mathfrak{x}(t;x_0,\boldsymbol{p}_\tau(\cdot))$, равносильно тому, что

$$\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta]\colon\ \mathfrak{x}(t;x_0,\boldsymbol{p}_\tau(\cdot)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon. \tag{20.5}$$

Отметим, что в этом случае на каждом отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, $\tau \geqslant 0$ всякое нетривиальное решение $x(t;\tau,x_0)$ уравнения $\boldsymbol{p}(\cdot))$ хотя бы один раз сменит знак. Совокупность равномерно колеблющихся уравнений обозначим через $\mathbb{K}^0$.

Сейчас, используя результаты предыдущего пункта, принимая во внимание замечание 19.2, приведем ряд утверждений о структуре множеств $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}^0$.

Т е о р е м а 20.6. *Следующие утверждения:*

1) *уравнение* $\boldsymbol{p}(\cdot))$ *принадлежит* $\mathbb{K}^0$,

2) *существуют такие положительные константы* $\varepsilon,\vartheta,\beta$, *что каждое уравнение* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) = (-\widehat{p}_n(\cdot),\ldots,-\widehat{p}_1(\cdot)) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\boldsymbol{p}))$ *при любом* $x_0 \in S_1(0)$ *обладает следующим свойством:* $\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta]\colon\ \mathfrak{x}(t;x_0,\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot)) \geqslant \beta\} \geqslant \varepsilon$,

3) *существует такая константа* $\vartheta > 0$, *что любое решение каждого уравнения* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g^+(\boldsymbol{p}))$ *на отрезке* $[0,\vartheta]$ *хотя бы один раз сменит знак,*
являются эквивалентными.

Т е о р е м а 20.7. *Пусть множество* $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ *компактно и инвариантно (относительно потока* g^t*) и* $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ *— совокупность всех его минимальных подмножеств. Тогда, если при каждом* $\alpha \in \mathbb{I}$ $\ \mathcal{P}_\alpha \cap \mathbb{K}(0) \neq \varnothing$, *то найдутся такие константы* $\varepsilon,\vartheta,\beta > 0$, *что для каждого* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathcal{P}$ *при любых* $(\tau,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times S_1(0)$ *выполнено неравенство* (20.5).

Далее, из теоремы 20.4 вытекает следующая

Т е о р е м а 20.8. *Пусть* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathcal{R}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n*})$. *Тогда* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathbb{K}^0$ *в том и только в том случае, если* $\widehat{\boldsymbol{p}}(\cdot) \in \mathbb{K}(0)$.

З а м е ч а н и е 20.1. Отметим, что теорема 20.8 является обобщением соответствующего результата Адамова (см. обзорную статью [148]) для уравнения второго порядка с перидическими коэффициентами.

З а м е ч а н и е 20.2. Каждое стационарное уравнение $\boldsymbol{p}$ из $\mathcal{U}$ очевидно принадлежит $\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n*})$. Поэтому из теоремы 19.7 и замечания 19.2 получаем, что для колеблемости, а в силу теоремы 20.8 и равномерной колеблемости линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы корни соответствующего ему характеристического уравнения были комплексными, и следовательно, порядок такого уравнения должен быть четным.

Из теорем 20.4 и 20.6 вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 20.9. *Пусть* $\boldsymbol{p}(\cdot)\in\mathcal{U}$ *и* $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ — *совокупность всех минимальных подмножеств из* $\Omega(\boldsymbol{p})$. *Тогда* $\boldsymbol{p}(\cdot)\in\mathbb{K}^0$ *в том и только в том случае, если при каждом* $\alpha\in\mathbb{I}$ $\quad\mathcal{P}_\alpha\cap\mathbb{K}(0)\neq\varnothing$.

В дальнейшем будем пользоваться следующим утверждением о структурной устойчивости множества $\mathbb{K}^0$.

Т е о р е м а 20.10. *Пусть* $\boldsymbol{p}(\cdot)\in\mathbb{K}^0$. *Тогда найдется такая константа* $\delta>0$, *что всякое уравнение* $\mathfrak{q}(\cdot)\in\mathcal{U}$, *для которого множество* $\{t\geqslant 0:\ \varrho(\mathfrak{q}_t,\boldsymbol{p}_t)\leqslant\delta\}$ *относительно плотно, принадлежит* $\mathbb{K}^0$.

В следующем пункте докажем теорему сравнения о равномерной колеблемости линейного дифференциального уравнения.

