МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
*УДК 517.934*

РОДИНА ЛЮДМИЛА ИВАНОВНА

# О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор Е.Л. Тонков

Ижевск — 2001 г.

## Оглавление

## Введение

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы управляемости линейных и нелинейных нестационарных систем

$$\dot{x} = A(t)x + ub(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

$$\dot{x} = f_0(x,t) + uf_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad |u| \leqslant 1. \tag{0.2}$$

Проблемы управляемости динамических систем, интенсивно изучаемые с конца 50-х годов прошлого столетия Н. Н. Красовским [21], [22], Р. В. Гамкрелидзе [6], [7], Р. Е. Калманом [13], [14], [15], Р. Ф. Габасовым [3], Ф. М. Кирилловой [4], [5] и многими другими российскими и иностранными математиками [1], [23], [26], [42], [50], не потеряли своей актуальности и сейчас. К настоящему моменту времени вопросы управляемости линейных систем и управляемости нелинейных систем по линейному приближению хорошо изучены и достаточно полно освещены во многих книгах и статьях (см. например [10], [21], [26], [11], [12], [25], [35], [36], [46], [47], [48], [52], [54], [58]).

Для нелинейных же систем вопрос об управляемости, в частности исследование локальной управляемости, рассмотрен в основном для автономных систем. Данной тематике посвящены работы [2], [9], [16], [17], [18], [19], [20], [24], [27], [28], [29], [33], [37], [34], [38], [39], [40], [51], [53], [55], [56], [59], [60].

Особый интерес представляет исследование локальной управляемости в, так называемом, ґкритическом случаеЄ (т. е. в случае, когда система линейного приближения для системы (0.2) не является локально управляемой). Именно критические случаи доставляют массу интересных эффектов пограничной управляемости. Например, показано, что система может быть локально управляемой и при этом не являться устойчиво управляемой (см. ниже). Целью данной работы является изучение условий локальной управляемости и устойчивой управляемости системой (0.2) в критическом случае. Специальное исследование предпринято для системы второго порядка. Построены примеры управляемых систем вида (0.2), для которых система линейного приближения не является локально управляемой.

Работа состоит из введения, трех глав, восьми параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы.

Перечислим основные результаты диссертации.

В первой главе рассматриваются линейные нестационарные системы вида (0.1). В первом параграфе приведены основные определения и известные теоремы о полной управляемости линейных систем.

В качестве *допустимых управлений* системы (0.1) берутся всевозможные ограниченные измеримые функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

*Допустимым решением* системы (0.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, которая почти всюду на отрезке $[t_0, t_1]$ удовлетворяет системе (0.1) при некотором допустимом управлении $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Состояние $x_0$ системы (0.1) называется *управляемым на отрезке* $[t_0, t_1]$, если найдется допустимое решение $x(t) = x(t, u(\cdot))$ системы (0.1), удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$. Система (0.1) называется *вполне управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если все состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент $t_0$ управляемы на отрезке $[t_0, t_1]$.

Линейное подпространство $L(t_0, t_1)$ в $\mathbb{R}^n$ называется *пространством управляемости* системы (0.1) на отрезке $[t_0, t_1]$, если в него входят все точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует допустимое решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ такое, что $x(t_1, t_0, x_0) = 0$.

Сформулируем достаточное условие полной управляемости для системы (0.1), приведенное в монографии Н. Н. Красовского [21]. Предполагается, что элементы матрицы $A(t)$ и вектора $b(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка, по крайней мере, в окрестности некоторой точки $t = t^*$ из отрезка $[t_0, t_1]$ (в точках $t = t_0$ или $t = t_1$ речь идет лишь о правых или левых производных соответственно). Рассматриваются векторы $q_k(t)$, определенные в окрестности точки $t^*$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$q_0(t) = b(t), \ldots, q_k(t) = A(t)q_{k-1}(t) - \dot{q}_{k-1}(t), \quad k = 1 \ldots n-1.$$

Т е о р е м а 0.1. ([21, с. 148]) *Пусть на отрезке* $[t_0, t_1]$ *можно указать точку* $t = t^*$, *в которой ранг матрицы*

$$K(t) = \{q_0(t) \ldots q_{n-1}(t)\} \tag{0.3}$$

*равен* $n$. *Тогда система* (0.1) *вполне управляема на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Во втором параграфе рассматриваются линейные нестационарные системы второго порядка

$$\dot{x} = A(t)x + ub(t), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{0.4}$$

Для данной системы $K(t) = (b(t), A(t)b(t) - \dot{b}(t))$. Приведены примеры, когда достаточное условие полной управляемости не выполнено, т. е. $\operatorname{rank} K(t) < 2$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, но система (0.4) вполне управляема на отрезке $[t_0, t_1]$. Здесь также построены пространства управляемости для линейных систем второго порядка

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + u\widehat{b}(t), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{0.5}$$

с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$.

В теоремах 0.2 и 0.3 приведены условия полной управляемости системы (0.5) в критическом случае, т. е. когда $\operatorname{rank} \widehat{K}(t) < 2$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 0.2. *Если* $\operatorname{rank} \widehat{K}(t) < 2$ *при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *и выполнено одно из перечисленных ниже условий* 1) — 5), *то система* (0.5) *не является вполне управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, *т. е.* $\dim \widehat{L}(t_0, t_1) \leqslant 1$.

1) $\widehat{b}_2(t) \neq 0$ *для всех* $t \in [t_0, t_1]$;

2) $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$;

3) $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$;

4) *найдутся точки* $\tau_1 \ldots \tau_k$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < \tau_{k+1} = t_1$, *что* $\widehat{b}(\tau_i) = 0$, *а в остальных точках* $(t_0, t_1)$ *функция* $\widehat{b}_2(t)$ *не обращается в нуль и* $\dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$ *имеет устранимые разрывы в моменты времени* $\tau_i$;

5) *найдутся замкнутое подмножество* $I \subset [t_0, t_1]$, *состоящее из конечного числа отрезков и точки*

$$\tau_1 \ldots \tau_k \in [t_0, t_1] \setminus I, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k < \tau_{k+1} = t_1, \quad \textit{что}$$

а) $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$ *на* $I$,

б) *для каждого* $t \in [t_0, t_1] \setminus I$, *не совпадающего ни с одной из точек* $\tau_0 \ldots \tau_{k+1}$, *функция* $\widehat{b}_2(t) \neq 0$,

в) $\widehat{b}_2(\tau_i) = 0$ *и отношение* $\dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$ *имеет устранимые разрывы в моменты времени* $\tau_i$,

г) *для любого* $\mu \in \partial I \setminus \{\{t_0\}, \{t_1\}\}$ *предел* $\displaystyle\lim_{t \to \mu, t \notin I} \frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)} = 0$.

Т е о р е м а 0.3. *Если* $\operatorname{rank}\widehat{K}(t) < 2$ *при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *и выполнено одно из перечисленных ниже условий* 1) — 3), *то система* (0.5) *вполне управляема на отрезке* $[t_0, t_1]$, *т. е.* $\dim \widehat{L}(t_0, t_1) = 2$.

1) *найдутся точки* $\tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ t_0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_1$ *такие, что на одном из интервалов* $\theta_0 = (\tau_0, \tau_1)$ *или* $\theta_1 = (\tau_1, \tau_2)$ *функция* $\widehat{b}_2(t)$ *не обращается в нуль, а на другом* $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \not\equiv 0$;

2) *найдутся точки* $\tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ t_0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_1$ *такие, что на одном из интервалов* $\theta_0 = (\tau_0, \tau_1)$ *или* $\theta_1 = (\tau_1, \tau_2)$ *функция* $\widehat{b}_2(t)$ *не обращается в нуль, предел* $\lim\limits_{t\to\tau_1} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)} \neq 0$, *а на другом интервале* $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_2(t) \not\equiv 0$;

3) *найдутся точки* $\tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ t_0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_1$, *что функция* $\widehat{b}_2(t)$ *не обращается в нуль на* $(\tau_0, \tau_2)$, *за исключением точки* $\tau_1$, $\widehat{b}_2(\tau_1) = 0$, *существуют пределы* $\lim\limits_{t\to\tau_1-0} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$, $\lim\limits_{t\to\tau_1+0} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$ *и выполнено соотношение*

$$\lim_{t\to\tau_1-0} \frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)} \neq \lim_{t\to\tau_1+0} \frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}\,.$$

Далее доказано, что преобразование Перрона, приводящее систему (0.1) (произвольного порядка) к линейной системе с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$, не меняет ранг матрицы $K(t)$ и не меняет размерность пространства управляемости $L(t_0, t_1)$.

Для формулировки следующего утверждения определим функцию $F : \mathbb{R}^2 \times (t_0, t_1) \times [0, \varepsilon) \to [-1, 1]$ следующим образом:

$$F(b, t, \Delta t) = \frac{b_1(t-\Delta t) b_1(t+\Delta t) + b_2(t-\Delta t) b_2(t+\Delta t)}{|b(t-\Delta t)||b(t+\Delta t)|}\,. \tag{0.6}$$

Т е о р е м а 0.4. *Пусть* $n = 2$, $\operatorname{rank} K(t) < 2$ *при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *и функция* $b(t)$ — *неособая на* $[t_0, t_1]$ (*т. е. не обращается в нуль за возможным исключением конечного числа точек отрезка* $[t_0, t_1]$).

*Если* $\lim\limits_{\Delta t\to 0} |F(b, t, \Delta t)| = 1$ *для всех* $t \in (t_0, t_1)$, *то* $\dim L(t_0, t_1) = 1$; *если найдется точка* $\tau \in (t_0, t_1)$, *что* $\lim\limits_{\Delta t\to 0} |F(b, \tau, \Delta t)| \neq 1$, *то* $\dim L(t_0, t_1) = 2$.

В третьем параграфе рассматривается линейная система произвольного порядка с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$ :

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + u\widehat{b}(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.7}$$

где $\widehat{A}(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}, M(n))$, $\widehat{b}(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Для системы (0.7) построим матрицу $\widehat{H}(t) = \{h_1(t) \dots h_n(t)\}$, где $h_n(t) = \widehat{b}(t)$, а векторы $h_k(t)$ при $k < n$ строим справа налево с помощью следующей процедуры:

если вектор $h_k(t)$ уже построен и его последняя координата $h_{kk}(t) \equiv 0$ при всех $t \in [t_0, t_1]$, то $h_{k-1}(t) = h_k(t)$;

если $h_{kk}(t) \neq 0$ при $t \in (t_0, t_1)$ (но не исключаются равенства $h_{kk}(t_0) = 0$ или $h_{kk}(t_1) = 0$) и функции $\dfrac{h_{1k}(t)}{h_{kk}(t)} \dots \dfrac{h_{k-1,k}(t)}{h_{kk}(t)}$ ограничены на интервале $(t_0, t_1)$, тогда на этом интервале построим вектор

$$g_k(t) \doteq \frac{h_k(t)}{h_{kk}(t)} = \operatorname{col}\left(\frac{h_{1k}(t)}{h_{kk}(t)} \dots \frac{h_{k-1,k}(t)}{h_{kk}(t)}, 1, 0 \dots 0\right),$$

у которого последние $n - k$ координат равны нулю. Если функция $h_{kk}(t) \equiv 0$, то $g_k(t) \doteq \dfrac{h_k(t)}{h^*_{kk}(t)}$, где через $h^*_{kk}(t)$ обозначена последняя координата вектора $h_k(t)$, тождественно не равная нулю.

Затем вектор $h_{k-1}(t)$ определяется равенством

$$h_{k-1}(t) = (\widehat{A}(t) - \widehat{a}_{kk}(t)E)g_k(t) - \dot{g}_k(t), \quad t \in (t_0, t_1). \tag{0.8}$$

Если функция $h_{kk}(t)$ обращается в нуль в некоторых изолированных точках $\tau_1 \dots \tau_{m_k}$, $(t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{m_k} < \tau_{m_k+1} = t_1)$, то вектор $h_{k-1}(t)$ определяем по формулам (0.8) на каждом из интервалов $(\tau_i, \tau_{i+1})$, где $i = 0 \dots m_k$. В том случае, когда $h_{kk}(t) \equiv 0$ на некоторых отрезках $I_j \subset [t_0, t_1]$, то на этих отрезках вектор $h_{k-1}(t)$ находится из равенства $h_{k-1}(t) = h_k(t)$, а для остальных точек множества $(t_0, t_1) \setminus \bigcup I_j$ вектор-функции $h_{k-1}(t)$ находятся по формулам (0.8).

Заметим, что построенная таким образом матрица $\widehat{H}(t)$ является верхней треугольной и ранг $\widehat{H}(t)$ равен количеству ненулевых диагональных элементов $h_{11}(t) \dots h_{nn}(t)$.

В теореме 0.5 показано, при каких условиях размерность пространства $\widehat{L}(t_0, t_1)$ системы (0.7) равна рангу $\widehat{K}(t)$. Здесь через $\widehat{K}(t)$ обозначена матрица, соответствующая системе (0.7) и удовлетворяющая (0.3).

Т е о р е м а 0.5. *Если при каждом $k = 1 \dots n$ либо $h_{kk}(t) \equiv 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$, либо $h_{kk}(t) \neq 0$ для любого $t$ из интервала $(t_0, t_1)$, то матрица $\widehat{K}(t)$ сохраняет ранг для всех $t \in (t_0, t_1)$ и*

$$\dim \widehat{L}(t_0, t_1) = \operatorname{rank} \widehat{K}(t) = \operatorname{rank} \widehat{H}(t).$$

В теоремах 0.6, 0.7 и 0.8 описана структура пространства управляемости $\widehat{L}(t_0, t_1)$ системы (0.7) с функциями $h_{kk}(t)$ различного вида.

Т е о р е м а 0.6. *Если при каждом $k = 1 \dots n$ либо $h_{kk}(t) \equiv 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$, либо функция $h_{kk}(t)$ не обращается в нуль для любого $t$ из интервала $(t_0, t_1)$, то пространство управляемости $\widehat{L}(t_0, t_1)$ является линейной оболочкой векторов $g_1(t_0 + 0) \dots g_n(t_0 + 0)$ и, следовательно, размерность пространства $\widehat{L}(t_0, t_1)$ совпадает с максимальным числом линейно независимых векторов из множества $g_1(t_0 + 0) \dots g_n(t_0 + 0)$.*

Т е о р е м а 0.7. *Предположим, что точки $\tau_1 \dots \tau_m$, где*

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} = t_1$$

*разбивают интервал $(t_0, t_1)$ на интервалы $(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0 \dots m$, на каждом из которых либо $h_{kk}(t) \neq 0$, либо $h_{kk}(t) \equiv 0$. Тогда пространство управляемости $\widehat{L}(t_0, t_1)$ является линейной оболочкой векторов*

$$X(\tau_0, \tau_i) g_1(\tau_i + 0) \dots X(\tau_0, \tau_i) g_n(\tau_i + 0), \quad i = 0 \dots m.$$

Т е о р е м а 0.8. *Пусть для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполнены следующие условия:*

а) *точки $\tau_1 \dots \tau_m$, где $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} = t_1$, разбивают интервал $(t_0, t_1)$ на интервалы $(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0 \dots m$, на каждом из которых либо $h_{kk}(t) \neq 0$, либо $h_{kk}(t) \equiv 0$.*

б) *функции $g_k(t)$ непрерывны или имеют устранимые разрывы (за возможным исключением конечного числа точек разрыва первого рода $\vartheta_1 \dots \vartheta_p$, в которых $g_k(\vartheta_i - 0) \neq g_k(\vartheta_i + 0)$ для некоторых $k = 1 \dots n$).*

*Тогда пространство управляемости $\widehat{L}(t_0, t_1)$ совпадает с линейной оболочкой векторов*

$$g_1(\vartheta_0 + 0) \dots g_n(\vartheta_0 + 0), X(\vartheta_0, \vartheta_i)\big(g_1(\vartheta_i + 0) - g_1(\vartheta_i - 0)\big) \dots$$
$$X(\vartheta_0, \vartheta_i)\big(g_n(\vartheta_i + 0) - g_n(\vartheta_i - 0)\big), \quad i = 1 \dots p.$$

Во второй главе изучаются условия локальной управляемости и устойчивой локальной управляемости нелинейной по фазовым координатам системы второго порядка в критическом случае, т. е. в случае, когда ранг матрицы $K(t)$, отвечающей линеаризованной системе, меньше двух для всех $t$ из отрезка $[t_0, t_1]$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x,t) + uf_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [-1,1]. \tag{0.9}$$

Предполагается, что $f_0(0,t) = 0$, $f_1(0,t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, и функции $f_0(x,t)$, $f_1(x,t)$ являются аналитическими функциями при $(x,t) \in \mathbb{R}^3$.

Здесь и всюду далее при изучении нелинейной системы (0.2) (и следовательно, системы(0.9)) под *допустимым управлением* мы будем понимать всякую измеримую функцию $t \to u(t)$ со значениями в множестве $U = [-1,1]$ (в отличие от допустимых управлений линейной системы (0.1), где допустимыми являются любые измеримые и ограниченные функции $t \to u(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$). Решения системы (0.2) (и системы(0.9)), отвечающие допустимым управлениям, будем по-прежнему называть *допустимыми решениями.*

О п р е д е л е н и е 0.1. Система (0.9) называется *локально управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждой точки $x_0 \in O^2_\varepsilon$ существует допустимое решение $x(t)$ системы (0.9) на отрезке $[t_0, t_1]$, удовлетворяющее условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$.

О п р е д е л е н и е 0.2. Система (0.9) называется *устойчиво локально управляемой* или просто *устойчиво управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждой точки $x_0 \in O^2_\delta$ существует допустимое решение $x(t)$ системы (0.9), удовлетворяющее условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, $|x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Система (0.9) называется *локально управляемой в точке* $t_0$, если она локально управляема на некотором отрезке $[t_0, t_1]$.

Система (0.9) называется *устойчиво локально управляемой в точке* $t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $t_1 > t_0$, что для каждой точки $x_0 \in O^2_\delta$ существует допустимое решение $x(t)$ системы (0.9), удовлетворяющее условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, $|x(t)| < \varepsilon$, где $t \in [t_0, t_1]$.

Наряду с системой (0.9) рассмотрим системы

$$\dot{x} = f_+(x,t) \doteq f_0(x,t) + f_1(x,t), \tag{0.10}$$
$$\dot{x} = f_-(x,t) \doteq f_0(x,t) - f_1(x,t), \tag{0.11}$$

отвечающие управлениям $u \equiv 1$ и $u \equiv -1$ соответственно и систему линейного приближения для системы (0.9)

$$\dot{y} = A(t)y + ub(t), \tag{0.12}$$

где $A(t) = \dfrac{\partial f_0(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}$, $b(t) = f_1(0,t)$.

