МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.934

МАСТЕРКОВ ЮРИЙ ВИКТОРОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор Е.Л. Тонков

Ижевск – 1999 г.

Оглавление

Введение

В данной работе рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m \tag{0.1}$$

и различные вопросы управляемости данной системы.

Проблемы управляемости динамических систем, интенсивно изучаемые с 1961 года, когда на первом конгрессе ИФАК был прочитан доклад Р. Е. Калмана [12], не потеряли своей актуальности и сейчас. В линейной постановке эти вопросы хорошо изучены и достаточно полно освещены в научных монографиях и учебных пособиях. Для нелинейных же систем вопрос об управляемости, в частности исследование локальной нуль-управляемости, исследован не настолько хорошо, как для линейных систем. Особый интерес представляет исследование локальной нуль-управляемости в, так называемом, ґкритическом случаеЄ (т. е. в случае, когда система линейного приближения для системы (0.1) не является вполне управляемой). Именно критические случаи доставляют массу интересных эффектов пограничной управляемости. Например, показано, что система может быть управляемой и при этом не являться устойчиво управляемой (см. ниже). Целью данной работы является изучение условий локальной управляемости, устойчивой локальной управляемости, устойчивой глобальной управляемости и позиционного управления системой (0.1) в критическом случае. Специальное исследование предпринято для системы второго порядка. Построены примеры внешне простых систем вида (0.1) с аномальным поведением управляемых траекторий.

Работа состоит из введения, трех глав, восьми параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы.

Перечислим основные результаты диссертации.

В первой главе рассматривается, предложенный А.Г. Бутковским [4], ґметод штрихованных границ траекторных воронокЄ. В основе данного метода лежат понятия конуса допустимых направлений, траекторной воронки, штрихованной боковой границы жесткой траекторной воронки и особых многообразий системы (0.1).

В первом параграфе вводятся понятия конуса допустимых направлений, траекторной воронки, штрихованной боковой границы жесткой траекторной воронки данного метода.

В качестве *допустимых управлений* системы (0.1) берутся всевозможные измеримые функции $u : t \longrightarrow U$.

Допустимым решением системы (0.1), удовлетворяющим начальному условию $x(0) = x_0$, называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, $t \in [0, \tau]$, которая почти всюду на отрезке $[0, \tau]$ удовлетворяет системе (0.1) при некотором управлении $u(t)$, $t \in [0, \tau]$.

Конусом допустимых направлений скоростей системы (0.1) называется множество

$$\mathbb{K}(x_0) \doteq \{\alpha x \in TK_{x_0} \colon \ \alpha \in \mathbb{R}_+,\, x \in F(x_0) \doteq f(x_0, U)\},$$

(здесь $TK_{x_0} \doteq \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_0, u_i),\, c_i \in R,\, u_i \in U\}$ — так называемое, *пространство скоростей* системы (0.1)). Т.е. $\mathbb{K}(x_0)$ — это конус, состоящий из всех лучей, выходящих из точки $0 \in TK_{x_0}$ и имеющих непустое пересечение с множеством $F(x_0) \doteq f(x_0, U)$

Множество всех точек в $\mathbb{R}^n$, в которые можно перейти из точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ за время $\tau \geqslant 0$, двигаясь по допустимым траекториям системы (0.1) называется *множеством достижимости из точки x_0 за время τ* и обозначается $\mathbb{D}_\tau(x_0)$.

Отрезком траекторной воронки системы (0.1) называется множество

$$V(x_0, \tau) \doteq \bigcup_{t \leqslant \tau} \mathbb{D}_t(x_0).$$

Точка x_0 называется *вершиной* траекторной воронки $V(x_0, \tau)$.

Основанием траекторной воронки $V(x_0, \tau)$ называется множество

$$\partial_f V(x_0, \tau) \doteq \partial V(x_0, \tau) \backslash \{\bigcup_{t<\tau} \partial V(x_0, t)\};$$

т.е. основание $\partial_f V(x_0, \tau)$ состоит из тех точек траекторной воронки $V(x_0, \tau)$, в которые можно попасть из точки x_0 за время τ с помощью допустимых управлений и нельзя перейти за время меньшее τ.

Множество $\partial_s V(x_0, \tau) \doteq \partial V(x_0, \tau) \backslash \partial_f V(x_0, t)$ называется *боковой границей* траекторной воронки $V(x_0, \tau)$.

Траекторная воронка $V(x_0, \tau)$ называется *жесткой*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых $t_1 \in (0, \tau + \varepsilon)$, $t_2 \in (0, \tau + \varepsilon)$, $t_1 < t_2$ выполняется условие

$$\partial_s V(x_0, t_1) \bigcap \partial_s V(x_0, t_2) = \partial_s V(x_0, t_1).$$

Боковую границу $\partial_s V(x_0, \tau)$ жесткой воронки $V(x_0, \tau)$ будем называть *границей* и обозначать $\partial_s V(x_0)$, подчеркивая, что граница жесткой траекторной воронки $V(x_0)$, по крайней мере вблизи точки x_0 не зависит от момента времени τ.

Доказаны следующие утверждения:

Л е м м а 0.1. *Пусть граница жесткой воронки $\partial_s V(x_0)$ существует и является гладкой (или кусочно-гладкой), то в точках гладкости границы ее можно описать как множество нулей гладкой (или кусочно-гладкой) функции $\varphi(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая необходимо удовлетворяет принципу максимума*

$$\max_{u\in U}\Big\langle f(x,u), \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\Big\rangle = 0. \tag{0.2}$$

во всех точках гладкости.

Т е о р е м а 0.1. *Пусть функция $x \to F(x) \doteq f(x,U)$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям:*

а) *при любом $x \in G$ множество $F(x)$ выпукло, компактно и существует такое $l > 0$, что $|F(x)| \leqslant l(1+|x|)$, где $|F(x)| \doteq \sup\limits_{q\in F(x)} |q|$.*

б) *функция $x \to F(x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица, т.е. в каждой ограниченной области $D \subset G$ существует такое $\lambda = \lambda(D) > 0$, что $\operatorname{dist}(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \lambda(D)|x_1 - x_2|$ для любых $x_1, x_2 \in D$, где $\operatorname{dist}(F(x_1), F(x_2))$ – метрика Хаусдорфа в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Пусть существуют вектор $p \in \mathbb{R}^n$ и константа $\alpha < 0$, что

$$H(x,p) \doteq \max_{u\in U}\langle f(x,u), p\rangle \leqslant \alpha \tag{0.3}$$

для любого $x \in G$.

Тогда для любого $x_0 \in G$ существует единственная дифференцируемая почти всюду функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяющая принципу максимума (0.2) *и начальному условию*

$$\varphi(x) = |x - x_0|, \tag{0.4}$$

для всех $x \in L \doteq \{x \in G\colon \langle x - x_0, p\rangle = 0\}$.

Таким образом для любой точки x_0 в произвольной ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$, в которой выполнены условия а), б) и неравенство (0.3) можно построить границу $\partial_s V(x_0)$ и продолжить ее по непрерывности, рассматривая ее, как множество нулей решения уравнения (0.2), вплоть до границы области G.

Во втором параграфе вводится понятие особых многообразий $\mathbb{S}$ системы (0.1), и в частности, многообразий перемены штриховки (сокращенно МПШ) границ траекторных воронок системы (0.1).

Точки $x_\alpha \in \partial_s V(x_0)$, для которых $\mathbb{K}(x_\alpha) \subset T_{x_\alpha}(\partial_s V(x_0))$ называются *особыми точками* границы $\partial_s V(x_0)$ (предполагается, что граница траекторной воронки $V(x_0)$ данных точках является гладкой).

Множество всех особых точек на границах всех траекторных воронок системы (0.1) называется *особыми многообразиями* системы (0.1) и обозначается $\mathbb{S}$.

Понятие особого многообразия тесно связано с понятием особых управлений (см. например [6]). Известно [6], что для системы

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U, \tag{0.5}$$

где $U = \operatorname{cl} U \subset \mathbb{R}$, $f_0, f_1 \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$, $m \geqslant n$, особые многообразия можно описать как множество нулей скалярной функции

$$s(x) \doteq \det(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)).$$

Функции $\{f_i(x)\}_{i=2}^{n-1}$ определяются следующим образом:

$$f_i(x) = [f_0(x), f_{i-1}(x)] \doteq \Big(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}\Big) f_{i-1}(x) - \Big(\frac{\partial f_{i-1}(x)}{\partial x}\Big) f_0(x)$$

Операция $[f_0(x), f_{i-1}(x)]$ называется *скобкой Ли-Пуассона* или *коммутатором* функций $f_0(x), f_{i-1}(x)$ (см. например [33]). Как будет показано в дальнейших параграфах функция $s(x)$ играет ключевую роль в построении фазового портрета и исследовании управляемости систем вида (0.5).

В третьем параграфе, в качестве показательного примера, исследуется структура боковых границ траекторных воронок линейной системы

$$\dot{x} = Ax + ub, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in [-1, 1]. \tag{0.6}$$

Доказана теорема.

Т е о р е м а 0.2. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n - 1$ *и*

$$s(x_0) \doteq \det(Ax_0, b, Ab, \ldots, A^{n-2}b) \neq 0. \tag{0.7}$$

Тогда существует такое $\tau > 0$, *что траекторная воронка* $V(x_0, \tau)$ *системы* (0.6) *является жесткой, телесной, а ее граница* $\partial_s V(x_0, \tau)$ *является кусочно-гладким многообразием класса* $\mathbb{C}^\infty$.

Показано, что в предположении (0.7) граница $\partial_s V(x_0,\tau)$ является объединением непересекающихся гладких, класса $\mathbb{C}^\infty$, многообразий т.е.

$$\partial_s V(x_0,\tau) = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{N_+^k \bigcup N_-^k\}.$$

Доказано также, что многообразия N_-^k и N_+^k, $k = 1,\dots,n-1$ не имеют общих точек и являются гладкими класса $\mathbb{C}^\infty$ слабо инвариантными многообразиями системы (0.6), причем для каждого $k = 0,\dots,n-2$, многообразие $N_+^k \bigcup N_-^k$ является общим краем многообразий N_+^{1+k} и N_-^{1+k}.

Многообразия N_+^k строятся следующим образом: для каждого $k = 1,\dots,n-1$ многообразие N_+^k является множеством концов всех, выходящих из точки x_0 допустимых траекторий системы (0.6), соответствующих допустимым управлениям

$$u_+^k(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leqslant t_1 \\ -1, & t_1 < t \leqslant t_2 \\ & \dots \\ (-1)^{k-1}, & t_{k-1} < t \leqslant t_k \end{cases},$$

где $\{t_i\}_{i=1}^k$ — произвольная возрастающая последовательность моментов времени из промежутка $(0,\tau)$. Т.е. $N_+^k \doteq \{x = x(t_k, u_+^k(\cdot)) :\ t_k \in (0,\tau)\}$, где $x(t, u_+^k(\cdot))$, $t \in (0,\tau)$ — допустимые решения системы, удовлетворяющие начальному условию $x(0, u_+^k(\cdot)) = 0$.

Многообразия N_-^k, $k = 1,\dots,n-1$ строятся аналогичным образом с заменой допустимого управления на $u_-^k(t) = -u_+^k(t)$.

Существенно в теореме 0.2 то, что $\operatorname{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n-1$, т.е. система (0.1), вообще говоря, не является вполне управляемой.

Результаты данного параграфа можно рассматривать как продолжение исследований С. Ф. Николаева и Е. Л. Тонкова (см. [29], [30], [31]).

Вторая глава посвящена исследованию управляемости в нуль системы (0.1) в предположении, что U непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, $0 \in \operatorname{int} f(0,U)$, $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Точка x_0 называется *τ-управляемой*, если существует такое допустимое управление $u : [0,\tau] \to U$, что разрешима краевая задача

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x(\tau) = 0.$$

Множество всех τ-управляемых точек называется *множеством управляемости* системы (0.1) *за время* τ и обозначается D_τ.

Множество $D_\infty = \bigcup_{\tau>0} D_\tau$ называется *множеством управляемости* системы (0.1).

Система (0.1) называется *локально управляемой* или просто *управляемой* [5, с. 39], если $0 \in \operatorname{int} D_\tau$ при некотором $\tau > 0$. Если при этом $D_\infty = \mathbb{R}^n$, то система (0.1) называется *глобально управляемой.*

Н.Н. Петровым (см. например [35], [36]), введено понятие N-управляемости системы (0.1). Свойство N-управляемости означает, что $0 \in \operatorname{int} D_\tau$ при всех $\tau > 0$. Если при этом $D_\infty = \mathbb{R}^n$, то система (4.1) называется *глобально N-управляемой.*

Наряду с уже известными понятиями локальной управляемости и N-управляемости, вводится понятие устойчивой управляемости.

О п р е д е л е н и е 0.1. Система (0.1) называется устойчиво управляемой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x_0 \in O^n_\delta(x_0)$ существуют время $\tau \in (0, \infty)$ и допустимое решение $x(t)$, $t \in [0, \tau]$ системы (0.1) удовлетворяющее условиям:

$$x(0) = x_0, \qquad x(\tau) = 0, \qquad |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in [0, \tau].$$

Понятие устойчивой управляемости не является новым. В работах И. П. Карасева (см. например [13],[14]) и Е. Л. Тонкова [45] встречается аналогичное понятие ґлокальной управляемости в маломЄ.

Пусть $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ соответственно множества локально управляемых, устойчиво управляемых и N-управляемых систем вида (0.1).

Т е о р е м а 0.3. $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$.

Доказано, что эти понятия не равносильны, приведены соответствующие примеры. Таким образом, свойство N-управляемости является наиболее сильным из известных к настоящему времени свойств управляемости, а устойчивая управляемость занимает промежуточное положение между N-управляемостью и локальной управляемостью.

Параграфы 5 и 6 посвящены изучению условий устойчивой управляемости системы

$$\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in [-1, 1] \tag{0.8}$$

в предположении, что функции f_0, f_1 голоморфны в некоторой окрестности начала координат, $f_0(0) = 0$, $f_1(0) = b \neq 0$.

Через $x = \gamma(t)$ $x = \gamma_+(t)$ и $x = \gamma_-(t)$ обозначим решения соответствующих систем

$$\dot{x} = f_1(x)\,, \quad \dot{x} = f_0(x) + f_1(x)\,, \quad \dot{x} = f_0(x) - f_1(x),$$

удовлетворяющие начальному условию

$$\gamma(0) = \gamma_+(0) = \gamma_-(0) = 0.$$

Т е о р е м а 0.4. *Пусть $n = 2$. Для того, чтобы система* (0.8) *была устойчиво управляемой, необходимо и достаточно, чтобы функция $s(\gamma(t))$ меняла в нуле знак.*

Т е о р е м а 0.5. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) \geqslant n - 1$, *а* $f_0, f_1 \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. *Если существуют число $\tau > 0$ и такие решения $x_+(t) = x(t, u_+(\cdot))$, $x_-(t) = x(t, u_-(\cdot))$, $t \in [0, \tau]$ системы* (0.8), *что*

$$x_+(0) = x_-(0) = 0, \quad s(x_+(t))s(x_-(t)) < 0 \ \text{ для всех } t \in (0, \tau),$$

то система (0.8) *устойчиво управляема.*

Т е о р е м а 0.6. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) \geqslant n - 1$, *а* $f_0, f_1 \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. *Если существует такое $\tau > 0$, что*

$$s(\gamma_+(t))s(\gamma_-(t)) < 0 \ \text{ для всех } t \in (0, \tau), \tag{0.9}$$

то система (0.8) *устойчиво управляема.*

Показано, что в случае $n = 2$ условие (0.9) является необходимым и достаточным условием устойчивой управляемости системы (0.8).

Задачам исследования локальной управляемости нелинейных систем посвящено немало работ (см. например [5], [7], [9], [12], [15], [16], [19], [28], [32], [34], [35], [36], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54]). Наиболее известный результат принадлежит Калману (см. например [5,]) и состоит в том, что *система* (0.1) *локально управляема, если соответствующая ей, система линейного приближения является вполне управляемой.* В работах Н. Н. Петрова [34], [35] доказано, что в случае *если соответствующая* (0.1) *система линейного приближения является вполне управляемой, то система* (0.1) *является N-управляемой*, а следовательно в этом случае, в силу теоремы 0.3, система (0.1) является и устойчиво управляемой. Поэтому наибольший интерес представляет, так называемый ґкритический случайЄ (т.е. когда система линейного приближения для системы (0.1) не является вполне управляемой).

К настоящему времени наиболее полная информация о локальной управляемости в критическом случае получена лишь для систем второго порядка (см. например [7], [9], [22], [28], [36]). Наиболее общий результат в случае $n = 2$ принадлежит Н. Н. Петрову [36], который получил критерий управляемости для систем второго порядка вида (0.1) с голоморфной правой частью. Следует отметить, что теорема 0.4 по сути является следствием данного критерия.

В случае произвольного n вопрос о локальной управляемости системы (0.1) в критическом случае пока исследован недостаточно. В ряде работ (см. например [16], [32], [35], [54]) получены достаточные условия локальной управляемости в критическом случае для некоторых видов управляемых систем, а в монографиях Т. Б. Копейкиной [15], [16] получены и необходимые условия локальной управляемости в критическом случае [1].

Глава 3 посвящена исследованию глобальной управляемости системы (0.1). Существенно то, что в отличие от предыдущих параграфов, здесь рассматриваются позиционные управления $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, а решения системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{0.10}$$

понимаются в смысле А.Ф. Филиппова [46].

Рассмотрим систему (0.1) в предположении, что

а) множество $U \subset \mathbb{R}^m$ — непусто связно компактно и $0 \in \operatorname{int} U$;

б) $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n \times U)$, $f(0, 0) = 0$, а многозначная функция $x \to F(x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по x.

О п р е д е л е н и е 0.2. Система (0.1) называется глобально устойчиво управляемой, если:

а) она устойчиво управляема;

б) множество нуль-управляемости D_∞ системы (0.1) совпадает с $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 0.3 ([3]). Непрерывно дифференцируемая функция $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется бесконечно большой, если:

1. $v(0) = 0$, $v(x) > 0$ для всех $x \neq 0$;

2. для любого $a > 0$, существует такое $r > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $|x| > r$, следует $v(x) > a$.

[1] Здесь не приводятся результаты работ [16], [32], [35], [54], поскольку для формулировки основных утверждений данных работ требуется построение достаточно громоздких алгебраических структур.

Известны следующие утверждения:

[34]*Пусть для любых* x, x_0 $(|x| \cdot |x_0 = 0|,\ x \neq x_0)$ *найдется такое* $u \in U$, *что* $\langle f(x,u), x - x_0\rangle < 0$. *Тогда система глобально управляема с помощью кусочно-постоянного управления.*

[19]*Пусть* $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n \times U)$ *и* $\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$, *где*

$$A \doteq \Big(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\Big)_{(0,0)}, \quad B \doteq \Big(\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\Big)_{(0,0)}$$

Предположим, что существуют бесконечно большая функция $v(x)$ *и непрерывно дифференцируемое позиционное управление* $u : \mathbb{R}^n \to U$, *что*

$$\Big\langle \frac{\partial v(x)}{\partial x}, f(x, u(x))\Big\rangle \leqslant 0, \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда множество управляемости D_∞ *системы совпадает с* $\mathbb{R}^n$.

В §8 доказаны теоремы:

Т е о р е м а 0.7. *Пусть система* (0.1) *устойчиво управляема. Если существуют измеримая по Борелю функция* $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *и бесконечно большая функция* $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *такие, что*

$$\dot v(x) \doteq \Big\langle \frac{\partial v(x)}{\partial x}, f(x, u(x))\Big\rangle \leqslant 0, \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.11}$$

причем множество $\{x \in \mathbb{R}^n :\ \dot v(x) = 0\}$ *не содержит целых траекторий системы* (0.10), *то система* (0.1) *глобально устойчиво управляема.*

Т е о р е м а 0.8. *Пусть система* (0.1) *локально управляема. Если существуют измеримая по Борелю функция* $u : \mathbb{R}^n \to U$ *и бесконечно большая функция* $v(x)$, *удовлетворяющая условию* (0.11), *причем множество* $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \ :\ \dot v(x) = 0\}$ *не содержит целых траекторий системы* (0.10), *то система* (0.1) *глобально управляема.*

Заметим, что у теоремы 0.8 такое же соотношение с процитированными выше утверждениями о глобальной управляемости, как и соотношение между второй теоремой А. М. Ляпунова [20] и теоремой Барбашина-Красовского [3] о глобальной устойчивости нулевого решения системы

$$\dot x = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $f(0) = 0$, т. е. существенно ослаблены условия накладываемые на функцию $v(x)$. Приведен пример в котором с помощью теоремы 0.8 сравнительно несложно доказывается глобальная управляемость, а при применении процитированных выше теорем о глобальной управляемости возникают существенные трудности.

Наряду с достаточными условиями локальной и глобальной устойчивой управляемости в диссертации доказаны соответствующие теоремы о локальной управляемости системы (0.8) и глобальной N-управляемости системы (0.1).

Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в работах [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27].

Выражаю глубокую признательность Е. Л. Тонкову за постановку задачи, формулировку теоремы 0.7 и сделанные в процессе работы над диссертацией замечания. Выражаю также искреннюю благодарность Н. Н. Петрову за обсуждение диссертации и, сделанные им, ценные замечания и советы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 97–01–00413, 99–01–00454), Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант 97–0–1.9).

Список основных обозначений

В работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n;

$\mathbb{R}_+ \doteq \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, \alpha \geqslant 0\}$;

$(\ )^*$ — операция транспонирования;

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ — вектор-столбец с компонентами $x_1, x_2, ..., x_n$;

x^* — вектор-строка;

$\langle x, y\rangle \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^*$;

$|x| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — абсолютная величина вектора x;

$O^n_\varepsilon(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| < \varepsilon\}$;

$O^n_\varepsilon \doteq O^n_\varepsilon(0)$;

∂G — граница множества G;

$\operatorname{int} G$ — внутренность множества G;

$\dim G$ — размерность множества G;

$\mathrm{d}(B, C) \doteq \sup_{b\in B} \inf_{c\in C} |b - c|$;

$\operatorname{dist}(B, C) \doteq \max\{\mathrm{d}(B, C), \mathrm{d}(C, B)\}$;

$\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, отождествляемое здесь с пространством матриц размером $n \times m$;

$\mathbb{C}^k(A, B)$ — пространство k-раз непрерывно дифференцируемых функций из A в B;

$\Big(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\Big)$ — $m \times n$ матрица, i-я строка которой составлена из частных производных $\partial f_i(x)/\partial x_j$, $j = 1, \ldots, n$, если $f(x) = ((f_1(x), \ldots, f_m(x))^*$ — m-мерная функция векторного аргумента $x \in \mathbb{R}^n$; если $m = 1$, то $\Big(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\Big) \doteq \operatorname{grad} f(x)$;

M^k — многообразие размерности k;

$\mathbb{C}^{r,k}$ — класс гладких (степени r) k-мерных многообразий;

$T_{x_0}(M^k)$ — касательное пространство к многообразию M^k в точке x_0.