3. Рассмотрим колеблющееся уравнение (здесь см. замечание 20.2)

$$x^{(2n)}+a_1x^{(2n-1)}+\cdots+a_{2n-1}\dot{x}+a_{2n}x=0, \tag{20.6}$$

с постоянными коэффициентами $a_1,\ldots,a_{2n}\in\mathbb{R}$, и пусть $\alpha_j\pm i\,\omega_j,\ j=1,\ldots,n,$ — корни его характеристического уравнения. Полагаем, далее,

$$\widehat{\vartheta}\doteq 2\pi\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\omega_j}. \tag{20.7}$$

Т е о р е м а 20.11. *Пусть уравнение* (20.6) *колеблющееся. Тогда для любой функции* $p\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *такой, что для п. в.* $t\geqslant 0$

$$p(t)\geqslant-\frac{1}{2^n}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^2, \tag{20.8}$$

каждое нетривиальное решение уравнения

$$x^{(2n)}+a_1x^{(2n-1)}+\cdots+a_{2n-1}\dot{x}+(a_{2n}+p(t))x=0 \tag{20.9}$$

на любом отрезке $[\tau,\tau+\widehat{\vartheta}]$, $\tau\geqslant 0$, *где* $\widehat{\vartheta}$ *задано равенством* (20.7), *по крайней мере один раз сменит знак.*

Доказательству теоремы 20.11 предпошлем ряд обозначений и утверждений.

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$l_t = \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} + a_1\frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}} + \cdots + a_{2n}, \quad l_t^{(j)} = \frac{d^2}{dt^2} + A_j\frac{d}{dt} + B_j,$$

где

$$A_j \doteq -2\alpha_j,\ B_j \doteq \alpha_j^2 + \omega_j^2,\ j = 1, \ldots, n.$$

Непосредственно из определения получаем, что

$$l_t = l_t^{(n)} \circ \cdots \circ l_t^{(1)} \tag{20.10}$$

и для любой функции $y \in W_{1,\mathrm{loc}}^{2n}(\mathbb{R})$ $(W_{1,\mathrm{loc}}^{2n}(\mathbb{R})$ - совокупность скалярных функций, у которых $2n$ - производная абсолютно непрерывна и принадлежит $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ при каждом $j = 1, \ldots, n$ имеют место следующие равенства:

$$l_t^{(j)}[y(t + t_1 + \cdots + t_n)] = l_{t_j}^{(j)}[y(t + t_1 + \cdots + t_n)] \tag{20.11}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_j} e^{-\alpha_j t}(1 - \cos\omega_j t)\, l_t^{(j)}[y(t)]dt = \omega_j^2 \int_0^{2\pi/\omega_j} e^{-\alpha_j t}y(t)dt. \tag{20.12}$$

Далее, введем в рассмотрение оператор $\mathfrak{T}$, ставящий в соответствие каждой функции $y \in W_{1,\mathrm{loc}}^{2n}(\mathbb{R})$ функцию

$$\mathfrak{T}[y(\cdot)](t) = \int_0^{2\pi/\omega_1} \ldots \int_0^{2\pi/\omega_n} \big(\prod_{j=1}^n e^{-\alpha_j t_j}(1-\cos\omega_j t_j)\big)\, l_t[y(t+t_1+\ldots+t_n)]dt_n \ldots dt_1,\ t \in \mathbb{R}.$$

Л е м м а 20.1. *Для каждой функции $y \in W_{1,\mathrm{loc}}^{2n}(\mathbb{R})$ при любом $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{T}[y(\cdot)](t) = \int_0^{2\pi/\omega_1} \ldots \int_0^{2\pi/\omega_n} \big(\prod_{j=1}^n \omega_j^2 e^{-\alpha_j t_j}\big) y(t + t_1 + \ldots + t_n)dt_n \ldots dt_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой функции $y \in W_{1,\mathrm{loc}}^{2n}(\mathbb{R})$ и любого $t \in \mathbb{R}$ имеем следующую цепочку равенств:

$$\mathfrak{T}[y(\cdot)](t) \overset{(20.10)}{=} \int_0^{2\pi/\omega_1} \ldots \int_0^{2\pi/\omega_n} \big(\prod_{j=1}^n e^{-\alpha_j t_j}(1 - \cos\omega_j t_j)\big)\times$$

$$\times l_t^{(n)}(l_t^{(n-1)}(\ldots(l_t^{(1)}[y(t + t_1 + \ldots + t_n)])\ldots))dt_n \ldots dt_1 \overset{(20.11)}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega_1} \cdots \int_0^{2\pi/\omega_{n-1}} \big(\prod_{j=1}^{n-1} e^{-\alpha_j t_j}(1 - \cos\omega_j t_j)\big)\big(\int_0^{2\pi/\omega_n} e^{-\alpha_j t_j}(1 - \cos\omega_j t_j)\times$$