Через $x = x_+(t,\tau)$ и $x = x_-(t,\tau)$ обозначим соответственно решения систем (0.10) и (0.11), удовлетворяющие условию $x_+(\tau,\tau) = x_-(\tau,\tau) = 0$, а через $\gamma_+(\tau)$ и $\gamma_-(\tau)$ обозначим траектории данных решений в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

*Интегральную поверхность,* образованную траекториями $\gamma_+(\tau)$, где $\tau \in \mathbb{R}$, обозначим $M_+$, а интегральную поверхность, образованную траекториями $\gamma_-(\tau)$, соответственно обозначим $M_-$, т. е.

$$M_+ \doteq \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \gamma_+(\tau), \quad M_- \doteq \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \gamma_-(\tau).$$

Аналогично, пусть $y_+(t,\tau)$ и $y_-(t,\tau)$ — решения системы линейного приближения (0.12), отвечающие управлениям $u \equiv 1$ и $u \equiv -1$ и удовлетворяющие условию $y_+(\tau,\tau) = y_-(\tau,\tau) = 0$, а $\zeta_+(\tau)$ и $\zeta_-(\tau)$ — траектории данных решений в $\mathbb{R}^3$. Определим интегральные поверхности

$$L_+ \doteq \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \zeta_+(\tau), \quad L_- \doteq \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \zeta_-(\tau).$$

Доказано, что *если $f_0, f_1 \in C^k(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, то для любого отрезка $[t_0,t_1]$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что пересечение цилиндрической окрестности $Ц_\varepsilon \doteq O^2_\varepsilon \times (t_0-\varepsilon, t_1+\varepsilon)$ с множествами $M_+$ и $M_-$ суть гладкие (класса $C^k$) двумерные интегральные многообразия систем (0.10) и (0.11) соответственно. Более того, окрестность $Ц_\varepsilon$ можно выбрать так, что каждое из многообразий $M_+$ и $M_-$ в отдельности делит область $Ц_\varepsilon$ на две непересекающиеся подобласти.*

*Далее, если* $\operatorname{rank} K(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}$, *то для любого отрезка* $[t_0, t_1]$ *найдется цилиндрическая окрестность* $Ц_\varepsilon$ *такая, что*

$$\mathcal{L}_+ \doteq L_+ \bigcap Ц_\varepsilon \equiv \mathcal{L}_- \doteq L_- \bigcap Ц_\varepsilon,$$

*причем* $L_0 \doteq \mathcal{L}_+$ *является гладким двумерным инвариантным многообразием системы* (0.12) *и, кроме того, для всех* $t \in [t_0, t_1]$ *имеют место равенства* $T_{(0,t)}M_+ = T_{(0,t)}M_- = T_{(0,t)}L_0$.

Показано, что многообразия $M_+$ и $M_-$ можно представить в виде

$$M_+ = \{(x,t) : \varphi_+(x,t) = 0\}, \quad M_- = \{(x,t) : \varphi_-(x,t) = 0\},$$

где функции $\varphi_-(x,t)$ и $\varphi_+(x,t)$ соответственно являются решением задачи Коши

$$\frac{\partial \varphi_\pm(x,t)}{\partial t} + \Big\langle \frac{\partial \varphi_\pm(x,t)}{\partial x}, f_\pm(x,t) \Big\rangle = 0, \quad \varphi_\pm(0,t) = 0.$$

Описаны различные случаи взаимного расположения многообразий $M_+$ и $M_-$. Очевидно, что $M_+$ и $M_-$ имеют общую прямую — ось $(Ot)$, но кроме оси $(Ot)$ они могут иметь и другие общие точки.

Скажем, что многообразия $M_+$ и $M_-$ *касаются без пересечения* в точке $(0,\tau)$ на оси $(Ot)$, если найдется окрестность $O^3_\varepsilon(0,\tau)$, что $\varphi_+(x,t) > 0$ или $\varphi_+(x,t) < 0$ для всех точек $(x,t)$ из $(O^3_\varepsilon(0,\tau) \bigcap M_-) \setminus (Ot)$.

Если $\operatorname{rank} K(t) \equiv 1$, то многообразия $M_+$ и $M_-$ в каждой точке оси $(Ot)$ имеют общую касательную плоскость, при этом они могут пересекаться в окрестности некоторой точки $(0,\tau)$, лежащей на оси $(Ot)$ или касаться без пересечения. Кроме того, $M_+$ и $M_-$ могут иметь точки ветвления. Точку $(0,\tau) \in \mathbb{R}^3$ назовем *точкой ветвления*, если через эту точку проходит хотя бы одна кривая пересечения многообразий $M_+$ и $M_-$, отличная от оси $(Ot)$.

В следующих теоремах получены достаточные и необходимые условия устойчивой управляемости системы (0.9).

Т е о р е м а 0.9. *Если найдется интервал* $I = (\tau_0, \tau_1) \subset (t_0, t_1)$ *такой, что функция*

$$t \to S_+(t,\tau) \doteq \det\Big(f_1(x_+(t,\tau),t), \frac{\partial x_+(t,\tau)}{\partial \tau}\Big)$$

*меняет знак в каждой точке* $t = \tau \in I$, *то система* (0.9) *устойчиво локально управляема на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Т е о р е м а 0.10. *Если во всех точках* $t = \tau \in (t_0, t_1)$ *функция* $t \to S_+(t, \tau)$ *не меняет знак и на* $(t_0, t_1)$ *нет точек ветвления, или если* $S_+(t, \tau) \equiv 0$ *при* $t \in [t_0, t_1]$, *то система* (0.9) *не является устойчиво локально управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Далее во второй главе рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих применение этих утверждений.

В третьей главе получены достаточные условия устойчивой управляемости нестационарной системы (0.2) произвольной размерности в случае, когда система линейного приближения не является вполне управляемой (следовательно, $\operatorname{rank} K(t) \leqslant n-1$ для всех $t \in \mathbb{R}$). Здесь

$$K(t) \doteq (q_1(t) \ldots q_n(t)),\ q_1(t) \doteq b(t),\ q_i(t) \doteq A(t)q_{i-1}(t) - \dot{q}_{i-1}(t),\ i = 2 \ldots n.$$

Множество $D(t_0, t_1)$ точек $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует такое допустимое управление $t \to u(t, x_0) \in [-1, 1]$, $t \in [t_0, t_1]$, что соответствующее ему решение $x = x(t, u(\cdot))$ системы (0.2) удовлетворяет условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, называется *множеством управляемости системы* (0.2) *на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Множество $\mathcal{D}(t_0, t_1)$ точек $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, что $x \in D(t, t_1)$, $t \in [t_0, t_1]$ называется *расширенным множеством управляемости системы* (0.2) *на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Аналогично через $G(t_0, t_1)$ и $\mathcal{G}(t_0, t_1)$ обозначим соответственно множество управляемости и расширенное множество управляемости на отрезке $[t_0, t_1]$ для системы

$$\dot{x} = A(t)x + ub(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leqslant 1 \tag{0.13}$$

линейного приближения, отвечающей нелинейной системе (0.9). Здесь $A(t) \doteq \dfrac{\partial f_0(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}$, $b(t) \doteq f_1(0, t)$ (отметим, что допустимыми управлениями здесь являются измеримые функции $t \to u(t)$ со значениями в множестве $U \doteq [-1, 1]$).

В седьмом параграфе рассмотрены геометрические свойства множеств управляемости линейной и нелинейной систем. Доказаны следующие утверждения.

*Пусть* $\operatorname{rank} K(t) = n-1$ *для всех* $t$ *из отрезка* $[t_0, t_1]$. *Тогда существуют* $\tau \in (t_0, t_1)$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что первые* $n-1$ *векторов* $q_1(t) \ldots q_{n-1}(t)$

*линейно независимы при каждом фиксированном* $t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ *как векторы в* $\mathbb{R}^n$.

*Если* $\operatorname{rank} K(t) = n - 1$ *для всех* $t \in [t_0, t_1]$, *то линейное подпространство* $\operatorname{Lin} G(t_0, t_1)$ *содержит векторы* $q_1(t_0) \dots q_n(t_0)$.

Основные результаты третьей главы сосредоточены в теоремах 0.11 и 0.12, в которых приведены достаточные условия устойчивой локальной управляемости системы (0.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ в предположении, что $\operatorname{rank} K(t) \leqslant n - 1$.

Т е о р е м а 0.11. *Пусть на отрезке* $[t_0, t_1]$ *найдется точка* $\tau$, *что* $\operatorname{rank} K(\tau) = n - 1$. *Тогда существуют окрестность* $O_\varepsilon^{n+1}(0, \tau)$ *и скалярная функция* $\varphi(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, *что:*

*а*) $\operatorname{col}\Big(\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_n}, \dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\Big)\Big|_{(0,\tau)} \neq 0;$

б) $\mathcal{M}^n \doteq \{(x, t) \in O_\varepsilon^{n+1}(0, \tau) \, : \, \varphi(x, t) = 0\} \subset \mathcal{D}(t_0, t_1)$.

*Далее, если при всех* $t \in (\tau, \tau + \varepsilon)$ *выполнено неравенство*

в) $\varphi(x_+(t, \tau), t)\varphi(x_-(t, \tau), t) < 0$,

*то система* (0.2) *устойчиво локально управляема на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Введем следующие обозначения

$$s_+(t, \tau) \doteq \det(f_+(x_+(t, \tau), t), q_{i_1}(\tau) \dots q_{i_{n-1}}(\tau)),$$
$$s_-(t, \tau) \doteq \det(f_-(x_-(t, \tau), t), q_{i_1}(\tau) \dots q_{i_{n-1}}(\tau)),$$

где через $q_{i_1}(\tau) \dots q_{i_{n-1}}(\tau)$ обозначены $n - 1$ линейно независимых векторов из векторов $q_1(\tau) \dots q_n(\tau)$.

Т е о р е м а 0.12. *Если найдутся* $\tau \in (t_0, t_1)$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что* $\operatorname{rank} K(\tau) = n-1$ *и* $s_+(t, \tau)s_-(t, \tau) < 0$ *при* $\tau < t < \tau+\varepsilon$, *то система* (0.2) *устойчиво локально управляема на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Приведены примеры применения данных утверждений.

Результаты диссертации опубликованы в работах [30], [31], [32], [44], [45].

Выражаю глубокую признательность Е. Л. Тонкову за постановку задачи и сделанные в процессе работы над диссертацией замечания. Выражаю также искреннюю благодарность Ю. В. Мастеркову за обсуждение диссертации и сделанные им ценные замечания и советы.

## Список основных обозначений

В работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности $n$;

$(\ )^*$ — операция транспонирования;

$x = \mathrm{col}(x_1 ... x_n)$ — вектор-столбец с компонентами $x_1 ... x_n$;

$\langle x, y\rangle \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1 ... x_n)$ и $y = (y_1 ... y_n)$;

$|x| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — абсолютная величина вектора $x$;

$O^n_\varepsilon(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| < \varepsilon\}$;

$O^n_\varepsilon \doteq O^n_\varepsilon(0)$;

$\partial G$ — граница множества $G$;

$\mathrm{int}\, G$ — внутренность множества $G$;

$\dim G$ — размерность множества $G$;

$\mathrm{Lin}\, G$ — линейная оболочка множества $G$;

$L(t_0, t_1)$ — пространство управляемости линейной системы на отрезке $[t_0, t_1]$;

$M(n, m)$ — пространство матриц размера $n \times m$ над полем $\mathbb{R}$;

$M(n) \doteq M(n, n)$;

$\mathbb{C}^k(A, B)$ — пространство $k$-раз непрерывно дифференцируемых функций из $A$ в $B$;

$\Big(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\Big)$ — $m \times n$ матрица, $i$-я строка которой составлена из частных производных $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, $j = 1 \dots n$, если $f(x) = ((f_1(x) \dots f_m(x))$ — $m$-мерная функция векторного аргумента $x \in \mathbb{R}^n$; если $m = 1$, то $\Big(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\Big) \doteq \mathrm{grad}\, f(x)$;

$M^k$ — многообразие размерности $k$;

$T_{x_0} M^k$ — касательное пространство к многообразию $M^k$ в точке $x_0$.

# Глава 1. Условия управляемости линейной нестационарной системы

В данной главе изучается свойство управляемости линейных систем в ґкритическомЄ случае, т. е. когда ранг матрицы $K(t)$ меньше $n$. Здесь

$$K(t) = \{q_0(t) \dots q_{n-1}(t)\},\ q_0(t) = b(t), \dots, q_k(t) = A(t)q_{k-1}(t) - \dot{q}_{k-1}(t),$$

$k = 1 \dots n-1$, $A(t)$ и $b(t)$ порождены линейной системой

$$\dot{x} = A(t)x + ub(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Известно, что достаточное условие полной управляемости ($\mathrm{rank} K(t) = n$), сформулированное в [21], не является необходимым. В главе приведены простые примеры, иллюстрирующие этот факт.

Во втором параграфе построены пространства управляемости для некоторых нестационарных линейных систем второго порядка. Доказаны теоремы, позволяющие определить, является ли система с верхней треугольной матрицей вполне управляемой при условии, что $\mathrm{rank}\, K(t) < 2$. Показано, что размерность пространства управляемости $L(t_0, t_1)$ и ранг матрицы $K(t)$ не меняются при преобразовании Перрона. Доказан эффективный критерий полной управляемости системы второго порядка с произвольной матрицей $A(t)$.

В третьем параграфе построены пространства управляемости $\widehat{L}(t_0, t_1)$ линейных нестационарных систем произвольного порядка с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$.

## §1. Основные определения и обозначения

В данном параграфе приводятся основные определения и известные теоремы об управляемости в нуль линейных нестационарных систем.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + uB(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $A(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}, M(n))$, $B(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}, M(n, r))$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Всевозможные измеримые функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ называются *допустимыми управлениями* системы (1.1). *Допустимым решением* системы (1.1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, которая почти всюду на отрезке $[t_0, t_1]$ удовлетворяет системе (1.1) при некотором допустимом управлении $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

О п р е д е л е н и е 1.2. 1) Состояние $x(t_0)$ системы (1.1) называется *управляемым в момент* $t_0$, если найдутся время $t_1 \geqslant t_0$ и допустимое решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее условию $x(t_1) = 0$.

2) Система (1.1) называется *вполне управляемой в точке* $t_0$, если все состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент $t_0$ управляемы.

3) Состояние $x(t_0)$ системы (1.1) называется *управляемым на отрезке* $[t_0, t_1]$, если найдется допустимое решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее условию $x(t_1) = 0$.

4) Система (1.1) называется *вполне управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если все состояния $x_0$ в момент $t_0$ управляемы на отрезке $[t_0, t_1]$.

Одним из первых результатов в теории управляемости линейных систем, по-видимому, является следующий критерий [14, 15].

Т е о р е м а 1.1. *Состояние* $x(t_0)$ *системы* (1.1) *управляемо тогда и только тогда, когда при некотором* $t_1$ *состояние* $x(t_0)$ *принадлежит области значений линейного оператора*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X(t_0, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0, s)ds. \tag{1.2}$$

Здесь звезда означает операцию транспонирования, $X(t,s)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$. Матрицу $W(t_0,t_1)$ (отождествляемую с линейным оператором (1.2)) называют матрицей Калмана. Если $W(t_0,t_1)$ имеет максимальный ранг (равный $n$) при некотором $t_1 > t_0$, то система (1.1) вполне управляема (на отрезке $[t_0,t_1]$).

Если система (1.1) стационарна (т. е. матрицы $A$ и $B$ не зависят от времени), то для полной управляемости данной системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n.$$

Этот результат был получен для системы с одним входом (т. е. при $r = 1$) в [13] и в общем случае — в [57].

Важным вкладом в исследование управляемости нестационарных линейных систем является монография Н. Н. Красовского [21]. Здесь доказано достаточное условие полной управляемости для системы (1.1) в случае, когда элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка, по крайней мере, в окрестности некоторой точки $t = t^*$ из отрезка $[t_0,t_1]$ (в точках $t = t_0$ или $t = t_1$ речь идет лишь о правых или левых производных соответственно).

Рассматриваются матрицы $Q_k(t)$, определенные в окрестности точки $t^*$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$Q_0(t) = B(t), \dots, Q_k(t) = A(t)Q_{k-1}(t) - \dot{Q}_{k-1}(t), \quad k = 1 \dots n-1.$$

Т е о р е м а 1.2. ([21, с. 148]) *Пусть на отрезке* $[t_0,t_1]$ *можно указать точку* $t = t^*$, *в которой ранг матрицы*

$$K(t) = \{Q_0(t) \dots Q_{n-1}(t)\} \tag{1.3}$$

*равен* $n$. *Тогда система* (1.1) *вполне управляема на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Напомним еще одно понятие, важное для дальнейших исследований.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пространство $L(t_0,t_1) \subset \mathbb{R}^n$ называется *пространством управляемости* системы (1.1) на отрезке $[t_0,t_1]$, если в него входят все точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует допустимое управление $[t_0,t_1] \to u(t,t_0,x_0)$, что соответствующее ему решение $x(t_1,t_0,x_0) = 0$.

Пространство $L(t_0, t_1)$ является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$. В случае, если $\dim L(t_0, t_1) = n$, система (1.1) является вполне управляемой на $[t_0, t_1]$. Нетрудно показать, что размерность пространства $L(t_0, t_1)$ равна рангу матрицы Калмана $W(t_0, t_1)$.

Для изучения структуры пространства управляемости $L(t_0, t_1)$ понадобится следующее утверждение (см. [43]). Сформулируем его в терминах данной работы.

Т е о р е м а 1.3. *Пусть система* (1.1) *не является вполне управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$. *Тогда найдутся целое* $p \geqslant 1$ *и перроновское преобразование* $x = U(t)y$, *которое приводит систему* (1.1) *к виду*

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u(t), \tag{1.4}$$

*где* $\widehat{A}(t) = \{\widehat{A}_{ij}(t)\}_{i,j=1}^2$, $\widehat{A}_{11}(t)$ *и* $\widehat{A}_{22}(t)$ *— верхние треугольные матрицы размеров* $(n-p) \times (n-p)$ *и* $p \times p$ *соответственно,* $\widehat{A}_{21}(t) \equiv 0$, *матрица* $\widehat{B}(t) = \mathrm{col}(\widehat{B}_1(t), \widehat{B}_2(t))$, *где* $\widehat{B}_1(t)$ *имеет размеры* $(n-p) \times r$, *а* $\widehat{B}_2(t) \equiv 0$.