Глава 1. Метод штрихованных границ траекторных воронок управляемых систем

В этой главе рассматривается геометрический подход к исследованию управляемых систем. Вводятся определения траекторной воронки и границы траекторной воронки для уравляемых систем общего вида.

Вводятся понятия особых многообразий и многообразий перемены штриховки, имеющих немаловажное значение для построения фазового портрета управляемых систем.

Подробно изучается структура границ траекторных воронок для линейной системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1].$$

Приведены примеры и иллюстрации.

§1. Траекторные воронки управляемых систем

В этом параграфе вводятся понятия траекторных воронок и границ траекторных воронок системы $\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$. Показано, что при выполнении определенных условий границы траеторных воронок описываются как множество нулей решения уравнения Гамильтона-Якоби.

Под управляемой системой в дальнейшем понимается система, которая описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U. \tag{1.1}$$

Множество $U \subset \mathbb{R}^m$, которое в дальнейшем будем называть *множеством допустимых значений управления*, предполагается непустым, связным и компактным. Относительно вектор-функции $f(x, u)$ предполагается, что ее компоненты $f_1(x, u), \dots, f_n(x, u)$ непрерывны по совокупности аргументов и непрерывно-дифференцируемы по $x_1, \dots, x_n$ во всем фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Напомним некоторые определения, относящиеся к системе (1.1).

Всевозможные измеримые функции $u: \ t \to U$ называются *допустимыми управлениями* системы (1.1).

Допустимым решением или *движением* системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_0$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, $t \in [0, \tau]$, которая почти всюду на отрезке $[0, \tau]$ удовлетворяет системе (1.1) при некотором управлении $u(t)$, $t \in [0, \tau]$.

Траектория допустимого решения $x(t)$, $t \in [0, \tau]$ назыывается *допустимой траекторией* системы (1.1), направленной от начала (точки $x(0)$), к ее концу (точке $x(\tau)$). Направление вдоль траектории от начала к концу называется *положительным.*

Зафиксируем точку x_0 и заставим управляющий параметр u пробегать все множество U. Тогда, в силу системы (1.1), точка $\dot{x}$ пробегает некоторое множество $F(x_0) \doteq f(x_0, U)$ в линейном пространстве

$$TK_{x_0} \doteq \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, y = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_0, u_i), c_i \in R, u_i \in U\},$$

которое в дальнейшем будем называть *пространством скоростей* системы (1.1), а множество $F(x) \doteq f(x, U)$ – *вектограммой* или *множеством допустимых скоростей* системы (1.1). Таким образом каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие непустое множество , т.е. мы получаем многозначное отображение $x \to F(x)$.

Введем обозначения

$$F(M) \doteq \bigcup_{x\in M} F(x), \quad |F(M)| \doteq \sup_{p\in F(M)} |p|.$$

Многозначная функция $x \to F(x)$ называется *ограниченной на множестве* $M \subset \mathbb{R}^n$, если $|F(M)| < \infty$.

Заметим, что в силу непрерывности функции $f(x,u)$ и компактности множества $U \subset \mathbb{R}^m$ множество $F(x) \doteq f(x,U)$ компактно при всех $x \in \mathbb{R}^n$ (см. например [46, стр. 54]).

Многозначная функция $x \to F(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in O_\delta(x_0)$ следует $\mathrm{dist}(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$, где $\mathrm{dist}(F(x), F(x_0))$ метрика Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$ [46].

Многозначная функция $x \to F(x)$ называется *непрерывной на множестве* $M \subset \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Многозначная функция $x \to F(x)$ называется *полунепрерывной сверху* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in O_\delta(x_0)$, следует $\mathrm{d}(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$. Функция $x \to F$ называется *полунепрерывной сверху на множестве* $M \subset \mathbb{R}^n$, если она полунепрерывна сверху в каждой точке этого множества [46].

Легко видеть, что в силу сделанных предположений, множество $F(x)$ компактно при всех $x \in \mathbb{R}^n$, а многозначная функция $x \to F(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ множество $F(x)$ выпукло.

О п р е д е л е н и е 1.1 (см. [46]). Решением включения

$$\dot{x} \in F(x) \tag{1.2}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$ называется абсолютно непрерывная функция $x(t)$, $t \in [0, \tau]$, которая почти всюду на отрезке $[0, \tau]$ удовлетворяет включению $\dot{x}(t) \in F(x(t))$.

При сделанных выше предположениях любое решение системы (1.1) является решением включения (1.2) и наоборот, зная решение $x(t)$, $t \in [0, \tau]$, дифференциального включения (1.2), можно восстановить то управление $u(t)$, $t \in [0, \tau]$, для системы (1.1), которое порождает это решение (см. [46]). Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять систему (1.1) и включение (1.2) (т.е. когда речь идет о системе (1.1), то предполагается, что одновременно говорится и о включении (1.2)).

О п р е д е л е н и е 1.2 (см. [4]). Множество

$$\mathbb{K}(x_0) \doteq \{\alpha x \in TK_{x_0} \colon \alpha \in \mathbb{R}_+, x \in F(x_0)\}$$

называется конусом допустимых направлений скоростей системы (1.1). Т.е. $\mathbb{K}(x_0)$ — это конус, состоящий из всех лучей, выходящих из точки $0 \in TK_{x_0}$ и имеющих непустое пересечение с множеством $F(x_0)$ (см. рис. 1.1а)).

Рис. 1.1. В зависимости от множества $F(x_0)$ конус $\mathbb{K}(x_0)$ может быть как замкнутым (рис. а), так и не замкнутым множеством (рис. б).

Если $F(x_0) = 0$ (т.е. $f(x_0, u) \equiv 0$ при всех $u \in U$), то точка x_0 называется *точкой абсолютного равновесия* системы (1.1).

В силу сделанных предположений конус допустимых направлений скоростей $\mathbb{K}(x)$ непустой и выпуклый для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Однако, несмотря на то, что множество $F(x)$ замкнуто, соответствующий ему конус $\mathbb{K}(x)$ может оказаться незамкнутым (см. рис. 1.1б)).

Конус $\mathbb{K}(x_0)$ будем называть *телесным*, если $\operatorname{int} \mathbb{K}(x_0) \neq \varnothing$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Конус $\mathbb{K}(x_0)$ называется *заостренным*, если существует такой вектор $p \in \mathbb{R}^n$, что для всех $u \in U$ выполнено неравенство

$$(p, f(x_0, u)) < 0.$$

В дальнейшем, для удобства изложения, будем рассматривать не весь конус $\mathbb{K}(x)$, а лишь его ограничение на шар O_1^n, т.е. $K(x) \doteq \mathbb{K}(x) \bigcap O_1^n$.

Поле конусов $K(x)$ системы (1.1) будем называеть *непрерывным в области* $G \subset \mathbb{R}^n$ если многозначная функция $x \to K(x)$ непрерывна в области G.

Необходимо отметить, что непрерывность функции $K(x)$ является более сильным условием, чем непрерывность функции $F(x)$, т.е. из непрерывности функции $F(x)$ не следует непрерывность функции $K(x)$.

П р и м е р 1.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $|u_i| \leqslant 1$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}^2$ множество $F(x_0) \doteq f(x_0, U)$ является квадратом со стороной 2 и центром в точке x_0, т.е. многозначная функция $x \to F(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Однако функция $K(x)$ разрывна в каждой точке границы квадрата

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2\colon\ |x_i| \leqslant 1,\ i = 1, 2\}.$$

Действительно, для каждой точки $x \in \operatorname{int} M$ выполнено включение $0 \in \operatorname{int} F(x)$, т.е. конус $K(x)$ не является заостренным. В точках $x \notin M$ имеем $0 \notin F(x)$, т.е. конус $K(x)$ — заостренный (см.рис. 1.2). И наконец для точек $x \in \partial M$ следует $0 \in \partial F(x)$. Но тогда для любых двух точек $x_\alpha \in \partial M$, и $x_\beta \notin M$ следует, что

$$\operatorname{dist}(K(x_\alpha), K(x_\beta)) \geqslant \mathrm{d}(K(x_\alpha), K(x_\beta)) \geqslant 1,$$

т.е. функция $K(x)$ разрывна в каждой точке границы квадрата M.

Вообще говоря, для непрерывности поля конусов $K(x)$ в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ достаточно, чтобы функция $F(x)$ была непрерывна в G и выполнялось одно из условий:

а) для любого $x \in G$, точка $x \in \operatorname{int} F(x)$;

б) для любого $x \in G$, точка $x \notin F(x)$, ($f(x, u) \neq 0$ ни при каких $x \in G$ и $u \in U$), т.е. конус $K(x)$ для всех $x \in G$ был бы заостренным.

О п р е д е л е н и е 1.3. Множество всех точек в $\mathbb{R}^n$, в которые можно перейти из точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ за время $\tau \geqslant 0$, двигаясь по допустимым траекториям системы (1.1) называется множеством достижимости из точки x_0 за время τ и обозначается $\mathbb{D}_\tau(x_0)$.

Рис. 1.2. Функция $x \to K(x)$ разрывна в каждой точке границы квадрата M.

О п р е д е л е н и е 1.4. Отрезком траекторной воронки системы (1.1) называется множество

$$V(x_0, \tau) \doteq \bigcup_{t \leqslant \tau} \mathbb{D}_t(x_0).$$

Точка x_0 называется вершиной траекторной воронки $V(x_0, \tau)$.

Иначе говоря, отрезок траекторной воронки $V(x_0, \tau)$ системы (1.1) — это множество точек всех допустимых траекторий системы (1.1), выходящих из точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, по которым изображающая точка системы движется в течение времени $\tau \geqslant 0$.

Отрезок траекторной воронки будем называть *телесным*, если при любом $t \in (0, \tau]$ траекторная воронка $V(x_0, t)$ имеет непустую внутренность относительно $\mathbb{R}^n$.

Вообще говоря, из того факта, что воронка $V(x_0, \tau)$ — телесная, вовсе не следует, что конус $K(x_0)$ — телесный.

П р и м е р 1.2. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 2$, $u \in [-1, 1]$, $b \neq 0$. Очевидно, конус $K(x_0)$ имеет две образующие $p_+(x_0) = Ax_0 + b$ и $p_-(x_0) = Ax_0 - b$ (см.рис. 1.3).

Рис. 1.3. Конус допустимых направлений $K(x)$ системы 1.4.

Поскольку размерность пространства $\dim TK_{x_0} \leqslant 2$, то ни при каких $x_0 \in \mathbb{R}^n$ конус $K(x_0)$ не может быть телесным. Однако в случае, если

$$\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = n,$$

то траекторная воронка $V(x, \tau)$ при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $\tau > 0$ является телесной (см. например [5]). Более того, для любого $\tau > 0$, траекторная воронка $V(0, \tau)$ содержит некоторую окрестность начала координат.

Геометрическая форма отрезка траекторной воронки $V(x_0, \tau)$, в зависимости от x_0 и τ может быть весьма произвольной: от простейшей — $V(x_0, \tau) \equiv x_0$, если x_0 — точка абсолютного равновесия системы (1.1); до такой, когда траекторная воронка $V(x_0, \tau)$ целиком заполняет некоторую окрестность точки x_0 в пространстве $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для которой отрезок траекторной воронки $V(x_0, \tau)$ при любых $\tau > 0$ содержит некоторую окрестность точки x_0 называется точкой локальной достижимости системы (1.1).

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, не содержащая точек локальной достижимости и точек абсолютного равновесия системы (1.1). Предположим, что в области G поле конусов $K(x)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа, и все конусы данного поля являются заостренными. Тогда для любой точки $x_0 \in G$ отрезок траекторной воронки $V(x_0, \tau)$, по крайней мере при достаточно малом $\tau > 0$, не будет заполнять окрестность точки x_0 в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть траекторная воронка $V(x_0, t)$ телесная. Такая воронка $V(x_0, \tau)$ будет иметь вид коноида с вершиной в точке $x_0 \in G$ (здесь: *коноид* — множество в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное конусу с конечной образующей: $\{y \in \mathbb{R}^n : \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2} \leqslant y_n \leqslant l < \infty\}$). У этого коноида можно выделить *боковую граничную поверхность* (или *боковую границу* воронки $V(x_0, \tau)$) и его *основание* (см.рис. 1.4).

Рис. 1.4. Траекторная воронка $V(x_0, \tau)$ системы (1.1)

Основанием траекторной воронки $V(x_0, \tau)$ будем называть множество

$$\partial_f V(x_0, \tau) \doteq \partial V(x_0, \tau) \backslash \{\bigcup_{t<\tau} \partial V(x_0, t)\};$$

т.е. основание $\partial_f V(x_0, \tau)$ состоит из тех точек траекторной воронки $V(x_0, \tau)$, в которые можно попасть из точки x_0 за время τ с помощью допустимых управлений и нельзя перейти за время меньшее τ.

Боковой границей отрезка траекторной воронки $V(x_0, \tau)$ будем называть множество

$$\partial_s V(x_0, \tau) \doteq \partial V(x_0, \tau) \backslash \partial_f V(x_0, t).$$

Существенно то, что нас будет интересовать не основание траекторной воронки, а ее боковая граница $\partial_s V(x_0, \tau)$.

Отметим тот факт, что для любой точки $x_\alpha \in \partial_s V(x_0,\tau)$ существует такое время $\vartheta = \vartheta(x_\alpha) \in (0,\tau)$, что $V(x_\alpha,\vartheta) \subset V(x_0,\tau)$, т.е. никакая допустимая траектория системы (1.1), выходящая из точки $x_\alpha \in \partial_s V(x_0,\tau)$, не сможет покинуть траекторную воронку (x_0,τ) по крайней мере в течение некоторого времени $\vartheta > 0$ (см. рис. 1.5) Действительно, если $x_\alpha \in \partial_s V(x_0,\tau)$, то существует такое время $t_\alpha < \tau$, что $x_\alpha \in \mathbb{D}_{t_\alpha}(x_0)$. Тогда $\mathbb{D}_{t_\alpha+\vartheta}(x_0) \subset V(x_0,\tau)$ для любого $\vartheta \in [0,\tau - t_\alpha]$. Т.е. любое допустимое решение $x(t)$, $t \in [0, t_\alpha + \vartheta]$, удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0$, $x(t_\alpha) = x_\alpha$, необходимо удовлетворяет условию

$$x(t_\alpha + \vartheta) \in \mathbb{D}_{t_\alpha+\vartheta}(x_0) \subset V(x_0,\tau).$$

А это и означает, что $V(x_\alpha,\vartheta) \subset V(x_0,\tau)$.

Рис. 1.5. При любом $x_\alpha \in \partial_s V(x_0,\tau)$ траекторная воронка $V(x_\alpha,\vartheta)$ системы (1.1) содержится в $V(x_0,\tau)$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Траекторная воронка $V(x_0,\tau)$ называется жесткой, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых $t_1 \in (0,\tau+\varepsilon)$, $t_2 \in (0,\tau+\varepsilon)$, $t_1 < t_2$ выполняется условие

$$\partial_s V(x_0,t_1) \bigcap \partial_s V(x_0,t_2) = \partial_s V(x_0,t_1).$$

Боковую границу $\partial_s V(x_0,\tau)$ жесткой воронки $V(x_0,\tau)$ будем называть *границей* и обозначать $\partial_s V(x_0)$, подчеркивая, что граница жесткой траекторной воронки $V(x_0)$, по крайней мере вблизи точки x_0 не зависит от момента времени τ.

Поясним сказанное на примере.

П р и м е р 1.3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 + ux_1 \end{cases} \tag{1.5}$$

где $u \in [-1, 1]$. Рассмотрим отрезок траекторной воронки $V(x_0, 1)$, где $x_0 = (-1, 1)^*$. Нетрудно установить (см. рис. 1.6), что множества

$$\Gamma_- \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1, x_1 = -1 - t, t \in [0, 1)\},$$
$$\Gamma_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = (t-1)^2, x_1 = -1 + t, t \in [0, 1)\}$$

— суть допустимые траектории системы (1.5), соответствующие управленям $u = -1$ и $u = -1$. Действительно заметим, что во всех точках $x \in \Gamma_-$ прямая $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\}$ является опорной к конусу допустимых направлений $K(x)$, причем вектограмма направлена вниз, т.е. никакая допустимая траектория системы (1.5) не может сойти вверх с траектории Γ_-. Таким образом $\Gamma_- \subset \partial_s V(x_0, 1)$.

Рис. 1.6. Траекторная воронка $V(x_0, 1)$ системы (1.5).

Аналогично, во всех точках $x \in \Gamma_+$ касательная к траектории Γ_+ является опорной прямой к конусу $K(x)$, и вектограмма в этом случае направлена влево-вниз, т.е. никакая допустимая траектория системы (1.5) не может сойти вправо-вверх с траектории Γ_+. Таким образом $\Gamma_+ \subset \partial_s V(x_0, 1)$. Отмечая очевидное: $(-2, 1)^*, (0, 0)^* \in \partial_f V(x_0, 1)$, получаем, что $\partial_s V(x_0, 1) = \Gamma_- \bigcup \Gamma_+$.

Рис. 1.7. Граница $\partial_s V(x_0, 1+\theta)$ (жирная линия) не содержит границу $\partial_s V(x_0, 1)$.

С другой стороны, хорошо известно (см. например [19]), что начало координат является точкой локальной достижимости системы (1.5), и следовательно при любых $\theta > 0$ граница траекторной воронки $V(x_0, 1+\theta)$ не будет содержать границу $\partial_s V(x_0, 1)$ (см. рис. 1.7).

Рассмотрим жесткую телесную траекторную воронку $V(x_0)$. Пусть $x_\alpha \in \partial_s V(x_0)$. Предположим, что ее граница $\partial_s V(x_0)$ в некоторой окрестности точки $x_\alpha \in \partial_s V(x_0)$ является гладкой, т.е. $M^{n-1}_{x_\alpha} \doteq O_\varepsilon(x_\alpha) \bigcap \partial_s V(x_0)$ является гладким, класса $\mathbb{C}^1$ многообразием размерности $n-1$.

Тогда, очевидно, конус $K(x_\alpha)$ будет расположен по одну сторону от касательной плоскости $T_{x_\alpha}(M^{n-1}_{x_\alpha})$, а вектор внешней нормали n_{x_α} к границе $\partial_s V(x_0)$ по другую сторону, причем $K(x_\alpha) \bigcap T_{x_\alpha}(M^{n-1}_{x_\alpha}) \neq \varnothing$ (см. рис. 1.8). Таким образом для каждой точки гладкости границы $\partial_s V(x_0)$ выполняется условие $\max\limits_{u \in U} \langle f(x_\alpha, u), n_{x_\alpha} \rangle = 0$.

В силу предположения о гладкости границы $\partial_s V(x_0)$, в окрестности $O^n_\varepsilon(x_\alpha)$ существует гладкая функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $M^{n-1}_{x_\alpha} = \{x \in O^n_\varepsilon(x_\alpha)\colon \quad \varphi(x) = 0\}$;

2) $\left(\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)_{x = x_\alpha} = n_{x_\alpha}$.

Рис. 1.8. Касательная плоскость $T_{x_\alpha}\partial_s V(x_0)$ разделяет конус $K(x_\alpha)$ и вектор n_{x_α}.

Тогда для каждого $x \in M^{n-1}_{x_\alpha}$ выполняется *принцип максимума*

$$\max_{u\in U}\left\langle f(x,u), \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right\rangle = 0. \tag{1.6}$$

Таким образом доказана лемма.

Л е м м а 1.1. *Пусть граница жесткой воронки $\partial_s V(x_0)$ существует и является гладкой (или кусочно-гладкой), то в точках гладкости границы ее можно описать как множество нулей гладкой (или кусочно-гладкой) функции $\varphi(x)\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая необходимо удовлетворяет принципу максимума* (1.6) *во всех точках гладкости.*

Для каждого $p \in \mathbb{R}^n$ определим функцию Гамильтона

$$H(x,p) \doteq \max_{u\in U}\langle f(x,u), p\rangle.$$

Будем предполагать,что функция $x \to F(x)$ непрерывна в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям:

а) при любом $x \in G$ множество $F(x)$ выпукло, компактно и существует такое $l > 0$, что

$$|F(x)| \leqslant l(1+|x|);$$

б) функция $(x) \to F(x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица, т.е. в каждой ограниченной области $D \subset G$ существует такое $\lambda = \lambda(D) > 0$, что

$$\operatorname{dist}(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \lambda(D)|x_1 - x_2|$$

для любых $x_1, x_2 \in D$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть существует вектор $p \in \mathbb{R}^n$ и константа $\alpha < 0$, такие, что*

$$H(x, p) \leqslant \alpha \tag{1.7}$$

для любого $x \in G$.

Тогда для любого $x_0 \in G$ существует единственная дифференцируемая почти всюду функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяющая принципу максимума (1.6) и начальному условию

$$\varphi(x) = |x - x_0|, \tag{1.8}$$

для всех $x \in L \doteq \{x \in G\colon \langle x - x_0, p\rangle = 0\}$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1.1, приведем известные факты.

Т е о р е м а 1.2 (см. [40]). *Пусть задана непрерывная функция $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда существует одна и только одна непрерывная функция $\psi : [0, T] \times G \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет начальному условию*

$$\psi(0, x) = \sigma(x)$$

и во всех точках $(t, x) \in [0, T] \times G$, где существуют производные $(\partial\psi/\partial t)$, $(\partial\psi/\partial x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial\psi(t, x)}{\partial t} + \max_{u \in U}\Big\langle f(x, u), \frac{\partial\psi(t, x)}{\partial x}\Big\rangle = 0. \tag{1.9}$$

Более того, если функция $\sigma(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то функция $\psi(t, x)$ будет дифференцируемой почти всюду в $[0, T] \times G$.

Перейдем к доказательству теоремы 1.1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности будем полагать, что $p^* = (0, \dots, 0, -1)$. Тогда, в силу неравенства (1.7), проекция вектора $f(x, u)$ на координатную ось OX^n для всех $x \in G, u \in U$ положительна, т.е. координатная функция $f_n(x, u) \geqslant \mu > 0$.

Положим $\widehat{f_i}(x, u) \doteq (f_i(x, u)/f_n(x, u))$, $i = (1, 2, \dots, n-1)$.