$$\times l_{t_n}^{(n)}(l_t^{(n-1)}(\ldots(l_t^{(1)}[y(t + t_1 + \ldots + t_n)])\ldots))dt_n)dt_{n-1}\ldots dt_1 \overset{(20.12)}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega_n} \omega_n^2 e^{-\alpha_n t_n}\big(\int_0^{2\pi/\omega_1} \cdots \int_0^{2\pi/\omega_{n-1}} \big(\prod_{j=1}^{n-1} e^{-\alpha_j t_j}(1 - \cos\omega_j t_j)\big)\times$$

$$\times l_t^{(n-1)}(l_t^{(n-2)}(\ldots(l_t^{(1)}[y(t + t_1 + \cdots + t_n)])\ldots))dt_{n-1}\ldots dt_1)dt_n = \ldots =$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega_2} \dots \int_0^{2\pi/\omega_n} \big(\prod_{j=2}^{n} e^{-\alpha_j t_j}\big)\Big(\int_0^{2\pi/\omega_1} e^{-\alpha_1 t_1}(1-\cos\omega_1 t_1)\times$$

$$\times l_{t_1}^{(1)}[y(t+t_1+\dots+t_n)]dt_1\Big)dt_n\dots dt_2 \overset{(20.12)}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega_1} \dots \int_0^{2\pi/\omega_n} \big(\prod_{j=1}^{n} \omega_j^2 e^{-\alpha_j t_j}\big) y(t+t_1+\dots+t_n)dt_n\dots dt_1.$$

Тем самым лемма 20.1 доказана.

Доказательство теоремы 20.11. Фиксируем произвольное $\tau \geqslant 0$, и рассмотрим нетривиальное решение $x(t) \doteq x(t;\tau,x_0)$ уравнения (20.6). Поскольку $l_t[x(t)] = -p(t)x(t)$, то

$$\mathfrak{T}[y(\cdot)](t) = \int_0^{2\pi/\omega_1} \dots \int_0^{2\pi/\omega_n} \Big(\prod_{j=1}^{n} e^{-\alpha_j t_j}(1-\cos\omega_j t_j)\Big)\times$$

$$\times p(\tau+t_1+\dots+t_n)x(\tau+t_1+\dots+t_n)dt_n\dots dt_1.$$

Теперь, используя лемму 20.1 для $y(\cdot)=x(\cdot)$ и $t=\tau$, получаем следующее равенство:

$$\int_0^{2\pi/\omega_1} \dots \int_0^{2\pi/\omega_n} \big(\prod_{j=1}^{n} e^{-\alpha_j t_j}\big)\big(\prod_{j=1}^{n}\omega_j^2 + p(\tau+t_1+\dots+t_n)\prod_{j=1}^{n}(1-\cos\omega_j t_j)\big)\times$$

$$\times x(\tau+t_1+\dots+t_n)dt_n\dots dt_1 = 0. \qquad (20.13)$$

С другой стороны, из (20.8) получаем, что для п. в. $t_j \in [0, 2\pi/\omega_j]$, $j=1,\dots,n$

$$\prod_{j=1}^{n}\omega_j^2 + p(\tau+t_1+\dots+t_n)\prod_{j=1}^{n}(1-\cos\omega_j t_j) > 0.$$

Поэтому из (20.13) следует, что решение $x(t)$ при каждом $\tau \geqslant 0$ на отрезке $[\tau, \tau+\widehat{\vartheta}]$ (см. (20.7)) хотя бы один раз сменит знак.

Список литературы

1. Александрян Р. А., Мирзоханян Э. А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979. — 336 с.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.
3. Альбрехт Э. Г., Красовский Н. Н. О наблюдении нелинейной системы в окрестности заданного движения // АиТ. — 1964. — Т. 25, Ґ 7. — С. 209–229.
4. Альбрехт Э. Г., Об управляемости движения нелинейной системы Дифференц. уравнения — 1964. —Т. 2, Ґ 3. — С. 1–5
5. Анисович В. В., Крюков Б. И. Об оптимизации почти–периодических колебаний // АиТ. — 1981. — Ґ 12. — С. 168–170.
6. Аносов Д. В. Гладкие динамические системы. II . Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М., 1985. — С. 152–219.
7. Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — Т. 40, Ґ 2. — С. 205–215.
8. Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции на конусе в окрестности анормальной точки // Матем. заметки — 2005.— Т. 78, вып. 4. — С. 619–621.
9. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. — М.: Изд-во "Факториал", 1997. — 256 с.
10. Афанасьев А. П., Дигусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А. Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990. — 320 с.
11. Бебутов О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюллетень Моск. ун-та. Математика. — 1941. — Т. 2, вып. 5. — С. 1–52.
12. Белоусов Л. А., Тонков Е. Л. Некоторые математические задачи, связанные с одной моделью химического катализа // Изв. Ин-та матем. и информ./ УдГУ. Ижевск, 1997. — Ґ 1(9). — С. 3–62.
13. Белоусов Л. А., Тонков Е. Л. Об оптимальном управлении периодическими колебаниями некоторых процессов химического катализа // Нестационарные процессы в катализе: Тр. конф. Новосибирск. — 1987. — С. 212–225.
14. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ: Курс лекций. — Киев: Вища школа, 1990. — 600 с.
15. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. — М.: Высш. шк., 2001. — 216 .
16. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. — 1985. — Т. 169. — С. 194–252.
17. Блинов И.Н., Тонков Е. Л. О глобальной управляемости условно периодической системы //Матем. заметки. — 1982. — Т. 32, Ґ 2. — С. 169–174.
18. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986. — 104 с.
19. Боуэн Р. Методы символической динамики. — М.: Мир, 1979. — 244 с.
20. Бронштейн И. У. Минимальные группы преобразований. — Кишинев.: Штиинца, 1975. — 311 с.
21. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. — М. : Наука, 1977.— 600 с.
22. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными урав-