## §2. Пространство управляемости линейной нестационарной системы второго порядка

В данном параграфе доказан эффективный критерий полной управляемости для систем второго порядка, также построены пространства управляемости систем с верхней треугольной матрицей

Рассмотрим нестационарную систему второго порядка

$$\dot{x} = A(t)x + ub(t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

где $A(\cdot) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}, M(2))$, $b(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Покажем, что достаточное условие полной управляемости (теорема 1.2) не является необходимым, т. е. существуют такие системы, что для всех $t \in [t_0, t_1]$ $\det K(t)$ равен нулю, но система вполне управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим систему 2-го порядка на отрезке времени $[0, 2]$

$$\dot{x} = A(t)x + ub(t), \tag{2.2}$$

$$\text{где} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \operatorname{col}\Big(e^{-\frac{1}{(t-1)^2}}, 0\Big), \quad t \in [0, 1),$$

$$b(1) = (0, 0), \quad b(t) = \operatorname{col}\Big(0, e^{-\frac{1}{(t-1)^2}}\Big), \quad t \in (1, 2].$$

Несложно проверить, что

$$\det K(t) = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 - \dot{b}_1 \\ b_2 & b_2 - \dot{b}_2 \end{vmatrix} = \dot{b}_1 b_2 - b_1 \dot{b}_2 \equiv 0, \quad t \in [0, 2].$$

В силу теоремы 1.1 система второго порядка вполне управляема на $[t_0, t_1]$ в том и только в том случае, если $\operatorname{rank} W(t_0, t_1) = 2$.

Для системы (2.2) матрица $W(0, 2)$ имеет следующий вид:

$$W(0, 2) = \int_0^2 e^{-2s} \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{pmatrix} (b_1(s), b_2(s)) ds = \int_0^2 e^{-2s} \begin{pmatrix} b_1^2(s) & 0 \\ 0 & b_2^2(s) \end{pmatrix} ds.$$

Понятно, что ранг такой матрицы равен двум, т. е. рассматриваемая система вполне управляема на отрезке $[0, 2]$.

Рассмотрим сначала систему с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$

$$\dot{y} = \widehat{A}(t)y + u\widehat{b}(t), \quad y \in \mathbb{R}^2, \tag{2.3}$$

где $\widehat{A}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}, M(2))$, $\widehat{b}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Для такой системы матрицу, задаваемую соотношением (1.3), обозначим $\widehat{K}(t)$, а пространство управляемости данной системы обозначим $\widehat{L}(t_0, t_1)$.

Несложно убедиться, что для всякой матрицы $\widehat{A}(\cdot)$ второго порядка найдется такая непрерывно дифференцируемая функция $t \to \widehat{b}(t)$, что $\operatorname{rank} \widehat{K}(t) \equiv 1$ при $t \in [t_0, t_1]$. При этом пространство $\widehat{L}(t_0, t_1) \doteq \widehat{L}(t_0, t_1; \widehat{b}(\cdot))$ не обязано иметь размерность, равную единице. Таким образом, при фиксированной $\widehat{A}(\cdot)$ пространство $\widehat{L}(t_0, t_1; \widehat{b}(\cdot))$ и его размерность являются функциями переменных $t_0$, $t_1$, $\widehat{b}(\cdot)$. В формулируемых ниже утверждениях исследуется зависимость $\widehat{L}(t_0, t_1; \widehat{b}(\cdot))$ от параметров $t_0$, $t_1$, $\widehat{b}(\cdot)$. Отметим, что близкие результаты получены в работе [25].

Т е о р е м а  2.1. *Если* $\operatorname{rank} \widehat{K}(t) < 2$ *при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *и выполнено одно из перечисленных ниже условий* 1) — 5), *то система* (2.3) *не является вполне управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$ *т. е.* $\dim \widehat{L}(t_0, t_1) \leqslant 1$.

1) $\widehat{b}_2(t) \neq 0$ *для всех* $t \in [t_0, t_1]$;

2) $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$;

3) $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$;

4) *найдутся точки* $\tau_1 \ldots \tau_k$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < \tau_{k+1} = t_1$, *что* $\widehat{b}(\tau_i) = 0$, *а в остальных точках* $(t_0, t_1)$ *функция* $\widehat{b}_2(t)$ *не обращается в нуль и* $\dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$ *имеет устранимые разрывы в моменты времени* $\tau_i$;

5) *найдутся замкнутое подмножество* $I \subset [t_0, t_1]$, *состоящее из конечного числа отрезков, и точки*

$$\tau_1 \ldots \tau_k \in [t_0, t_1] \setminus I, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k < \tau_{k+1} = t_1, \quad \textit{что}$$

а) $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$ *на* $I$,

б) *для каждого* $t \in [t_0, t_1] \setminus I$, *не совпадающего ни с одной из точек* $\tau_0 \ldots \tau_{k+1}$, *функция* $\widehat{b}_2(t) \neq 0$,

в) $\widehat{b}_2(\tau_i) = 0$ *и* $\dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$ *имеет устранимые разрывы в точках* $\tau_i$,

г) *для любого* $\mu \in \partial I \setminus \{\{t_0\}, \{t_1\}\}$ *предел* $\lim\limits_{t \to \mu, t \notin I} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для системы (2.3) с верхней треугольной матрицы $\widehat{A}(t)$ опишем совокупность всех функций $t \to \widehat{b}(t)$, для которых выполнено условие $\operatorname{rank}\widehat{K}(t) < 2$ при $t \in [t_0, t_1]$. Если $\operatorname{rank}\widehat{K}(t) < 2$, то $\det(\widehat{b}(t), \widehat{A}(t)\widehat{b}(t) - \dot{\widehat{b}}(t)) \equiv 0$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, т. е.

$$\begin{vmatrix} \widehat{b}_1 & \widehat{a}_{11}\widehat{b}_1 + \widehat{a}_{12}\widehat{b}_2 - \dot{\widehat{b}}_1 \\ \widehat{b}_2 & \widehat{a}_{22}\widehat{b}_2 - \dot{\widehat{b}}_2 \end{vmatrix} = \widehat{b}_1\widehat{b}_2(\widehat{a}_{22} - \widehat{a}_{11}) - \widehat{a}_{12}\widehat{b}_2^2 - \widehat{b}_1\dot{\widehat{b}}_2 + \dot{\widehat{b}}_1\widehat{b}_2 \equiv 0. \tag{2.4}$$

1) Предположим, что $\widehat{b}_2(t) \neq 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$. Введем в рассмотрение функцию $\widehat{z}(t) \doteq \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$, тогда, как следует из (2.4), функция $\widehat{z}(t)$ является решением следующего дифференциального уравнения

$$\dot{\widehat{z}} = (\widehat{a}_{11}(t) - \widehat{a}_{22}(t))\widehat{z} + \widehat{a}_{12}(t). \tag{2.5}$$

Решение этого уравнения, как известно, можно записать в виде

$$\widehat{z}(t) = \exp\Bigl(\int_{t_0}^{t}(\widehat{a}_{11}(s) - \widehat{a}_{22}(s))ds\Bigr) \times \\ \times \Bigl(\int_{t_0}^{t}\widehat{a}_{12}(s)\exp\Bigl(\int_{t_0}^{s}(\widehat{a}_{22}(\tau) - \widehat{a}_{11}(\tau))\,d\tau\Bigr)\,ds + \widehat{z}(t_0)\Bigr). \tag{2.6}$$

Обозначим через $\widehat{W}(t_0, t_1)$ и $\widehat{X}(t, s)$ соответственно матрицы Калмана и Коши системы (2.3). Покажем, что $\operatorname{rank}\widehat{W}(t_0, t_1) = 1$, для этого найдем

$$\widehat{X}(t,s) = \begin{pmatrix} e^{-\int_t^s \widehat{a}_{11}(\tau)d\tau} & -e^{-\int_t^s \widehat{a}_{22}(\tau)d\tau}\int_t^s \widehat{a}_{12}(\tau)e^{\int_t^\tau(\widehat{a}_{22}(\theta)-\widehat{a}_{11}(\theta))d\theta}d\tau \\ 0 & \exp\bigl(-\int_t^s \widehat{a}_{22}(\tau)d\tau\bigr) \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.6) и (2.7) находим, что

$$\widehat{X}(t_0, s)\widehat{b}(s) = \exp\Bigl(-\int_{t_0}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt\Bigr)\begin{pmatrix}\widehat{z}(t_0)\\ 1\end{pmatrix}\widehat{b}_2(s),$$

$$\widehat{W}(t_0, t_1) = \begin{pmatrix}\widehat{z}^2(t_0) & \widehat{z}(t_0)\\ \widehat{z}(t_0) & 1\end{pmatrix}\int_{t_0}^{t_1}\exp\Bigl(-2\int_{t_0}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt\Bigr)\widehat{b}_2^2(s)ds. \tag{2.8}$$

Поскольку строки $\widehat{W}(t_0,t_1)$ пропорциональны, то $\operatorname{rank}\widehat{W}(t_0,t_1)=1$, следовательно, и размерность пространства управляемости $\widehat{L}(t_0,t_1)$ равна единице. В этом случае пространство $\widehat{L}(t_0,t_1)$ не зависит от $t_1$ и задается в $\mathbb{R}^2$ соотношением

$$\widehat{L}(t_0)=\widehat{L}(t_0,t_1)=\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1=\widehat{z}(t_0)x_2\}.$$

2) Если $\widehat{b}_2(t)$ тождественно равна нулю на отрезке $[t_0,t_1]$, $\widehat{b}_1(t)$ — произвольная функция, то, как следует из (2.4), ранг $\widehat{K}(t)$ меньше 2. Покажем, что в этом случае $\dim\widehat{L}(t_0,t_1)$ также равна единице. Поскольку $\widehat{b}_2(t)\equiv 0$, из соотношения (2.7) получим, что

$$\widehat{X}(t_0,s)\widehat{b}(s)=\operatorname{col}\Big(\widehat{b}_1(s)\exp\Big(-\int_{t_0}^{s}\widehat{a}_{11}(t)dt\Big),0\Big),$$

откуда находим

$$\widehat{W}(t_0,t_1)=\begin{pmatrix}\int\limits_{t_0}^{t_1}\widehat{b}_1^2(s)\exp\Big(-2\int\limits_{t_0}^{s}\widehat{a}_{11}(t)dt\Big)ds & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Очевидно, что в случае $\widehat{b}_1(t)\not\equiv 0$ на $[t_0,t_1]$ $\operatorname{rank}\widehat{W}(t_0,t_1)=1$, а если $\widehat{b}_1(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,t_1]$, то ранг $\widehat{W}(t_0,t_1)$ равен нулю.

Если $\widehat{b}_2(t)\equiv 0$, $\widehat{b}_1(t)\not\equiv 0$ для $t\in[t_0,t_1]$, то пространство $\widehat{L}(t_0,t_1)$ не зависит от $t_0$, $t_1$ и $\widehat{L}=\widehat{L}(t_0,t_1)=\{x\in\mathbb{R}^2 : x_2=0\}$, при этом $\dim\widehat{L}=1$. Если $\widehat{b}_2(t)\equiv 0$, $\widehat{b}_1(t)\equiv 0$ на $[t_0,t_1]$, то размерность пространства управляемости равна нулю и оно состоит из одной точки $(0,0)$.

3) Если $\widehat{a}_{12}(t)\equiv 0$ на $[t_0,t_1]$, то

$$\widehat{X}(t,s)=\begin{pmatrix}\exp\Big(-\int\limits_{t}^{s}\widehat{a}_{11}(t)dt\Big) & 0\\ 0 & \exp\Big(-\int\limits_{t}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt\Big)\end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

По условию $\widehat{b}_1(t)\equiv 0$, поэтому

$$\widehat{W}(t_0,t_1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \int\limits_{t_0}^{t_1}\widehat{b}_2^2(s)\exp\Big(-2\int\limits_{t_0}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt\Big)ds\end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

следовательно, если $\widehat{b}_2(t)$ тождественно не обращается в нуль на $[t_0, t_1]$, то $\operatorname{rank} \widehat{W}(t_0, t_1) = 1$. Пространство $\widehat{L}(t_0, t_1)$ в этом случае также не зависит от $t_0$, $t_1$, имеет размерность один и

$$\widehat{L} = \widehat{L}(t_0, t_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}.$$

4) Предположим, что функция $\widehat{b}_2(t)$ не обращается в нуль на каждом из интервалов $\theta_i = (\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1 \dots k+1$, тогда

$$\widehat{W}(\tau_{i-1}, \tau_i) = \begin{pmatrix} \widehat{z}^2(\tau_{i-1}) & \widehat{z}(\tau_{i-1}) \\ \widehat{z}(\tau_{i-1}) & 1 \end{pmatrix} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \exp\Big(-2\int_{\tau_{i-1}}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt\Big) \widehat{b}_2^2(s)ds, \quad (2.12)$$

где через $\widehat{z}(\tau_{i-1})$ обозначим предел справа

$$\widehat{z}(\tau_{i-1}) = \widehat{z}(\tau_{i-1} + 0) = \lim_{t \to \tau_{i-1}+0} \frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}, \quad i = 1 \dots k+1.$$

Докажем по индукции, что если у функции $\widehat{z}(t)$ в точке $\tau_i$ пределы слева и справа совпадают, $\widehat{z}(\tau_i - 0) = \widehat{z}(\tau_i + 0)$, $i = 1 \dots k-1$, то

$$\widehat{W}(\tau_0, \tau_k) = \begin{pmatrix} \widehat{z}^2(\tau_0) & \widehat{z}(\tau_0) \\ \widehat{z}(\tau_0) & 1 \end{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \exp\Big(-2\int_{\tau_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt\Big) \widehat{b}_2^2(s)ds. \qquad (2.13)$$

При $k = 1$ равенство (2.13) следует из (2.8). Предположим, что оно имеет место при некотором $k$. Чтобы доказать справедливость (2.13) для $k+1$, отметим следующее важное соотношение, верное и для систем произвольной размерности:

$$W(\tau_0, \tau_{k+1}) = W(\tau_0, \tau_k) + X(\tau_0, \tau_k) W(\tau_k, \tau_{k+1}) X^*(\tau_0, \tau_k). \qquad (2.14)$$

В силу соотношения (2.6), если функция $\widehat{z}(t)$ имеет устранимые разрывы в точках $\tau_i$, $i = 1 \dots k$, то

$$\widehat{z}(\tau_k) = e^{\int_{\tau_0}^{\tau_k} (\widehat{a}_{11}(t) - \widehat{a}_{22}(t))dt} \left( \int_{\tau_0}^{\tau_k} \widehat{a}_{12}(t) \exp\Big( \int_{\tau_0}^{t} (\widehat{a}_{22}(s) - \widehat{a}_{11}(s))ds \Big) dt + \widehat{z}(\tau_0) \right),$$

тогда, как нетрудно убедиться,

$$\widehat{W}(\tau_0, \tau_{k+1}) = \begin{pmatrix} \widehat{z}^2(\tau_0) & \widehat{z}(\tau_0) \\ \widehat{z}(\tau_0) & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \Big( \int_{\tau_0}^{\tau_k} \exp\Big(-2\int_{\tau_0}^{s} \widehat{a}_{22}dt\Big) \widehat{b}_2^2 ds + \exp\Big(-2\int_{\tau_0}^{\tau_k} \widehat{a}_{22}dt\Big) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \exp\Big(-2\int_{\tau_k}^{s} \widehat{a}_{22}dt\Big) \widehat{b}_2^2 ds \Big) =$$

$$= \begin{pmatrix} \widehat{z}^2(\tau_0) & \widehat{z}(\tau_0) \\ \widehat{z}(\tau_0) & 1 \end{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_{k+1}} \exp\Big(-2\int_{\tau_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt\Big)\widehat{b}_2^2(s)ds.$$

Таким образом, равенство (2.13) доказано, откуда следует, что

$$\operatorname{rank}\widehat{W}(t_0,t_1) = \operatorname{rank}\widehat{W}(\tau_0,\tau_{k+1}) = 1 \quad \text{и} \quad \dim \widehat{L}(t_0,t_1) = 1.$$

5) Пусть $I$ — замкнутое множество, состоящее из конечного числа непересекающихся отрезков. Обозначим через $\mu_1 \dots \mu_n$ точки, принадлежащие границе множества $I$, не совпадающие с $t_0$, $t_1$,

$$t_0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \mu_{n+1} = t_1.$$

Тогда отрезок $\theta_0 = [\mu_0, \mu_1]$ принадлежит или $I$ или замыканию множества $[t_0,t_1] \setminus I$. Рассмотрим отдельно эти случаи.

5.1 Предположим, что $\theta_0$ принадлежит $I$, тогда отрезок $\theta_1 = [\mu_1, \mu_2]$ содержится в замыкании $\mathrm{cl}([t_0,t_1] \setminus I)$, все отрезки с четными номерами $\theta_{2m} = [\mu_{2m}, \mu_{2m+1}]$ принадлежат множеству $I$, а с нечетными номерами $\theta_{2m+1} = [\mu_{2m+1}, \mu_{2m+2}] \subset \mathrm{cl}([t_0,t_1] \setminus I)$, $m=1,\dots$

На отрезках $\theta_0 \dots \theta_{2m} \dots$ функции $\widehat{a}_{12}(t)$ и $\widehat{b}_1(t)$ тождественно равны нулю, поэтому и в силу соотношения (2.11) имеет место равенство

$$\widehat{W}(\mu_{2m}, \mu_{2m+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int\limits_{\mu_{2m}}^{\mu_{2m+1}} \widehat{b}_2^2(s)\exp\Big(-2\int\limits_{\mu_{2m}}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt\Big)ds \end{pmatrix}.$$

На отрезках с нечетными номерами $\theta_1 \dots \theta_{2m+1} \dots$ функции $\widehat{b}_2(t)$ не обращаются в нуль ни в одной точке, за исключением точек $\tau_1 \dots \tau_k$, в которых функция $\widehat{z}(t) = \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$ имеет устранимые разрывы, поэтому из (2.13) следует, что для $m = 0, 1 \dots$

$$\widehat{W}(\mu_{2m+1}, \mu_{2m+2}) = \begin{pmatrix} \widehat{z}^2(\mu_{2m+1}) & \widehat{z}(\mu_{2m+1}) \\ \widehat{z}(\mu_{2m+1}) & 1 \end{pmatrix} \int\limits_{\mu_{2m+1}}^{\mu_{2m+2}} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\mu_{2m+1}}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt}.$$

По условию теоремы $\widehat{z}(\mu_{2m+1}) = \widehat{z}(\mu_{2m+1} + 0) = 0$, следовательно,

$$\widehat{W}(\mu_{2m+1}, \mu_{2m+2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int\limits_{\mu_{2m+1}}^{\mu_{2m+2}} \widehat{b}_2^2(s)\exp\Big(-2\int\limits_{\mu_{2m+1}}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt\Big)ds \end{pmatrix},$$

т. е. для отрезков и с четными и с нечетными номерами матрицы Калмана задаются одинаковыми формулами.

Из соотношения (2.7) в силу условия $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$ получаем, что на отрезках с четными номерами $\theta_{2m}$, $m = 0, 1 \ldots$ матрицы $\widehat{X}(\mu_{2m}, \mu_{2m+1})$ являются диагональными. Покажем, что при условии совпадения пределов $\widehat{z}(\mu_{2m+1}+0) = \widehat{z}(\mu_{2m+2}-0) = 0$, $m=0, 1 \ldots$, матрицы $\widehat{X}(\mu_{2m+1}, \mu_{2m+2})$ также являются диагональными.