Введем обозначения:

$$\widehat{f}(x, u)^* \doteq (\widehat{f_1}(x, u), \widehat{f_2}(x, u), \dots, \widehat{f}_{n-1}(x, u));$$

$$\tau \doteq x_n - x_{n_0}; \quad \widehat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})^*;$$

$$\widehat{G} \doteq \{x \in G\colon\ x_n \geqslant x_{n_0}\}.$$

Легко видеть, что $\widehat{f} \in \mathbb{C}^1(\widehat{G} \times U)$, а множество $\widehat{F}(\widehat{x}, \tau) \doteq G(x_1, \dots, x_{n-1}, \tau)$ является выпуклым компактом для всех $(\widehat{x}, \tau) \in \widehat{G}$. Очевидно, что многозначная функция $x \to \widehat{F}(\widehat{x}, \tau)$ удовлетворяет условиям а) и б). По теореме 1.2, уравнение Гамильтона-Якоби (1.9) имеет единственное решение $\psi(\widehat{x}, \tau)$, удовлетворяющее условию $\psi(\widehat{x}, 0) = |x - x_0|$. Поскольку функция $\sigma(\widehat{x}) = |\widehat{x} - \widehat{x}_0|$ является липшицевой, то данное решение $\psi(\widehat{x}, \tau)$ дифференцируемо почти всюду в $\widehat{G}$. Положим $\varphi(x) = \psi(\widehat{x}, \tau)$, тогда $\varphi(x_0) = \psi(\widehat{x}_0, 0) = 0$, причем функция $\varphi(x)$ дифференцируема почти всюду в G и в точках дифференцируемости, очевидно, удовлетворяет принципу максимума (1.6). Теорема доказана.

Таким образом мы получаем, что если граница жесткой воронки $\partial_s V(x_0)$ существует, то в силу принципа максимума (1.6) и теоремы 1.1 существует окрестность $O^n_\varepsilon(x_0)$ и дифференцируемая почти всюду функция $\varphi(x)\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\partial_s V(x_0) \bigcap O^n_\varepsilon(x_0) = \{x \in O^n_\varepsilon(x_0)\colon\ \varphi(x) = 0\}.$$

Если $\partial\varphi(x)/\partial x \neq 0$ в окрестности $O^n_\varepsilon(x_0)$, то граница $\partial_s V(x_0)$ будет многообразием размерности $n - 1$ гладким почти всюду в $O^n_\varepsilon(x_0)$.

Заметим, что таким образом для любой точки x_0 в произвольной ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$, в которой выполнены условия а), б) и неравенство (1.7) можно построить границу $\partial_s V(x_0)$ и продолжить ее по непрерывности, рассматривая ее, как множество нулей решения уравнения (1.6), вплоть до границы области G.

§2. Особые многообразия управляемых систем

Здесь вводится понятие особых многообразий, штрихованных границ траекторных воронок и многообразий перемены штриховки.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x,u), \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times U. \tag{2.1}$$

Предполагается, что множество $U \subset \mathbb{R}^m$ непусто, связно и компактно, а многозначная функция $x \to F(x) \doteq f(x,U)$ в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Пусть кроме того выполнено следующие условия: для каждого $x \in G$ траекторная воронка $V(x)$ является жесткой, телесной, а ее граница $\partial_s V(x)$ является кусочно-гладким многообразием размерности $n-1$. При выполнении данных условий в некоторой окрестности $O_\varepsilon^n(x_0)$ каждой точки $x_0 \in G$ существует кусочно-гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что

$$\partial_s V(x_0) = \{x \in O_\varepsilon^n(x_0) : \quad \varphi(x) = 0\},$$

и как было показано в §1, функция $\varphi(x)$ необходимо удовлетворяет принципу максимума

$$H\Big(x, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\Big) \doteq \max_{u \in U}\Big\langle f(x,u), \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\Big\rangle = 0. \tag{2.2}$$

В силу теоремы 1.1 данное решение решение уравнения (2.2) можно прожолжить до границы области G. Пусть $x_\alpha \in \partial_s V(x_0)$ является точкой гладкости границы, а $\Big(\dfrac{\partial\varphi(x_\alpha)}{\partial x}\Big) \neq 0$. Тогда в силу принципа максимума (2.2) вектор $p_{x_\alpha} = \Big(\dfrac{\partial\varphi(x_\alpha)}{\partial x}\Big)$ является вектором внешней нормали к границе $\partial_s V(x_0)$ в точке x_α. Могут возникнуть две ситуации:

а) конус $K(x_\alpha)$ целиком лежит в касательной плоскости $T_{x_\alpha}(\partial_s V(x_0))$, т.е. $\langle f(x_\alpha,u), p_{x_\alpha}\rangle \equiv 0$ для всех $u \in U$;

б) существует такое $u_\alpha \in U$, что $\langle f(x_\alpha,u_\alpha), p_{x_\alpha}\rangle < 0$, т.е. конус $K(x_\alpha)$ не лежит целиком в касательной плоскости $T_{x_\alpha}(\partial_s V(x_0))$.

О п р е д е л е н и е 2.1 ([4]). Точки $x_\alpha \in \partial_s V(x_0)$, для которых $K(x_\alpha) \subset T_{x_\alpha}(\partial_s V(x_0))$ (т.е. выполнено условие а)), называются особыми точками границы $\partial_s V(x_0)$.

Множество особых точек на границах всех траекторных воронок системы (2.1) называется особыми многообразиями системы (2.1) и обозначается $\mathbb{S}$.

Особое многообразие на границе $\partial V(x_0)$ является некоторым подмногообразием самой границы $\partial_s V(x_0)$. Оно может иметь различную размерность : от нулевой (отдельная точка) до полной размерности. Как мы увидим, особые многообразия границ траекторных воронок во многих случаях играют существенную роль в построении фазового портрета систем и отражают существенные свойства самой системы (например ее управляемость), что особенно хорошо видно для систем на плоскости.

Как было показано в §1 (лемма 1.1), если $\varphi(x) = 0$ – уравнение границы траекторной воронки $V(x_0)$, то функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$H\Big(x, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\Big) = 0. \tag{2.3}$$

С другой стороны, если $\widehat{x} \in \partial V(x_0)$ — особая точка, то конус $K(\widehat{x})$ целиком лежит в касательной плоскости $T_{\widehat{x}}\partial V(x_0)$. Но тогда для точек $x \in \mathbb{S}$ справедливо и равенство

$$H\Big(x, \frac{-\partial\varphi(x)}{\partial x}\Big) = 0. \tag{2.4}$$

Таким образом системы уравнений (2.3), (2.4) определяют особые многообразия $\mathbb{S}$ системы (2.1).

Теория полученной системы уравнений (2.3), (2.4) достаточно хорошо изучена (см. например [6]). Так для системы

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \tag{2.5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $f_0(x), f_1(x) \in \mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, особые многообразия определяются уравнением

$$s(x) \doteq \det(f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x)) = 0,$$

где функции $f_i(x)$, $i = 2, \dots, n-1$ определяются рекурентно:

$$f_i(x) = [f_0(x), f_{i-1}(x)] \doteq \Big(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}\Big) f_{i-1}(x) - \Big(\frac{\partial f_{i-1}(x)}{\partial x}\Big) f_0(x).$$

Операция $[f_0(x), f_{i-1}(x)]$ называется *скобкой Ли-Пуассона* или *коммутатором* функций $f_0(x), f_{i-1}(x)$ (см. например [33], [42]).

Отметим некоторые свойства коммутатора:

а) билинейность:

$$[\alpha f(x) + \beta g(x), h(x)] = \alpha[f(x), h(x)] + \beta[g(x), h(x)];$$
$$[f(x), \alpha g(x) + \beta h(x)] = \alpha[f(x), g(x)] + \beta[f(x), h(x)];$$

б) кососимметричность:

$$[f(x), g(x)] = -[g(x), f(x)];$$

в) тождество Якоби:

$$[f(x), [g(x), h(x)]] + [g(x), [h(x), f(x)]] + [h(x), [f(x), g(x)]];$$

для любых $f, g, h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in R$.

Л е м м а 2.1 ([33]). *Пусть M^k – гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$. Если $f(x_0), g(x_0) \in T_{x_0}(M^k)$, то $[f(x_0), g(x_0)] \in T_{x_0}(M^k)$.*

Отметим, что каждая гладкая вектор-функция $f_i(x)$ порождает *векторное* поле. Введем следующие понятия (см. например [33]):

Гладкое многообразие M, касательное пространство к которому в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ порождается векторами $\{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x)\}$ называется *интегральным многообразием* системы векторных полей $\{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x)\}$ (см. например [1]).

Система векторных полей $\{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x)\}$ называется *интегрируемой* (см. например [42]), если через каждую точку $x \in \mathbb{R}^n$ проходит интегральное многообразие этих полей. Заметим, что лемма 3.1 дает необходимые условия интегрируемости векторных полей. А именно, если M является интегральным многообразием системы векторных полей $\{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x)\}$, то каждое поле $v_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, а также всевозможные коммутаторы $[v_i(x), v_j(x)]$, $i, j = 1, \ldots, k$ должны касаться этого многообразия в каждой точке.

Система векторных полей $\{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x)\}$ называется *инволютивной* [42], если существуют функции $c_{ij}^r \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i, j, r = 1, \ldots, k$, что для любых $i, j = 1, \ldots, k$

$$[v_i(x), v_j(x)] = \sum_{r=1}^{k} c_{ij}^r(x) v_r(x).$$

Т е о р е м а 2.1 (*Фробениус* [42]). *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана система гладких векторных полей $\{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x)\}$. Тогда система $\{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x)\}$ интегрируема в том и только том случае, если она находится в инволюции.*

Необходимо отметить, что задача отыскания особого многообразия здесь несколько у́же аналогичной задачи в теории оптимального управления (как последняя понимается например в [6]). Дело в том, что точка $x \in \partial V(x_0)$ будет особой в смысле теории оптимального управления не только тогда, когда $K(x) \subset T_x\partial V(x_0)$, но и тогда, когда касательной плоскости $T_x\partial V(x_0)$ принадлежит лишь некоторая *плоская* грань конуса $K(x)$, (конус $K(x)$ при этом может и не лежать целиком в $T_x\partial V(x_0)$). При этом точка $x \in \partial V(x_0)$ не будет особой точкой границы воронки $\partial V(x_0)$ в ґнашемЄ смысле: в этой точке штриховка однозначно определена в силу того, что конус $K(x)$ направлен внутрь воронки, и, тем самым, в точке $x \in \partial V(x_0)$ имеются допустимые направления скорости, выводящие изображающую точку внутрь воронки $V(x_0)$ под ненулевым углом к касательной плоскости $T_x\partial V(x_0)$.

Рассмотрим случай когда точка $x_\alpha \in \partial_s V(x_0)$ не является особой. Тогда, в силу принципа максимума вектор p_{x_α} и конус $K(x_\alpha)$ лежат по разные стороны от касательной плоскости $T_{x_\alpha}(\partial_s V(x_0))$. Ту сторону границы $\partial_s V(x_0)$ к которой прилегает конус $K(x_\alpha)$ будем называть *внутренней стороной* границы $\partial_s V(x_0)$, а противоположную сторону, соответственно, назовем *внешней стороной.* На внешнюю сторону границы $\partial_s V(x_0)$ нанесем штриховку. Границу $\partial_s V(x_0)$, вместе с нанесенной на нее штриховкой будем называть *штрихованной границей* траекторной воронки $V(x_0)$. Геометрический смысл штриховки состоит в том, что все допустимые траектории системы (2.1), попадая в точку x_α, могут дальше либо двигаться по границе $\partial_s V(x_0)$, либо сойти с границы внутрь траекторной воронки $V(x_0)$. Иначе говоря, никакая допустимая траектория системы (2.1) не может пересекать границу $\partial_s V(x_0)$ противно штриховке, т.е. с внутренней стороны во внешнюю (см. рис. 2.1).

Заметим, что множество $\mathbb{S}$, очевидно замкнуто, т.е. множество неособых точек границ траекторных воронок системы (2.1) является открытым. Тогда, если в точке x_α гладкости границы $\partial_s V(x_0)$ определена штриховка, то она будет определена и в некоторой окрестности O^n_ε данной точки. Причем направление штриховки в точках $x \in O^n_\varepsilon \bigcap \partial_s V(x_0)$ будет совпадать с направлением штриховки в точке x_α. Таким образом, чтобы определить штриховку на гладком связном куске границы $\partial_s V(x_0)$, не содержащем особых точек, достаточно определить штриховку в одной точке этого множества и продолжить ее дальше по непрерывности. Данное свойство будем называть *свойством непрерывности штриховки.*

Рассмотрим траекторную воронку $V(x_0)$. В силу предположения

Рис. 2.1. Никакая допустимая траектория системы (2.1) не может пересекать границу $\partial_s V(x_0)$ противно штриховке, т.е. с внутренней стороны во внешнюю

ее границу в некоторой окрестности $O_\varepsilon^n(x_0)$ можно описать, как множество нулей кусочно-гладкой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, т.е. $\partial_s V(x_0) = \{x \in O_\varepsilon^n : \varphi(x) = 0\}$, где $\varphi(x)$ – решение уравнения (2.2). Рассмотрим продолжение данного решения до границы области G. Аналогично определим штриховку во всех точках гладкости поверхности $M = \{x \in G : \varphi(x) = 0\}$. Данную поверхность будем называть *продолжением границы* $\partial_s V(x_0)$.

О п р е д е л е н и е 2.2 ([4]). Многообразие размерности $n-2$ на продолжении границы траекторной воронки, которое разделяет (по крайней мере локально) участки этой поверхности с противоположно направленными штриховками, называется многообразием перемены штриховки. Совокупность всех таких многообразий на продолжениях всех границ всех траекторных воронок системы (2.1) называется многообразием перемены штриховки системы (2.1) или сокращенно *МПШ* .

Понятие *МПШ* дает возможность определить пределы продолжимости собственно траекторной воронки $V(x_0)$ и тем самым оправдать название ґворонкаЄ. Можно сказать, что граница $\partial_s V(x_0)$ данной воронки $V(x_0)$ с вершиной в точке x_0 простирается лишь до встречи с *МПШ* . Такое, уже не локальное, определение границы траекторной воронки иллюстрируется следующей гидромеханической картинкой (см. рис. 2.2). Если представить себе, что вершина x_0 воронки $V(x_0)$ является источником, то жидкость двигаясь по допустимым траекториям системы, сможет смочить внешнюю сторону этой воронки (скажем, вновь в окрестности точки x_0), лишь перелившись через край (кромку) этой воронки, которая как раз и принадлежит *МПШ* [4]. Очевидно, что *МПШ* $\subset \mathbb{S}$.

Рис. 2.2. Если представить себе, что вершина x_0 воронки $V(x_0)$ является источником, то жидкость двигаясь по допустимым траекториям системы, сможет смочить внешнюю сторону этой воронки (скажем, вновь в окрестности точки x_0), лишь перелившись через край (кромку) этой воронки, которая как раз и принадлежит *МПШ* .

О п р е д е л е н и е 2.3. Инвариантным многообразием L^k системы (2.1) называется многообразие вложенное в $\mathbb{R}^n$ и обладающее следующим свойством: для любого допустимого решения $x(t)$, $t \in [0, \tau)$, удовлетворяющего условию $x(0) \in L^k$, следует $x(t) \subset L^k$ для всех $t \in [0, \tau)$.

Очевидно, что для того чтобы некоторое многообразие L, описываемое уравнением $l(x) = 0$ (т.е. $L \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : l(x) = 0\}$), было инвариантным для системы (2.1), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left\langle f(x,u), \frac{\partial l(x)}{\partial x} \right\rangle \equiv 0, \tag{2.6}$$

для всех $x \in L$, $u \in U$. Но это условие равносильно тому, что функция $l(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$H(x, \partial l(x)\partial x) \doteq \max_{u \in U} \left\langle f(x,u), \frac{\partial l(x)}{\partial x} \right\rangle \equiv 0,$$
$$H(x, -\partial l(x)\partial x) \doteq \max_{u \in U} \left\langle f(x,u), \frac{-\partial l(x)}{\partial x} \right\rangle \equiv 0.$$

Откуда следует очевидное: $L \subset \mathbb{S}$.

Все инвариантные многообразия можно разделить на два вида: *изолированные* инвариантные многообразия, т.е. такие, в некоторой окрестности которых, нет точек других инвариантных многообразий; и *неизолированные*, иногда заполняющие (расслаивающие) все пространство $\mathbb{R}^n$.

Так к примеру, для системы (2.5) каждое интегральное многообразие L^k системы векторных полей $\{f_0(x), f_1(x)\}$ будет являться инвариантным многообразием системы (2.5), причем в силу леммы 2.1 выполняется условие $\operatorname{rank}(f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x) = k$ для всех $x \in L^k$. Если же $\operatorname{rank}(f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x) \equiv k < n$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то по теореме Фробениуса это означает, что все пространство $\mathbb{R}^n$ расслаивается на инвариантные многообразия системы (2.5) размерности k. Откуда следует, что в каждой точке x инвариантного многообразия L^k системы (2.5) выполнено условие $s(x) \equiv 0$.

Определение 2.4. Гладкое многообразие $L \subset \mathbb{R}^n$ называется слабо инвариантным для системы (2.1), если для любой точки $x_0 \in L$ существует такое допустимое управление $u_{x_0}(t)$, $t \in [0, \infty)$, что соответствующее ему решение $x(t) = x(t, u_{x_0}(\cdot))$ удовлетворяет условию $x(t) \in L$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Очевидно, что некоторое гладкое многообразие L, описываемое уравнением $l(x) = 0$ (т.е. $L \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, l(x) = 0\}$), будет слабо инвариантным для системы (2.1), в том и только том случае, если для любого $x_0 \in L$ найдется $u_{x_0} \in U$, удовлетворяющее условию $\left\langle \frac{\partial l(x)}{\partial x}, f(x, u_{x_0}) \right\rangle = 0$.

Введем еще одно понятие. Пусть в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ поле конусов $K(x)$ непрерывно. Гладкое многообразие

$$L^{n-1} \doteq \{x \in G \,:\, l(x) = 0\} \subset G,$$

обладающее тем свойством, что для всех

$$x \in L^{n-1}, \quad u \in U, \quad \left\langle \frac{\partial l(x)}{\partial x}, f(x, u_{x_0}) \right\rangle < 0$$

будем называть *отделяющим многообразием системы* (2.1). По аналогии с границей траекторной воронки, ту сторону L^{n-1}, к которой прилегает конус $K(x)$ будем называть *внутренней стороной* отделяющего многообразия L^{n-1}, а противоположную соответственно *внешней*. Заштрихуем внешнюю сторону L^{n-1}.

Из определения отделяющего многообразия L^{n-1} следует, что если допустимая траектория системы (2.1) проходит сквозь L^{n-1} трансверсально, то она может это делать только со стороны штриховки, но не наоборот. Такая штрихованная поверхность аналогична штрихованной поверхности жесткой траекторной воронки, которая сама является предельным случаем отделяющего многообразия L^{n-1} (см. рис. 2.3).

Рис. 2.3. Пример отделяющего многообразия

Изложенный выше материал, который можно было бы назвать *методом штрихованных границ траекторных воронок*, оказывается достаточно удобным инструментом для построения фазового портрета управляемых систем. Особенно просто строится фазовый портрет для систем в $\mathbb{R}^2$. В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x), \tag{2.7}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in U \subset \mathbb{R}$, а функции $f_0(x), f_1(x) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Предполагается, что $U = \mathrm{cl}(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, где α или β могут быть неограничены.

Для данной системы существует всего 5 видов конусов. Все они, вместе с фрагментом фазового портрета, соответствующего конусу данного типа изображены на рисунке 2.4.

Рис. 2.4. Различные типы конусов системы (2.7) и соответствующие им фазовые портреты.

В точках $x \in \mathbb{R}^2$, не принадлежащих множеству абсолютного равновесия, конус $K(x)$ замыкается двумя образующими, направления которых определяются направлением векторов

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f_0(x) + \alpha f_1(x), & \text{если } \alpha \neq -\infty, \\ -f_1(x), & \text{если } \alpha = -\infty; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} f_0(x) + \beta f_1(x)\,, & \text{если } \beta \neq \infty, \\ f_1(x), & \text{если } \beta = \infty. \end{cases}$$

Отсюда следуют уравнения границ траекторных воронок

$$\dot{x} = \varphi_1(x), \tag{2.8}$$

$$\dot{x} = \varphi_2(x). \tag{2.9}$$

Вектор $f_0(x)$ определяет внутренность конуса $K(x)$, а следовательно определяет штриховку границ траекторных воронок системы (2.7).

Особые многообразия $\mathbb{S}$ системы (2.7) описываются уравнением

$$s(x) = 0, \tag{2.10}$$

где $s(x) = \det(f_0(x), f_1(x))$. Отсюда заключаем, что точка $x_0 \in \mathbb{S}$ в том и только том случае, если векторы $f_0(x_0)$ и $f_1(x_0)$ – линейно зависимы.

На рисунке 2.4(е) изображен пример особой изолированной кривой с изображением всех возможных типов конусов на ней и пяти случаев их расположения относительно особой кривой.

Изолированной инвариантной кривой отвечают случаи 1,2, изображенные на рис. 2.4(е) т.е. конус $K(x)$ касается особой кривой. При этом существенно, что условие (2.10) выполняется лишь для точек данной инвариантной кривой.

Области заполненные инвариантными линиями (рис. 2.4 (б-в)), выделяются как те области $G \subset \mathbb{R}^2$, в точках которых условие (2.10) выполняется тождественно.

Случай, когда в области $G \subset \mathbb{R}^2$, $f_0(x) = f_1(x) \equiv 0$, т.е. каждая точка $x \in G$ является точкой абсолютного равновесия, изображен на рисунке 2.4(а).

Основное значение фазового портрета состоит в том, что он позволяет проводить все возможные допустимые траектории данной системы, образуемые действием допустимых управлений. Траектория на фазовом портрете будет допустимой, если она ґпрошиваетЄ границы траекторных воронок согасно штриховке, (то есть со стороны штриховки). Если конус $K(x)$ замкнут, (т.е. две его образующие также дают допустимое направление скорости), то возможно движение вдоль границ воронок, (т.е. сами границы траекторных воронок являются допустимыми траекториями).

§3. О степени гладкости границ траекторных воронок линейных систем

В данном параграфе рассматриваются границы траекторных воронок линейной системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1].$$

При условии, что $s(x_0) \neq 0, \operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b) = n{-}1$ доказывается локальная теорема о существовании кусочно гладкой границы жесткой траекторной воронки $V(x_0)$.

Рассмотрим решения системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1], \tag{3.1}$$

в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Известно [39, с.103], что множество достижимости за время $t_0 > 0$ из произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ можно описать следующим образом

$$D_{t_0}(x_0) = \Phi(t_0)\Big(x_0 + \int\limits_0^{t_0} \Phi^{-1}(t) bU dt\Big),$$

где $U = [-1, 1]$, $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$, удовлетворяющая начальному условию $\Phi(0) = E$, а интеграл понимается в смысле А.А. Ляпунова (см. например [11, с.229]).