ниями. — М.: Наука, 1977. — 623 с.
23. Васильев В.В., Тонков Е. Л. Критерий равномерной полной наблюдаемости линейной рекуррентной системы //Пробл. соврем. теории период. движений. Ижевск — 1980. Вып. 4. — С. 39–42.
24. Воронецкая М. А. О некоторых свойствах среднего значения почти периодической квадратичной формы // Вестник УдГУ. — Ижевск: изд-во УдГУ. — 2005. — С. 19–34.
25. Воронецкая М. А., Иванов А. Г. О некоторых вариационных задачах в классе почти периодических функций // Деп. в ВИНИТИ 27.12.03, Ґ 1902–В 2003. — УдГУ, Ижевск, 2003. — 32 с.
26. Воронецкая М. А., Иванов А. Г. Почти периодическая задача Больца // Известия вузов. Математика. — 2005. — Ґ 7(518). — С. 8–24.
27. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1973. — 352 с.
28. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971. — 507 с.
29. Гайцгори В. Г. Управление системами с быстрыми и медленными движениями. — М.: Наука, 1991. — 224 с.
30. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. — Минск.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1999. — 409 с.
31. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. — 230 с.
32. Гамкрелидзе Р. В. Скользящие режимы в теории оптимального управления // Тр. матем. ин-та АН СССР. — 1985. — Т. 169. — С. 180 - 193.
33. Гусев А. Г. Ограниченные магистрали в нестационарной задаче непрерывной оптимизации // Дифференц. уравнения. 1995. — Т. 31, Ґ 10. — С. 1828–1833.
34. Гусев Д. Е., Якубович В. А. Теорема о магистрали в задаче непрерывной оптимизации // Вестник ЛГУ. — 1983, Ґ 1. — С. 21–27.
35. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
36. Данилов Л. И. О мерозначных почти периодических функциях // Вестн. Удм. ун-та. — 1992. — Вып. 1. — С. 51–58.
37. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Изв. вузов. Математика. — 1998. — Ґ 5. — С. 10–18.
38. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Изв. Ин-та матем. и информ./ УдГУ. — Ижевск, 1993. — Вып. 1. — С. 16–78.
39. Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Математика. — 1994. — Ґ 6(385). — С. 50–59.
40. Данилов Л. И., Иванов А. Г. Колеблемость линейной системы относительно конуса и равномерная локальная управляемость. — Свердловск, 1990. — 63 с. (Препринт / Физико-технического института УрО АН СССР)
41. Данилов Л. И., Иванов А. Г. О достаточных условиях колеблемости линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, Ґ 12 — С. ?–?.
42. Данилов Л. И., Иванов А. Г. Теорема сравнения о равномерной колеблемости линейного уравнения // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, Ґ 9 — С. ?–?.
43. Данилов Л. И., Иванов А. Г. Эффективные достаточные условия равномерной локальной управляемости // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, Ґ 4 — С. 563–

572.