Заметим, что если предел $\widehat{z}(\mu_{2m+1}+0) = 0$, в точках $\tau_i$ функция $\widehat{z}(t)$ непрерывна или имеет устранимый разрыв, то в силу (2.5)

$$\widehat{z}(\mu_{2m+2}-0) = \exp\Bigl(\int_{\mu_{2k+1}}^{\mu_{2k+2}} (\widehat{a}_{11}(t) - \widehat{a}_{22}(t))dt\Bigr) \times \\ \times \int_{\mu_{2k+1}}^{\mu_{2k+2}} \widehat{a}_{12}(t) \exp\Bigl(\int_{\mu_{2k+1}}^{t} (\widehat{a}_{22}(s) - \widehat{a}_{11}(s))ds\Bigr)dt = 0,$$

откуда следует, что $\int\limits_{\mu_{2k+1}}^{\mu_{2k+2}} \widehat{a}_{12}(t) \exp\Bigl(\int\limits_{\mu_{2k+1}}^{t} (\widehat{a}_{22}(s) - \widehat{a}_{11}(s))ds\Bigr)dt = 0$, т. е. $\widehat{X}(\mu_{2m+1}, \mu_{2m+2})$ — также диагональные матрицы.

Найдем матрицу Коши $\widehat{X}(t_0, t_1)$ системы (2.3) на всем отрезке $[t_0, t_1]$.

$$\widehat{X}(t_0, t_1) = \widehat{X}(\mu_0, \mu_n) = \widehat{X}(\mu_0, \mu_1)\widehat{X}(\mu_1, \mu_2) \ldots \widehat{X}(\mu_{n-1}, \mu_n) = \\ = \begin{pmatrix} \exp\Bigl(-\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n} \widehat{a}_{11}(t)dt\Bigr) & 0 \\ 0 & \exp\Bigl(-\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n} \widehat{a}_{22}(t)dt\Bigr) \end{pmatrix}.$$

Докажем по индукции, что

$$\widehat{W}(\mu_0, \mu_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int\limits_{\mu_0}^{\mu_k} \exp\Bigl(-2\int\limits_{\mu_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt\Bigr)\widehat{b}_2^2(s)ds \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Очевидно, что при $k = 1$ формула (2.15) верна. Предположим, что она верна для некоторого $k$, тогда

$$\widehat{W}(\mu_0, \mu_{k+1}) = \widehat{W}(\mu_0, \mu_k) + \widehat{X}(\mu_0, \mu_k)\widehat{W}(\mu_k, \mu_{k+1})\widehat{X}^*(\mu_0, \mu_k) = \tag{2.16}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \int_{\mu_0}^{\mu_n} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int_{\mu_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt} ds + e^{-2\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n} \widehat{a}_{22}(t)dt} \int_{\mu_n}^{\mu_{n+1}} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\mu_n}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt} ds \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{\mu_0}^{\mu_{n+1}} \exp\Big( -2 \int_{\mu_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt \Big) \widehat{b}_2^2(s) ds.$$

Таким образом, формула (2.15) доказана, откуда следует, что ранг матрицы $\widehat{W}(t_0, t_1) = \widehat{W}(\mu_0, \mu_{n+1})$ и размерность пространства управляемости $\widehat{L}(t_0, t_1)$ равны единице.

5.2 Предположим, что отрезок $\theta_0 = [\mu_0, \mu_1]$, а также все отрезки с четными индексами принадлежат замыканию множества $[t_0, t_1] \setminus I$, тогда все отрезки с нечетными номерами, $\theta_{2m+1} = [\mu_{2m+1}, \mu_{2m+3}]$, $m = 0, 1 \ldots$ принадлежат множеству $I$. В этом случае

$$\widehat{W}(\mu_0, \mu_1) = \begin{pmatrix} \widehat{z}^2(\mu_0) & \widehat{z}(\mu_0) \\ \widehat{z}(\mu_0) & 1 \end{pmatrix} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \exp\Big( -2 \int_{\mu_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt \Big) \widehat{b}_2^2(s) ds,$$

где $\widehat{z}(\mu_0) = \widehat{z}(\mu_0 + 0)$. Нетрудно заметить, что все остальные матрицы для $i = 1 \ldots n$ задаются следующим соотношением

$$\widehat{W}(\mu_i, \mu_{i+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \exp\Big( -2 \int_{\mu_i}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt \Big) \widehat{b}_2^2(s) ds.$$

По условию теоремы $\widehat{z}(\mu_1) = \widehat{z}(\mu_1 - 0)$, тогда, используя соотношение (2.5), получаем

$$\int_{\mu_0}^{\mu_1} a_{12}(s) \exp\Big( -2 \int_{\mu_0}^{s} (\widehat{a}_{22}(t) - \widehat{a}_{11}(t))dt \Big) \widehat{b}_2^2(s) ds = -\widehat{z}(\mu_0),$$

откуда следует, что

$$\widehat{X}(\mu_0, \mu_1) = \begin{pmatrix} \exp\Big( -\int\limits_{\mu_0}^{\mu_1} \widehat{a}_{11}(t)dt \Big) & \widehat{z}(\mu_0) \exp\Big( -\int\limits_{\mu_0}^{\mu_1} \widehat{a}_{22}(t)dt \Big) \\ 0 & \exp\Big( -\int\limits_{\mu_0}^{\mu_1} \widehat{a}_{22}(t)dt \Big) \end{pmatrix}.$$

Из доказанного в первом случае следует, что все остальные матрицы $\widehat{X}(\mu_i, \mu_{i+1})$, $i = 1 \ldots n$ — диагональные, тогда

$$\widehat{X}(\mu_0, \mu_n) = \begin{pmatrix} \exp\Big( -\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n} \widehat{a}_{11}(t)dt \Big) & \widehat{z}(\mu_0) \exp\Big( -\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n} \widehat{a}_{22}(t)dt \Big) \\ 0 & \exp\Big( -\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n} \widehat{a}_{22}(t)dt \Big) \end{pmatrix}.$$

Докажем по индукции следующее соотношение

$$\widehat{W}(\mu_0,\mu_n)=\begin{pmatrix}\widehat{z}^2(\mu_0) & \widehat{z}(\mu_0)\\ \widehat{z}(\mu_0) & 1\end{pmatrix}\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n}\exp\Bigl(-2\int\limits_{\mu_0}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt\Bigr)\widehat{b}_2^2(s)ds. \tag{2.17}$$

Для $n=1$ равенство (2.17) верно, используя (2.16), найдем

$$\widehat{W}(\mu_0,\mu_{n+1})=$$

$$=\begin{pmatrix}\widehat{z}^2(\mu_0) & \widehat{z}(\mu_0)\\ \widehat{z}(\mu_0) & 1\end{pmatrix}\Bigl(\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n}e^{-2\int\limits_{\mu_0}^{s}\widehat{a}_{22}dt}\widehat{b}_2^2ds+e^{-2\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n}\widehat{a}_{22}dt}\int\limits_{\mu_n}^{\mu_{n+1}}e^{-2\int\limits_{\mu_n}^{s}\widehat{a}_{22}dt}\widehat{b}_2^2ds\Bigr)=$$

$$=\begin{pmatrix}\widehat{z}^2(\mu_0) & \widehat{z}(\mu_0)\\ \widehat{z}(\mu_0) & 1\end{pmatrix}\int_{\mu_0}^{\mu_{n+1}}\exp\Bigl(-2\int_{\mu_0}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt\Bigr)\widehat{b}_2^2(s)ds.$$

Таким образом, равенство (2.17) доказано. Теперь очевидно, что в случае, когда отрезок $\theta_0=[\mu_0,\mu_1]$ принадлежит замыканию множества $[t_0,t_1]\setminus I$, матрица $\widehat{W}(t_0,t_1)=\widehat{W}(\mu_0,\mu_{n+1})$ также имеет единичный ранг и $\dim\widehat{L}(t_0,t_1)=1$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим важное свойство, верное для системы (1.1) произвольного порядка. Если система (1.1) вполне управляема на некотором отрезке $[\tau_0,\tau_1]$, то она вполне управляема на любом отрезке $[t_0,t_1]$, таком, что $[\tau_0,\tau_1]\subset[t_0,t_1]$. Другими словами, если существуют точки $\tau_0$, $\tau_1$, $t_0\leqslant\tau_0<\tau_1\leqslant t_1$ такие, что $\dim L(\tau_0,\tau_1)=n$, то $\dim L(t_0,t_1)=n$.

Вернемся к системе (2.3) с треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$. В теореме 2.1 рассмотрены случаи, когда $\operatorname{rank}\widehat{K}(t)\leqslant 1$ для всех $t$ из отрезка $[t_0,t_1]$ и система (2.3) не является вполне управляемой, т. е. размерность пространства управляемости $\widehat{L}(t_0,t_1)$ этой системы не превосходит единицы. В следующей теореме даются условия, когда при $\operatorname{rank}\widehat{K}(t)\leqslant 1$ для всех $t\in[t_0,t_1]$ система (2.3) вполне управляема на отрезке $[t_0,t_1]$ и размерность пространства $\widehat{L}(t_0,t_1)$ равна двум.

Т е о р е м а 2.2. *Если* $\operatorname{rank}\widehat{K}(t)<2$ *при всех* $t\in[t_0,t_1]$ *и выполнено одно из перечисленных ниже условий* 1) — 3), *то система* (2.3) *вполне управляема на отрезке* $[t_0,t_1]$ *т. е.* $\dim\widehat{L}(t_0,t_1)=2$.

1) *найдутся точки* $\tau_0$, $\tau_1$, $\tau_2$, $t_0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_1$ *такие, что на одном из интервалов* $\theta_0 = (\tau_0, \tau_1)$ *или* $\theta_1 = (\tau_1, \tau_2)$ *функция* $\widehat{b}_2(t)$ *не обращается в нуль, а на другом* $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \not\equiv 0$;

2) *найдутся точки* $\tau_0$, $\tau_1$, $\tau_2$, $t_0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_1$ *такие, что на одном из интервалов* $\theta_0 = (\tau_0, \tau_1)$ *или* $\theta_1 = (\tau_1, \tau_2)$ *функция* $\widehat{b}_2(t)$ *не обращается в нуль, предел* $\lim\limits_{t \to \tau_1} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)} \neq 0$, *а на другом интервале* $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_2(t) \not\equiv 0$;

3) *найдутся точки* $\tau_0$, $\tau_1$, $\tau_2$, $t_0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_1$, *что функция* $\widehat{b}_2(t)$ *не обращается в нуль на* $(\tau_0, \tau_2)$, *за исключением точки* $\tau_1$, $\widehat{b}_2(\tau_1) = 0$, *существуют пределы* $\lim\limits_{t \to \tau_1 - 0} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$, $\lim\limits_{t \to \tau_1 + 0} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$ *и выполнено соотношение*

$$\lim_{t \to \tau_1 + 0} \frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)} \neq \lim_{t \to \tau_1 - 0} \frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть на интервале $\theta_0$ функция $\widehat{b}_2(t)$ не обращается в нуль. Напомним, что функция $\widehat{z}(t)$ определена равенством $\widehat{z}(t) = \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$, тогда на интервале $\theta_0$ $\widehat{b}_1(t) = \widehat{z}(t)\widehat{b}_2(t)$, а на интервале $\theta_1$ $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \not\equiv 0$. Найдем

$$\widehat{W}(\tau_0, \tau_2) = \widehat{W}(\tau_0, \tau_1) + \widehat{X}(\tau_0, \tau_1)\widehat{W}(\tau_1, \tau_2)\widehat{X}^*(\tau_0, \tau_1), \tag{2.18}$$

где

$$\widehat{W}(\tau_0, \tau_1) = \begin{pmatrix} \widehat{z}^2(\tau_0) & \widehat{z}(\tau_0) \\ \widehat{z}(\tau_0) & 1 \end{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \exp\Bigl(-2\int_{\tau_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt\Bigr)\widehat{b}_2^2(s)ds,$$

$$\widehat{W}(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \widehat{b}_1^2(s)\exp\Bigl(-2\int\limits_{\tau_1}^{s} \widehat{a}_{11}(t)dt\Bigr)ds & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя последние соотношения, нетрудно найти, что

$$\det \widehat{W}(\tau_0, \tau_2) = e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \widehat{a}_{11}(t)dt} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt} ds \int_{\tau_1}^{\tau_2} \widehat{b}_1^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_1}^{s} \widehat{a}_{11}(t)dt} ds. \tag{2.19}$$

В случае, когда на интервале $\theta_0$ выполнены следующие условия: $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \not\equiv 0$, а на интервале $\theta_1$ функция $\widehat{b}_2(t)$ не обращается в нуль, найдется функция $\widehat{z}(t)$, что $\widehat{b}_1(t) = \widehat{z}(t)\widehat{b}_2(t)$ и $\det \widehat{W}(\tau_0, \tau_2) =$

$$= e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \widehat{a}_{22}(t)dt} \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\widehat{z}(s)\widehat{b}_2(s))^2 e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{s} \widehat{a}_{11}(t)dt} ds \int_{\tau_1}^{\tau_2} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_1}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt} ds. \qquad (2.20)$$

Понятно, что в обоих случаях определитель матрицы $\widehat{W}(\tau_0, \tau_2)$ не обращается в нуль, следовательно, ранг $\widehat{W}(\tau_0, \tau_2)$ равен двум и размерность пространства $\widehat{L}(\tau_0, \tau_2)$ равна двум. В силу сделанного замечания размерность пространства управляемости на всем отрезке $[t_0, t_1]$ $\widehat{L}(t_0, t_1)$ также равна двум.

Если на интервале $\theta_0$ функции $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$, а функция $\widehat{b}_2(t)$ не обращается в нуль и на интервале $\theta_1$ выполнены условия: $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \not\equiv 0$, то определитель $\det \widehat{W}(\tau_0, \tau_2)$ удовлетворяет соотношению (2.19). Если же на интервале $\theta_0$ $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \not\equiv 0$, а на $\theta_1$ выполнены условия: $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_2(t) \not\equiv 0$, то для определителя $\det \widehat{W}(\tau_0, \tau_2)$ выполнено равенство (2.20).

В обоих случаях определитель $\det \widehat{W}(\tau_0, \tau_2)$ не равен нулю и размерность пространства управляемости $\widehat{L}(t_0, t_1)$ равна двум.

2) Если на интервале $\theta_0$ функция $\widehat{b}_2(t)$ не обращается в нуль, а на интервале $\theta_1$ выполнены условия: $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_2(t) \not\equiv 0$, то

$$\widehat{W}(\tau_0, \tau_1) = \begin{pmatrix} \widehat{z}^2(\tau_0) & \widehat{z}(\tau_0) \\ \widehat{z}(\tau_0) & 1 \end{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \exp\Big(-2\int_{\tau_0}^{s} \widehat{a}_{22}(t)dt\Big) \widehat{b}_2^2(s)ds,$$

$$\widehat{W}(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \widehat{b}_2^2(s) \exp\Big(-2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \widehat{a}_{22}(t)dt\Big) ds \end{pmatrix},$$

где $\widehat{z}(\tau_0)$ является пределом справа, $\widehat{z}(\tau_0) = \widehat{z}(\tau_0 + 0) = \lim\limits_{t \to \tau_0 + 0} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$. Тогда, используя соотношение (2.18), находим

$$\det \widehat{W}(\tau_0,\tau_2) = -\left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} \widehat{a}_{12}(t) e^{\int\limits_{\tau_0}^{t}(\widehat{a}_{22}(s)-\widehat{a}_{11}(s)ds} dt + \widehat{z}(\tau_0)\right)^2 \times$$

$$\times\, e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\widehat{a}_{22}(t)dt} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt} ds \int_{\tau_1}^{\tau_2} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_1}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt} ds =$$

$$= -\widehat{z}^2(\tau_1) e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\widehat{a}_{11}(t)dt} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt} ds \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_1}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt} ds, \qquad (2.21)$$

где $\widehat{z}(\tau_1) = \widehat{z}(\tau_1+0) = \lim\limits_{t\to\tau_1+0} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$.

Таким образом, если предел $\widehat{z}(\tau_1)$ не равен нулю, то определитель $\det \widehat{W}(\tau_0,\tau_2)$ не обращается в нуль и размерность пространства $\widehat{L}(\tau_0,\tau_2)$ равна двум, следовательно, и $\dim \widehat{L}(t_0,t_1) = 2$.

Если на интервале $\theta_0$ $\widehat{a}_{12}(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_1(t) \equiv 0$, $\widehat{b}_2(t) \not\equiv 0$, а на интервале $\theta_1$ функция $\widehat{b}_2(t)$ не обращается в нуль, то

$$\det \widehat{W}(\tau_0,\tau_2) = \widehat{z}^2(\tau_1) e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\widehat{a}_{11}(t)dt} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_0}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt} ds \int_{\tau_1}^{\tau_2} \widehat{b}_2^2(s) e^{-2\int\limits_{\tau_1}^{s}\widehat{a}_{22}(t)dt} ds.$$

Здесь $\widehat{z}(\tau_1)$ совпадает с пределом справа $\widehat{z}(\tau_1) = \widehat{z}(\tau_1+0) = \lim\limits_{t\to\tau_1+0} \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$. Очевидно, что если $\widehat{z}(\tau_1) \neq 0$, то определитель $\det \widehat{W}(\tau_0,\tau_2)$ не обращается в нуль и $\dim \widehat{L}(\tau_0,\tau_2) = 2$, откуда следует, что $\dim \widehat{L}(t_0,t_1) = 2$.

3) Из доказательства теоремы 2.1 следует, что если пределы функции $\widehat{z}(t)$ слева и справа не совпадают,

$$\lim_{t\to\tau_1+0} \frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)} \neq \lim_{t\to\tau_1-0} \frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)},$$

то определитель $\det \widehat{W}(\tau_0,\tau_2)$ не равен нулю. Следовательно, размерность пространства управляемости $\widehat{L}(t_0,t_1)$ и в этом случае равна двум. Теорема доказана.

Следующая лемма описывает некоторые свойства эрмитового преобразования, верные и для систем произвольной размерности, поэтому введем в рассмотрение систему

$$\dot{x} = A(t)x + ub(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.22}$$

где $A(\cdot) \in \mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{R}_+, M(n))$, $b(\cdot) \in \mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, и систему с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$

$$\dot{y} = \widehat{A}(t)y + u\widehat{b}(t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.23}$$

где $\widehat{A}(\cdot) \in \mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{R}_+, M(n))$, $\widehat{b}(\cdot) \in \mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Согласно Н.Н. Красовскому, для системы (2.22) обозначим

$$K^{(n)}(t) = \{q_0(t) \dots q_{n-1}(t)\}, \tag{2.24}$$

где индекс $(n)$ указывает на размерность матрицы или вектора, а векторы $q_k(t)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$q_0(t) = b(t), \dots, q_k(t) = A(t)q_{k-1}(t) - \dot{q}_{k-1}(t), \quad k = 1 \dots n-1. \tag{2.25}$$

Будем также рассматривать матрицу $\widehat{K}^{(n)}(t) = \{\widehat{q}_0(t) \dots \widehat{q}_{n-1}(t)\}$, где $\widehat{q}_k(t)$ — аналогичные векторы для системы (2.23) с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$. Поскольку при доказательстве следующей леммы рассматриваются системы одинакового порядка, индекс $(n)$ пока не будем указывать.