О п р е д е л е н и е 3.1. Множество

$$W(x_0, \tau) \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \colon \; x \in D_t(x_0), \, t \in [0, \tau]\}$$

называется отрезком интегральной воронки системы (3.1). Точка x_0 называется вершиной интегральной воронки.

Таким образом множество достижимости $D_{t_0}(x_0)$, $t_0 \in [0, \tau]$ является сечением интегральной воронки плоскостью $t = t_0$, а отрезок траекторной воронки $V(x_0, \tau) \subset \mathbb{R}^n$ – это ортогональная проекция отрезка интегральной воронки $W(x_0, \tau)$ на плоскость $t = 0$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

С другой стороны, если ввести новые переменные

$$\widehat{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})^*, \quad x_{n+1} = t = \vartheta,$$

то отрезок интегральной воронки $W(x_0, t_0)$ можно рассматривать, как отрезок траекторной воронки $V(\widehat{x}_0, \vartheta_0) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ системы

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{b}u, \quad (\widehat{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times [-1, 1], \tag{3.2}$$

где $\widehat{A}$ – квазидиагональная матрица $n+1 \times n+1$-матрица, в левом верхнем углу которой находится матрица A, а в правом нижнем стоит единица, $\widehat{x}_0 \doteq (x_{01}, \ldots, x_{0n}, 0)^*$, $\vartheta_0 \doteq t_0$.

Таким образом боковую границу $\partial_s W(x_0, t_0)$ отрезка интегральной воронки $W(x_0, t_0)$ (т.е. $\partial_s W(x_0, t_0) \doteq \partial W(x_0, t_0) \backslash D_{t_0}(x_0)$), которую в дальнейшем будем называть *границей* интегральной воронки $W(x_0, t_0)$ системы (3.1), можно рассматривать, как границу траекторной воронки $V(\widehat{x}, \vartheta_0)$ системы (3.2).

Пусть система (3.1) удовлетворяет условию

$$\operatorname{rank}(b, Ab, A^2 b, \ldots, A^{n-1} b) = n. \tag{3.3}$$

В дальнейшем будем говорить что совокупность функций $\{\xi_i(t)\}_{i=1}^n$ на полуинтервале $[0, t_0)$ образует *чебышевскую* систему, если всякая нетривиальная линейная комбинация функций $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k(t)$ имеет на $[0, t_0)$ не более $n-1$ геометрически различных (т. е. без учета кратностей) нулей (см. [30], [31]).

Пусть $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ – произвольная фундаментальная система решений сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = -\psi A. \tag{3.4}$$

Если выполнено условие (3.3), *то существует такое $\tau > 0$, что совокупность функций*

$$\xi_1(t) \doteq \psi_1(t) b\,, \ \ldots\ , \ \xi_n(t) \doteq \psi_n(t) b \tag{3.5}$$

на полуинтервале $[0, \tau)$ является чебышевской системой. Данное свойство известно как теорема Валле-Пуссена [41].

Геометрически этот факт означает, что всякое нетривиальное решение системы (3.4) пересекает гиперплоскость

$$L^{n-1} \doteq \{\psi \in \mathbb{R}^n \colon \ \langle \psi, b \rangle = 0\}$$

не более $n-1$ раз, когда t пробегает интервал $[0, \tau)$. Это свойство в работах Е. Л. Тонкова (см. наример [43], [44]) названо свойством *неосцилляции* системы (3.4) на интервале $[0, \tau)$ относительно гиперплоскости L^{n-1}.

Одно из основных свойств чебышевских систем известно, как теорема С. Н. Бернштейна (см. например [17, с. 53]): *если совокупность*

(3.5) *является чебышевской системой на* $[0,\tau)$, *то для любого набора точек* $t_1,\dots,t_{n-1}$ *таких, что* $0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < \tau$, *найдется линейная комбинация функций* (3.5), *имеющая простые нули в точках* t_i *и не имеющая других нулей на* $[0,\tau)$.

Пусть $\tau > 0$ таково, что совокупность функций (3.5) на полуинтервале $[0,\tau)$ является чебышевской системой. Для каждого $k = 0,1,\dots,n$ определим многообразия $M^k(t)$, где $M^0(t) \doteq \{0\}$,

$$M^k(t) \doteq \{\vartheta = (\vartheta_{n-k+1},\dots,\vartheta_n)\colon\ 0 < \vartheta_{n-k+1} < \ldots < \vartheta_n = t < \tau\}, \quad k = 1,\dots,n$$

и многообразия

$$M^{1+k} = [0,\tau) \times M^k(t), \quad k = 1,\dots,n.$$

Всякой точке $p = (t,\vartheta) \in M^{1+k}$ поставим в соответствие точку $q = (t,x)$, где $x = 0$ при $k = 0$, а при $k \geqslant 1$

$$x = x(p) = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{\vartheta_i}^{\vartheta_{i+1}} \varPhi(t)\varPhi^{-1}(t)b\,ds, \quad \vartheta_{n-k} = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, для каждого k задана функция $p \to F(p) = q$ с областью определения M^{1+k} и областью значений $N_+^{1+k} \doteq F(M^{1+k})$ (в дальнейшем нижний индекс у N_+^1 опускаем). Так как $N_+^{1+k} = [0,\tau) \times N_+^k(t)$, где $N^0(t) = \{0\}$, а для $k \geqslant 1$ множество $N_+^k(t)$ состоит из точек вида (3.6), то справедливо включение $N_+^k(t) \subset D_\tau(0)$, $k = 0,1,\dots,n$. Поэтому, в силу принципа максимума Понтрягина

$$\max_{u\in[-1,1]} \psi(t)bu = \psi(t)bu(t) \tag{3.7}$$

и условия $t = \vartheta_n < \tau$, каждой точке $q = (t,x) \in N_+^{1+k}$ отвечает единственная точка $p = (t,\tau) \in M^{1+k}$, задающая (при $k \geqslant 2$) моменты переключений управления, переводящего позицию $(0,0)$ в позицию (ϑ_n, x) и оптимального в смысле быстродействия (при $k = 0$ оптимальное управление $u(t) \equiv 0$, а при $k = 1$ не имеет переключений).

Построенные многообразия N_+^{1+k} обладают тем свойством, что для точек $(t_0,x_0) \in N_+^{1+k}$ оптимальное (в смысле быстродействия) управление $u_0(t)$ при $t \in [0,\tau_{n-k+1}(t_0,x_0))$ равно $+1$. Аналогичным образом строятся многообразия N_-^{1+k}, $k = 1,\dots,n$ (в этом случае оптимальное управление начинается с -1).

В работах С.Ф. Николаева и Е.Л. Тонкова (см. например [29], [30], [31]) доказано, что многообразия N_+^{1+k}, N_-^{1+k}, $k = 0, 1, \ldots, n$ обладают следующими свойствами:

1) для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$, многообразия N_+^{1+k}, N_-^{1+k} являются гладкими многообразиями класса $\mathbb{C}^\infty$;

2) многообразия N^1, N_-^{1+k} и N_+^{1+k}, $k = 1, \ldots, n$, рассматриваемые как многообразия вложенные в $\mathbb{R}^{1+n}$, не имеют общих точек, и многообразие $N_+^k \bigcup N_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} N_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} N_-^{1+k}$.

Т е о р е м а 3.1 ([31]). *Пусть выполнено условие общности положения* (3.3). *Тогда существует такое* $\tau > 0$, *что интегральная воронка* $W(0, \tau)$ *системы* (3.1) *представима в виде*

$$W(0, \tau) = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right), \quad \textit{где}$$

$$\mathfrak{N}_+^{1+k} = N_+^{1+k} \bigcup N_-^k \bigcup N_+^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup N^1,$$

$$\mathfrak{N}_-^{1+k} = N_-^{1+k} \bigcup N_+^k \bigcup N_-^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup N^1,$$

$k = 0, \ldots, n$. *Многообразия* $\mathfrak{N}_+^{1+k}$, $\mathfrak{N}_-^{1+k}$ *слабо инвариантны, и для каждого* $k = 0, \ldots, n$, *многообразие* $\mathfrak{N}_+^k \bigcup \mathfrak{N}_-^k$ *является общим краем многообразий* $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_+^{1+k}$ *и* $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Заметим, что для системы (3.1) при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0, \tau)$ множество достижимости $D_t(x_0)$ получается из множества достижимости $D_t(0)$ параллельным переносом на вектор $\Phi(t)x_0$, то есть в результате преобразования $(t, x) \xrightarrow{G} (t, x + \Phi(t)x_0)$ интегральная воронка $W(0, \tau)$ переходит в интегральную воронку $W(x_0, \tau)$. Поскольку функция $G \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, $\partial G/\partial t \equiv 1$, т.е. $\operatorname{grad} G \neq 0$, то очевидно, что гладкие многообразия N_+^{1+k} и N_-^{k+1} переходят в гладкие многообразия L_+^{1+k} и L_-^{k+1} такого же класса гладкости. Тогда, очевидно, справедливо следующее утверждение.

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть выполнено условие общности положения* (3.3). *Тогда существует такое* $\tau > 0$, *что для любого* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *интегральная воронка* $W(x_0, \tau)$ *системы* (3.1) *представима в виде*

$$W(x_0, \tau) = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{L}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{L}_-^{1+n}\right), \quad \textit{где}$$

$$\mathfrak{L}_+^{1+k} = L_+^{1+k} \bigcup L_-^k \bigcup L_+^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup L^1,$$

$$\mathfrak{L}_-^{1+k} = L_-^{1+k} \bigcup L_+^k \bigcup L_-^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup L^1,$$

$k = 0, \ldots, n$. Многообразия L^1, L_-^{1+k} и L_+^{1+k}, $k = 1, \ldots, n$ не имеют общих точек и являются гладкими класса $\mathbb{C}^\infty$ слабо инвариантными многообразиями системы (3.1). Кроме того, для каждого $k = 0, \ldots, n$, многообразие $\mathfrak{L}_+^k \bigcup \mathfrak{L}_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} \mathfrak{L}_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} \mathfrak{L}_-^{1+k}$.

Л е м м а 3.1. *Пусть*

$$\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = m. \tag{3.8}$$

Тогда существует такое $\tau > 0$, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ интегральная воронка $W(x_0, \tau)$ системы (3.1) представима в виде

$$W(x_0, \tau) = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{L}_+^{1+m} \bigcup \mathfrak{L}_-^{1+m}\right), \quad \textit{где}$$

$$\mathfrak{L}_+^{1+k} = L_+^{1+k} \bigcup L_-^k \bigcup L_+^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup L^1,$$

$$\mathfrak{L}_-^{1+k} = L_-^{1+k} \bigcup L_+^k \bigcup L_-^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup L^1,$$

$k = 0, \ldots, m$.

Многообразия L^1, L_-^{1+k} и L_+^{1+k}, $k = 1, \ldots, m$ не имеют общих точек и являются гладкими класса $\mathbb{C}^\infty$ слабо инвариантными многообразиями системы (3.1). Кроме того, для каждого $k = 0, \ldots, m$, многообразие $\mathfrak{L}_+^k \bigcup \mathfrak{L}_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} \mathfrak{L}_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} \mathfrak{L}_-^{1+k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно (см. [19, стр. 108]), что для любых $t > 0$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множество достижимости $D_t(x_0)$ содержится в линейном пространстве $\mathcal{L} \doteq \{x = \sum\limits_{i=0}^{m-1} c_i A^i b,\ c_i \in \mathbb{R}\}$, причем система (3.1) приводима к виду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \mathcal{A}_1 y + \widehat{b} u, \\ \dot{y}_2 = \mathcal{A}_2 y_2, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $y = (y_1, y_2)^*$, y_1, $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}^m$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\mathcal{A}_1 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\mathcal{A}_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R}^{n-m})$. В таком случае

$$y_1(t) = \Phi(t)y_1(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\widehat{b}u\,ds + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)y_2(t)\,ds,$$

где $\Phi(t)$ фундаментальная матрица системы $\dot{y}_1 = \mathcal{A}_1 y$, удовлетворяющая начальному условию $\Phi(0) = E$.

Рассмотрим систему

$$\dot{y}_1 = \widehat{\mathcal{A}}_1 y_1 + \widehat{b}u, \tag{3.10}$$

где $\widehat{\mathcal{A}}_1$ — $m \times m$-матрица, полученная из матрицы $\mathcal{A}_1$ отбрасыванием последних $n - m$ столбцов. Заметим, что система (3.10) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1. Остается заметить, что для любых $y_1(0) \in \mathbb{R}^m$, $t \in (0, \tau)$ множество достижимости $D_t(y(0))$ системы (3.9) получается из множества достижимости $D_t(0)$ параллельным переносом на вектор $(0,\, \Phi(t)y_1(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)y_2(t)\,ds)$, т.е. в результате преобразования

$$(t, y) \xrightarrow{G} (t, y + \Phi(t)y_1(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)y_2(t)\,ds)$$

интегральная воронка $W(0, \tau)$ переходит в воронку $W(y_1(0), \tau)$. Поскольку функция $G \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, $\partial G/\partial t \equiv 1$, т.е. $\mathrm{grad}\, G \neq 0$, то очевидно, что гладкие многообразия N_+^{1+k} и N_+^{k-1} переходят в гладкие многообразия L_+^{1+k} и L_+^{k-1} такого же класса гладкости. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Заметим, что в условиях леммы 3.1 множество $L^{1+m} \doteq L_+^{1+m} \bigcup L_-^{1+m}$ будет являться гладким $m + 1$-мерным многообразием класса $\mathbb{C}^\infty$.

Л е м м а 3.2. *Пусть в ограниченной области $G \in \mathbb{R}^n$ определены гиперплоскость $L^{n-1} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x\rangle = 0\}$ и гладкое, класса r, многообразие M^{n-1} с гладким (или кусочно-гладким), класса r, краем M^{n-2}. Если во всех точках гладкости $x \in M^{n-1} \bigcup M^{n-2}$ выполнены соотношения:*

$$l \notin T_x(M^{n-1}), \quad l \notin T_x(M^{n-2}), \tag{3.11}$$

то множество $\mathcal{M}^{n-1} \doteq \{x \in L^{n-1} : x + \alpha l \in M^{n-1}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ является гладким, класса r, $n - 1$-мерным многообразием, с гладким (или соответственно кусочно-гладким) класса r, краем

$$\mathcal{M}^{n-2} \doteq \{x \in L^{n-1} : x + \alpha l \in M^{n-2}\}.$$

З а м е ч а н и е 3.2. Лемма 3.2 утверждает, что при условии (3.11) проекция гладкого многообразия M^{n-1} с краем M^{n-2} будет гладким многообразием с краем такого же класса гладкости, что и M^{n-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как M^{n-1} гладкое многообразие, то существует такая скалярная функция $\varphi \in \mathbb{C}^r(G, \mathbb{R})$, что $M^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 0\}$, причем $\left\langle \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, l \right\rangle \neq 0$ для всех $x \in G$. Заметим, далее, что существует невырожденное линейное преобразование $x = Py$, $P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, которое переводит вектор l в единичный вектор $e_n \doteq (0, 0, \ldots, 0, 1)^*$, плоскость $L^{n-1}\}$ переводит в плоскость $OY_1Y_2 \ldots Y_{n-1}$, область G в область $\widehat{G}$, а многообразие M^{n-1} в многообразие $\widehat{M}^{n-1}$. Легко заметить, что $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, где $\widehat{\varphi}(y) \doteq \varphi(Py)$ гладкая функция, причем $\dfrac{\partial \widehat{\varphi}(y)}{\partial y_n} \neq 0$ для всех $y \in \widehat{G}$. Тогда по теореме о неявной функции в области $\widehat{G}$ существует гладкая, класса r, функция $y_n = f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ такая, что

$$\widehat{M}^{n-1} = \{y \in \widehat{G} : \widehat{\varphi}(y) = 0\} = \{y \in \widehat{G} : y_n = f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\}.$$

Поскольку график функции f является гладким многообразием $\widehat{M}^{n-1}$, то область определения данной функции (проекция $\widehat{M}^{n-1}$ на плоскость $OY_1Y_2 \ldots Y_{n-1}$) будет также гладким класса r, $n-1$-мерным многообразием. Так как $\widehat{G}$ ограничена, то все частные производные функции f до порядка r включительно будут определены и ограничены в области $\widehat{G}$. Следовательно граница области определения функции f получается в результате проекции многообразия $\widehat{M}^{n-2}$ на плоскость $OY_1Y_2 \ldots Y_{n-1}$ и имеет ту же структуру и степень гладкости, что и многообразие $\widehat{M}^{n-2}$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть* $\mathrm{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n - 1$ *и*

$$s(x_0) \doteq \det(Ax_0, b, Ab, \ldots, A^{n-2}b) \neq 0. \tag{3.12}$$

Тогда существует такое $\tau > 0$, *что при любом* $t < \tau$ *траекторная воронка* $V(x_0, \tau)$ *является жесткой, телесной, а ее граница* $\partial_s V(x_0, \tau)$ *является кусочно-гладким многообразием класса* $\mathbb{C}^\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что в силу условия (3.12) векторы $b, Ab, \ldots, A^{n-2}b$ – линейно независимы. В силу леммы 3.1 существует такое $\tau > 0$, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ интегральная воронка

$W(x_0,\tau)$ системы (3.1) представима в виде

$$W(x_0,\tau) = \mathrm{cl}\left(\mathfrak{L}_+^n \bigcup \mathfrak{L}_-^n\right), \text{где}$$

$$\mathfrak{L}_+^{1+k} = L_+^{1+k} \bigcup L_-^k \bigcup L_+^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup L^1,$$

$$\mathfrak{L}_-^{1+k} = L_-^{1+k} \bigcup L_+^k \bigcup L_-^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup L^1,$$

$k = 0,\ldots,n-1$. Многообразия $\mathfrak{L}_+^{1+k}$, $\mathfrak{L}_-^{1+k}$ слабо инвариантны, и для каждого $k = 0,\ldots,n-1$, многообразие $\mathfrak{L}_+^k \bigcup \mathfrak{L}_-^k$ является общим краем многообразий $\mathrm{cl}\,\mathfrak{L}_+^{1+k}$ и $\mathrm{cl}\,\mathfrak{L}_-^{1+k}$. Тогда в силу замечания 3.3 множество $\mathfrak{L}^n \doteq \mathrm{cl}\,\mathfrak{L}_+^n \bigcup \mathrm{cl}\,\mathfrak{L}_-^n$ будет являться гладким n-мерным многообразием с краем $\mathfrak{L}_+^{n-1} \bigcup \mathfrak{L}_-^{n-1}$ класса $\mathbb{C}^\infty$. В силу гладкости функции $s(x)$ без ограничения общности можно полагать, что $s(x) \neq 0$ для всех $\widehat{x} \doteq (x,t)^* \in \mathfrak{L}^n$. В таком случае в каждой точке $\widehat{x} \in \mathfrak{L}^n$ векторы $\widehat{A}\widehat{x} + \widehat{b}$ и $\widehat{A}\widehat{x} - \widehat{b}$ принадлежат касательному пространству $T_{\widehat{x}}(\mathfrak{L}^n)$ (здесь: $\widehat{A}$ — квазидиагональная $n+1 \times n+1$-матрица, в левом верхнем углу которой находится матрица A, а в правом нижнем стоит единица, а вектор $\widehat{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$ получен из вектора b добавлением последней нулевой строки). Но тогда векторы $\widehat{A}\widehat{x}$ и $\widehat{b}$, а в силу леммы 2.1 и векторы $\widehat{A}\widehat{b}, \widehat{A}^2\widehat{b},\ldots,\widehat{A}^{n-2}\widehat{b}$ также принадлежат касательному пространству $T_{\widehat{x}}(\mathfrak{L}^n)$. Заметим, что векторы $\widehat{A}\widehat{x}, \widehat{b}, \widehat{A}\widehat{b}, \widehat{A}^2\widehat{b},\ldots,\widehat{A}^{n-2}\widehat{b}$ получены из векторов $Ax, b, Ab,\ldots,A^{n-2}b$ добавлением к последним последней нулевой строки. И учитывая условие $s(x) \neq 0$ для всех $\widehat{x} \doteq (x,t) \in \mathfrak{L}^n$ получаем, что векторы $\widehat{A}\widehat{x}, \widehat{b}, \widehat{A}\widehat{b}, \widehat{A}^2\widehat{b},\ldots,\widehat{A}^{n-2}\widehat{b}$ образуют базис касательного пространства $T_{\widehat{x}}(\mathfrak{L}^n)$. Тогда для любого $\widehat{x} \in \mathfrak{L}^n$ вектор $\widehat{t} \doteq (0,0,\ldots,0,1)^* \notin T_{\widehat{x}}(\mathfrak{L}^n)$. Действительно, в противоположном случае с одной стороны $n+1$ векторов $\widehat{t}, \widehat{A}\widehat{x}, \widehat{b}, \widehat{A}\widehat{b}, \widehat{A}^2\widehat{b},\ldots,\widehat{A}^{n-2}\widehat{b}$ являются линейно независимыми, а с другой стороны они лежат в n-мерной касательной гиперплоскости $T_{\widehat{x}}(\mathfrak{L}^n)$. Получили противоречие. Следовательно для любого $\widehat{x} \in \mathfrak{L}^n$ вектор $\widehat{t}$ не лежит в касательном пространстве $T_{\widehat{x}}(\mathfrak{L}^n)$. Тогда по лемме 3.2 проекция гладкого многообразия $\mathfrak{L}^n$, с краем $\mathfrak{L}_+^{n-1} \bigcup \mathfrak{L}_-^{n-1}$ на пространство $\mathbb{R}^n$ будет гладким многообразием $\mathfrak{M}^n$ с гладким краем $\mathfrak{M}_+^{n-1} \bigcup \mathfrak{M}_-^{n-1}$ такого же класса гладкости, что и $\mathfrak{L}_+^{n-1} \bigcup \mathfrak{L}_-^{n-1}$. Поскольку отрезок траекторной воронки $V(x_0,\tau) \subset \mathbb{R}^n$ – это ортогональная проекция отрезка интегральной воронки $W(x_0,\tau)$ на плоскость $t = 0$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, мы получаем, что $\mathfrak{M}_+^{n-1} \bigcup \mathfrak{M}_-^{n-1}$ будет границей траекторной воронки $V(x_0, \tau)$. Несложно видеть, что при любом $t < \tau$ граница траекторной воронки удовлетворяет условию $\partial_s V(x_0, t) = \partial_s V(x_0, \tau) \bigcap V(x_0, t)$. Тогда при любом $t < \tau$ траекторная воронка $V(x_0, t)$ является жесткой, а ее граница $\partial_s V(x_0, t)$ является кусочно-гладким многообразием класса $\mathbb{C}^\infty$.

З а м е ч а н и е 3.3. Существенно в теореме 0.2 то, что

$$\operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n - 1,$$

т.е. система (0.1), вообще говоря, не является вполне управляемой.