44. Данилов Л. И., Иванов А. Г. Эффективные условия колеблемости линейной системы. — Свердловск, 1987. — 56 с. (Препринт / Физико-технического института УрО АН СССР)
45. Данилов Л. И., Иванов А. Г. Эффективные условия колеблемости линейных дифференциальных уравнений // Матем. заметки. — 1991. — Т. 49, вып. 3. — С. ?–?.
46. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Иностр. лит., 1962. — 897 с.
47. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
48. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990. — 432 с.
49. Дмитрук А. В. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями // Оптимальность управляемых динамических систем. Вып. 14. — М.: ВНИИСИ, 1990. — С. 26–42.
50. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журн. — 1991. — Т. 32, Ѓ 2. — С. 172–175.
51. Дукельский М. С., Цирлин А. М. Условия нестационарности установившегося режима управляемого объекта // Автоматика и телемеханика. — 1977, Ѓ 8. — С. 5–12.
52. Зубов В. И. Теория колебаний. — М.: Высш. шк., 1979. — 400 с.
53. Иванов А. Г. Динамическая система сдвигов и существование решения задачи почти периодической оптимизации // Известия вузов. Математика. — 2005. — Ѓ 10 (521). — С. 29–46.
54. Иванов А. Г. К вопросу об оптимальном управлении почти периодическими движениями // Известия вузов. Математика. — 2003. — Ѓ 4(491). — С. 40–56.
55. Иванов А. Г. О корректности расширения задачи управления почти периодическими движениями // Известия вузов. Математика. — 2005. — Ѓ 6 (481). — С. 14–25.
56. Иванов А. Г. Об одном свойстве почти периодического интеграла, зависящего от параметра // Известия вузов. Математика. — 2001. — Ѓ 6(469). — С. 34–43.
57. Иванов А. Г. Об одном свойстве решения задачи почти периодической оптимизации // Известия вузов. Математика. — 2005. — Ѓ 2 (513). — С. 13–29.
58. Иванов А. Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. — Вып. 1(24). — С. 3 –100.
59. Иванов А. Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. II // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2003. — Вып. 1(27). — С. 3 –96.
60. Иванов А. Г. Мерозначные почти периодические функции. Препринт. — Свердловск, 1990. — 53 с.
61. Иванов А. Г. К вопросу о непрерывной зависимости почти периодического решения нелинейной системы управления от параметра // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, Ѓ 2. — С. 186–197.
62. Иванов А. Г. Линейные управляемые системы в пространстве Степанова .— Свердловск, 1985. — 32 с. (Препринт / Физико-технического института УрО АН СССР)
63. Иванов А. Г. Мерозначные почти периодические функции. II / УдГУ. Ижевск, 1991. — 62 с. Деп. в ВИНИТИ 24.04.91, Ѓ 1721-В 91.

64. Иванов А. Г. О некоторых свойствах решения задачи оптимального управления почти периодическими движениями // Тр. Междунар. семинара, посв. 60-летию акад. А. И. Субботина. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, — 2006. — Т. 1. — С. 227–236.
65. Иванов А. Г. О непрерывной дифференцируемости по параметру почти периодического решения // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, Ѓ 5. — С. 601–608.
66. Иванов А. Г. О непрерывной зависимости почти периодического решения от мерозначного управления // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, Ѓ 11 . — С. 1907–1915.
67. Иванов А. Г. О почти-периодической ляпуновской задаче // ПММ. — 1991. — Т. 55, вып. 5. — С. 718–724.
68. Иванов А. Г. О равномерной локальной управляемости нелинейной системы // Нелинейные колебания и теория управления.— Устинов: Удм. ун-т, 1987.— С. 3–21.
69. Иванов А. Г. О равномерной локальной управляемости нелинейной системы на траекторию // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, Ѓ 4 . — С. ?–?.
70. Иванов А. Г. О существовании почти периодического решения линейной системы с квадратичным функционалом качества // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, Ѓ 2. С. 203–211.
71. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений. I // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, Ѓ 3. — С. 312–324.
72. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений. II // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, Ѓ 4. — С. 441–455.
73. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями // ПММ. 1992. Т. 56, вып. 5. С. 745–753.
74. Иванов А. Г. О задаче оптимального управления почти периодическими движениями // Труды XVI всесоюзной школы по теории линейных операторов в функциональных пространствах.Н.Новгород — 1992. —15 с.
75. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. I. // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, Ѓ 2. — С. 167–176.
76. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. II. // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, Ѓ 3. — С. 316–323.
77. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. III. // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, Ѓ 4. — С. 478–485.
78. Иванов А. Г. Об управляемости нелинейной системы в классе обобщенных уравнений // ПММ.— 1990.— Т. 54, вып. 5.— С. 745–753.
79. Иванов А. Г. Об эквивалентности дифференциальных включений управляемых почти периодических систем // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т.33, Ѓ 7 . — С. 876–884.
80. Иванов А. Г., Тонков Е.Л. Задача оптимального управления периодическими процессами и ее расширения // Функц. дифференц. уравнения. Пермь. — 1992. — С. 35–49.
81. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. Методы топологической динамики в задаче о равномерной локальной управляемости // Доклады РАН. — 1995 . — Т. 340, Ѓ 4. — С. 467–469.
82. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. Метрические свойства линейных управляемых систем // Успехи матем. наук. — 1991 . — Т. 46, вып. 6(282). — С. 187

83. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. О множестве управляемости линейной почти периодической системы // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, Ѓ 10. — С. 1692–1699.
84. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. О равномерной колеблемости линейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1994 . — Т. 49, вып. 4(298). — С. 96
85. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. О равномерной локальной управляемости линейной системы // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, Ѓ 9. — С. 1499–1507.
86. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. Равномерная колеблемость и вопросы глобальной управляемости // Успехи матем. наук. — 1985 . — Т. 40, вып. 5(245). — С. 231
87. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. Равномерная локальная управляемость в критическом случае и вопросы колеблемости. — Свердловск, 1985. — 60 с. (Препринт / Физико-технического института УрО АН СССР)
88. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. Условия управляемости и колеблемости линейных систем относительно конуса // Успехи матем. наук. — 1989 . — Т. 44, вып. 5(269). — С. 259
89. Иванов А. Г. Оптимальное управление почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние // Доклады РАН. — 1995. — Т. 343, Ѓ 6. — С. 51–53.
90. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
91. Калман Р. Е. Об общей теории автоматического управления. — В кн.: Труды I конгресса ИФАК: Изд-во АН СССР. — 1961. — Т. 2. — С. 521–547.
92. Керимов А. К. Управляемость в целом линейных периодических систем при наличии ограничений на управления //Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, Ѓ 9. — С. 1575–1583.
93. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 280 с.
94. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
95. Комленко Ю. В., Тонков Е. Л. // Математическая энциклопедия. — 1979. — Т. 2. — С. 950
96. Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, Ѓ 11 — С. 1967–1979.
97. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 352 с.
98. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования // ПММ. — 1959. — Т. 23, Ѓ 4. — С. 625–639.
99. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // ПММ. — 1963. — Т. XXVII, вып. 4. — С. 641–663.
100. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // ПММ. — 1957. — Т. XXIII, вып. 2. — С. 209–229.
101. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании в нелинейных системах // Известия вузов. Математика. — 1959. — Ѓ 5. — С. 122–130.
102. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Дополнение IV — В кн.: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.: Наука, 1966.— С. 475–514.
103. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1972. — 475 с.
104. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 518 с.
105. Красовский Н. Н., Шелементьев Г. С. О коррекции движения системы с двумя степе-

ями свободы при одной циклической координате // ПММ. — 1965. — Т. 29, вып. 3. — С. 401–407.

106. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 522 с.

107. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. — М. : Гостехиздат, 1953. — 396 с.

108. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 205 с.

109. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV // Автоматика и телемеханика. — 1961. — Т XXII, Ґ 4.

110. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 574 с.

111. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. —М.: Наука, 1965. — 519 с.

112. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.

113. Мастерков В. М., Родина Л. И. // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. ?, Ґ ?. — С. ??–??.

114. Матвеев А. С., Якубович В. А. Оптимальные управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. — СПб.: Изд-во С. -Петербургского ун-та, 2003. — 540 с.

115. Миллионщиков В. М. О рекуррентных и почти периодических предельных решениях неавтономных систем // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, Ґ 9 — С. 1555–1559.

116. Миллионщиков В. М. О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти — периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. — 1967. — Т. 3, Ґ 12. — С. 2127–2134.

117. Миллионщиков В. М. Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 161, Ґ 1. — С. 43–44.

118. Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. — М., Физматлит, 2001. — 302 с.

119. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. Н. Принцип максимума в оптимальном управлении. — М.: Изд-во прикл. исслед. при мех.-матем. фак. МГУ, 2004. — 168 с.

120. Морина С. И. Компактификация экстремальных задач и асимптотическая достижимость: Дис. ... канд. физ.–мат. наук: 01.01.02. — Екатеринбург, 1995. — 98 с.

121. Натансон И.П̇. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

122. Немыцкий В. В. Динамические системы на предельном интегральном многообразии // Доклады АН СССР. — 1941. — Т. XLVII, Ґ 8. — С. 555–558.

123. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.

124. Обэн Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 512 с.

125. Пак В.Е., Ченцов А.Г. Некоторые топологические свойства обобщенных решений нелинейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т.25, Ґ11. — С. 607-617.