Л е м м а 2.1. *Пусть системы* (2.22) *и* (2.23) *связаны преобразованием*

$$X = U(t)Y, \quad b(t) = U(t)\widehat{b}(t), \tag{2.26}$$

*где $U(t)$ — ортогональная матрица (т. е. $U(t)U^*(t) = E$), тогда*

$$\operatorname{rank} K(t) = \operatorname{rank} \widehat{K}(t) \quad \text{и} \quad \dim L(t_0, t_1) = \dim \widehat{L}(t_0, t_1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим преобразование (2.26) системы (2.22), переводящее ее в систему с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$. Существование такого преобразования следует из теоремы Перрона о триангуляции линейной системы: *всякую линейную однородную систему $\dot{X} = A(t)X$ с помощью ортогонального преобразования $X = U(t)Y$*

*можно привести к системе $\dot{Y} = \widehat{A}(t)Y$ с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$* (см. [8]). Система (2.22) преобразуется в систему (2.23), где матрица $A(t)$ задается соотношением

$$\widehat{A}(t) = U^{-1}(t)A(t)U(t) - U^{-1}(t)\dot{U}(t), \tag{2.27}$$

а вектор $\widehat{b}(t) = U^{-1}(t)b(t)$.

1. Покажем, что данное преобразование не изменяет ранг матрицы $K(t)$. Докажем по индукции следующее соотношение

$$q_k(t) = U(t)\widehat{q}_k(t). \tag{2.28}$$

Для $k = 0$ $q_0(t) = b(t) = U(t)\widehat{b}(t) = U(t)\widehat{q}_0(t)$, т. е. равенство (2.28) выполняется. Предположим, что это равенство верно для некоторого $k-1$, т. е., $q_{k-1}(t) = U(t)\widehat{q}_{k-1}(t)$, тогда найдем

$$\begin{gathered} q_k(t) \doteq A(t)q_{k-1}(t) - \dot{q}_{k-1}(t) = \\ = (U(t)\widehat{A}(t)U^{-1}(t) + \dot{U}(t)U^{-1}(t))U(t)\widehat{q}_{k-1}(t) - \dot{U}(t)\widehat{q}_{k-1}(t) - U(t)\dot{\widehat{q}}_{k-1}(t) = \\ = U(t)\widehat{A}(t)\widehat{q}_{k-1}(t) - U(t)\dot{\widehat{q}}_{k-1}(t) = U(t)\widehat{q}_k(t). \end{gathered}$$

Равенство (2.28) доказано, поэтому

$$\begin{gathered} \operatorname{rank} K(t) \doteq \operatorname{rank}\{q_0(t)\ldots q_{n-1}(t)\} = \operatorname{rank}\{U(t)\widehat{q}_0(t)\ldots U(t)\widehat{q}_{n-1}(t)\} = \\ = \operatorname{rank}\{\widehat{q}_0(t)\ldots \widehat{q}_{n-1}(t)\} \doteq \operatorname{rank}\widehat{K}(t), \end{gathered}$$

поскольку преобразование $U(t)$ — невырожденно.

2. Чтобы показать, что размерность пространства управляемости при данном преобразовании не меняется, докажем, что имеет место равенство $\operatorname{rank} W(t_0,t_1) = \operatorname{rank}\widehat{W}(t_0,t_1)$. Напомним, что

$$W(t_0,t_1) \doteq \int_{t_0}^{t_1} X(t_0,s)b(s)b^*(s)X^*(t_0,s)ds.$$

Если $Z(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы $\dot{y} = A(t)y$, $\widehat{Z}(t)$ — фундаментальная матрица $\dot{x} = \widehat{A}(t)x$, то

$$\begin{gathered} X(t_0,s)b(s) = Z(t_0)Z^{-1}(s)b(s) = U(t_0)\widehat{Z}(t_0)(U(s)\widehat{Z}(s))^{-1}U(s)\widehat{b}(s) = \\ = U(t_0)\widehat{Z}(t_0)\widehat{Z}^{-1}(s)U^{-1}(s)U(s)\widehat{b}(s) = U(t_0)\widehat{X}(t_0,s)\widehat{b}(s), \end{gathered}$$

тогда

$$W(t_0,t_1) = U(t_0)\int_{t_0}^{t_1} \widehat{X}(t_0,s)\widehat{b}(s)\widehat{b}^*(s)\widehat{X}^*(t_0,s)dsU^*(t_0),$$

$$W(t_0,t_1) = U(t_0)\widehat{W}(t_0,t_1)U^*(t_0).$$

Поскольку $U(t)$ — невырожденная матрица, то ранг матрицы $W(t_0,t_1)$ при данном преобразовании не изменится, откуда получаем, что и размерности пространств управляемости соответствующих систем не меняются, т. е. $\dim L(t_0,t_1) = \dim \widehat{L}(t_0,t_1)$.

Рассмотрим систему второго порядка (2.1) с произвольной матрицей $A(t)$. Определим функцию $F : \mathbb{R}^2 \times (t_0,t_1) \times [0,\varepsilon) \to [-1,1]$ следующим образом:

$$F(b,t,\Delta t) = \frac{b_1(t-\Delta t)b_1(t+\Delta t) + b_2(t-\Delta t)b_2(t+\Delta t)}{|b(t-\Delta t)||b(t+\Delta t)|}. \tag{2.29}$$

Система уравнений (2.1) может быть интерпретирована геометрически, как векторное поле с компонентами $A(t)x + ub(t)$ в каждый момент времени $t$ в пространстве $\mathbb{R}^2$. Решение системы в $\mathbb{R}^2$ представляет собой кривую $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, заданную в параметрическом виде. Рассмотрим также кривую $x = (b_1(t), b_2(t))$ как кривую, заданную параметрически. Если $|b(t)| \neq 0$, то $\lim\limits_{\Delta t\to 0} F(b,t,\Delta t) = 1$, поскольку $b(t)$ — непрерывная функция. Если $|b(\tau)| = 0$ в некоторой точке $\tau \in (t_0,t_1)$, то $\lim\limits_{\Delta t\to 0} F(b,\tau,\Delta t)$ является косинусом угла между левой и правой касательными к кривой $x = b(t)$, и если в точке $\tau$ между этими касательными существует определенный положительный угол, то $\lim\limits_{\Delta t\to 0} |F(b,\tau,\Delta t)| \neq 1$.

Следующее определение приведено в [21].

О п р е д е л е н и е 2.1. Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *неособой* на отрезке $[t_0,t_1]$, если она не обращается тождественно в нуль ни на каком интервале, лежащем внутри отрезка $[t_0,t_1]$, и, кроме того, может обращаться в нуль только в конечном числе точек из $[t_0,t_1]$.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть $n = 2$, функция $|b(t)|$ — неособая на $[t_0,t_1]$ и $\operatorname{rank} K(t) < 2$ при всех $t \in [t_0,t_1]$.*

*Если $\lim\limits_{\Delta t\to 0} |F(b,t,\Delta t)| = 1$ для всех $t \in (t_0,t_1)$, то размерность пространства $L(t_0,t_1)$ равна 1; если найдется точка $\tau \in (t_0,t_1)$ такая, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0} |F(b,\tau,\Delta t)| \neq 1$, то $\dim L(t_0,t_1) = 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Сначала докажем теорему для системы (2.3) с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$. Пусть для всех $t$ из отрезка $[t_0, t_1]$ $\operatorname{rank} \widehat{K}(t) < 2$, функция $|\widehat{b}(t)|$ — неособая. Тогда из теорем (2.1) и (2.2) следует, что $\dim \widehat{L}(t_0, t_1) = 1$ в тех случаях, когда функция $\widehat{z}(t) = \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$ имеет устранимые разрывы в некоторых точках $\tau_1 \ldots \tau_k$ или $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$ на всем $[t_0, t_1]$. Если же существует некоторая точка $\tau \in (t_0, t_1)$ такая, что $\widehat{z}(\tau - 0) \neq \widehat{z}(\tau + 0)$, или найдется интервал $I$, принадлежащий $[t_0, t_1]$, что $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$ на $I$, $\widehat{b}_2(t) \not\equiv 0$ на дополнении к $I$, $[t_0, t_1] \setminus I$, то $\dim \widehat{L}(t_0, t_1) = 2$.

Найдем предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, t, \Delta t)|$. Прежде всего заметим, что во всех точках, где $|\widehat{b}(t)| \neq 0$, из того, что $\widehat{b}_1(t)$ и $\widehat{b}_2(t)$ — непрерывные функции, следует, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, t, \Delta t)| = 1$, т. е. достаточно посчитать предел для точек $\tau_1 \ldots \tau_k$, где модуль $|\widehat{b}(t)|$ обращается в нуль. Рассмотрим следующие случаи.

1.1. Пусть функция $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$, $\widehat{b}_1(t)$ не обращается в нуль, за исключением точек $\tau_1 \ldots \tau_k$, тогда, очевидно, что предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, \tau_i, \Delta t)| = 1$, $i = 1 \ldots k$.

1.2. Пусть $\widehat{b}_2(\tau_i) = 0$, $\widehat{b}_2(t) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $(\tau_i - \Delta t, \tau_i) \bigcup (\tau_i, \tau_i + \Delta t)$ точки $\tau_i$, такая окрестность найдется, поскольку $|\widehat{b}(t)|$ — неособая на $[t_0, t_1]$ и $\widehat{b}_1(t)$ обращается в нуль в тех же точках, что и $\widehat{b}_2(t)$. Кроме того, из (2.6) следует, что $\widehat{z}(t)$ — ограниченная функция, поэтому пределы $\widehat{z}(\tau_i - 0)$, $\widehat{z}(\tau_i + 0)$ существуют и

$$\lim_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, \tau_i, \Delta t)| = \frac{|1 + \widehat{z}(\tau_i - 0)\widehat{z}(\tau_i + 0)|}{\sqrt{1 + \widehat{z}^2(\tau_i - 0)}\sqrt{1 + \widehat{z}^2(\tau_i + 0)}}.$$

Нетрудно показать, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, \tau_i, \Delta t)| = 1$ тогда и только тогда, когда совпадают пределы $\widehat{z}(\tau_i - 0) = \widehat{z}(\tau_i + 0)$, т. е. функция $\widehat{z}(t)$ имеет устранимый разрыв в точке $\tau_i$.

1.3. Пусть $\widehat{b}_1(\tau_i) = 0$, $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\tau_i - \Delta t, \tau_i]$, принадлежащем $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, функция $\widehat{b}_2(t)$ не обращается в нуль на интервале $(\tau_i, \tau_i + \Delta t) \subset [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Покажем, что в этом случае предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, \tau_i, \Delta t)|$ не может равняться единице.

Поскольку $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$ на $[\tau_i - \Delta t, \tau_i]$, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, \tau_i, \Delta t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\widehat{b}_1(\tau_i - \Delta t)\widehat{b}_1(\tau_i + \Delta t)|}{|\widehat{b}_1(\tau_i - \Delta t)|\sqrt{\widehat{b}_1^2(\tau_i + \Delta t) + \widehat{b}_2^2(\tau_i + \Delta t)}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\widehat{b}_1(\tau_i + \Delta t)|}{\sqrt{\widehat{b}_1^2(\tau_i + \Delta t) + \widehat{b}_2^2(\tau_i + \Delta t)}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\widehat{z}(\tau_i + \Delta t)|}{\sqrt{1 + \widehat{z}^2(\tau_i + \Delta t)}}.$$

Последне равенство справедливо в силу того, что функция $\widehat{b}_2(t)$ не обращается в нуль на интервале $(\tau_i, \tau_i + \Delta t)$. Поскольку $\widehat{z}(t)$ — ограниченная функция, то нетрудно увидеть, что предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{|\widehat{z}(\tau_i + \Delta t)|}{\sqrt{1 + \widehat{z}^2(\tau_i + \Delta t)}}$ не равен единице.

Таким образом, доказано, что если $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, t, \Delta t)| = 1$ для всех $t$ из интервала $(t_0, t_1)$, то размерность пространства $\widehat{L}(t_0, t_1)$ равна единице, если же найдется точка $\tau_i \in (t_0, t_1)$ такая, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, \tau_i, \Delta t)| \neq 1$, то $\dim \widehat{L}(t_0, t_1) = 2$.

2. Рассмотрим систему (2.1) с произвольной матрицей $A(t)$ и преобразование (2.26), переводящее ее в систему (2.3) с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$. Если $\operatorname{rank} K(t) < 2$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, то, в силу леммы (2.1), $\operatorname{rank} \widehat{K}(t) < 2$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Как следует из свойств ортогонального преобразования, $|b(t)| = |\widehat{b}(t)|$, откуда получаем, что $|b(t)|$ обращается в нуль в тех же точках $\tau_1 \ldots \tau_k$, что и $|\widehat{b}(t)|$. Таким образом, если функция $|b(t)|$ — неособая, то $|\widehat{b}(t)|$ также неособая. Для системы (2.3) доказано, что, при указанных условиях, $\dim \widehat{L}(t_0, t_1) = 1$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, t, \Delta t)| = 1$ для всех $t \in (t_0, t_1)$.

Поскольку ортогональное преобразование сохраняет угол между векторами, то $F(b, t, \Delta t) = F(\widehat{b}, t, \Delta t)$, поэтому пределы

$$\lim_{\Delta t \to 0} |F(b, t, \Delta t)| = \lim_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, t, \Delta t)| = 1$$

для всех $t$ из $(t_0, t_1)$ тогда и только тогда, когда

$$\dim L(t_0, t_1) = \dim \widehat{L}(t_0, t_1) = 1.$$

Если же существует точка $\tau_i$ такая, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} |F(b, \tau_i, \Delta t)| = \lim_{\Delta t \to 0} |F(\widehat{b}, \tau_i, \Delta t)| \neq 1,$$

то $\dim L(t_0,t_1)=\dim\widehat{L}(t_0,t_1)=2$. Теорема доказана.

П р и м е р 2.2. Исследуем управляемость системы

$$\dot y = A(t)y + ub(t), \quad t\in[0,2], \quad \text{где} \tag{2.30}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} t+\sin t\cos t & \cos^2 t\\ -\sin^2 t & t-\sin t\cos t\end{pmatrix},$$

$$b(t)=\begin{pmatrix}(t-1)^3\sin t+(t-1)^2\cos t\\ (t-1)^3\cos t-(t-1)^2\sin t\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1],$$

$$b(t)=\begin{pmatrix}(t-1)^3\sin t\\ (t-1)^3\cos t\end{pmatrix}, \quad t\in(1,2].$$

Покажем, что $\operatorname{rank} K(t)<2$ для всех $t\in[0,2]$. Если $t\in[0,1]$, то

$$K(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ \cos t & -\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(t-1)^3 & t(t-1)^3-2(t-1)^2\\ (t-1)^2 & t(t-1)^2-2(t-1)\end{pmatrix}.$$

Найдем также, что при $t\in[1,2]$

$$K(t)=\begin{pmatrix}(t-1)^3\sin t & (t-1)^2(t^2-t-3)\sin t\\ (t-1)^3\cos t & (t-1)^2(t^2-t-3)\cos t\end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что $\operatorname{rank} K(t)=1$ при $t\neq 1$ и $\operatorname{rank} K(1)=0$. Покажем теперь, что система (2.30) вполне управляема. Для этого найдем $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|F(b,1,\Delta t)|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|f(\Delta t)|}{\sqrt{(\Delta t)^2+1}}$, где

$$f(\Delta t)=-\cos(1-\Delta t)\sin(1+\Delta t)+\sin(1-\Delta t)\cos(1+\Delta t)+$$
$$+\Delta t[\sin(1-\Delta t)\sin(1+\Delta t)+\cos(1-\Delta t)\cos(1+\Delta t)].$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|f(\Delta t)|=0$, то $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|F(b,1,\Delta t)|=0\neq 1$, следовательно, в силу теоремы 2.3 система (2.30) вполне управляема.

Доказать, что система (2.30) вполне управляема, можно и другим способом. Заметим, что данную систему с помощью ортогонального преобразования

$$U(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ \cos t & -\sin t\end{pmatrix}$$

можно привести к системе $\dot{x} = \widehat{A}(t) + u\widehat{b}(t)u(t)$ с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$ и показать, что такая система вполне управляема.

Используя соотношение (2.27), найдем $\widehat{A}(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. Далее, поскольку $\widehat{b}(t) = U^*(t)b(t)$, найдем вектор

$$\widehat{b}(t) = \begin{pmatrix} (t-1)^3 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix},\ t \in [0,1], \quad \widehat{b}(t) = \begin{pmatrix} (t-1)^3 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in (1,2].$$

Используя соотношение (2.18), найдем матрицу

$$\widehat{W}(0,2) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^1 e^{-s^2}(s-1)^4 ds + \int\limits_1^2 e^{-s^2}(s-1)^6 ds & -\int\limits_0^1 e^{-s^2}(s-1)^4 ds \\ -\int\limits_0^1 e^{-s^2}(s-1)^4 ds & \int\limits_0^1 e^{-s^2}(s-1)^4 ds \end{pmatrix}.$$

Определитель полученной матрицы не равен нулю, следовательно, $\operatorname{rank} \widehat{W}(0,2) = 2$. Однако для системы с произвольной $A(t)$ матрицу $W(t_0, t_1)$ нельзя вычислить аналитически, а предложенный способ при помощи нахождения пределов и в этом случае дает нужный результат.

## §3. Пространство управляемости линейной нестационарной системы произвольного порядка

Здесь доказаны достаточные и необходимые условия вполне управляемости и описана структура пространства управляемости для систем произвольного порядка с верхней треугольной матрицей

В этом параграфе сравниваются системы разных порядков, поэтому индекс $(p)$ вверху будет указывать на размерность матриц или векторов. В соответствии с этой договоренностью матрицу, удовлетворяющую (2.24), обозначим $K^{(p)}(t)$.