Рис. 3.1. Граница траекторной воронки $V(x_0, 1)$ системы (3.13) является объединением многообразий $\Gamma_+ \bigcup \Gamma_- \bigcup M_+^2 \bigcup M_-^2$.

П р и м е р 3.1. На рисунке 3.1 изображена граница траекторной воронки $V(x_0, 1)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \\ \dot{x}_3 = 2x_3 \end{cases} \qquad (3.13)$$

где $u \in [-1, 1]$, $x_0 = (0, 0, 3)^*$.

Граница траекторной воронки $V(x_0, 1)$ системы (3.13) является объединением многообразий $\Gamma_+ \bigcup \Gamma_- \bigcup \Gamma_+^2 \bigcup \Gamma_-^2$.

Многообразия Γ_+, Γ_- являются допустимыми траекториями системы (3.13), выходящими из точки x_0 и соответствующие допустимым управлениям $u_+(t) \equiv 1$, $u_-(t) \equiv -1$.

Многообразие Γ_+^2 является множеством концов всех, выходящих из точки x_0 допустимых траекторий системы (3.13), соответствующих допустимым управлениям

$$\widehat{u}_+(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leqslant t_1 \\ -1, & t_1 < t \leqslant t_2 \end{cases},$$

где $t_2 \in (0, \tau)$. Многообразие Γ_-^2, строится аналогичным образом с заменой допустимого управления на $\widehat{u}_-(t) = -\widehat{u}_+(t)$.

Глава 2. Устойчивая управляемость нелинейных систем

В данной главе вводится понятие устойчивой управляемости системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U.$$

Проведен сравнительный анализ с раннее известными понятиями N-управляемости системы и локальной управляемости системы данной системы. Показано, что N-управляемость влечет устойчивую управляемость, а устойчивая управляемость, в свою очередь, влечет локальную управляемость данной системы, т.е. свойство N-управляемости является наиболее сильным из известных к настоящему времени свойств управляемости, а устойчивая управляемость занимает промежуточное положение между N-управляемостью и локальной управляемостью. Показано также, что в общем случае эти понятия не совпадают. Построены соответствующие примеры.

Получены достаточные условия устойчивой управляемости для системы

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1],$$

которые в случае $n = 2$ являются и необходимыми условиями устойчивой управляемости данной системы. Построены соответствующие примеры.

§4. Различные типы локальной управляемости

В этом параграфе вводятся различные определения локальной управляемости системы (4.1), проводится сравнительный анализ этих понятий.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U. \tag{4.1}$$

Предполагается, что U непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, $0 \in \operatorname{int} f(0, U)$, $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Точка x_0 называется *τ-управляемой*, если существует такое допустимое управление $u : [0, \tau] \to U$, что разрешима краевая задача

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x(\tau) = 0.$$

Множество всех τ-управляемых точек называется *множеством управляемости системы* (4.1) *за время* τ и обозначается D_τ.

Множество $D_\infty = \bigcup_{\tau > 0} D_\tau$ называется *множеством управляемости* системы (4.1) [2)].

Отметим, что если на промежутке $[0, \tau]$ все решения системы (4.1) с начальным условием $x(0) = 0$ ограничены по норме сверху некоторой константой $l > 0$, а множество $F(x) \doteq f(x, U)$ выпукло при всех $x \in \mathbb{R}^n$, то множество управляемости D_t компактно и непрерывно меняется во времени на промежутке $[0, \tau]$ (см., например, [19, с. 265]).

Система (4.1) называется *локально управляемой* или просто *управляемой* [5, с. 39], если $0 \in \operatorname{int} D_\tau$ при некотором $\tau > 0$.

Если при этом $D_\infty = \mathbb{R}^n$, то система (4.1) называется *глобально управляемой.*

Н.Н. Петровым (см. [35], [36]) введено понятие N-управляемости системы (4.1). Свойство N-управляемости означает, что $0 \in \operatorname{int} D_\tau$ при всех $\tau > 0$. Если при этом $D_\infty = \mathbb{R}^n$, то система (4.1) называется глобально N-управляемой.

Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 4.1. Система (4.1) называется устойчиво управляемой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого $x_0 \in O^n_\delta$ найдутся время $\tau = \tau_{x_0}$,

[2)] Если для любого допустимого управления $u(t)$ всякое решение задачи Коши для системы (4.1) при $u = u(t)$ продолжаемо на $\mathbb{R}_+$, то множество D_∞ непусто. Например, если $|f(x, u)| \leqslant \alpha |x| + \beta$ при всех $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$, то всякое решение неограниченно продолжаемо вправо.

$0 < \tau < \infty$, и допустимое решение $x(t)$, $t \in [0, \tau]$ системы (4.1) удовлетворяющие условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x(\tau) = 0, \quad |x(t)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in [0, \tau].$$

Если при этом $D_\infty = \mathbb{R}^n$, то система (4.1) называется глобально устойчиво управляемой.

Пусть $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ соответственно множества локально управляемых, устойчиво управляемых и N-управляемых систем вида (4.1).

Т е о р е м а 4.1. $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем включение $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Пусть система (4.1) N-управляема. Тогда существует такое $\vartheta > 0$, что при всех $\tau \leqslant \vartheta$ множество D_τ ограничено. Для каждого $\tau \in (0, \vartheta]$ определим числа $\delta_\tau = \inf_{x \in \partial D_\tau} |x|$ и $\varepsilon_\tau = \sup_{x \in \partial D_\tau} |x|$. Тогда в силу N-управляемости системы (4.1) $\varepsilon_\tau \geqslant \delta_\tau > 0$ при всех $\tau \in (0, \vartheta]$. Очевидно, что $\varepsilon_\tau \to 0$ при $\tau \to 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\tau > 0$, что $D_\tau \subset O^n_\varepsilon$. Следовательно для любого $x_0 \in O^n_{\delta_\tau}$ существует допустимое решение $x(t)$ системы (4.1) удовлетворяющее условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x(\tau) = 0, \quad x(t) \subset D_\tau \subset O^n_\varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \in [0, \tau],$$

т. е. система (4.1) устойчиво управляема.

Включение $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$ очевидно. Теорема доказана.

Приводимые ниже примеры показывают, что множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ не совпадают.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 0.5(5x_1^4 - 16x_1^3 + 12x_1^2) + 0.5(5x_1^4 - 16x_1^3 + 12x_1^2 - 2)u, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $u \in [-1, 1]$. Введем обозначения:

$$f_0(x) = (0, 0.5(5x_1^4 - 16x_1^3 + 12x_1^2))^*,$$

$$f_1(x) = (1, 0.5(5x_1^4 - 16x_1^3 + 12x_1^2 - 2))^*,$$

$$A = \Big(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}\Big)_{x=0}, \quad b = f_1(0) = (1, -1)^*.$$

Очевидно, что A – нулевая матрица и, следовательно, $\operatorname{rank}(b, Ab) = 1$, т. е. к системе (4.2) не применима теорема о локальной управляемости по первому приближению.

Заметим, что кривые семейства

$$\mathit{\Gamma}_+ \doteq \{(x_1, \gamma_+(x_1)) \in \mathbb{R}^2\colon\ \gamma^+(x_1) = x_1^5 - 4x_1^4 + 4x_1^3 - x_1 + c\}$$

(семейство траекторий решений системы (4.2) при $u = 1$) являются одной группой границ траекторных воронок системы (4.2), а семейство кривых

$$\mathit{\Gamma}_- \doteq \{(x_1, \gamma_-(x_1)) \in \mathbb{R}^2\colon\ \gamma_-(x_1) = -x_1 + c\}$$

(семейство траекторий решений системы (4.2) при $u = -1$) отвечает другой группе границ траекторных воронок системы (4.2) (здесь c – произвольная константа). Движение по траекториям семейства $\mathit{\Gamma}_+$ осуществляется в сторону возрастания x_1,а по траекториям семейства $\mathit{\Gamma}_-$ – в сторону убывания x_1.

Особые многообразия системы (4.2) описываются уравнением $s(x) \doteq \det(f_0(x), f_1(x)) = 0$, т.е. $0.5x_1^2(5x_1^2 - 16x_1 + 12) = 0$, решая которое получаем, что прямые $x_1 = 0$, $x_1 = 1.2$, $x_1 = 2$ являются особыми многообразиями системы (4.2). Поскольку вектор $f_0(x)$ определяет направление штриховки границ траекторных воронок системы (4.2), получаем, что прямые $x_1 = 1.2$ и $x_1 = 2$ являются МПШ , а прямая $x_1 = 0$ является множеством относительного равновесия системы (4.2).

Покажем,что система (4.2) является локально управляемой, более того – глобально управляемой.

Введем обозначения: $\Gamma_+ \doteq \{x_2 = \gamma_+(x_1)\colon\ x_1 \leqslant 0, \gamma_+(0) = 0\}$,

$$\Gamma_- \doteq \{x_2 = \gamma_-(x_1)\colon\ x_1 \geqslant 0, \gamma_-(0) = 0\}, \quad \Gamma = \Gamma_+ \bigcup \Gamma_-.$$

Легко видеть, что из любой точки $x_\beta \in \mathbb{R}^2$, находящейся ниже кривой Γ (см. рис. 4.1), двигаясь по прямой $x_2 = -x_1 + C(\beta)$, изображающая точка системы (4.2) за конечное время достигает траектории Γ_+ и далее, двигаясь по ней, за конечное же время достигает нуля. Из любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^2$, находящейся выше кривой γ, двигаясь по траектории семейства $\mathit{\Gamma}_+$ за конечное время можно достичь полосы $1.2 \leqslant x_1 \leqslant 2$, в которой осуществляется спуск до траектории Γ_- и далее, двигаясь по Γ_-, можно достичь начала координат за конечное время. Таким образом система (4.2) локально управляема.

Рис. 4.1. Никакая допустимая траектория системы (4.2), выходящая из точки x_0 не сможет достичь начала координат не покидая при этом окрестности $O^2_{1.2}$.

Однако система (4.2) не является устойчиво управляемой. Покажем, что при $\varepsilon = 1.2$ никакую точку $x_0 \in O^n_\varepsilon$, находящуюся выше кривой γ, нельзя перевести в нуль за конечное время, не покидая при этом окрестности O^n_ε. Действительно, через любою точку x_0, лежащую выше кривой γ, можно провести траекторию семейства Γ^+ на которой всюду, кроме точки $x_1 = 0$ определена штриховка. Следовательно никакая допустимая траектория системы (4.2) не сможет ґпроткнутьЄ ее сверху-вниз в окрестности O^2_ε. А это означает, что при любом $\tau < \infty$ не существует допустимого решения $x(t)$, $t \in [0, \infty]$ системы (4.2), удовлетворяющего условиям : $x(0) = \widehat{x}, \quad x(\tau) = 0, \quad |x(t)| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in [0, \tau]$, т.е. система (4.2) не является устойчиво управляемой.

П р и м е р 4.2. Рассмотрим систему

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = u, \\
\dot{x}_2 = 0.5(5x_1^4 - 8x_1^3 + 3x_1^2) + \frac{1}{2}(5x_1^4 - 8x_1^3 + 3x_1^2)u + u,
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

где $u \in [-1, 1]$. Доказательство того, что система (4.3) локально управляема, но не является устойчиво управляемой проводится как и в примере 4.1. Но что характерно, что для оптимального, в смысле быстродействия, перехода из изображенной на рисунке 4.2 точки α, в нуль потребовалось 27 переключений управления (движение в заштрихованной области показано справа в более крупном масштабе).

Рис. 4.2. Для оптимального, в смысле быстродействия, перехода из точки α, в нуль требуется 27 переключений управления.

Покажем, что множества $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ не совпадают.

П р и м е р 4.3. Рассмотрим систему

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 + u(1 - x_2), \\
\dot{x}_2 = -x_1 + ux_1,
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

где $u \in [0, 1]$. Нетрудно заметить, что границы траекторных воронок системы (4.4) – суть окружности $x_1^2 + x_2^2 = c_1^2$ и прямые $x_2 = c_2$ (траектории решений системы (4.4) при $u = 0$ и $u = 1$ соответственно), причем движение по окружностям осуществляется по часовой стрелке, а по прямым — в сторону возрастания x_1 (см. рис. 4.3).

Рис. 4.3. Чтобы достичь нуля из точки x_0 необходимо сначала попасть в третий квадрант, затратив на это время $\tau = \pi/4$.

Покажем, что система (4.4) устойчиво управляема. Действительно, пусть ε — произвольное положительное число, а x_0 — произвольная точка, удовлетворяющая условию: $|x_0| < \varepsilon$. Двигаясь по окружности $x_1^2 + x_2^2 = |x_0|^2$ за время $t_1 < 2\pi$ можно достичь отрицательной полуоси Ox_1, и далее двигаясь по траектории $\Gamma_+ \doteq \{x_2 = 0, x_1 \leqslant 0\}$, за время $t_2 = |x_0|$ достигаем начала координат, оставаясь все время в окрестности O_ε^n. Однако при всех $\tau \leqslant \pi/4$ множество D_τ содержит нуль на своей границе, т. е. система (4.4) не является N-управляемой. Отметим, что приблизиться к нулю можно лишь со стороны третьего квадранта. Чтобы достичь нуля из точек положительной полуоси Ox_1 необходимо сначала попасть в третий квадрант, затратив на это время $\tau = \pi/4$, следовательно при всех $\tau \leqslant \pi/4$ нуль не принадлежит внутренности D_τ, т. е. система (4.4) не является N-управляемой.

Вообще говоря, система (4.4) не является системой вида (4.1), т. к. нуль находится на границе множества управляемости $U = [0, 1]$. Корректный пример, показывающий, что при отсутствии N-управляемости может иметь место устойчивая управляемость легко построить на основе примера 4.3.

Рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + u_1^2(1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_1^2 x_1, \\ \dot{x}_3 = u_2, \end{array}\right. \tag{4.5}$$

где $u_i \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$. Так как траектории системы (4.4) есть проекции траекторий системы (4.4), то система (4.4) не является N-управляемой. Устойчивая управляемость следует из того, что из любой точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})^*$, при $u_2 = 0$ можно достичь точки x_{03} на оси ox_3, а затем при помощи управления $u_2 = \mathrm{sign}(-x_{03})$, $u_1 = 0$ достичь нуля, не покидая при этом окрестности $O^n_{|x_0|}$.

§5. Устойчивая управляемость на плоскости

В данном параграфе получены необходимые и достаточные условия устойчивой управляемости системы $\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x)$, $\quad (x,u) \in \mathbb{R}^2 \times U$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \quad (x,u) \in \mathbb{R}^2 \times U. \tag{5.1}$$

Предполагается, что вектор-функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ голоморфны в некоторой окрестности начала координат, и, кроме того $f_0(0) = 0$. Относительно множества $U \subset \mathbb{R}$ предполагаем, что U непусто связно замкнуто и $0 \in \operatorname{int} U$, т.е. $U = \operatorname{cl}(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. В частности, α и β могут принимать значения $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Введем обозначения

$$A = \Big(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}\Big)_{\{x=0\}}, \quad b = f_1(0).$$

Легко видеть, что если $b = 0$, то система (5.1) не является управляемой. Действительно, в этом случае, $x = 0$ является точкой абсолютного равновесия, и поскольку функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ непрерывно дифференцируемы, то никакая допустимая траектория системы с обращенным временем

$$\dot{x} = -f_0(x) - uf_1(x)$$

не выйдет из начала координат за конечное время, и следовательно никакая допустимая траектория системы (5.1) не войдет в начало координат за конечное время, т.е система (5.1) не управляема.

Пусть $\operatorname{rank}(b, Ab) \neq 0$. Обозначим

$$f_-(x) = \begin{cases} f_0(x) + \alpha f_1(x), & \text{если} \quad \alpha > -\infty, \\ -f_1(x), & \text{если} \quad \alpha = -\infty, \end{cases}$$

$$f_+(x) = \begin{cases} f_0(x) + \beta f_1(x), & \text{если} \quad \beta < \infty, \\ f_1(x), & \text{если} \quad \beta = \infty. \end{cases}$$

Как было показано в §1 векторы $f_-(x)$, $f_+(x)$ определяют направление образующих конуса $K(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2$. Этим образующим соответствуют две ветви границ траекторной воронки, исходящей из данной точки. Таким образом одна из границ описывается уравнением

$$\dot{x} = f_-(x), \tag{5.2}$$

а другая, соответственно уравнением

$$\dot{x} = f_+(x). \tag{5.3}$$

В тех точках $x \in \mathbb{R}^2$, для которых конус $K(x)$ телесный, т.е. векторы $f_0(x)$ и $f_1(x)$ линейно независимы, направление вектора $f_0(x)$ однозначно определяет штриховку границ траекторных воронок. Действительно, в этом случае вектор $\dfrac{f_0(x)}{|f_0(x)|}$ будет внутренним для конуса $K(x)$, а следовательно будет однозначно определять внутренность траекторной воронки $V(x)$. Следует отметить, что если конус $K(x)$ замкнут, т.е. $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, то границы траекторных воронок (траектории решений уравнений (5.2) и (5.3)) будут в то же время и допустимыми траекториями системы (5.3). Если же конус $K(x)$ незамкнут, например при $\alpha = -\infty$, то траектории решений уравнения (5.2) не будут являться допустимыми траекториями системы (5.1). Однако в любой окрестности произвольной фиксированной траектории уравнения (5.3) существуют допустимые траектории системы (5.1), не выходящие за пределы этой окрестности.

Абсолютно просто описываются границы траекторных воронок в случае, если $U = \mathbb{R}$. Тогда $f_+(x) = -f_-(x) = f_1(x)$, и, следовательно границы траекторных воронок — суть траектории решений уравнения

$$\dot{x} = f_1(x). \tag{5.4}$$

Как уже было сказано, траектории уравнения (5.4) не являются допустимыми, но под действием допустимого управления можно двигаться сколь угодно близко к траекториям уравнения (5.4), причем в обоих направлениях.

Особые многообразия $\mathbb{S}$ системы (5.1) описываются уравнением

$$s(x) = 0, \quad \text{где} \quad s(x) \doteq \det(f_0(x), f_1(x)) \tag{5.5}$$

Откуда следует, что множество $\mathbb{S}$ замкнуто. Следовательно множество $\{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, s(x) \neq 0\}$, т.е. множество точек плоскости в которых определена штриховка границ траекторных воронок, открыто в $\mathbb{R}^2$. Отсюда следует очевидное свойство *непрерывности штриховки границ траекторных воронок*: *Пусть D область в $\mathbb{R}^2$, не содержащая особых точек. Тогда штриховку границ траекторных воронок системы* (5.1), *принадлежащих одной группе* (*к примеру траекторий* *системы* (5.2)), *достаточно определить в какой-либо одной точке* $x \in D$ *и затем продолжить ее по непрерывности на всех траекториях системы* (5.2) *вплоть до границы области* D.

Обозначим через $x = \gamma_-(t)$, $x = \gamma_+(t)$, $x = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, соответственно, решения уравнений (5.2), (5.3), (5.4), удовлетворяющие начальному условию

$$\gamma_-(0) = \gamma_+(0) = \gamma(0) = 0, \tag{5.6}$$

а через Γ_-, Γ_+, Γ — соответственно, траектории данных решений.

Теорема 5.1. *Для того, чтобы система* (5.1) *была устойчиво управляемой, необходимо и достаточно, чтобы функция* $s(\gamma(t))$ *меняла в нуле знак.*

Прежде чем перейти к доказательству данной теоремы, докажем некоторые утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть вектор-функция* $\mathrm{x} = \xi(t)$ *голоморфна в некоторой окрестности нуля и* $\xi(0) = 0$.

Тогда существует такое $\vartheta > 0$, *что на отрезке* $[-\vartheta, \vartheta]$ *функция* $s(\xi(t)) = \det(f_0(\xi(t)), f_1(\xi(t)))$ *либо тождественно равна нулю, либо имеет единственный корень* $t = 0$.

Доказательство. Лемма утверждает, что $t = 0$ не может быть точкой накопления нуля функции $s(\xi(t))$. Действительно, так как функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ голоморфны в некоторой окрестности O^2_ε, то функция $s(x)$ также голоморфна в O^2_ε. Существует такое $\tau > 0$, что $\xi(t) \subset O^2_\varepsilon$ при $t \in (-\tau, \tau)$. В таком случае функция $s(\xi(t))$, как голоморфная от голоморфной функции будет также голоморфной на промежутке $(-\tau, \tau)$. Но если голоморфная функция $s(\xi(t))$ имеет бесконечное число нулей на интервале $(-\tau, \tau)$, то $s(\xi(t)) \equiv 0$ для всех $t \in (-\tau, \tau)$. Отсюда следует, что либо $s(\xi(t)) \equiv 0$, либо имеет конечное число нулей на интервале $(-\tau, \tau)$. Тогда найдется такое $\vartheta \in (0, \tau)$, что либо $s(\xi(t)) \equiv 0$, либо $s(\xi(t)) \neq 0$ для всех $t : 0 < |t| < \vartheta$. Лемма доказана.

Следствие 5.1. *Существует окрестность начала координат, в которой траектория* Γ *либо содержится в* $\mathbb{S}$, *либо пересечение* $\Gamma \bigcap \mathbb{S}$ *содержит не более конечного числа точек.*

Доказательство. По теореме Коши о решении дифференциального уравнения с голоморфной правой частью (см. например [37, стр. 73]) существует такое $\tau > 0$, что решение $x = \gamma(t)$ будет голоморфным на некотором промежутке $(-\tau, \tau)$. Тогда по лемме 5.1 существует такое $\vartheta \in (0, \tau)$, что на отрезке $[-\vartheta, \vartheta]$ функция $s(\gamma(t)) = \det(f_0(\gamma(t)), f_1(\gamma(t)))$ либо тождественно равна нулю, либо имеет единственный корень $t = 0$. А это и означает, что существует окрестность начала координат, в которой траектория Γ либо содержится в $\mathbb{S}$, либо пересечение $\Gamma \bigcap \mathbb{S}$ содержит не более конечного числа точек.

Замечание 5.1. Лемма 5.1, очевидно будет справедливой и в том случае, если вместо решения $\gamma(t)$ рассматривать решение $\gamma_-(t)$ или решение $\gamma_+(t)$.

Лемма 5.2. *Функция $s(\gamma(t))$ тождественно равна нулю на некотором интервале $(-\vartheta, \vartheta)$ если и только если Γ является инвариантным многообразием системы* (5.1).