126. Панасюк А. И. Аппроксимационные подсистемы динамической системы сдвигов //

Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, Ґ 10. — С. 1705–1716.
127. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. — 296 с.
128. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Оптимальное управление с усредненным вдоль траектории функционалом // ПММ. — 1985. — Т. 49, Ґ 4. — С. 525–536.
129. Панасюк В. И., Ковалевский В. Б., Политыко Э. Д. Оптимальное управление в технических системах — Мн.: Навука і тэхніка, 1990. — 272 с.
130. Перов А. И., Белоусова Е. П. Об одной нелинейной задаче периодической оптимизации / Воронеж. ун-т. Воронеж, 1995. — 23 с. Деп. в ВИНИТИ 09.08.95, Ґ 2409-95.
131. Перов А. И., Тананика А. А. Об одном геометрическом результате в вопросах периодической оптимизации // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, Ґ 4. — С. 718–721.
132. Петрова В. В., Тонков Е. Л. Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений // Изв. вузов. Математика. — 1996, Ґ 11. — С. 65–71.
133. Петрова В. В., Тонков Е. Л. Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений // Изв. вузов. Математика. — 1996, Ґ 12. — С. 65–71.
134. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1989. — 64 с.
135. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
136. Попова С. Н. О связи между различными видами управляемости асимптотических характеристик линейных систем // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, Ґ 6. — С. 850–851.
137. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, Ґ 2. — С. 226–235.
138. Розенвассер Е. Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. — М.: Наука, 1977. — 344 с.
139. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.
140. Самойленко А. М., Трофимчук С. И. О пространствах кусочно-непрерывных почти периодических функций и почти периодических множеств на прямой. II // Укр. матем. журн. — 1992. — Т. 44, Ґ 3. — С. 389–400.
141. Серов В.П., Ченцов А. Г. Об одной конструкции расширения задачи управления с интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т.26, Ґ4. — С. 607-617.
142. Сибирский К. С. Введение в топологическую динамику. — Кишинев.: РИО АН МССР, 1970. — 144 с.
143. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 287 с.
144. Тонков Е. Л. Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости рекуррентной системы // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 256, Ґ 2. — С. 290–294.
145. Тонков Е. Л. К теории линейных управляемых систем //Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 .— Свердловск, 1983 .— 267 с.
146. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизации линейной рекуррентной системы //Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15, Ґ 10. — С. 1804–1813.

147. Тонков Е. Л. Линейная задача оптимального управления периодическими решениями // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, Ґ 6. — С. 1007–1011.
148. Тонков Е. Л. Линейное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами // Математическая физика. — 1978. — Вып. 24. — С. 58–69.
149. Тонков Е. Л. Оптимальные периодические движения управляемой системы // Математическая физика. — 1977, вып. 21. — С. 45–59.
150. Тонков Е. Л. Оптимальные периодические движения управляемой системы // Математическая физика. — 1977. — Вып. 22. — С. 54–64.
151. Тонков Е. Л. Равномерная достижимость и ляпуновская приводимость // Труды Ин-та матем. и механики. Екатеринбург: УрО РАН. — 2000. — Т. 6, Ґ 1. — С. 207–238.
152. Тонков Е. Л. Равномерная локальная управляемость и стабилизация нелинейной рекуррентной системы //Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, Ґ 5. — С. 908–910.
153. Тонков Е. Л. Стабилизация и глобальная управляемость почти периодической системы //Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15, Ґ 4. — С. 757–758.
154. Тонков Е. Л. Управляемость нелинейной системы по линейному приближению // ПММ. — 1974. — Т. 38, вып. 4. — С. 599–606.
155. Тонков Е. Л. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ТИХМ, 1972. — 88 с.
156. Тонкова В. С. Вопросы эффективного расширения задач математического программирования // Методы вычислительного эксперимента в инженерной практике. Ижевск.: ИММ. — 1991. — Вып. 1. — С. 90–99.
157. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. — Л.: Машиностроение, 1976. — 248 с.
158. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 252 с.
159. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 309 с.
160. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 544 с.
161. Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Е. Г. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. — М.: Энергия, 1976. — 448 с.
162. Ченцов А. Г. Топологические конструкции расширений и представления множеств притяжения // Труды Ин–та математики и механики УрО РАН. — 2000. — Т. 6, Ґ 1. – С. 247-276.
163. Ченцов А. Г. К вопросу о компактификации пучка траекторий одной абстрактной управляемой системы // Изв. вузов. Математика. — 1994. — Ґ 5(528). — С. 55–66.
164. Ченцов А. Г. К вопросу о корректности расширений одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий // Успехи матем. наук. — 1995. — Т. 50, вып. 5(305) — С. 223–242.
165. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. — Екатеринбург: Наука, 1993. — 232 с.
166. Ченцов А. Г. Приложения теории меры к задачам управления. — Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1985. — 128 с.
167. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. — М.: Наука, 1978. — 348 с.
168. Чубурин Ю. П. О многомерном дискретном уравнении Шредингера с предельно периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. — 1995. — Т. 102, Ґ 1. — С. 74–82.