Рассмотрим систему с верхней треугольной матрицей

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + u\widehat{b}(t), \tag{3.1}$$

где $\widehat{A}(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}_+, M(n))$, $\widehat{b}(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Если последняя координата $\widehat{b}_n(t)$ вектора $\widehat{b}(t)$ такова, что $\widehat{b}_n(t)$ не обращается в нуль на $(t_0, t_1)$, за возможным исключением конечного числа точек $\tau_1 \dots \tau_m$ $(t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} = t_1)$, то на интервалах $(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0 \dots m$, будем рассматривать систему порядка $n-1$

$$\dot{x} = (\widehat{A}^{(n-1)}(t) - \widehat{a}_{nn}(t)E^{(n-1)})x + h^{(n-1)}(t)u(t), \tag{3.2}$$

где $\widehat{A}^{(n-1)}(t)$ получается из матрицы $\widehat{A}(t)$ вычеркиванием последней строки и последнего столбца, $E^{(n-1)}$ — единичная матрица порядка $n-1$; построение вектора $h^{(n-1)}(t)$ описано ниже.

Через $X^{(n)}(t,s)$ обозначим матрицу Коши (она также будет верхней треугольной матрицей) однородной системы, соответствующей системе (3.1), $X^{(n-1)}(t,s)$ — матрицу Коши системы (3.2), через $\widehat{W}^{(n)}(t_0,t_1)$ и $\widehat{W}^{(n-1)}(t_0,t_1)$ обозначим матрицы Калмана соответствующих систем. Индекс $(p)$ в записи $\widehat{L}^{(p)}(t_0,t_1)$ далее будет означать, что рассматривается пространство управляемости $\widehat{L}^{(p)}(t_0,t_1)$ для систем вида (3.1) порядка $p$. В этих обозначениях

$$\widehat{W}^{(n)}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X^{(n)}(t_0,s)\widehat{b}(s)(X^{(n)}(t_0,s)\widehat{b}(s))^* ds. \tag{3.3}$$

Для исследования размерности пространства управляемости понадобится следующее известное утверждение (см., например, [21],[13]).

Л е м м а 3.1. *Ранг матрицы $W^{(n)}(t_0,t_1)$ равен количеству линейно независимых на $[t_0,t_1]$ компонент вектора $X^{(n)}(t_0,s)b(s)$.*

Для системы (3.1) построим матрицу $\widehat{H}(t)=\{h_1(t),\dots,h_n(t)\}$, состоящую из вектор-функций $h_k(t)=\mathrm{col}(h_{1k}(t),\dots,h_{nk}(t))$, где $h_n(t)=\widehat{b}(t)$, а векторы $h_k(t)$ при $k<n$ строим справа налево с помощью следующей процедуры:

если вектор $h_k(t)$ уже построен и его последняя координата $h_{kk}(t)\equiv 0$ при всех $t\in[t_0,t_1]$, то $h_{k-1}(t)=h_k(t)$;

если $h_{kk}(t)\neq 0$ при $t\in(t_0,t_1)$ (но не исключаются равенства $h_{kk}(t_0)=0$ или $h_{kk}(t_1)=0$) и функции $\dfrac{h_{1k}(t)}{h_{kk}(t)},\dots,\dfrac{h_{k-1,k}(t)}{h_{kk}(t)}$ ограничены на интервале $(t_0,t_1)$, тогда на этом интервале построим вектор

$$g_k(t)\doteq\frac{h_k(t)}{h_{kk}(t)}=\mathrm{col}\left(\frac{h_{1k}(t)}{h_{kk}(t)}\dots\frac{h_{k-1,k}(t)}{h_{kk}(t)},1,0\dots 0\right),$$

у которого последние $n-k$ координат равны нулю. Если функция $h_{kk}(t)\equiv 0$, определим $g_k(t)\doteq\dfrac{h_k(t)}{h^*_{kk}(t)}$, где через $h^*_{kk}(t)$ обозначена последняя координата вектора $h_k(t)$, тождественно не равная нулю.

Затем вектор $h_{k-1}(t)$ определяется равенством

$$h_{k-1}(t)=(\widehat{A}(t)-\widehat{a}_{kk}(t)E^{(n)})g_k(t)-\dot{g}_k(t),\quad t\in(t_0,t_1). \tag{3.4}$$

Если функция $h_{kk}(t)$ обращается в нуль в некоторых изолированных точках $\tau_1\dots\tau_{m_k}$, $(t_0=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_{m_k}<\tau_{m_k+1}=t_1)$, то вектор $h_{k-1}(t)$ определяем по тем же формулам на каждом из интервалов $(\tau_i,\tau_{i+1})$, где $i=0\dots m_k$. В том случае, когда $h_{kk}(t)\equiv 0$ на некоторых отрезках $I_j\subset[t_0,t_1]$, то на этих отрезках вектор $h_{k-1}(t)=h_k(t)$, а для остальных точек множества $(t_0,t_1)\setminus\bigcup I_j$ векторы $h_{k-1}(t)$ находятся по формулам (3.4).

Заметим, что у векторов $h_k(t)$ и $g_k(t)$ последние $n-k$ координат нулевые, поэтому построенная таким образом матрица $\widehat{H}(t)$ является верхней треугольной и ранг $\widehat{H}(t)$ равен количеству ненулевых диагональных элементов $h_{11}(t),\dots,h_{nn}(t)$. Обозначим также через $g^{(k-1)}(t)$ вектор, состоящий из $k-1$ первых координат вектора $g_k(t)$, а через $h^{(k-1)}(t)$ — вектор, образованный из $k-1$ первых координат вектора $h_{k-1}(t)$.

В формулируемых ниже теоремах 3.1 — 3.4 и лемме 3.2 не предполагается, что $\mathrm{rank}\,\widehat{K}^{(n)}(t)=n$. Более того, содержательный смысл эти теоремы имеют, когда $\operatorname{rank}\widehat{K}^{(n)}(t) < n$ при всех $t \in [t_0, t_1]$, но они остаются верными и при выполнении равенства $\operatorname{rank}\widehat{K}^{(n)}(t) = n$.

Т е о р е м а 3.1. *Если при каждом $k = 1 \dots n$ либо $h_{kk}(t) \equiv 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$, либо $h_{kk}(t) \neq 0$ для любого $t$ из интервала $(t_0, t_1)$, то матрица $\widehat{K}^{(n)}(t)$ сохраняет ранг для всех $t \in (t_0, t_1)$ и*

$$\dim \widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1) = \operatorname{rank}\widehat{K}^{(n)}(t) = \operatorname{rank}\widehat{H}(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьем на несколько пунктов.

1. Докажем теорему для системы (3.1) с верхней треугольной матрицей второго порядка. Построим матрицу $\widehat{H}(t) = \{h_1(t), h_2(t)\}$.

Вектор $h_2(t)$ по определению равен $\widehat{b}(t)$. Если $h_{22}(t) \doteq \widehat{b}_2(t) \equiv 0$ для всех $t \in (t_0, t_1)$, то $h_1(t) \doteq h_2(t)$. Если, кроме того, $h_{11}(t) = \widehat{b}_1(t) \equiv 0$, то, очевидно, что $\dim \widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1) = \operatorname{rank}\widehat{K}^{(2)}(t) = \operatorname{rank}\widehat{H}(t) = 0$. Если $h_{22}(t) \equiv 0$, $h_{11}(t) \neq 0$ для всех $t \in (t_0, t_1)$, то $\operatorname{rank}\widehat{K}^{(2)}(t) = \operatorname{rank}\widehat{H}(t) \equiv 1$ при $t \in (t_0, t_1)$, и из теоремы 2.1 следует, что $\dim \widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1) = 1$.

Предположим, что функция $h_{22}(t)$ не обращается в нуль на интервале $(t_0, t_1)$, найдем вектор $g_2(t) = \operatorname{col}\Big(\dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}, 1\Big)$, тогда

$$h_{11}(t) = \Big(\widehat{a}_{11}(t) - \widehat{a}_{22}(t)\Big)\frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)} + \widehat{a}_{12}(t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}\right), \quad h_{22}(t) = \widehat{b}_2(t).$$

Если $h_{11}(t) \equiv 0$, то $\operatorname{rank}\widehat{H}(t) \equiv 1$, поэтому из (2.5) следует тождество $\operatorname{rank}\widehat{K}^{(2)}(t) \equiv 1$ и (в силу теоремы 2.1) равенство $\dim \widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1) = 1$.

Если координаты $h_{11}(t)$ и $h_{22}(t)$ не обращаются в нуль на интервале $(t_0, t_1)$, то $\operatorname{rank}\widehat{H}(t) \equiv 2$ и $\operatorname{rank}\widehat{K}^{(2)}(t) \equiv 2$. Поэтому, в силу теоремы 1.2, размерность пространства управляемости $\widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1)$ равна двум. Для систем второго порядка теорема доказана.

2. Пусть теорема верна для систем порядка $n-1$, т. е. выполнено следующее утверждение: если для каждого $k = 1 \dots n-1$, либо $h_{\text{кк}}(t) \equiv 0$ либо $h_{\text{кк}}(t)$ не обращается в нуль на $(t_0, t_1)$, то ранг матрицы $\widehat{K}^{(n-1)}(t)$ постоянный для всех $t \in (t_0, t_1)$ и

$$\dim \widehat{L}^{(n-1)}(t_0, t_1) = \operatorname{rank}\widehat{K}^{(n-1)}(t) = \operatorname{rank}\widehat{H}^{(n-1)}(t) = r - 1,$$

где $r$ — некоторое число.

Докажем по индукции, что отсюда следует справедливость теоремы для систем порядка $n$.

Пусть $h_{nn}(t) \doteq \widehat{b}_n(t) \equiv 0$, тогда $h_{n-1}(t) \doteq h_n(t)$ и выполнено равенство $\operatorname{rank}\widehat{H}^n(t) = \operatorname{rank}\widehat{H}^{(n-1)}(t) = r-1$. Непосредственно из определения $\widehat{K}^{(n)}(t)$ следует, что

$$\operatorname{rank}\widehat{K}^{(n)}(t) = \operatorname{rank}\widehat{K}^{(n-1)}(t) = r-1 \quad \text{и}$$
$$\operatorname{rank}\widehat{W}^{(n)}(t_0,t_1) = \operatorname{rank}\widehat{W}^{(n-1)}(t_0,t_1) = r-1.$$

Таким образом, если теорема верна для систем порядка $n-1$ и $h_{nn}(t) \equiv 0$, то она верна для систем порядка $n$, поэтому в дальнейшем будем полагать, что $h_{nn}(t) \neq 0$ на $(t_0,t_1)$.

Заметим, что $\operatorname{rank}\widehat{K}^{(n)}(t)$ не изменится, если функцию $\widehat{b}(t)$ домножить на произвольную отличную от нуля скалярную функцию. Представим $\widehat{b}(t)$ в виде $\widehat{b}(t) = g_n(t)\widehat{b}_n(t)$, где $g_n(t) = \operatorname{col}\left(\dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_n(t)} \ldots \dfrac{\widehat{b}_{n-1}(t)}{\widehat{b}_n(t)}, 1\right)$. При этом

$$\operatorname{rank}\widehat{K}^{(n)}(t) \doteq \operatorname{rank}(\widehat{q}_0(t)\ldots\widehat{q}_{n-1}(t)) = \operatorname{rank}(p_0(t)\ldots p_{n-1}(t)),\ \text{где}$$

$$p_0(t) = g_n(t), \ldots, p_k(t) = \widehat{A}(t)p_{k-1}(t) - \dot{p}_{k-1}(t), \quad k = 1\ldots n-1.$$

Ранг данной матрицы не изменится, если из второго столбца вычтем $\widehat{a}_{nn}(t)g_n(t)$, из третьего столбца вычтем второй столбец, умноженный на $\widehat{a}_{nn}(t)$ и т. д. Тогда $\operatorname{rank}\widehat{K}^{(n)}(t) = \operatorname{rank}(d_0(t)\ldots d_{n-1}(t))$, где

$$d_0(t) = g_n(t), \quad d_1(t) = h_{n-1}(t) \quad \ldots$$
$$d_k(t) = (\widehat{A}(t) - \widehat{a}_{nn}(t)E)d_{k-1}(t) - \dot{d}_{k-1}(t), \quad k = 2\ldots n-1.$$

В последней строке полученной матрицы на первом месте стоит единица, все остальные — нули, значит ранг матрицы $\widehat{K}^{(n)}$ можем выразить через ранг матрицы $\widehat{K}^{(n-1)}(t)$ (отвечающей системе 3.2) порядка $n-1$ следующим образом:

$$\operatorname{rank}\widehat{K}^{(n)}(t) = 1 + \operatorname{rank}(\widehat{q}_0^{(n-1)}(t)\ldots\widehat{q}_{n-2}^{(n-1)}(t)) = 1 + \operatorname{rank}\widehat{K}^{(n-1)}(t) = r,$$

где $\widehat{q}_0^{(n-1)}(t)$ — вектор размерности $(n-1)$, получающийся из вектора $h_{n-1}(t) = \operatorname{col}(h^{(n-1)}(t), 0)$ отбрасыванием последней нулевой координаты, т. е. $\widehat{q}_0^{(n-1)}(t) = h^{(n-1)}(t)$,

$$\widehat{q}_k^{(n-1)}(t) = (\widehat{A}^{(n-1)}(t) - \widehat{a}_{nn}(t)E^{(n-1)})\widehat{q}_{k-1}^{(n-1)}(t) - \dot{\widehat{q}}_{k-1}^{(n-1)}(t), \quad k = 1 \dots n-2.$$

3. Обозначим $\widehat{a}^{(n-1)}(t) = \mathrm{col}(\widehat{a}_{1n}(t) \dots \widehat{a}_{n-1,n}(t))$. Докажем, что имеет место следующее равенство

$$g^{(n-1)}(t) = X^{(n-1)}(t, t_0) \times \\ \times \left( \int_{t_0}^{t} X^{(n-1)}(t_0, s)\Big(\widehat{a}^{(n-1)}(s) - h^{(n-1)}(s)\Big)ds + g^{(n-1)}(t_0) \right). \quad (3.5)$$

Отметим, что $g_n(t)$ является решением системы

$$\dot{g}_n = \big(\widehat{A}(t) - \widehat{a}_{nn}(t)E\big)g_n - h_{n-1}(t). \quad (3.6)$$

Поскольку последняя координата вектора $g_n(t) = \mathrm{col}(g^{(n-1)}(t), 1)$ равна единице, последняя координата вектора $h_{n-1}(t)$ — нулю, а матрица $\widehat{A}(t) - \widehat{a}_{nn}(t)E$ имеет последнюю нулевую строку, то, рассматривая первые $n-1$ уравнений системы (3.6), приведем ее к следующей системе порядка $n-1$

$$\dot{g}^{(n-1)} = \big(\widehat{A}^{(n-1)}(t) - \widehat{a}_{nn}(t)E^{(n-1)}\big)g^{(n-1)} + \widehat{a}^{(n-1)}(t) - h^{(n-1)}(t).$$

В силу того, что матрица Коши соответствующей однородной системы равна $X^{(n-1)}(t, s)$, соотношение (3.5) следует из формулы вариации произвольных постоянных.

4. Найдем, как связаны матрицы $X^{(n)}(t, s)$ и $X^{(n-1)}(t, s)$. Поскольку система (3.1) имеет верхнюю треугольную матрицу $\widehat{A}(t)$, то, решив последнее уравнение однородной системы $\dot{x} = \widehat{A}(t)x$, можем перейти к следующей неоднородной системе уравнений порядка $n-1$ :

$$\dot{x} = \widehat{A}^{(n-1)}(t)x + \widehat{a}^{(n-1)}(t)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} \widehat{a}_{nn}(\tau)d\tau\Big).$$

Обозначим через $Y^{(n-1)}(t, s)$ матрицу Коши соответствующей однородной системы и заметим, что

$$Y^{(n-1)}(t, s) = X^{(n-1)}(t, s)\exp\Big(-\int_{t}^{s} \widehat{a}_{nn}(\tau)d\tau\Big),$$

откуда получаем

$$X^{(n)}(t,s)=\begin{pmatrix} Y^{(n-1)}(t,s) & -e^{-\int\limits_t^s \widehat{a}_{nn}(\tau)d\tau}\int\limits_t^s Y^{(n-1)}(t,\tau)\widehat{a}^{(n-1)}(\tau)e^{\int\limits_t^\tau \widehat{a}_{nn}(\theta)d\theta}d\tau \\ 0 & \exp\bigl(-\int\limits_t^s \widehat{a}_{nn}(t)dt\bigr) \end{pmatrix}=$$

$$=e^{-\int\limits_t^s \widehat{a}_{nn}(\tau)d\tau}\begin{pmatrix} X^{(n-1)}(t,s) & -\int\limits_t^s X^{(n-1)}(t,\tau)\widehat{a}^{(n-1)}(\tau)d\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.7)$$

Поскольку $\widehat{b}(t)=g_n(t)\widehat{b}_n(t)$, из (3.5) и (3.7) найдем

$$X^{(n)}(t_0,s)\widehat{b}(s)=\exp\Bigl(-\int_{t_0}^s \widehat{a}_{nn}(t)dt\Bigr)\times$$

$$\times\,\widehat{b}_n(s)\begin{pmatrix} -\int\limits_{t_0}^s X^{(n-1)}(t_0,t)h^{(n-1)}(t)dt+g^{(n-1)}(t_0) \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

Осталось доказать следующее утверждение: если

$$\operatorname{rank}\widehat{W}^{(n-1)}(t_0,t_1)=r-1, \quad \text{то} \quad \operatorname{rank}\widehat{W}^{(n)}(t_0,t_1)=r.$$

Как следует из леммы (3.1), для этого достаточно доказать, что если вектор $X^{(n-1)}(t_0,s)h^{(n-1)}(s)$ имеет $r-1$ линейно независимых на $[t_0,t_1]$ координат, то у вектора $X^{(n)}(t_0,s)\widehat{b}(s)$ количество таких координат равно $r$. Последнее утверждение выполняется в силу того, что число линейно независимых координат у векторов

$$X^{(n-1)}(t_0,s)h^{(n-1)}(s) \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^s X^{(n-1)}(t_0,t)h^{(n-1)}(t)dt$$

совпадает, а у вектора $X^{(n)}(t_0,s)\widehat{b}(s)$, как следует из соотношения (3.8), оно увеличивается на единицу. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.2. *Если при каждом $k=1\ldots n$ либо $h_{kk}(t)\equiv 0$ на отрезке $[t_0,t_1]$, либо функция $h_{kk}(t)$ не обращается в нуль для любого $t$ из интервала $(t_0,t_1)$, то пространство управляемости $\widehat{L}(t_0,t_1)$ является линейной оболочкой векторов $g_1(t_0+0)\ldots g_n(t_0+0)$ и, следовательно, размерность пространства $\widehat{L}(t_0,t_1)$ совпадает с максимальным числом линейно независимых векторов из множества $g_1(t_0+0)\ldots g_n(t_0+0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из теоремы 3.1, если при каждом $k = 1 \dots n$ функция $h_{kk}(t) \equiv 0$ или $h_{kk}(t) \neq 0$ для $t \in (t_0, t_1)$, то матрица $\widehat{K}^{(n)}(t)$ сохраняет ранг для всех $t \in (t_0, t_1)$ и выполнено равенство $\dim \widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1) = \operatorname{rank} \widehat{K}^{(n)}(t) = \operatorname{rank} \widehat{H}(t)$. Заметим также, что ранг матрицы $G(t_0) \doteq \{g_1(t_0+0), \dots, g_n(t_0+0)\}$ совпадает с рангом матрицы $\widehat{H}(t)$, поэтому в случае $\operatorname{rank} \widehat{K}^{(n)}(t) = n$ утверждение теоремы следует из теоремы 3.1.