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть на интервале $(-\vartheta, \vartheta)$ выполнено тождество $s(\gamma(t)) \equiv 0$. Так как $s(\gamma(t)) \doteq \det(f_0(\gamma(t)), f_1(\gamma(t)))$, то вектор-функции $f_0(\gamma(t))$ и $f_1(\gamma(t))$ линейно зависимы для всех $t \in (-\vartheta, \vartheta)$. Тогда конус допустимых направлений $K(x)$ целиком лежит в касательном пространстве $T_x(\Gamma)$ в каждой точке $x = \gamma(t)$, $t \in (-\vartheta, \vartheta)$. В силу непрерывной дифференцируемости функций $f_0(x)$ и $f_1(x)$ никакая допустимая траектория системы (5.1) не пересечет траекторию Γ в точках $x = \gamma(t)$, $t \in (-\vartheta, \vartheta)$. Следовательно Γ — инвариантная траектория системы (5.1). Достаточность. Очевидно, если Γ инвариантная кривая системы (5.1), то $\Gamma \subset \mathbb{S}$ и, следовательно, $s(x) \equiv 0$ для всех $x \in \Gamma$.

Следствие 5.2. *Пусть существует $\vartheta > 0$, что $s(\gamma(t)) \equiv 0$ для всех $t \in [-\vartheta, \vartheta]$. Тогда система* (5.1) *не является устойчиво управляемой.*

Доказательство. В силу леммы 5.2 существует такая окрестность O^2_ε, что $\overline{\Gamma} = \Gamma \bigcap O^2_\varepsilon$ является инвариантной кривой для системы (5.1). Тогда, очевидно, что $\overline{\Gamma}$ является также инвариантной кривой и для системы с обращенным временем

$$\dot{x} = -f_0(x) - u f_1(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^2 \times U. \tag{5.7}$$

В силу этого, изображающая точка системы (5.7), начав движение в начале координат, не сможет сойти с траектории $\overline{\Gamma}$ внутри окрестности O^2_ε. Следовательно отрезок траекторной воронки $V(0)$ системы (5.7), лежащий внутри окрестности O^2_ε лежит целиком в $\overline{\Gamma}$. Но траекторная воронка описывает область управляемости системы (5.1). Следовательно, область управляемости системы (5.1) внутри окрестности O^2_ε состоит лишь из отрезка кривой $\overline{\Gamma}$, а значит никакая допустимая траектория системы (5.1), выпущенная из произвольной точки $x_0 \in \{O^2_\varepsilon \smallsetminus \overline{\Gamma}\}$ не сможет достичь нуля за конечное время, не выходя при этом за пределы окрестности O^2_ε, т.е. система (5.1) не является устойчиво управляемой.

Л е м м а 5.3. *Если существует такое $\vartheta > 0$, что функция $s(\gamma(t))$ сохраняет знак на множестве $[-\vartheta, 0) \bigcup (0, \vartheta]$, то система* (5.1) *не является устойчиво управляемой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отрезок траектории $\overline{\Gamma}$, где $\overline{\Gamma} \doteq \{x = \gamma(t) \,:\, 0 < |t| \leqslant \vartheta\}$. Положим для определенности, что $s(\gamma(t)) > 0$ для всех $t \in [-\vartheta, 0) \bigcup (0, \vartheta]$. Так как $f_1(\gamma(t)) \neq 0$ на отрезке $[-\vartheta, \vartheta]$, и $s(\gamma(t)) \doteq \det(f_0(\gamma(t)), f_1(\gamma(t))$ отлична от нуля на множестве $[-\vartheta, 0) \bigcup (0, \vartheta]$, то векторы $f_0(\gamma(t))$ и $f_1(\gamma(t))$ сохраняют ориентацию на данном множестве. А поскольку $s(x) \doteq \det(f_0(x), f_1(x))$ и $s(x) > 0$, то для всех $x \in \{\overline{\Gamma} \smallsetminus \{0\}\}$ вектор $f_0(x)$ направлен вправо от вектора $f_1(x)$. Это означает, что штриховка отделяющей кривой $\overline{\Gamma}$ не меняет своего направления. Поскольку всюду на $\overline{\Gamma} \smallsetminus \{0\}$ штриховка определена, то все допустимые траектории системы (5.1) должны пересекать $\overline{\Gamma}$ согласно штриховке (в данном случае сверху-вниз). Пусть $\varepsilon = \min\{|\gamma(-\vartheta)|, |\gamma(\vartheta)|\}$. Тогда кривая $\overline{\Gamma}$ делит окрестность O^2_ε на две части: ґверхнююЄ и ґнижнююЄ. Покажем, что для любой точки x_0, лежащей в нижней части окрестности O^2_ε, не существует допустимой траектории системы (5.1), выходящей из точки x_0 и достигающей начала координат за конечное время, не выходя при этом за пределы окрестности O^2_ε.

Предположим противное. Пусть найдется такое время $t_{x_0} > 0$ и допустимое управление $u_{x_0}(t)$, $t \in [0, t_{x_0}]$, что соответствующее данному управлению решение $x = x(t, u_{x_0}(\cdot))$, $t \in [0, t_{x_0}]$ системы (5.1), удовлетворяет условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_{x_0}) = 0, \quad |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_{x_0}].$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + u_{x_0}(t) f_1(x). \tag{5.8}$$

Данная система, очевидно, удовлетворяет условиям Каратеодори и, следовательно, удовлетворяет условиям единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных. Поскольку x_0 внутренняя точка окрестности O^2_ε, то существует окрестность $O^2_\delta(x_0) \subset O^2_\varepsilon$, лежащая в ґнижней частиЄ окрестности O^2_ε (см. рис. 5.1).

Рис. 5.1. Если из точки x_0 можно перейти в нуль за конечное время, не выходя при этом за пределы окрестности O^2_ε, то существует траектория Ψ системы (5.8), пересекающая траекторию $\overline{\Gamma}$ противно штриховке, что невозможно. Следовательно никакая траектория системы (5.8) не может перейти за конечное время из точки x_0 в начало координат, не покидая при этом окрестности O^2_ε.

Рассмотрим семейство решений $\{x(t)\}$, $t \in [0, t_1]$ системы (5.8), удовлетворяющих условию $x(0) \in O^2_\delta(x_0)$. В силу единственности концы траекторий данных решений целиком покрывают некоторую окрестность начала координат, и следовательно, существуют точки данных траекторий, лежащие как на кривой $\overline{\Gamma}$, так и выше ее. Следовательно, существует траектория Ψ системы (5.8), пересекающая траекторию $\overline{\Gamma}$ противно штриховке. Противоречие. Следовательно для любой точки $x_0 \in O^2_{\varepsilon}$, лежащей ниже траектории $\overline{\Gamma}$, не существует допустимой траектории системы (5.1), целиком лежащей в окрестности O^2_{ε}, с началом в точке x_0 и концом в начале координат. Т.е. система (5.1) не является устойчиво управляемой.

Перейдем теперь к доказательству теоремы (5.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь . Из лемм 5.2, 5.3 следует, что если функция $s(\gamma(t))$ не меняет в нуле знак, то система (5.1) не является устойчиво управляемой. Данное утверждение равносильно следующему: если система (5.1) устойчиво управляема, то функция $s(\gamma(t))$ меняет в нуле знак. Таким образом необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь . Пусть функция $s(\gamma(t))$ меняет в нуле знак. Тогда существует такое $\vartheta > 0$, что $s(\gamma(t)) \neq 0$ на множестве $[-\vartheta, 0) \bigcup (0, \vartheta]$. Пусть для определенности $s(\gamma(t)) > 0$ при $t \in [-\vartheta, 0)$ и $s(\gamma(t)) < 0$ при $t \in (0, \vartheta]$. Тогда векторы $f_0(\gamma(t))$ и $f_1(\gamma(t))$ меняют в нуле ориентацию, и в силу того, что $f_1(\gamma(t)) \neq 0$ при $t \in [-\vartheta, \vartheta]$, то вектор $f_0(\gamma(t))$ переходит в нуле с одной стороны Γ на другую. Следовательно, штриховка отделяющей кривой $\overline{\Gamma} \doteq \{x = \gamma(t) \,:\, t \in [-\vartheta, \vartheta]\}$ меняет в нуле направление (см.рис. 5.2). А это значит, что любая допустимая траектория системы (5.1), в частности Γ_+, входящая в начало координат слева, подходит к траектории $\overline{\Gamma}$ ґсверхуЄ. Выйти из начала координат вправо можно лишь опять таки ґвверхЄ от траектории $\overline{\Gamma}$, т.е. траектория Γ_+ не пересекает $\overline{\Gamma}$ в начале координат. Аналогично войти справа в начало координат возможно лишь ґснизуЄ от траектории $\overline{\Gamma}$ и движение влево из начала координат можно осуществить лишь согласно штриховке: т.е. также ґвнизЄ от $\overline{\Gamma}$. Таким образом, траектория Γ_- также не пересекает кривую $\overline{\Gamma}$ вблизи нуля, и так как кривые Γ_- и Γ_+ находятся по разные стороны от кривой $\overline{\Gamma}$, то существует такая окрестность $O^2_{\Delta_1}$, в которой траектории $\overline{\Gamma}$, Γ_- и Γ_+ не имеют общих точек кроме начала координат (см. рис. 5.2).

Поскольку $f_-(0) = -f_+(0) = b$, а $b \neq 0$, то в силу непрерывности функций $f_-(x)$ и $f_+(x)$ существует такая окрестность $O^2_{\Delta_2}$, что $f_-(x) \neq 0$ и $f_+(x) \neq 0$ для всех $x \in O^2_{\Delta_2}$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Обозначим $\Delta = \min\{\varepsilon, \Delta_1, \Delta_2\}$. Тогда в окрестности O^2_{Δ} траектории $\overline{\Gamma}$, Γ_- и Γ_+ имеют единственную общую точку — нуль и каждая пересекает окружность S^2_Δ по крайней мере в двух точках. Тогда существуют такие

$$t_0^- = \max_{t<0, \gamma_-(t)\in S^2_\Delta} t, \quad t_0^+ = \max_{t<0, \gamma_+(t)\in S^2_\Delta} t.$$

Введем обозначения

$$A_- = \gamma_-(t_0^-), \quad OA_- = \{x = \gamma_-(t) \,:\, t \in [t_0^-, 0]\},$$

$$A_+ = \gamma_+(t_0^+), \quad OA_+ = \{x = \gamma_+(t) \,:\, t \in [t_0^+, 0]\}.$$

И наконец обозначим через M_- множество траекторий системы (5.2), оканчивающихся в точках отрезка OA_+ кривой Γ_+, а через M_+ — множество траекторий системы (5.3), оканчивающихся в точках отрезка OA_- кривой Γ_-, т.е.

$$\begin{aligned} M_- &\doteq \{x = \gamma_-(t), t \leqslant 0 \,:\, \gamma_-(0) \in OA_+\}, \\ M_+ &\doteq \{x = \gamma_+(t), t \leqslant 0 \,:\, \gamma_+(0) \in OA_-\}, \end{aligned}$$

где $\gamma_-(t)$, $\gamma^+(t)$, $t \leqslant 0$ — соответственно решения систем (5.2) и (5.3). Оба множества непусты и объединение $M = M_- \bigcup M_+$ содержит некоторую окрестность O^2_δ начала координат, причем $\delta \leqslant \varepsilon$. Тогда для любой точки $x_0 \in O^2_\delta$ существует допустимая траектория системы (5.1) с началом в точке x_0 и концом нуле. Действительно, к примеру, если $x_0 \in O^2_\delta \bigcap M^-$, то двигаясь по траектории системы (5.3), изображающая точка за конечное время достигает отрезка OA_+ кривой Γ_+, а затем двигаясь по траектории Γ_+, за конечное время достигает нуля, не выходя при этом за пределы окрестности O^2_Δ, а следовательно не выходя и за пределы окрестности O^2_ε (см.рис 5.2). То есть система (5.1) устойчиво управляема. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 5.1 непосредственно следует справедливость следующих утверждений:

Т е о р е м а 5.2. *Для того чтобы система* (5.1) *была устойчиво управляема, необходимо и достаточно, чтобы траектории* Γ_- *и* Γ_+ *имели в нуле нечетный порядок касания,* (*т. е.* $\gamma_+(t) - \gamma_-(t) = o(t^{2k-1})$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\gamma_+(t) - \gamma_-(t)}{t^{2k}} = \alpha \neq 0$ *для некоторого натурального* k [8].)

Рис. 5.2. Из точки x_0 двигаясь по траектории системы (5.3), изображающая точка за конечное время достигает кривой Γ_+, а затем двигаясь по траектории Γ_+, за конечное время достигает нуля, не выходя при этом за пределы окрестности O^2_ε.

Т е о р е м а 5.3. *Для того чтобы система* (5.1) *была устойчиво управляема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$s(\gamma_+(t))s(\gamma_-(t)) < 0$$

на некотором интервале $(0, \tau)$.

З а м е ч а н и е 5.2. Из теоремы 5.1, очевидно следует, что для устойчивой управляемости линейной системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad |u| < \varepsilon$$

необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}(b, Ab) = 2$.

Действительно, в данном случае $\gamma(t) = bt$, а функция $s(\gamma(t)) \doteq \det(Abt, b) = t \det(Ab, b)$ меняет в нуле знак в том и только том случае, если $\det(Ab, b) \neq 0$, т.е. $\operatorname{rank}(Ab, b) = 2$.

П р и м е р 5.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \tag{5.9}$$

где $u \in [-1, 1]$, $f_0(x) = (0, 4x_1^3 + 5x_1^4)^*$, $f_1(x) = (1, 4x_1^3 - 5x_1^4)^*$. Введем обозначения: $A = \left(\dfrac{\partial f_0(x)}{\partial x}\right)_{x=0}$, $b = f_1(0) = (1, 0)^*$. A — нулевая матрица и, следовательно, $\operatorname{rank}(b, Ab) = 1$, т. е. к системе (5.9) не применима теорема о локальной управляемости по первому приближению.

Легко видеть, что функция $x = \gamma(t) = (t, t^4 + t^5)^*$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = f_1(x), \quad x(0) = 0.$$

Так как функция $s(\gamma(t)) \doteq \det(f_0(\gamma(t)), f_1(\gamma(t))) = 4t^3 + 5t^4$, очевидно, меняет в нуле знак, то по теореме (5.1) система (5.9) является устойчиво управляемой.

§6. Устойчивая управляемость в $\mathbb{R}^n$

В данном параграфе получены достаточные условия устойчивой управляемости системы $\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1]$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1]. \tag{6.1}$$

Предполагается, что $f_i \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $i = 0, 1$, $f_0(0) = 0$, $f_1(0) = b \neq 0$. Наряду с системой (6.1) рассмотрим соответствующую ей систему линейного приближения

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{6.2}$$

где $A = \Big(\dfrac{\partial f_0(x)}{\partial x}\Big)_{x=0}$,

Л е м м а 6.1. *Если* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = k \leqslant n$, *то векторы* $b, Ab, A^2b, \ldots, A^{k-1}b$ *– линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что это не так. Тогда существуют такие $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$, что

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| \neq 0; \quad \sum_{i=0}^{k-1} c_i A^i b = 0.$$

Выберем такой наибольший индекс m, $m < k$, что $c_m \neq 0$. Без ограничения общности будем считать, что $c_m = 1$. Тогда $A^m b = -(\sum_{i=0}^{m-1} c_i A^i b)$, откуда следует, что

$$A^{m+1} b = -A\Big(\sum_{i=0}^{m-1} c_i A^i b\Big) = -A^m b - \sum_{i=1}^{m-1} c_i A^i b = \sum_{i=0}^{m-1} \widehat{c}_i A^i b.$$

Действуя аналогичным образом, получаем, что $A^p b = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \bar{c}_i A^i b$ для всех $p \geqslant m$, и следовательно $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \cdots, A^{n-1}b) \leqslant m$ Получили противоречие. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 6.1. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = k \leqslant n$, *тогда для любого неотрицательного целого числа* m, *существуют такие числа* c_i^m, $i = \overline{1, k}$, *что* $A^m b = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i^m A^{i-1} b$.

Л е м м а 6.2. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = k \leqslant n$, *а* $L^k \doteq \{x = \sum\limits_0^{k-1} \alpha_i A^i b \ : \ \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ *— линейное подпространство в* $\mathbb{R}^n$*, порожденное векторами* $b, Ab, A^2b, \ldots, A^{k-1}b$*. Тогда множество управляемости* D_∞ *системы* (6.2) *содержится в* L^k*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хорошо известно (см. например [19]), что для любого $\tau > 0$ множество управляемости D_τ системы (6.2) можно представить в виде:

$$D_\tau = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ x(\tau) = -\int\limits_0^\tau e^{-At} b u(t) dt\Big\}.$$

Представим матричную экспоненту в виде ряда $e^{-At}b = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m A^m b \dfrac{t^m}{m!}$. В силу следствия 6.1 для любого неотрицательного целого числа m, существуют такие числа c_i^m, $i = 0, 1, \ldots, k$, что $A^m b = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i^m A^{i-1} b$. Тогда

$$e^{-At}b = \sum_{m=0}^{\infty}\Big((-1)^m \frac{t^m}{m!}\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i^m A^{i-1} b\Big)\Big) = \sum_{i=1}^{k}\Big(A^{i-1}b\Big(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m c_i^m \frac{t^m}{m!}\Big)\Big),$$

и, вводя обозначения $\lambda_i(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m c_i^m \dfrac{t^m}{m!}$, получаем, что

$$x(\tau) = -\int\limits_0^\tau \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) A^{i-1} b u(t) dt = -\sum_{i=1}^{k} A^{i-1} b \int\limits_0^\tau \lambda_i(t) u(t) dt.$$

Откуда следует, что $D_\tau \subset L^k$ для любого $\tau > 0$. т.е. L^k является инвариантным многообразием системы (6.2).

З а м е ч а н и е 6.1. В условиях леммы 6.2, система (6.2) является N-управляемой в L^k (см., например, [19, стр. 108]).

Л е м м а 6.3. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = n - 1$*, тогда для любого* $\tau > 0$ *существует гладкое многообразие* M_τ^{n-1}*, которое содержится в множестве управляемости* D_τ *системы* (6.1)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу замечания 6.1 система (6.2) является N-управляемой на многообразии L^{n-1}, порожденном векторами $b, Ab, \ A^2b, \cdots, A^{n-2}b$. Следовательно, для любого $\tau > 0$ существуют допустимые управления $u_i(t)$, $t \in [0, \tau]$, $i = 1, \ldots, n-1$, которые переводят систему с обращенным временем

$$\dot{x} = -Ax - bu \tag{6.3}$$

из начала координат в линейно независимые точки $x_i(\tau) = x(\tau, u_i(\cdot))$, $i = 1, \ldots, n-1$. Без ограничения общности будем полагать, что:

а) $u_i(t) \in C^\infty[0,\tau], i = 1, \ldots, n-1$;

б) управления $u_i(t)$ выбраны так, что соответствующие им решения $x_i(t) = x(t, u_i(\cdot))$ системы (6.3) существуют на отрезке $[0,\tau]$ и удовлетворяют условию $x_i(1) = \varepsilon A^{i-1}b$, $i = 1, \ldots, n-1$, где ε — некоторое положительное число. Обозначим $u(t,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \xi_i u_i(t)$, где $|\xi| \leqslant 1$.

Пусть $x(t,\xi)$ решение системы с обращенным временем

$$\dot{x} = -f_0(x) - u(t,\xi) f_1(x),$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0,\xi) = 0$. Можно полагать, что при всех $\xi \in O_1^{n-1}$ данное решение существует на отрезке $[0,\tau]$. Обозначим $Z(t) = \Big(\dfrac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi}\Big)_{\xi=0}$.

Легко видеть, что $n \times (n-1)$ матрица $Z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Z}(t) = -AZ(t) - bu^*(t),$$

где $bu^*(t)$ — есть матричное произведение вектор-столбца b на вектор-строку $u^*(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{n-1}(t))$. Откуда следует, что столбцы $z_i(t)$, $i = 1, \ldots, n-1$ матрицы $Z(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{z}_i(t) = -Az_i(t) - bu_i(t), \quad z_i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Но тогда $z_1(\tau), z_2(\tau), \ldots, z_{n-1}(\tau)$ – линейно независимые векторы. Следовательно отображение $\xi \to x(\tau,\xi)$ является непрерывно-дифференцируемым отображением окрестности O_1^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Заметим теперь, что поскольку $\operatorname{rank} Z(\tau) = \operatorname{rank}\Big(\dfrac{\partial x(\tau,\xi)}{\partial \xi}\Big)_{\xi=0} = n-1$, то существует такая окрестность O_δ^{n-1}, что $\operatorname{rank}\Big(\dfrac{\partial x(\tau,\xi)}{\partial \xi}\Big) = n-1$ для всех $\xi \in O_\delta^{n-1}$. А это означает, что множество $M_\tau^{n-1} \doteq \{x = x(\tau,\xi) \,:\, \xi \in O_\delta^{n-1}\}$ будет гладким многообразием, причем $M_\tau^{n-1} \subset D_\tau$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 6.2. На самом деле в условиях леммы 6.3 гладкость многообразия M_τ^{n-1} будет степени m. Это следует из теоремы о степени гладкости зависимости решений от параметра (см. например [37, Гл. 3, §21, стр. 88]).

Л е м м а 6.4. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b) = n-1$. *Тогда для любого* $\tau > 0$ *существуют окрестность* O^n_ε *и скалярная функция* $\varphi_\tau \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, *такие что:*

а) $\partial\varphi_\tau(x)/\partial x \neq 0$ *для всех* $x \in O^n_\varepsilon$;

б) $M^{n-1}_\tau \doteq \{x \in O^n_\varepsilon \,:\, \varphi_\tau(x) = 0\} \subset D_\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательства леммы 6.3 очевидно, что для любого $\tau > 0$ существует окрестность O^{n-1}_δ, что многообразие $M^{n-1}_\tau \doteq \{x = x(\tau, \xi) \,:\, \xi \in O^{n-1}_\delta\}$ содержится в D_τ, причем $\operatorname{rank}\Big(\dfrac{\partial x(\tau,\xi)}{\partial \xi}\Big) = n-1$ для всех $\xi \in O^{n-1}_\delta$. Известно (см., например,[8, Гл. 7, §7, утв.1, стр. 505]), что в этом случае существуют такая окрестность O^n_ε, индекс k и функция $\varphi^k_\tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, что

$$M^{n-1}_\tau \doteq \{x \in O^n_\varepsilon \,:\, x_k = \varphi^k_\tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)\}.$$

Это равносильно тому, что $M^{n-1} \doteq \{x \in O^n_\varepsilon \,:\, \varphi_\tau(x) = 0\}$, где $\varphi_\tau(x) = x_k - \varphi^k_\tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Заметим теперь, что $\partial\varphi_\tau(x)/\partial x \neq 0$ для всех $x \in O^n_\varepsilon$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 6.1. *Пусть в некоторой окрестности* $O^n_{\varepsilon_0}$ *определена функция* $\varphi_\tau \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *такая, что* $\partial\varphi_\tau(x)/\partial x \neq 0$ *для всех* $x \in O^n_{\varepsilon_0}$ *и* $M^{n-1}_\tau \doteq \{x \in O^n_\varepsilon \,:\, \varphi_\tau(x) = 0\} \subset D_\tau$.