169. Щербаков Б. А. Многомерные динамические системы // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, Ѓ 5 — С. 1797–1807.
170. Щербаков Б. А. Рекуррентные решения дифференциальных уравнений и общая теория динамических систем // Дифференц. уравнения. — 1967. — Т. 3, Ѓ 9 — С. 1450–1460.
171. Щербаков Б. А. Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений. — Кишинев.: Штииница, 1972. — 146 с.
172. Щербаков Б. А., Чебан Д. Н., Асимптотически устойчивые по Пуассону движения динамических систем и сравнимость их по возвращаемости в пределе // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, Ѓ 5. — С. 898–906.
173. Энкелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.
174. Якубович В. А. Линейно–квадратичная задача оптимального гашения вынужденных колебаний при неизвестном гармоническом внешнем воздействии // Докл. РАН. — 1993. — Т. 333, Ѓ 2. — С. 170–172.
175. Bailey J. E Necessary conditions for optimality in a general class of non–linear mixed boundary value control problems // Int. J. Control. — 1972. — V. 16, Ѓ 2. — P. 311–320.
176. Bittanti S., Locatelli A., Guardabassi G. Periodic control: A frequency domain approach // IEEE Trans. Automat. Control. — 1973. — V.18, Ѓ 1. — P. 33–34.
177. Bittanti S., Locatelli A., Maffezoni C. Second-variation methods in periodic optimization // J. Optim. Theory and Appl. — 1974. — V. 14, Ѓ 14. — P. 31–49.
178. Blot J. Calculus of variations in mean and convex Lagrangians // J. Math. Anal. — 1988. — V. 134, Ѓ 2. — P. 312–321.
179. Blot J. Oscilliations presque–periodiques forcees d'equations d'Euler–Lagrange // Bull. Soc. math. France. — 1994. — V. 122. — P. 337–344.
180. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable able multifunction // Lect. Notes Math., Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York, 1977. — V. 459. — 279 p.
181. Chang K. S. Necessary and sufficient conditions for optimality. Periodic optimization. New York: Springer-Verlag, 1972. — P. 183–217.
182. Chentsov A. G. Asymptotic attainability// Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers. — 1997, — 400 p.
183. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and Relaxations // Kluwer Academic Publishers. — 2002. — V. 542. — 409 p.
184. Cieutat Ph. Bounded and almost periodic solutions of convex Lagrangian systems // J. Differential Equations. — 2003. — V. 190. — P. 108–130.
185. Cieutat Ph. Un principe variationnel pour une equation d'evolution parabolique // C. r. Acad. sci. Ser. 1. — 1994. — V. 318, Ѓ 11. — P. 995–998.
186. Dmitruk A. V. A nonlocal Lyusternik estimate and its application to control systems with sliding modes // Nonlinear Control Systems. — 2002. — V. 2.– P. 1061–1064.
187. Fink A. M. Almost periodic differential equations // Lect. Notes Math. — V. 377. — 336 p.
188. Gilbert E. G. Optimal Periodic Control: a General Theory of Necessary Conditions // SIAM J. Contr. Optimization. — 1977. — V. 15, Ѓ 5. — P. 717–746.
189. Guardabassi G., Locatelli A., Rinaldi S. The status of periodic optimization of dynamic systems // J. Optimization Theory and Appl. — 1974. — V. 14, Ѓ 1. — P. 1–20.
190. Halanay A. Optimal control of periodic solutions // Rev. Roumaine de mat. Pures et appl. — 1974. — V. 19, Ѓ 1. — P. 3–16.
191. Horn J., Lin R. C. Periodic Processes: A Variational Approach // Eng. Chem. Process

Design and Development. — 1967. — V. 6, Ѓ 1. — P. 21–30.
192. Johnson R. A. The recurrent Hill's equation // J. Different. Equat. — 1982. — Ѓ 46. — P. 165–193.
193. Markus L. Optimal control of limit cycles or what control theory can do to cure a heart attack or to cause one // Lect. Notes Math. — 1973. — V. 312. — P. 108–134.
194. Massera J. L. Un criterio di existencia de soluciones casi-periodicas de ciertos sistemas de ecuaciones differenciales casi-periodicas // Bul. Fac. intr. y agrimensura Montevideo. — 1958. — V. 6, Ѓ 11. — P. 345–349.
195. Neustadt L. W An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. II: Applications // J. SIAM Control. — 1967. — V. 5, Ѓ 1. — P. 90–137.
196. Noldus E. A survey of optimal periodic control of continuous systems // Journal A. — 1975. — V. 16, Ѓ 1. — P. 11–16.
197. Opial Z. //Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys. — 1961. — Vol. 9, Ѓ9. — P. 673–676.
198. Panasjuk A., Panasjuk V. Die wichtigsten Leitsatze der magistralen asymptotischen Theorie der optimalen Steuerung // 27 Intern. Wiss. Kolloq., Ilmenau. — 1982. H.5. Vortragsz. B1, B2. Ilmenau, s. a. — P. 99–104.
199. Styczen K. Optimal almost–periodic control problem: a trigonometric approximation approach // Int. J. Control. — 1988. — V. 48, Ѓ 6. — P. 2477–2489.
200. Yorke J. A. The maximum principle and controllability of nonlinear systems // SIAM J. Control. — 1972. — V. 10, Ѓ 2. — P. 334–338.