Если $\operatorname{rank} \widehat{K}^{(n)}(t) < n$, доказательство разобьем на два пункта.

1. Докажем теорему сначала для систем второго порядка. Если ранг $G^{(2)}(t_0)$ равен нулю, утверждение теоремы следует из теоремы 3.1.

Пусть $\operatorname{rank} G^{(2)}(t_0) = 1$, в этом случае

$$G^{(2)}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } G^{(2)}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & g_{12}(t_0+0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейной оболочкой вектора $\operatorname{col}(1,0)$ является прямая $x_2 = 0$, а линейной оболочкой вектора $g_2(t_0+0) = \operatorname{col}(g_{12}(t_0+0), 1)$ — прямая $x_1 = g_{12}(t_0+0)x_2$. Покажем, что в каждом случае пространство управляемости $\widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1)$ совпадает с линейной оболочкой векторов $g_1(t_0+0)$ и $g_2(t_0+0)$.

Заметим, что матрица $G^{(2)}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, когда функция $\widehat{b}_1(t)$ не обращается в нуль на интервале $(t_0, t_1)$, а $\widehat{b}_2(t) \equiv 0$ на $[t_0, t_1]$. Как показано в теореме 2.1, в этом случае пространство управляемости $\widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1)$ не зависит от точек $t_0$, $t_1$ и

$$\widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1) = \widehat{L}^{(2)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}.$$

Если $G^{(2)}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & g_{12}(t_0+0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $g_{12}(t_0+0) = \widehat{z}(t_0+0)$, функция $\widehat{z}(t)$ определена равенством $\widehat{z}(t) = \dfrac{\widehat{b}_1(t)}{\widehat{b}_2(t)}$, то, по теореме 2.1, пространство управляемости $\widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1)$ не зависит от $t_1$ и

$$\widehat{L}^{(2)}(t_0, t_1) = \widehat{L}^{(2)}(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = g_{12}(t_0+0)x_2\}.$$

2. Предположим, что для системы порядка $n-1$ выполнено следующее утверждение: *если для каждого $k = 1 \dots n-1$ координата $h_{kk}(t) \equiv 0$*

*на* $[t_0, t_1]$ *или* $h_{kk}(t) \neq 0$ *для любого* $t$ *из* $(t_0, t_1)$, *то пространство управляемости* $\widehat{L}^{(n-1)}(t_0, t_1)$ *является линейной оболочкой векторов*

$$g_1^{(n-1)}(t_0+0), \ldots, g_{n-1}^{(n-1)}(t_0+0).$$

Верхний индекс $(n-1)$ здесь указывает на размерность системы.

Докажем, что отсюда следует справедливость утверждения теоремы для системы порядка $n$, если для каждого $k = 1 \ldots n$ функция $h_{kk}(t) \equiv 0$ на $[t_0, t_1]$ или $h_{kk}(t) \neq 0$ для любого $t$ из интервала $(t_0, t_1)$.

Как доказано в теореме 3.1, для данного случая ранг $\widehat{K}^{(n-1)}(t)$ постоянный и $\dim \widehat{L}^{(n-1)}(t_0, t_1) = \operatorname{rank} \widehat{K}^{(n-1)}(t)$. Пространство управляемости $\widehat{L}^{(n-1)}(t_0, t_1)$ задается в $\mathbb{R}^{n-1}$ некоторой системой уравнений (среди которых могут быть и одинаковые)

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $\alpha_{ij}$ — постоянные, $i, j = 1 \ldots n-1$. В случае $\operatorname{rank} \widehat{K}^{(n-1)}(t) = n-1$ все коэффициенты $\alpha_{ij} = 0$. Поскольку, по предположению индукции, пространство управляемости $\widehat{L}^{(n-1)}(t_0, t_1)$ является линейной оболочкой векторов $g_1^{(n-1)}(t_0+0), \ldots, g_{n-1}^{(n-1)}(t_0+0)$, то координаты этих векторов также должны удовлетворять системе (3.9).

Если $h_{nn}(t) \equiv 0$, то вектор $g_n(t_0+0)$ равен $\operatorname{col}(g_{n-1}^{(n-1)}(t_0+0), 0)$ и линейная оболочка векторов $g_1(t_0+0), \ldots, g_n(t_0+0)$ совпадает с линейной оболочкой векторов $\operatorname{col}(g_1^{(n-1)}(t_0+0), 0), \ldots, \operatorname{col}(g_{n-1}^{(n-1)}(t_0+0), 0)$. Напомним, что в силу теоремы (1.1) пространство управляемости $\widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1)$ является областью значений линейного преобразования $\widehat{W}^{(n)}(t_0, t_1)$. Поскольку при $h_{nn}(t) \equiv 0$ выполнено равенство

$$\operatorname{Im} \widehat{W}^{(n)}(t_0, t_1) = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} \widehat{W}^{(n-1)}(t_0, t_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то среди векторов, из которых состоит область значений оператора $\operatorname{Im} \widehat{W}^{(n)}(t_0, t_1)$, есть нулевой вектор, а остальные векторы получаются добавлением последней нулевой координаты к векторам, принадлежащим $\operatorname{Im} \widehat{W}^{(n-1)}(t_0, t_1)$. Таким образом, в данном случае пространство управляемости $\widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1)$ является линейной оболочкой векторов $g_1(t_0+0) \ldots g_n(t_0+0)$.

Если координата $h_{nn}(t)$ не обращается в нуль для всех $t \in (t_0, t_1)$, то, как следует из (3.8), вектор $X^{(n)}(t_0, s)\widehat{b}(s)$ при каждом $s$ пропорционален вектору

$$\begin{pmatrix} -\int\limits_{t_0}^{s} X^{(n-1)}(t_0, t)h^{(n-1)}(t)dt + g^{(n-1)}(t_0 + 0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{rank} \widehat{W}^{(n)}(t_0, t_1) < n$, то, с учетом симметрии матрицы $\widehat{W}^{(n)}(t_0, t_1)$, между ее соответствующими строками и столбцами существует одинаковая (т. е. с одинаковыми константами) линейная зависимость, причем такой же зависимостью связаны координаты вектора $X^{(n)}(t_0, s)\widehat{b}(s)$. Это означает, что координаты $x_1^{(n-1)}, \ldots, x_{n-1}^{(n-1)}$ вектора $X^{(n-1)}(t_0, s)h^{(n-1)}(s)$ удовлетворяют системе (3.9), которая задает пространство $\widehat{L}^{(n-1)}(t_0, t_1)$. Найдем связь между координатами $x_1 \ldots x_n$ вектора $X^{(n)}(t_0, s)\widehat{b}(s)$. Поскольку $x_k = x_k^{(n-1)} + g_{kn}$, $k = 1 \ldots n-1$ и $x_n = 1$, то координаты $x_k - g_{kn}x_n$, $k = 1 \ldots n-1$ удовлетворяют системе (3.9), поэтому $x_1 \ldots x_n$ связаны следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} - \beta_1 x_n = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} - \beta_{n-1}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

где постоянные $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$ находятся из соотношений

$$\beta_1 = \alpha_{11}g_{1n} + \cdots + \alpha_{1,n-1}g_{n-1,n} \ \ldots \ \beta_{n-1} = \alpha_{n-1,1}g_{1n} + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}g_{n-1,n}.$$

Система (3.10) задает в $\mathbb{R}^n$ пространство управляемости $\widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1)$. Покажем, что векторы $g_1(t_0 + 0), \ldots, g_n(t_0 + 0)$ содержатся в этом пространстве. По предположению индукции, в пространстве $\widehat{L}^{(n-1)}(t_0, t_1)$ содержатся векторы $g_1^{(n-1)}(t_0 + 0), \ldots, g_{n-1}^{(n-1)}(t_0 + 0)$, т. е. координаты этих векторов удовлетворяют системе (3.9), после добавления последней координаты $x_n = 0$ они будут содержатся в $\widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1)$. Понятно также, что координаты $(g_{1n} \ldots g_{n-1,n}, 1)$ вектора $g_n(t_0 + 0)$ удовлетворяют каждому уравнению системы (3.10), т. е. $g_n(t_0 + 0)$ содержится в $\widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1)$. Поскольку $\widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1)$ — линейное пространство, в нем содержится любая линейная комбинация векторов $g_1(t_0 + 0) \ldots g_n(t_0 + 0)$. Кроме того, в силу равенства

$$\dim \widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1) = \operatorname{rank}\{g_1(t_0 + 0) \ldots g_n(t_0 + 0)\},$$

в пространстве $\widehat{L}^{(n)}(t_0,t_1)$ не содержатся векторы, не принадлежащие линейной оболочке $g_1(t_0+0)\dots g_n(t_0+0)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Если на отрезке $[t_0,t_1]$ существуют изолированные точки $\tau_1\dots\tau_m$, в которых функция $h_{kk}(t)$ обращается в нуль, то в силу ограниченности функций $\dfrac{h_{ik}(t)}{h_{kk}(t)}$, в точках $\tau_1\dots\tau_m$ функции $h_{ik}(t)$ также обязаны обращаться в нуль. Следовательно, функции $h_k(t)$ и $h_{kk}(t)$ обращаются в нуль в одних и тех же точках, за исключением случая, когда $h_{kk}(t)\equiv 0$ на некотором интервале, принадлежащем $[t_0,t_1]$.

Т е о р е м а 3.3. *Предположим, что точки* $\tau_1\dots\tau_m$, *где*

$$t_0=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_m<\tau_{m+1}=t_1$$

*разбивают интервал* $(t_0,t_1)$ *на интервалы* $(\tau_i,\tau_{i+1})$, $i=0\dots m$, *на каждом из которых либо* $h_{kk}(t)\neq 0$, *либо* $h_{kk}(t)\equiv 0$. *Тогда пространство управляемости* $\widehat{L}^{(n)}(t_0,t_1)$ *является линейной оболочкой векторов*

$$X(\tau_0,\tau_i)g_1(\tau_i+0)\dots X(\tau_0,\tau_i)g_n(\tau_i+0),\quad i=0\dots m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что пространства управляемости $\widehat{L}^{(n)}(\tau_i,\tau_{i+1})$ для каждого из отрезков $[\tau_i,\tau_{i+1}]$, как следует из теоремы 3.2, являются линейной оболочкой векторов $g_1(\tau_i+0)\dots g_n(\tau_i+0)$. Найдем связь между пространством управляемости $\widehat{L}^{(n)}(t_0,t_1)$ на отрезке $[t_0,t_1]$ и пространствами управляемости $\widehat{L}^{(n)}(\tau_i,\tau_{i+1})$.

Предположим, что точка $x_i(\tau_i)$ принадлежит $\widehat{L}^{(n)}(\tau_i,\tau_{i+1})$. Тогда найдется некоторое допустимое управление $u_i(t)$, $t\in(\tau_i,\tau_{i+1})$, переводящее в момент $\tau_{i+1}$ эту точку в нуль, т. е.

$$x_i(\tau_{i+1})=X(\tau_{i+1},\tau_i)\left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}X(\tau_i,t)\widehat{b}(t)u_i(t)dt+x_i(\tau_i)\right)=0.$$

Покажем, что пространство управляемости $\widehat{L}^{(n)}(t_0,t_1)$ состоит из точек $x(t_0)=\sum\limits_{i=0}^{m}c_iX(\tau_0,\tau_i)x_i(\tau_i)$, где $c_i$ — произвольные постоянные. Для этого на отрезке $[t_0,t_1]$ построим управление

$$u(t)=\begin{cases} c_0u_0(t), & t\in(\tau_0,\tau_1),\\ \dots\dots\dots \\ c_mu_m(t), & t\in(\tau_m,\tau_{m+1}).\end{cases}$$

Предположим для определенности, что в каждой точке разрыва $\tau_i$ значение управления $u(t)$ равно пределу слева: $u(\tau_i) = u(\tau_i - 0)$, $i = 1 \dots m$ и что управления $u(t)$ непрерывно в концах отрезка $[t_0, t_1]$.

Покажем, что под действием допустимого управления $u(t)$ точка $x(t_1)$ приходит в нуль.

$$x(t_1) = X(t_1, t_0)\left(\int_{t_0}^{t_1} X(t_0, t)\widehat{b}(t)u(t)dt + x(t_0)\right) =$$

$$= X(t_1, t_0)\sum_{i=0}^{m}\left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} X(t_0, t)\widehat{b}(t)c_i u_i(t)dt + c_i X(\tau_0, \tau_i)x_i(\tau_i)\right) =$$
$$= X(t_1, t_0)\sum_{i=0}^{m} c_i X(\tau_0, \tau_i)\left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} X(\tau_i, t)\widehat{b}(t)u_i(t)dt + x_i(\tau_i)\right) = 0.$$

Теорема доказана.

Л е м м а 3.2. *Предположим, что точки $\tau_1 \dots \tau_m$, где*

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} = t_1$$

*разбивают интервал $(t_0, t_1)$ на интервалы $(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0 \dots m$, на каждом из которых либо $h_{kk}(t) \neq 0$, либо $h_{kk}(t) \equiv 0$.*

*Тогда пространство управляемости $\widehat{L}^{(n)}(t_0, t_1)$ является линейной оболочкой векторов*

$$g_1(\tau_0 + 0) \dots g_n(\tau_0 + 0), X(\tau_0, \tau_i)\big(g_1(\tau_i + 0) - g_1(\tau_i - 0)\big) \dots$$
$$X(\tau_0, \tau_i)\big(g_n(\tau_i + 0) - g_n(\tau_i - 0)\big), \quad i = 1 \dots m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторы $X(\tau_0, \tau_1)g_k(\tau_1 + 0)$, $k = 1 \dots n$ представим в виде

$$X(\tau_0, \tau_1)\big(g_k(\tau_1 + 0) - g_k(\tau_1 - 0)\big) + X(\tau_0, \tau_1)g_k(\tau_1 - 0)$$

и покажем, что вектор $X(\tau_0, \tau_1)g_k(\tau_1 - 0)$ является линейной комбинацией векторов $g_1(\tau_0 + 0) \dots g_k(\tau_0 + 0)$.

Заметим, что у векторов $g_k(\tau_0 + 0)$ и $g_k(\tau_1 - 0)$ последние $n - k$ координат являются нулевыми. Кроме того, поскольку функция $h_{kk}(t) \equiv 0$

или $h_{kk}(t) \neq 0$ на $(\tau_0, \tau_1)$, то для всех $t$ из интервала $(\tau_0, \tau_1)$ выполнено соотношение $g_{kk}(t) = g_{kk}(\tau_0 + 0) = g_{kk}(\tau_1 - 0)$. Следовательно, поскольку у вектора $g_1(t)$ может быть только одна ненулевая координата, то $g_1(t)$ постоянный на интервале $(\tau_0, \tau_1)$ и $g_1(\tau_0 + 0) = g_1(\tau_1 - 0)$. Поскольку матрица $X(\tau_0, \tau_1)$ — верхняя треугольная, то у вектора $X(\tau_0, \tau_1)g_1(\tau_1 - 0)$ последние $n-1$ координат также равны нулю. Первая координата $X(\tau_0, \tau_1)g_1(\tau_1 - 0)$ не равна нулю, когда выполнено равенство $g_{11}(\tau_0+0) = g_{11}(\tau_1-0) = 1$. Таким образом, для всех $t$ из интервала $(\tau_0, \tau_1)$ векторы $g_1(\tau_0 + 0)$, $X(\tau_0, \tau_1)g_1(\tau_1 - 0)$ и $X(\tau_0, t)g_1(t)$ пропорциональны.

Предположим, что для некоторого номера $k-1$ и для каждого $t$ из интервала $(\tau_0, \tau_1)$ вектор $X(\tau_0, t)g_{k-1}(t)$ является линейной комбинацией векторов $g_1(\tau_0 + 0) \dots g_{k-1}(\tau_0 + 0)$, т. е. существуют скалярные функции $c_1(t) \dots c_{k-1}(t)$, одновременно не равные нулю такие, что

$$X(\tau_0, t)g_{k-1}(t) = c_1(t)g_1(\tau_0 + 0) + \dots + c_{k-1}(t)g_{k-1}(\tau_0 + 0).$$

Докажем, что отсюда следует справедливость аналогичного утверждения для произвольного $k \leqslant n$.

Если $g_{kk}(t) = 1$ для $t \in (\tau_0, \tau_1)$, то

$$X(\tau_0, t)g_k(t) = \mathrm{col}\Big(X^{(k)}(\tau_0, t), 0 \dots 0\Big)g_k(t).$$

В силу соотношения (3.8) получаем

$$X(\tau_0, t)g_k(t) = \exp\Big(-\int_{\tau_0}^{t} \widehat{a}_{kk}(s)ds\Big)\Big\{g_k(\tau_0 + 0) + \\ + \mathrm{col}\Big(-\int_{\tau_0}^{t} X^{(k-1)}(\tau_0, s)h^{(k-1)}(s)ds, 0 \dots 0\Big)\Big\} =$$

$$= \exp\Big(-\int_{\tau_0}^{t} \widehat{a}_{kk}(s)ds\Big)\Big(g_k(\tau_0+0) - \sum_{i=1}^{k-1} g_i(\tau_0+0)\int_{\tau_0}^{t} h_{k-1,k-1}(s)c_i(s)ds\Big). \quad (3.11)$$

Поскольку при фиксированном $t = \tau_1$ все интегралы, входящие в (3.11), являются постоянными (зависящими от $\tau_1$), то $X(\tau_0, \tau_1)g_k(\tau_1 - 0)$ является линейной комбинацией векторов $g_1(\tau_0 + 0) \dots g_k(\tau_0 + 0)$.

Если $g_{kk}(\tau_0 + 0) = g_{kk}(\tau_1 - 0) = 0$, то, по определению, $g_k(t) = g_{k-1}(t)$ и вектор $X(\tau_0, \tau_1)g_k(\tau_1 - 0)$ является линейной комбинацией векторов $g_1(\tau_0 + 0) \dots g_{k-1}(\tau_0 + 0)$.