Если существуют $\tau_0 \in (0, \tau)$ *и такие решения* $x_+(t) = x(t, u_+(\cdot))$, $x_-(t) = x(t, u_-(\cdot))$, $t \in [0, \tau]$ *системы* (6.1), *что*

$$x_+(0) = x_-(0) = 0, \quad \varphi(x_+(t))\varphi(x_-(t)) < 0 \ \text{ для всех } t \in (0, \tau_0],$$

то система (6.1) *устойчиво управляема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $\varepsilon_1 > 0$, и пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Заметим, что гладкое многообразие M^{n-1}_τ делит окрестность O^n_ε на две части: верхнюю – $O^n_{+\varepsilon} \doteq \{x \in O^n_\varepsilon \,:\, \varphi_\tau(x) > 0\}$, и нижнюю – $O^n_{-\varepsilon} \doteq \{x \in O^n_\varepsilon \,:\, \varphi_\tau(x) < 0\}$ (см. рис. 6.1). Тогда существует такое время $t_0 \in (0, \tau_0]$, что $\varphi_\tau(x_+(t_0))\varphi_\tau(x_-(t_0)) < 0$ и $x_+(t), x_-(t) \subset O^n_\varepsilon$ для всех $t \in (0, t_0]$. Без ограничения общности будем полагать, что $\varphi_\tau(x_+(t)) > 0$ $\varphi_\tau(x_-(t)) < 0$ при всех $t \in (0, t_0]$. Пусть $x_+(t, x_0) = x(t, x_0, u_+(\cdot))$, $x_-(t, x_0) = x(t, x_0, u_-(\cdot))$, $t \in (0, t_0]$, решения системы (6.1), удовлетворяющие начальному условию $x_-(0, x_0) = x_+(0, x_0) = x_0$. Тогда, в силу непрерывной зависимости решения от начальных данных существует такая окрестность O^n_δ,

Рис. 6.1. Из любой точки $x_0 \in O^n_{-\delta}$ под действием допустимого управления $u_+(t)$, $t \in (0, t_{x_0}]$ можно попасть на многообразие M^{n-1}_τ, а затем перейти в нуль за время $t_{x_0} + \tau$, не покидая при этом окрестности O^n_ε.

что $\varphi_\tau(x_+(t_0, x_0)) > 0$, $\varphi(x_-(t_0, x_0)) < 0$ для всех $x_0 \in O^n_\delta$. Обозначим $O^n_{+\delta} \doteq O^n_\delta \bigcap O^n_{+\varepsilon_0}$, $O^n_{-\delta} \doteq O^n_\delta \bigcap O^n_{-\varepsilon_0}$. Тогда, для любого $x_0 \in O^n_{-\delta}$ существует такое t_{x_0}, что $\varphi_\tau(x_+(t_{x_0}, x_0)) = 0$. Это следует из того, что $\varphi_\tau(x_+(0, x_0)) < 0$, $\varphi_\tau(x_+(t_0, x_0)) > 0$, а функция $\varphi_\tau(x_+(t, x_0))$ непрерывна на отрезке $[0, t_0]$. Т.е. из любой точки x_0ґнижнейЄ части окрестности O^n_δ под действием допустимого управления $u_+(t)$, $t \in (0, t_{x_0}]$ можно попасть на многообразие M^{n-1}_τ, а затем перейти в нуль за время $t_{x_0} + \tau$, не покидая при этом окрестности O^n_ε, а значит не покидая и окрестности $O^n_{\varepsilon_1}$.

Аналогично для любого $x_1 \in O^n_{+\delta}$ существует такое время t_{x_1}, что $\varphi_\tau(x_-(t_{x_1}, x_1)) = 0$, т.е. из любой точки ґверхнейЄ части окрестности $x \in O^n_\delta$ под действием допустимого управления $u_-(t)$, $t \in (0, t_{x_1}]$ можно попасть на многообразие M^{n-1}_τ, а затем перейти в нуль за время $t_{x_1} + \tau$, не покидая при этом окрестности $O^n_{\varepsilon_1}$. А это и означает, что система (6.1) устойчиво управляема. Теорема доказана.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что в некоторой окрестности O^n_ε выполнены условия теоремы 6.1 и леммы 6.4, функции $f_0(x)$,

$f_1(x)$, и как следствие функция φ являются голоморфными в некоторой окрестности начала координат, и $p_0(x) \doteq \partial\varphi_\tau(x)/\partial x \neq 0$. Обозначим через $x = \gamma_-(t)$, $x = \gamma_+(t)$, $t \in (-\tau, \tau)$, соответственно отвечающие управлениям $u_+(t) \equiv 1$ и $u_-(t) \equiv -1$, решения системы (6.1), удовлетворяющие начальному условию $\gamma_-(0) = \gamma_+(0) = 0$.

Напомним, что особые многообразия системы (6.1) описываются как множество нулей функции $s(x) \doteq \det[f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)]$, где

$$f_i(x) = [f_0(x), f_{i-1}(x)] \doteq \Big(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}\Big) f_{i-1}(x) - \Big(\frac{\partial f_{i-1}(x)}{\partial x}\Big) f_0(x).$$

Заметим, что $s(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $f_i(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $f_i(0) = A^{i-1}b$ при $i = 1, \ldots, n-1$.

Пусть $x_+(t) = x(t, u_+(\cdot))$, $x_-(t) = x(t, u_-(\cdot))$, $t \in [0, \tau]$ такие решения системы (6.1), что $x_+(0) = x_-(0) = 0$, $\varphi(x_+(t))\varphi(x_-(t)) < 0$ для всех $t \in (0, \tau]$. Без ограничения общности будем полагать, что $x_+, x_- \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; $\varphi_\tau(x_+(t)) > 0$, $\varphi_\tau(x_-(t)) < 0$ при всех $t \in (0, \tau]$. Тогда существует такое $\vartheta \in (0, \tau)$, что

$$\langle p_0(x_+(t)), dx_+(t)/dt \rangle > 0, \quad \langle p_0(x_-(t)), dx_-(t)/dt \rangle < 0 \tag{6.4}$$

для всех $t \in (0, \vartheta)$. Действительно, иначе, в силу голоморфности функций $\varphi(x)$ и $x_+(t)$, $x_-(t)$ следует, что $\varphi(x_+(t)) \equiv \varphi(x_-(t)) \equiv 0$ на некотором интервале $[0, \theta) \subset [0, \tau)$, что противоречит условию (6.4). Без ограничения общности будем полагать, что $\vartheta = \tau$. Тогда в любой точке $x_0 = x_+(t_0)$, $t_0 \in (0, \tau]$ векторы $f_0(x_0)$, $f_1(x_0)$ не принадлежат одновременно касательному пространству к гладкому многообразию $M^{n-1}_{x_0}\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$. Иначе $\langle p_0(x_0), f_0(x_0) \rangle = \langle p_0(x_0), f_1(x_0) \rangle = 0$, и следовательно $\langle p_0(x_+(t_0)), dx_+(t_0)/dt \rangle = \langle p_0(x_0), f_0(x_0) + u_+(t_0) f_1(x_0) \rangle = 0$. Поскольку векторы $f_0(x_0)$, $f_1(x_0)$, не принадлежат одновременно касательному пространству к гладкому многообразию $M^{n-1}_{x_0}\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$. то для каждого $x_+ = x_+(t)$, $t \in (0, \tau)$ можно построить такую систему линейно независимых векторов $\{p_i(x_+)\}_{i=1}^{n-1}$, что

$$p_1(x_+) = \alpha_1(x_+) f_0(x_+) + f_1(x_+)\,, \quad p_1(0) = f_1(0);$$

$$p_i(x_+) = \alpha_i(x_+) f_0(x_+) + \beta_i(x_+) f_1(x_+) + f_i(x_+),$$

$$\langle p_i(x_+), p_0(x_+) \rangle = 0\,, \quad p_i(0) = f_i(0), \quad i = 2, \ldots, n-1;$$

$$\det[p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)] > 0.$$

Понятно, что функции $\alpha_i(x_+)$, $\beta_i(x_+)$, $i = 2, \ldots, n-1$ можно выбрать сколь угодно гладкими. Очевидно, что в некоторой окрестности любой точки $x_+ \in M_{x_+}^{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = \varphi(x_+)\}$ векторы $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ составляют базис касательного пространства к данному многообразию, а кроме того,

$$s(x) \doteq \det[f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)] =$$

$$= \det[f_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), \ldots, p_{n-1}(x)]$$

для всех $x = x_+(t)$, $t \in (0, \tau)$. Заметим, что условие условие $\langle p_0(x), \dot{x}\rangle >$ 0 для всех $x = x_+(t)$, $t \in (0, \tau)$ равносильно условию:

$$\det[\dot{x}, p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)] = \det[\dot{x}, p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)] > 0.$$

С другой стороны

$$\det[\dot{x}, p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)] = \det[f_0(x) + uf_1(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)] =$$

$$= \det[f_0(x) + uf_1(x), \alpha_1(x)f_0(x) + f_1(x), p_2(x), \ldots, p_{n-1}(x)] =$$

$$= (1 - \alpha_1(x)u) \det[f_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots, f_{n-1}(x)] = s(x)$$

для всех $x = x_+(t)$, $u = u_+(t)$, $t \in (0, \tau)$. Поскольку функция $\alpha_1(0) = 0$, а $|u| \leqslant 1$, то в силу гладкости функций $\alpha_1(x_+(t)), u_+(t)$ существует такое $\tau_1 \in (0, \tau)$, что $1 - \alpha_1(x_+(t))u_+(t) > 0$ при $t \in (0, \tau_1]$, т.е. функции $\varphi(x_+(t))$ и $s(x_+(t))$ одновременно больше нуля при $t \in (0, \tau_1]$. Аналогично доказывается, что существует такое $\tau_2 \in (0, \tau)$, что функции $\varphi(x_-(t))$ и $s(x_-(t))$ одновременно меньше нуля при $t \in (0, \tau_2]$. Таким образом условие $\varphi(x_+(t))\varphi(x_-(t)) < 0$ для всех $t \in (0, \tau_0]$, равносильно условию $s(x_+(t))s(x_-(t)) < 0$ для всех $t \in (0, \tau_0]$, т.е. справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 6.2. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) \geqslant n - 1$, *а* $f_0, f_1 \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. *Если существуют число* $\tau > 0$ *и такие решения* $x_+(t) = x(t, u_+(\cdot))$, $x_-(t) = x(t, u_-(\cdot))$, $t \in [0, \tau]$ *системы* (6.1), *что*

$$x_+(0) = x_-(0) = 0, \quad s(x_+(t))s(x_-(t)) < 0 \ \text{для всех}\ t \in (0, \tau),$$

то система (6.1) *устойчиво управляема.*

И как следствие из данной теоремы очевидна справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 6.3. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) \geqslant n - 1$, *а* $f_0, f_1 \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. *Если существует такое* $\tau > 0$, *что*

$$s(\gamma_+(t))s(\gamma_-(t)) < 0 \ \text{ для всех } t \in (0, \tau),$$

то система (6.1) *устойчиво управляема.*

П р и м е р 6.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + ub, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1], \tag{6.5}$$

в предположении, что $\operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b = n$. Пусть $x_+(t)$, $x_-(t)$ выходящие из начала координат решения системы (6.5), соответствующие управлениям $u = 1$, и $u = -1$. Легко видеть, что $s(x_+(t)) \doteq \det(Ax_+(t), b, Ab, \ldots, A^{n-2}b)$. Известно (см. например [5]), что решение $x_+(t)$ можно представить в виде ряда

$$x_+(t) \doteq \int_0^t e^{A(t-s)} b\, ds = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(t) A^k b,$$

где $C_k(t)$ – аналитические функции, причем $C_k(t) \not\equiv 0$. Тогда

$$s(x_+(t)) = \det(C_{n-2}(t)A^{n-1}b, b, Ab, \ldots, A^{n-2}b) =$$

$$= C_{n-2}(t)\det(A^{n-1}b, b, Ab, \ldots, A^{n-2}b) \not\equiv 0.$$

С другой стороны, поскольку $x_-(t) \doteq \int_0^t e^{A(t-s)}(-b)\, ds = -x_+(t)$, то существует такое $\tau > 0$, что

$$s(x_+(t))s(x_-(t)) = -(C_{n-2}(t)\det(A^{n-1}b, b, Ab, \ldots, A^{n-2}b))^2 < 0$$

для всех $t \in (0, \tau)$, т.е. в силу теоремы 6.2, система (6.5) является устойчиво управляемой.

П р и м е р 6.2. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \tag{6.6}$$

где $u \in [-1, 1]$, $f_0(x) = (x_2^3, x_3, 0)^*$, $f_1(x) = (0, 0, 1)^*$. Введем обозначения $A(x) = \left(\dfrac{\partial f_0(x)}{\partial x}\right)_{x=0}$, $b = f_1(0) = (0, 0, 1)^*$. Тогда $A(x)b = (0, 1, 0)^*$,

$A^2(x)b = (3x_2^2, 0, 0)$ и, следовательно, $\mathrm{rank}(b, A(0)b, A^2(0)b) = 2$, т. е. к системе (6.6) не применима теорема о локальной управляемости по первому приближению.

Легко видеть, что функции

$$x = \gamma_+(t) = (t^7/56, t^2/2, t)^*\,, \quad x = \gamma_-(t) = -\gamma_+(t) = -(t^7/56, t^2/2, t)^*,$$

соответственно являются решениями уравнений

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)\,, \quad \dot{x} = f_0(x) - f_1(x),$$

удовлетворяющих начальному условию $x(0) = 0$.

Поскольку $s(x) \doteq \det(f_0(x), f_1(x), f_2(x)) = -x_2^3$, то очевидно, что неравенство $s(\gamma_-(t))s(\gamma_-(t)) = -t^{12}/64 < 0$ справедливо при всех $t \neq 0$. Тогда теореме (6.1) система (6.6) является устойчиво управляемой.

Глава 3. Глобальная устойчивая управляемость

Данная глава посвящена исследованию глобальной устойчивой управляемости системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U.$$

Существенным отличием данной главы будет то, что здесь будут рассматриваться позиционные измеримые управления $u : \mathbb{R}^n \to U$. поэтому прежнее определение решения данной системы, как решение в смысле Каратеодори здесь не пригодно. Вводится определение решения системы в смысле А. Ф. Филиппова.

Получены достаточные условия глобальной устойчивой управляемости, глобальной N-управляемости, и глобальной управляемости данной системы.

Построен пример глобально устойчиво управляемой системы с непрерывным позиционным управлением.

§7. Вспомогательные утверждения

Л е м м а 7.1 ([46]). *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — ограниченная измеримая функция. Для каждого $x \in \operatorname{cl} D$ обозначим $F(x_0)$ — множество всех предельных значений $f(x)$ при $x \to x_0$, дополненное значением $f(x_0)$ в случае $x_0 \in D$. Тогда многозначные функции $F(x)$ и $\operatorname{conv} F(x)$ полунепрерывны сверху в D.*

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.1}$$

Пусть вектор-функция f определена и измерима в области $G \subset \mathbb{R}^n$ и для каждой ограниченной замкнутой подобласти $D \subset G$ существует такое конечное число $\lambda = \lambda(D) \geqslant 0$, что $|f(x)| \leqslant \lambda$ при почти всех $x \in D$. Пусть далее, $F(x_*)$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(x)$, когда $x \to x_*$, пробегая окрестность точки x_*, т. е.

$$F(x_*) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \operatorname{cl} \operatorname{conv}\{f(O_\delta^n(x_*)) \backslash N\}$$

(пересечение берется по всем множествам N меры нуль и по всем $\delta > 0$). Тогда по лемме 7.1 функция $x \to F(x)$ полунепрерывна сверху в G.

О п р е д е л е н и е 7.1 ([46]). Пусть I — связное подмножество $\mathbb{R}$. Абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, определенная на I называется решением (в смысле А. Ф. Филиппова) системы (7.1), если она абсолютно непрерывна и почти всюду на I имеет место включение

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.2}$$

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые свойства многозначных отображений.

Л е м м а 7.2 ([46]). *Пусть D – некоторая область в $\mathbb{R}^n$, а $x \to F(x) \subset \mathbb{R}^n$ – многозначная функция. Если для каждого $x \in D$ множество $F(x)$ непусто, компактно и многозначная функция $x \to F(x)$ полунепрерывна сверху в D (непрерывна в D), то и функция $F(x) \doteq \operatorname{conv} F(x)$ также полунепрерывна сверху в D (соответственно непрерывна в D).*

Л е м м а 7.3 ([46]). *Пусть область* $D \subset \mathbb{R}^n$, *а функция* $x \to F(x)$ *ограничена в окрестности каждой точки* $x \in \operatorname{cl} D$. *Тогда для того чтобы многозначная функция* $x \to F(x)$ *была полунепрерывна сверху в* $\operatorname{cl} D$ *необходимо и достаточно, чтобы ее график* Γ *был замкнутым множеством.*

Л е м м а 7.4 ([46]). *Пусть* $\operatorname{cl} D$ *замыкание области* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Пусть в* $\operatorname{cl} D$ *функция* $x \to F(x)$ *непрерывна, ограничена и удовлетворяет локальному условию Липшица по* x. *Тогда для любого решения* $x_0(t)$, $t \in [0, \vartheta]$ *включения*

$$\dot{x} \in F_0(x),$$

где $F_0(x) \doteq \operatorname{conv} F(x)$, *существует последовательность* $x_k(t)$, $t \in [0, \vartheta]$ *решений включения*

$$\dot{x} \in F(x),$$

сходящаяся к $x_0(t)$ *равномерно на данном отрезке* $[0, \vartheta]$.

Будем говорить, что многозначная функция $x \to F(x)$ удовлетворяет в области $D \subset \mathbb{R}^n$ *основным условиям*, если при всех $x \in D$ множество $F(x)$ непусто, компактно,выпукло и функция $F(x)$ полунепрерывна сверху в D.

Пусть многозначная функция $x \to F(x) \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет основным условиям в $\mathbb{R}^n$. Через Ψ_+ обозначим положительную полутраекторию решения $x = \psi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)). \tag{7.3}$$

О п р е д е л е н и е 7.2 ([46]). Точка $q \in \mathbb{R}^n$ называется ω-предельной точкой траектории Ψ_+, если существует такая последовательность $t_i \to \infty$, что $\psi(t_i)$ стремится к q при $t_i \to \infty$. Множество всех ω-предельных точек траектории Ψ_+ называется ω-предельным множеством траектории Ψ_+ и обозначается $\Omega(\Psi_+)$.

Легко видеть, что:

а) $\Omega(\Psi_+) \subset \operatorname{cl} \Psi_+, \quad \Omega(\Psi_+) = \operatorname{cl} \Omega(\Psi_+)$;

б) $\Omega(\Psi_+) = \varnothing$ в том и только том случае, если $\lim\limits_{t\to\infty} |\psi(t)| = \infty$;

в) множество $\Omega(\Psi_+)$ — ограничено если и только если траектория Ψ_+ содержится в ограниченной области;

г) если множество $\Omega(\Psi_+)$ ограничено, то оно связно и

$$\lim_{t\to\infty} \rho(\psi(t), \Omega(\Psi_+)) = 0.$$

Л е м м а 7.5 ([46]). *Если $\Omega(\Psi_+)$ не имеет общих точек с траекторией Ψ_+, то:*

а) Ψ_+ содержится в одной из компонент G_1 открытого множества $\mathbb{R}^n \setminus \Omega(\Psi_+)$;

б) $\Omega(\Psi_+)$ нигде не плотно;

в) $\Omega(\Psi_+) = \partial G_1$, т. е. $\Omega(\Psi_+)$ является границей области G_1.

О п р е д е л е н и е 7.3 ([46]). Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется минимальным для включения (7.3), если оно непусто, замкнуто, состоит из целых траекторий (т. е. через каждую точку $p \in M$ проходит хотя бы одна траектория $\Psi \doteq \{x = \psi(t)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$ включения (7.3), содержащаяся в M) и не содержит никакого подмножества $M_0 \neq M$, обладающего теми же свойствами.

Т е о р е м а 7.1 ([46]). *Если $\Omega(\Psi)$ непусто и ограничено, то оно содержит минимальное множество.*

О п р е д е л е н и е 7.4 ([3]). Непрерывно дифференцируемая
функция $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется бесконечно большой, если:

1. $v(0) = 0$, $v(x) > 0$ для всех $x \neq 0$;

2. для любого $a > 0$, существует такое $r > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $|x| > r$, следует $v(x) > a$.

Нетрудно заметить, что для любого неотрицательного числа c, множество $\{x \in \mathbb{R}^n :\ v(x) \leqslant c\}$ ограничено в $\mathbb{R}^n$. Действительно, иначе для любого положительного числа r нашлась бы такая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, что $|x_0| > r$ и $v(x_0) \leqslant c$, а это противоречит определению.

§8. Достаточные условия глобальной устойчивой управляемости

Здесь получены достаточные условия глобальной управляемости систем общего вида.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x,u), \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times U, \tag{8.1}$$

где $U \subset \mathbb{R}^m$, и соответствующее ей, дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \tag{8.2}$$

где $F(x) = f(x,U)$.

Всюду в дальнейшем, если это не оговорено особо, будем предполагать, что:

а) множество U — непусто связно компактно и $0 \in \operatorname{int} U$;

б) $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n \times U)$, $f(0,0) = 0$, а многозначная функция $x \to F(x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по x.

Непосредственно из этих условий следует, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ множество $F(x)$ непусто связно и компактно, а многозначная функция $x \to F(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$.

Приведем известные следующие утверждения о глобальной управляемости:

[34] *Пусть для любых x, x_0 ($|x| \cdot |x_0 = 0|$, $x \neq x_0$) найдется такое $u \in U$, что $\langle f(x,u), x - x_0 \rangle < 0$. Тогда система глобально управляема с помощью кусочно-постоянного управления.*

[19]*Пусть $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n \times U)$ и $\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$, где*

$$A \doteq \Big(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\Big)_{(0,0)}, \quad B \doteq \Big(\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\Big)_{(0,0)}$$

Предположим, что существуют бесконечно большая функция $v(x)$ и непрерывно дифференцируемое позиционное управление $u : \mathbb{R}^n \to U$ удовлетворяющие условию

$$\Big\langle \frac{\partial v(x)}{\partial x}, f(x,u(x)) \Big\rangle \leqslant 0, \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда множество управляемости D_∞ системы совпадает с $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 8.1. *Пусть система* (8.1) *устойчиво управляема. Если существуют измеримая по Борелю функция* $u : \mathbb{R}^n \to U$ *и бесконечно большая функция* $v(x)$, *такие, что*

$$\dot{v} \doteq \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}, f(x, u(x)) \right\rangle \leqslant 0 \tag{8.3}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, *причем множество* $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \ : \ \dot{v} = 0\}$ *не содержит целых траекторий системы*

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \tag{8.4}$$

то система (8.1) *глобально устойчиво управляема.*

Т е о р е м а 8.2. *Пусть система* (8.1) *локально управляема. Если существуют измеримая по Борелю функция* $u : \mathbb{R}^n \to U$ *и бесконечно большая функция* $v(x)$, *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *удовлетворяющие условию* (8.3), *причем множество* $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \ : \ \dot{v} = 0\}$ *не содержит целых траекторий системы* (8.4), *то система* (8.1) *глобально управляема.*

Т е о р е м а 8.3. *Пусть система* (8.1) N*-управляема. Если существуют измеримая по Борелю функция* $u : \mathbb{R}^n \to U$ *и бесконечно большая функция* $v(x)$, *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *удовлетворяющие условию* (8.3), *причем множество* $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \ : \ \dot{v} = 0\}$ *не содержит целых траекторий системы* (8.4), *то система* (8.1) *глобально* N*-управляема.*

Заметим, что у теоремы 8.1 такое же соотношение с процитированными выше утверждениями о глобальной управляемости, как и соотношение между второй теоремой А. М. Ляпунова [20] и теоремой Барбашина-Красовского [3] о глобальной устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $f(0) = 0$, т. е. существенно ослаблены условия накладываемые на функцию $v(x)$. Ниже приведен пример в котором с помощью теоремы 8.2 сравнительно несложно доказывается глобальная управляемость, а при применении процитированных теорем о глобальной управляемости возникают существенные трудности.

Прежде чем перейти к доказательств теорем докажем следующие утверждения.

Л е м м а 8.1. *Пусть система* (8.1) *управляема, а функция* $F(x)$ *удовлетворяет основным условиям. Если существует бесконечно большая функция* $v(x)$, *для которой верхняя производная* $v^{\circledast}(x)$ *в силу системы* (8.1) *удовлетворяет неравенству*

$$v^{\circledast}(x) \doteq \max_{u\in U}\Big\langle \frac{\partial v}{\partial x}, f(x,u)\Big\rangle \leqslant 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, *причем множество* $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \ : \ v^{\circledast}(x) = 0\}$ *не содержит целых траекторий включения* (8.2), *то система* (8.1) *глобально устойчиво управляема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко заметить, что система (8.1) устойчиво управляема. Действительно, поскольку система (8.1) управляема, то ее множество управляемости D_∞ содержит некоторый замкнутый шар $\mathrm{cl}\, O^n_r$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество $M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ v(x)^{\circledast} \leqslant \delta\}$, где $\delta = \min_{x\in S^n_\varepsilon} v(x)$. Очевидно, что $M_\delta \subset \mathrm{cl}\, O^n_r$. Поскольку $0 \in M_\delta$, то пересечение $M_\delta \bigcap \mathrm{cl}\, O^n_r$ содержит некоторый замкнутый шар $\mathrm{cl}\, O^n_{\delta_1}$. Тогда для любого $x_0 \in \mathrm{cl}\, O^n_{\delta_1}$ существует допустимая траектория системы (8.1) с началом в точке x_0 и концом в нуле, которая, очевидно, никогда не выйдет за пределы множества M_δ, а следовательно не выйдет и за пределы шара O^n_ε, т. е. система (8.1) устойчиво управляема.

Теперь для доказательства глобальной устойчивой управляемости достаточно показать, что любая траектория системы (8.1) (а следовательно и включения (8.2)), выходящая из произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, за конечное время достигнет окрестности $\mathrm{cl}\, O^n_r$.

Пусть точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – фиксирована, а Γ – траектория некоторого решения $x = x(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющего начальному условию $x(0, x_0) = x_0$. Тогда $v(t) = v(x(t, x_0))$ — непрерывная, дифференцируемая почти всюду на $\mathbb{R}_+$, функция, которая в каждой точке своей дифференцируемости удовлетворяет условию

$$\frac{dv(x(t,x_0))}{dt} \leqslant v^{\circledast}(x(t,x_0)) \leqslant 0,$$

т. е. функция $v(x(t, x_0))$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$. Следовательно траектория Γ содержится в компакте $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ v(x) \leqslant c_0\}$, где $c_0 = v(x_0)$.

Покажем, что функция $v(x(t, x_0))$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Предположим, что это не так. Тогда в силу монотонности функции $v(x(t, x_0))$ существует

$$\inf_{t\in[0,\infty)} v(x(t,x_0)) = c_1 > 0. \qquad (8.5)$$

Следовательно $\Gamma \subset \{x \in \mathbb{R}^n: \ c_1 \leqslant v(x) \leqslant c_0\}$. Так как множество $\{x \in \mathbb{R}^n: \ c_1 \leqslant v(x) \leqslant c_0\}$ компактно, то ω-предельное множество $\Omega(\Gamma)$ непусто, связно, компактно, и в силу леммы 7.5 и условия (8.5) выполнено следующее: $\Omega(\Gamma) \subset \{x \in \mathbb{R}^n: \ v(x) = c_1\}$. Тогда по теореме 7.1 множество $\Omega(\Gamma)$ содержит минимальное множество, которое по определению состоит из целых траекторий включения (8.2). Следовательно существует решение $x = \widehat{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, включения (8.2), траектория которого $\widehat{\Gamma}$ содержится в множестве $\{x \in \mathbb{R}^n: \ v(x) = c_1\}$. Откуда следует, что $dv(\widehat{x}(t))/dt = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$, и в силу того, что

$$\frac{dv(\widehat{x}(t))}{dt} \leqslant v^{\circledast} \leqslant 0\,, \quad \text{то} \quad \widehat{\Gamma} \subset \{x \in \mathbb{R}^n: \ v^{\circledast}(x) = 0\}.$$

Получили противоречие с условием леммы. Следовательно функция $v(x(t, x_0))$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Но это означает, что решение $x(t, x_0)$ также стремится к нулю при $t \to \infty$. Тогда существует такое конечное время $\vartheta > 0$, что $x(\vartheta, x_0) \in O_r^n$, т. е. решение $x(t, x_0)$ за время $\vartheta < \infty$ достигает области управляемости. Поскольку точка x_0 выбрана произвольно, то система (8.1) глобально устойчиво управляема.

С л е д с т в и е 8.1. *В условиях леммы 8.1 для каждого* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *любое решение* $x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *системы* (8.1), *удовлетворяющее начальному условию* $x(0) = x_0$, *стремится к нулю при* $t \to \infty$.

Л е м м а 8.2. *Пусть система* (8.1) *устойчиво управляема. Если существует бесконечно большая функция* $v(x)$, *для которой нижняя производная* $v_{\circledast}(x)$ *в силу системы* (8.1) *удовлетворяет неравенству*

$$v_{\circledast}(x) \doteq \min_{u \in U} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}, f(x, u) \right\rangle \leqslant 0 \tag{8.6}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, *причем множество* $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}: \ v_{\circledast}(x) = 0\}$ *не содержит целых траекторий включения*

$$\dot{x} = F_0(x), \quad \text{где} \quad F_0(x) \doteq \operatorname{conv} f(x, U), \tag{8.7}$$

то система (8.1) *глобально устойчиво управляема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система (8.1) устойчиво управляема, следовательно множество управляемости системы содержит замкнутый шар $\mathrm{cl}\, O^n_\varepsilon$. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется такая допустимая траектория $\Gamma \doteq \{x = x(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ системы (8.1), что $x(0) = x_0$ и $x(\vartheta) = x_1 \in \mathrm{cl}\, O^n_\varepsilon$ при некотором $\vartheta > 0$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ произвольная фиксированная точка. Тогда множество $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ v(x) \leqslant c\}$, где $c = v(x_0)$ компактно в $\mathbb{R}^n$, а многозначная функция $F(x)$ ограничена и непрерывна на этом множестве. Так как U — компакт, то минимум нижней производной $v_{\circledast}(x)$ достигается на некотором компакте $U_1(x) \subset U$. Обозначим $F_1(x) = f(x, U_1(x))$. Тогда для всех $p \in F_1(x)$ справедливо неравенство

$$v_*(x) = \dot v \doteq \Big\langle \partial v/\partial x, p \Big\rangle \leqslant 0. \tag{8.8}$$

Замкнув график G_1 многозначной функции $F_1(x)$, получим график G_2 многозначной функции $F_2(x)$, полунепрерывной сверху по лемме 7.2. Так как $F(x)$ непрерывна, то ее график G замкнут, поэтому из условия $G_1 \subset G$ следует $G_2 = \mathrm{cl}\, G_1 \subset G$, т. е. $F_2(x) \subset F(x)$. Так как левая часть неравенства (8.8) непрерывна по переменным x и p, то для всех $p \in F_2(x)$ неравенство (8.8) также справедливо.

При фиксированных x линейное по p неравенство (8.8) выполняется для тех и только тех p, которые принадлежат некоторому замкнутому полупространству $P(x)$. Значит $F_2(x) \subset P(x)$, а следовательно $H(x) = \mathrm{conv}\, F_2(x) \subset P(x)$, т. е. неравенство (8.8) справедливо для всех $p \in H(x)$. Тогда по лемме 7.1 функция $H(x)$ полунепрерывна сверху, т. е. $H(x)$ удовлетворяет основным условиям, причем верхняя и нижняя производные функции $v(x)$ в силу включения

$$\dot x \in H(x) \tag{8.9}$$

совпадают, т. е. $\max\limits_{p\in H(x)} \Big\langle \dfrac{\partial v}{\partial x}, p \Big\rangle = \min\limits_{p\in H(x)} \Big\langle \dfrac{\partial v}{\partial x}, p \Big\rangle = \dot v$. По следствию 8.1 каждое решение $x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ включения (8.9) стремится к нулю при $t \to \infty$. Так как $H(x) \subset F_0(x)$, то каждое решение включения (8.9) является одновременно и решением включения (8.7). Следовательно, для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существует время $\vartheta :\ 0 < \vartheta < \infty$ и решение $x(t)$, $t \in [0, \vartheta]$ включения (8.7) удовлетворяющее условиям: $x(0) = x_0$, $|x(\vartheta)| \leqslant \dfrac{r}{2}$. Поскольку $F_0(x) = \mathrm{conv}\, f(x, u)$, а функция $F(x) = f(x, u)$ непрерывна, ограничена на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n :\ v(x) \leqslant c\}$, где $c = v(x_0)$, и удовлетворяет условию Липшица, то по лемме 7.4 существует последовательность $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $t \in [0, \vartheta]$, решений системы

(8.1), которая сходится к решению $x(t)$, $t \in [0,\vartheta]$ включения (8.7) равномерно на отрезке $[0,\vartheta]$. Следовательно найдется такой номер $k_0 \in \mathbb{N}$, что $|x_{k_0}(t) - x(t)| \leqslant \dfrac{r}{2}$ для всех $t \in [0,\vartheta]$. Откуда следует, что $|x_{k_0}(\vartheta)| \leqslant |x_{k_0}(\vartheta) - x(\vartheta)| + |x(\vartheta)| \leqslant \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2} = r$ и значит система (8.1) глобально устойчиво управляема.

С л е д с т в и е 8.2. *Пусть система* (8.1) *устойчиво управляема. Если существуют полунепрерывная сверху функция* $x \to \widehat{F}(x)$ *и бесконечно большая функция* $v(x)$*, удовлетворяющие условиям:*

а) при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ *множество* $\widehat{F}(x)$ *замкнуто и* $\widehat{F}(x) \subset F(x)$;

б) $\dot{v} \doteq \left\langle \dfrac{\partial v}{\partial x}, p \right\rangle \equiv \alpha(x) \leqslant 0$, *для всех* $p \in \widehat{F}(x)$, *(т. е. производная функции* $v(x)$ *в силу включения* $\dot{x} \in \widehat{F}(x)$ *определена однозначно и неположительна для всех* $x \in \mathbb{R}^n$*);*

в) множество $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \colon \ \dot{v} = 0\}$ *не содержит целых траекторий включения* $\dot{x} \in \operatorname{conv} \widehat{F}(x)$, *то система* (8.1) *глобально устойчиво управляема.*

Л е м м а 8.3 ([46]). *Пусть функция* $\widehat{f}(x,u)$ *однозначна и непрерывна в* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. *Если многозначная функция* $x \to U(x) \subset \mathbb{R}^m$ *в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *ограничена и полунепрерывна сверху, то функция* $\widehat{F}(x) = \widehat{f}(x, U(x))$ *ограничена и полунепрерывна сверху в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 8.4. *Пусть система* (8.1) *устойчиво управляема. Если существуют полунепрерывная сверху функция* $x \to Y(x) \subset U$ *и бесконечно большая функция* $v(x)$*, удовлетворяющие условиям:*

а) при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ *множество* $Y(x)$ *непусто и замкнуто;*

б) $\dot{v} \doteq \left\langle \dfrac{\partial v}{\partial x}, p \right\rangle \equiv \alpha(x) \leqslant 0$, *для всех* $p \in f(x, Y(x))$, *(т. е. производная функции* $v(x)$ *в силу включения* $\dot{x} \in f(x, Y(x))$ *определена однозначно и неположительна для всех* $x \in \mathbb{R}^n$*);*

в) множество $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \colon \ \dot{v} = 0\}$ *не содержит целых траекторий включения* $\dot{x} \in \operatorname{conv} f(x, Y(x))$.

Тогда система (8.1) *глобально устойчиво управляема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно следует из леммы 8.3 и следствия 8.2.

Как следствие из данной теоремы, совершенно очевидна справедливость теоремы 8.1.

Заметим, что в предыдущих утверждениях условие, что система (8.1) устойчиво управляема можно заменить на условие управляемости или условие N-управляемости. Тогда получим аналогичные утверждения для глобальной управляемости и глобальной N-управляемости т.е. справедливы теоремы 8.2 и 8.3.

П р и м е р 8.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(x_1) + u, \end{cases} \tag{8.10}$$

где $u \in [-1, 1]$, $f(x_1) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $x_1 f(x_1) > 0$ для всех $x_1 \neq 0$, причем $\int\limits_0^\infty f(s)ds$, $\int\limits_0^{-\infty} f(s)ds$ — расходятся.

Легко видеть, что система (8.10) является устойчиво управляемой. Действительно, т.к. $\det(b, Ab) \neq 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то система первого приближения для системы (8.10) является вполне управляемой, а следовательно и система (8.10) является устойчиво управляемой.

Легко заметить, что функция $v(x) = x_2^2 + 2\int\limits_0^{x_1} f(s)ds$ является первым интегралом системы (8.10) при $u \equiv 0$. Построим позиционное управление

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_2 \leqslant -1, \\ -x_2, & \text{если} \quad |x_2| < 1, \\ -1, & \text{если} \quad x_2 \geqslant 1, \end{cases}$$

и рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(x_1) + u(x), \end{cases} \tag{8.11}$$

Легко видеть, что производная

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(8.11)} = 2x_2 u(x) \leqslant 0$$

для всех $x_2 \neq 0$. Однако, поскольку при $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$ вектор скорости $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)^* = (0, -f(x_1))^* \neq 0$, то множество $x_2 = 0$ не содержит целых траекторий системы (8.11).

И поскольку система (8.10) является устойчиво управляемой, то по теореме 8.1 система (8.10) является глобально устойчиво управляемой.

Список литературы

1. А р н о л ь д В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.

2. А р н о л ь д В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 240 с.

3. Б а р б а ш и н Е. А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970.–240с.

4. Б у т к о в с к и й А. Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. – М.: Наука, 1985. – 136 с.

5. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1971. – 508 с.

6. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М. Особые оптимальные управления.— М.: Наука, 1973. – 256 с.

7. Е м е л ь я н о в С. В., К о р о в и н С. К., М а м е д о в И. Г., Н и к и т и н С. В. Критерии управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях // Докл. АН СССР. – 1986. – **290**. – Ѓ 1. – С.18–22.

8. Зорич В. А. Математический анализ. Часть 1. — М.: Наука, 1981. – 544 с.

9. З е м л я к о в а Л. С. Управляемость нелинейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения (качественная теория). – Рязань. – 1995. – С.64–71.

10. И в а н о в А. Г. Т о н к о в Е. Л. О равномерной локальной управляемости линейной системы // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**. – Ѓ 9. – С. 1499–1507.

11. И о ф ф е А. Д., Т и х о м и р о в В. М. Теория экстремальных задач. – М., 1974.

12. К а л м а н Р. Е. Об общей теории систем управления. // Труды I Международного конгресса ИФАК. Изд-во АН СССР. – 1961. – **2**. – С. 521-547.

13. К а р а с е в И. П. О существовании области достижимости.// Дифференц. уравнения – 1967. –**3**. – Ѓ 12.

14. К а р а с е в И. П. Об эффективности определения ґ управляемость в маломЄ для исследования управляемости систем дифференциальных уравнений.// Труды РРТИ – 1975. – Ґ 62.

15. К о п е й к и н а Т. Б. К необходимым условиям управляемости нелинейных систем в критическом случае // "Ин-т мат. АН БССР, препр." – 1985. – Ґ 27/236. – 44 с.

16. К о п е й к и н а Т. Б. О локальной управляемости нелинейных систем в критическом случае // Весцi АН БССР, Сер. фiз.-мат. наук. – 1987. – Ґ 27/236. – С.8–15.

17. К р е й н М. Г., Н у д е л ь м а н А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.

18. К у л т ы ш е в С. Ю., Т о н к о в Е. Л. Управляемость линейной нестационарной системы // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**. – Ґ 7. – С. 1210–1216.

19. Л и Э. М., М а р к у с Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. – 576 с.

20. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: ОНТИ, 1950.

21. М а с т е р к о в Ю. В. Об устойчивой локальной нуль-управляемости систем с квадратичной нелинейностью // Тезисы докл. междунар. матем. конфер.ґМоделирование и исследование устойчивости системЄ (Киев, май 1993 г.).

22. М а с т е р к о в Ю. В. Об устойчивой локальной нуль-управляемости систем с квадратичной нелинейностью на плоскости // Изв. отд. мат. и инф. – Ижевск. –1993. – Ґ 2. – С. 3–24.

23. М а с т е р к о в Ю. В. О глобальной устойчивой управляемости // Изв. отд. мат. и инф. – Ижевск. –1997. – Ґ 1(9). – С. 67–76.

24. М а с т е р к о в Ю. В. К вопросу об управляемости нелинейных систем // Тезисы докл. III Рос. унив.-акад. науч.-практ. конф. (Ижевск, УдГУ, апрель 1997).

25. М а с т е р к о в Ю. В. К вопросу о локальной управляемости нелинейных систем // Тезисы докл. междунар. матем. конфер. ґЕругинские чтенияЄ" (Витебск, май 1997).

26. Masterkov Ju. V. Controllability of Nonlinear Systems in Critical Case // Nonsmooth and Discontin. Probl. of Contr. and Optimiz. / Proceed. vol. from the IFAC Workshop (Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998).

27. Мастерков Ю. В. К вопросу о локальной управляемости в критическом случае // Изв. ВУЗ-ов. Математика. –1999. – Ѓ 2(441). – С. 68–74.

28. Митрохин Ю. С., Степанов А. Н. Критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений оптимального регулирования // Дифференциальные уравнения (качественная теория). – Рязань. – 1985. – С.61–70.

29. Николаев С. Ф. Тонков Е. Л. Позиционное управление нелинейной системой близкой к докритической. — Изв. Ин-та матем. и информ. – Ижевск. – 1998. – Ѓ 2 (13). – С. 3–26.

30. Nickolayev S. F., Tonkov E. L. Differentiability of Speed Function and Feedback Control of Linear Nonstationary System // Nonsmooth and Discontin. Probl. of Contr. and Optimiz. / A Proceed. vol. from the IFAC Workshop (Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998). – 1999. P. 177–186.

31. Николаев С. Ф. Тонков Е. Л. Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**. – Ѓ 1. – С. 107–115.

32. Никольский М. С. Об условиях второго порядка в задаче о нуль управляемости // Дифф. уравнения. – 1998. – **33**. – Ѓ 1. – С.137.

33. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. – 639 с.

34. Петров Н. Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифф. уравнения. – 1968. – **4**. – Ѓ 4. – С.1218–1232.

35. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифф. уравнения. – 1968. – **4**. – Ѓ 7. – С.606–617.

36. Петров Н. Н. Решение одной задачи теории управляемости Дифф. уравнения. – 1969. – **5**. – Ѓ 5. – С.962–963.

37. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.

38. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.

39. Родионова А. Г., Тонков Е. Л. О непрерывности функции быстродействия линейной системы в критическом случае // Изв. ВУЗ-ов. Математика. –1993. – Ґ 5(372). – С. 101–111.

40. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. — М.: Наука, 1991. – 216 с.

41. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Том 1. — М.: Изд-во Литература, 1953. – 346 с.

42. Тамура И. Топология слоений. — М.: Изд-во "Мир", 1979. – 320с.

43. Тонков Е. Л. Неосцилляция линейных систем. Связь с управляемостью и числом переключений // Тр. Московск. ин-та химич. машиностр. – 1972. – Вып. 39. – С. 32–37.

44. Тонков Е. Л. Неосцилляция и число переключений в линейной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**. – Ґ 12. – С. 2180–2185.

45. Тонков Е. Л. Управляемость нелинейной системы по линейному приближению // Прикл. матем и мех. – 1974. – Вып. 4. – С. 599–606.

46. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. – 224 с.

47. Jurdjevic V., Kupka I. Polynomial control systems // Math. Ann. – 1985. – **272**. – Ґ 3. – P.361–368.

48. Aeyels Dirk. Global controllability for smooth o nonlinear systems: a geometrical approach // SIAM J. Contr. and Optim. – 1985. – **23**. – Ґ 3. – P.462–465.

49. Crasse Kevin A. Structure of the boundary of the attainable in certain nonlinear systems // Math. Syst. Theory. – 1985. – **18**. – Ґ 1. – P.57–77.

50. Stefani Gianna. Lokal properties of nonlinear control systems // Sci. Pap. Inst. Techn. Cybern. Techn. Univ. Wrocl. – 1985. – Ґ 29 – P.219–226.

51. Kawski Matthias. A necessary condition for local controllability // Contemp. Math. – 1987. – **68**. – P.143–155.

52. Concalves J. Basto. Geometric conditions for local controllability // J. Differ. Equat. – 1991. – **89**. – Ґ 2. – P.388–395.

53. Remakischna Viswanath. Controlled invariance for singular distributions // SIAM J. Contr. and Optim. – 1994. – **32**. – Ґ 3. – P.790–807.

54. Zhao Jun, Zhang Siying. A sulficient condition for local strong controllability of affine systems // Math. appl. – 1993. – **6**. – Ґ 2. – P.207–211.