Аналогичным образом доказывается, что для любого $k = 1\dots n$ вектор $X(\tau_0, \tau_m)g_k(\tau_m - 0)$ является линейной комбинацией векторов $X(\tau_0, \tau_{m-1})g_i(\tau_{m-1} + 0)$, $i = 1\dots k$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполнены следующие условия:*

а) *точки $\tau_1 \dots \tau_m$, где $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} = t_1$, разбивают интервал $(t_0, t_1)$ на интервалы $(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0\dots m$, на каждом из которых либо $h_{kk}(t) \neq 0$, либо $h_{kk}(t) \equiv 0$.*

б) *функции $g_k(t)$ непрерывны или имеют устранимые разрывы (за возможным исключением конечного числа точек разрыва первого рода $\vartheta_1 \dots \vartheta_p$, в которых $g_k(\vartheta_i - 0) \neq g_k(\vartheta_i + 0)$ для некоторых $k = 1\dots n$).*

*Тогда пространство управляемости $\widehat{L}(t_0, t_1)$ совпадает с линейной оболочкой векторов*

$$g_1(\vartheta_0 + 0)\dots g_n(\vartheta_0 + 0), X(\vartheta_0, \vartheta_i)\big(g_1(\vartheta_i + 0) - g_1(\vartheta_i - 0)\big)\dots$$
$$X(\vartheta_0, \vartheta_i)\big(g_n(\vartheta_i + 0) - g_n(\vartheta_i - 0)\big), \quad i = 1\dots p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из леммы (3.2), поскольку для точек устранимого разрыва выполнено равенство

$$g_k(\tau_i + 0) - g_k(\tau_i - 0) = 0, \quad i = 1\dots m.$$

П р и м е р 3.1. Исследуем управляемость системы

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + u\widehat{b}(t), \quad \text{где}$$

$$\widehat{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & e^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{b}(t) = \mathrm{col}(t^3e^t, t^4e^t, t^3), \quad t \in [-1, 1].$$

Построим матрицу $\widehat{H}(t) = \{h_1(t), h_2(t), h_3(t)\}$, у которой $h_3(t) = \widehat{b}(t)$, тогда $g_3(t) = \mathrm{col}(e^t, te^t, 1)$, из (3.4) находим

$$h_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & e^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^t \\ e^t(t+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку вектор $h_2(t)$ имеет вторую координату $h_{22}(t)$, равную нулю, то $h_1(t) = h_2(t)$, поэтому

$$\widehat{H}(t) = \begin{pmatrix} 1-e^t & 1-e^t & t^3e^t \\ 0 & 0 & t^4e^t \\ 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix},$$

откуда получаем $g_1(t) = g_2(t) = \mathrm{col}(1,0,0)$.

Очевидно, что для всех $t$ из отрезка $[-1,1]$, кроме $t = 0$, ранг матрицы $\widehat{H}(t)$ равен двум. Найдем также

$$\widehat{K}(t) = \begin{pmatrix} t^3e^t & t^3 - 3t^2e^t & 2t^3 - 6t^2 + 6te^t \\ t^4e^t & e^t(t^4 - 3t^3) & e^t(t^4 - 6t^3 + 6t^2) \\ t^3 & t^3 - 3t^2 & t^3 - 6t^2 + 6t \end{pmatrix}.$$

Заметим, что у матрицы $\widehat{K}(t)$ вторая и третья строки пропорциональны, поэтому $\mathrm{rank}\,\widehat{K}(t) = 2$ для $t \in [-1,0) \bigcup (0,1]$.

Чтобы найти ранг матрицы $\widehat{W}(t_0,t_1)$, согласно лемме (3.1), достаточно посчитать количество линейно независимых координат вектора $\widehat{X}(t_0,s)\widehat{b}(s)$, поэтому найдем

$$\widehat{X}(-1,s)\widehat{b}(s) = \begin{pmatrix} e^{-1-s} & 0 & (-1-s)e^{-1-s} \\ 0 & e^{-2-2s} & (-1-s)e^{-2-s} \\ 0 & 0 & e^{-1-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^3e^s \\ s^4e^s \\ s^3 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{X}(-1,s)\widehat{b}(s) = \begin{pmatrix} e^{-1}(s^3 - (1+s)s^3e^{-s}) \\ -s^3e^{-2-s} \\ s^3e^{-1-s} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что у вектора $\widehat{X}(-1,s)\widehat{b}(s)$ вторая и третья координаты линейно зависимы, поэтому $\mathrm{rank}\,\widehat{W}(-1,1) = 2$, т. е. система не является вполне управляемой. Построим пространство управляемости данной системы. Для этого найдем те векторы $x$ из $\mathbb{R}^3$, которые принадлежат области значений оператора $\widehat{W}(-1,t)$ при некоторых $t$, т. е. $x = \widehat{W}(-1,t)z_x$, где $z_x \in \mathbb{R}^3$. Поскольку у вектора $X(-1,s)\widehat{b}(s)$ вторая и третья координаты линейно зависимы, такая же зависимость будет и между координатами вектора $x$, т. е. $x_2 = -e^{-1}x_3$. Поэтому пространство управляемости $\widehat{L}(-1,1)$ — это плоскость $x_2 + e^{-1}x_3 = 0$ в $\mathbb{R}^3$.

Используя результат теоремы 3.4, построим пространство управляемости $\widehat{L}(-1,1)$, не вычисляя матрицу $\widehat{W}(-1,1)$. Поскольку функции $g_k(t)$ непрерывны, достаточно найти линейную оболочку векторов

$$g_1(-1) = g_2(-1) = \mathrm{col}(1,0,0) \quad \text{и} \quad g_3(-1) = \mathrm{col}(e^{-1}, -e^{-1}, 1).$$

Нетрудно посчитать, что ею является плоскость $x_2 + e^{-1}x_3 = 0$.

П р и м е р 3.2. Рассмотрим систему $\dot{x} = \widehat{A}(t)x + u\widehat{b}(t)$, где $\widehat{A}(t)$ — матрица из примера (3.1),

$$\widehat{b}(t) = \mathrm{col}(t^3e^t, t^4e^t, t^3), \quad t \in [-1,0],$$
$$\widehat{b}(t) = \mathrm{col}(t^3, t^3, 0), \quad t \in (0,1].$$

В предыдущем примере нашли, что для $t \in [-1,0)$ выполнено соотношение $\operatorname{rank}\widehat{H}(t) = \operatorname{rank}\widehat{K}(t) = 2$ и $\operatorname{rank}\widehat{W}(-1,0) = 2$.

Найдем матрицы $\widehat{H}(t)$ и $\widehat{K}(t)$ для $t \in (0,1]$. Поскольку $h_{33}(t) \equiv 0$, то

$$h_2(t) = h_3(t) = \mathrm{col}(t^3, t^3, 0), \quad g_2 = \mathrm{col}(1,1,0),$$

и согласно (3.4),

$$h_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы

$$\widehat{H}(t) = \begin{pmatrix} -1 & t^3 & t^3 \\ 0 & t^3 & t^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{K}(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^3 - 3t^2 & t^3 + 6t \\ t^3 & 2t^3 - 3t^2 & 4t^3 + 6t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матриц $\widehat{H}(t)$ и $\widehat{K}(t)$ равен двум при $t \neq 0$. Вектор $X(0,s)b(s) = \mathrm{col}(s^3e^{-s}, s^3e^{-2s}, 0)$ имеет две линейно независимые координаты, поэтому $\operatorname{rank} W(0,1) = 2$.

Покажем, что данная система вполне управляема. Найдем

$$g_2(0-0) = \mathrm{col}(1,0,0), \; g_2(0+0) = \mathrm{col}(1,1,0) \; \text{ и}$$
$$g_3(0-0) = \mathrm{col}(1,0,1), \; g_3(0+0) = \mathrm{col}(1,1,0).$$

Заметим, что функции $g_2(t)$ и $g_3(t)$ имеют в нуле неустранимый разрыв первого рода, $g_1(t)$ — непрерывная функция и $g_1(-1+0) = g_2(-1+0)$, поэтому пространство управляемости $\widehat{L}(-1,1)$ является линейной оболочкой векторов

$$g_2(-1+0),\, g_3(-1+0),\, X(-1,0)(g_2(0+0) - g_2(0-0)),\, X(-1,0)(g_3(0+0) - g_3(0-0)).$$

Поскольку векторы $g_2(-1+0) = \mathrm{col}(e^{-1}, -e^{-1}, 1)$, $g_3(-1+0) = \mathrm{col}(1,0,0)$ и $X(-1,0)(g_2(0+0) - g_2(0-0)) = \mathrm{col}(0, e^{-2}, 0)$ линейно независимы, то пространство управляемости $\widehat{L}(-1,1)$ совпадает с $\mathbb{R}^3$.

Пример 3.3. Рассмотрим систему $\dot{x} = \widehat{A}(t)x + u\widehat{b}(t)$ на отрезке времени $[-1,1]$, где $\widehat{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & e^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\widehat{b}(t) = \mathrm{col}(t^4, t^4 e^t, t^3), \quad t \in [-1, 0],$$
$$\widehat{b}(t) = \mathrm{col}(t^4, t^3(t+1)e^t, t^3), \quad t \in (0, 1].$$

Построим пространство управляемости $\widehat{L}(-1,1)$ для данной системы и покажем, как оно связано с пространствами управляемости $\widehat{L}(-1,0)$ и $\widehat{L}(0,1)$ для отдельных отрезков $[-1,0]$ и $[0,1]$. Для этого найдем сначала матрицы $\widehat{H}(t)$ для $t \in [-1,0]$ и $t \in [0,1]$.

Если $t$ принадлежит отрезку $[-1,0]$, то $h_2(t) = \mathrm{col}(0,0,0)$,

$$\widehat{H}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^4 \\ 0 & 0 & t^4 e^t \\ 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}.$$

Для $t \in [0,1]$ матрица $\widehat{H}(t)$ задается соотношением

$$\widehat{H}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^4 \\ 0 & 0 & t^3(t+1)e^t \\ 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $h_3(0) = 0$, найдем

$$g_3(0-0) = \mathrm{col}(0,0,1) \ \text{ и } \ g_3(0+0) = \mathrm{col}(0,1,1),$$

следовательно, точка $t = 0$ является точкой разрыва первого рода функции $g_3(t)$ и $g_3(0-0) \neq g_3(0+0)$.

Если рассматривать систему на отрезке времени $[-1, 0]$, то пространство управляемости $\widehat{L}(-1, 0)$ является линейной оболочкой вектора

$$g_3(-1+0) = \mathrm{col}(-1, -e^{-1}, 1),$$

т. е. прямой $x_2 = e^{-1}x_1$, $x_3 = -x_1$. Для отрезка $[0, 1]$ пространство управляемости $\widehat{L}(0, 1)$ — линейная оболочка вектора $g_3(0+0) = \mathrm{col}(0, 1, 1)$, т. е. прямая $x_1 = 0$, $x_3 = x_2$.

Пространство управляемости $\widehat{L}(-1, 1)$, в силу теоремы 3.4, найдем как линейную оболочку векторов $g_3(-1+0), X(-1, 0)g_3(0+0)$. Для этого вычислим $X(-1, 0)g_3(0+0) = \mathrm{col}(-e^{-1}, 0, e^{-1})$ и определим плоскость, содержащую векторы $g_3(-1+0)$ и $X(-1, 0)g_3(0+0)$. Ею является плоскость $x_1 + x_3 = 0$. Чтобы проверить полученный результат, вычислим матрицу Калмана $\widehat{W}(-1, 1)$, используя соотношение (2.14):

$$\widehat{W}(-1,1) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-1}^{1} s^6 e^{-2s-2} ds & \int\limits_{-1}^{0} s^6 e^{-2s-3} ds & -\int\limits_{-1}^{1} s^6 e^{-2s-2} ds \\ \int\limits_{-1}^{0} s^6 e^{-2s-3} ds & \int\limits_{-1}^{0} s^6 e^{-2s-4} ds & -\int\limits_{-1}^{0} s^6 e^{-2s-3} ds \\ -\int\limits_{-1}^{1} s^6 e^{-2s-2} ds & -\int\limits_{-1}^{0} s^6 e^{-2s-3} ds & \int\limits_{-1}^{1} s^6 e^{-2s-2} ds \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что первая и третья строки матрицы $\widehat{W}(-1, 1)$ пропорциональны, ранг данной матрицы равен равен двум, а пространством управляемости является плоскость $x_1 + x_3 = 0$.

# Глава 2. Устойчивая управляемость нелинейной нестационарной системы второго порядка

В данной главе изучаются условия локальной управляемости и устойчивой локальной управляемости системы второго порядка

$$\dot{x} = f_0(x,t) + u f_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [-1,1]$$

в ґкритическом случаеЄ, т. е. в случае, когда система линейного приближения не является локально управляемой.

Получены достаточные и необходимые условия устойчивой управляемости на отрезке $[t_0, t_1]$ системы второго порядка в ґкритическом случаеЄ.

## §4. Различные типы локальной управляемости

В данном параграфе сравниваются различные виды локальной управляемости для нестационарных систем. Доказаны также некоторые вспомогательные утверждения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x,t) + u f_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [-1,1]. \tag{4.1}$$

Предполагается, что $f_0(0,t) = 0$, $f_1(0,t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и функции $f_0(x,t)$, $f_1(x,t)$ являются аналитическими функциями в $\mathbb{R}^3$.

О п р е д е л е н и е 4.1. *Допустимым решением* системы (4.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x = x(t, x_0, t_0), t \in I_0$, которая почти всюду на $I_0 \subset \mathbb{R}$ удовлетворяет системе (4.1) при некотором *допустимом управлении,* т. е. измеримой функции $u : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

Под $I_0 = I_0(u(\cdot))$ здесь понимается максимальный интервал существования решения задачи Коши $\dot{x} = f_0(x,t) + u(t) f_1(x,t), \quad x(t_0) = x_0$.

Траекторию допустимого решения $x = x(t, x_0, t_0)$, $t \in I_0$ в $\mathbb{R}^3$ будем называть *допустимой траекторией* системы (4.1) и обозначать $\gamma(x_0, t_0)$, т.е. $\gamma(x_0, t_0) \doteq \{(x,t) : x = x(t, x_0, t_0),\ t \in I_0\}$. Направление движения вдоль траектории при возрастании $t$ назовем *положительным.*

О п р е д е л е н и е 4.2. Система (4.1) называется *локально управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если существует $\varepsilon > 0$, что для каждой точки $x_0 \in O^2_\varepsilon$ найдется допустимое решение $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ системы (4.1), удовлетворяющее условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$.

Система (4.1) называется *локально управляемой в точке* $t_0$, если она локально управляема на некотором отрезке $[t_0, t_1]$.

О п р е д е л е н и е 4.3. Система (4.1) называется *устойчиво локально управляемой* или просто *устойчиво управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждой точки $x_0 \in O^2_\delta$ существует допустимое решение $x(t)$ системы (4.1), удовлетворяющее условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, $|x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Система (4.1) называется *устойчиво управляемой в точке* $t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $t_1 > t_0$, что для каждой точки $x_0 \in O^2_\delta$ существует допустимое решение $x(t)$ системы (4.1), удовлетворяющее условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, $|x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Очевидно, что если система (4.1) устойчиво управляема, то она локально управляема. Обратное неверно, соответствующий пример приведен в шестом параграфе.

Наряду с системой (4.1) рассмотрим системы

$$\dot{x} = f_0(x,t) + f_1(x,t), \tag{4.2}$$

$$\dot{x} = f_0(x,t) - f_1(x,t), \tag{4.3}$$

отвечающие управлениям $u \equiv 1$ и $u \equiv -1$ соответственно и систему линейного приближения для системы (4.1)

$$\dot{y} = A(t)y + b(t)u, \tag{4.4}$$

где $A(t) = \dfrac{\partial f_0(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}$, $b(t) = f_1(0,t)$.

По-прежнему матрица $K(t) \doteq (b(t), A(t)b(t) - \dot{b}(t))$. Известно, что если найдется такая точка $\tau \in \mathbb{R}$, что $\operatorname{rank} K(\tau) = 2$, то система (4.4) является локально управляемой в любой конечной точке $t_0 < \tau$ (см. [21, стр. 148]).

В данной главе будем предполагать, что $\operatorname{rank} K(t) \leqslant 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и система (4.4) не является локально управляемой (как показано в первой главе, при условии $\operatorname{rank} K(t) \leqslant 1$ система (4.4) может быть локально управляемой). Другими словами, рассматривается случай, когда не применима теорема о локальной управляемости по первому приближению.

Понятно, что решения систем (4.2) и (4.3) являются допустимыми решениями системы (4.1). Через $x = x_+(t,\tau)$ и $x = x_-(t,\tau)$ обозначим соответственно решения систем (4.2) и (4.3), удовлетворяющие условию $x_+(\tau,\tau) = x_-(\tau,\tau) = 0$, а через $\gamma_+(\tau)$ и $\gamma_-(\tau)$ обозначим траектории данных решений в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$, т. е.

$$\gamma_+(\tau) \doteq \{(x,t):\ x = x_+(t,\tau),\, t \in I_\tau^+\},$$
$$\gamma_-(\tau) \doteq \{(x,t):\ x = x_-(t,\tau),\, t \in I_\tau^-\}.$$

Здесь через $I_\tau^+$ и $I_\tau^-$ обозначены максимальные интервалы существования решений $x = x_+(t,\tau)$ и $x = x_-(t,\tau)$.

*Интегральную поверхность,* образованную траекториями $\gamma_+(\tau), \tau\in\mathbb{R}$, обозначим $M_+$, а интегральную поверхность, образованную траекториями $\gamma_-(\tau)$, соответственно обозначим $M_-$, т. е.

$$M_+ \doteq \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \gamma_+(\tau), \quad M_- \doteq \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \gamma_-(\tau).$$

Аналогично, пусть $y_+(t,\tau)$ и $y_-(t,\tau)$ — решения системы линейного приближения (4.4), отвечающие управлениям $u\equiv 1$ и $u\equiv -1$ и удовлетворяющие условию $y_+(\tau,\tau)=y_-(\tau,\tau)=0$, а $\zeta_+(\tau)$ и $\zeta_-(\tau)$ — траектории данных решений в $\mathbb{R}^3$. Определим интегральные поверхности

$$L_+ \doteq \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \zeta_+(\tau), \quad L_- \doteq \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \zeta_-(\tau).$$

Обозначим также $\widehat{f}_+(x,t) \doteq \mathrm{col}(f_+(x,t),1)$, $\widehat{f}_-(x,t) \doteq \mathrm{col}(f_-(x,t),1)$, где $f_+(x,t)\doteq f_0(x,t)+f_1(x,t)$, $f_-(x,t)\doteq f_0(x,t)-f_1(x,t)$.

Л е м м а 4.1. *Пусть $f_0, f_1 \in C^k(\mathbb{R}^3)$. Для любого отрезка $[t_0,t_1]$ существует $\varepsilon>0$ такое, что пересечение цилиндрической окрестности $Ц_\varepsilon \doteq O^2_\varepsilon\times(t_0-\varepsilon,t_1+\varepsilon)$ с множествами $M_+$ и $M_-$ суть гладкие (класса $C^k$) двумерные интегральные многообразия систем (4.2) и (4.3) соответственно. Более того, окрестность $Ц_\varepsilon$ можно выбрать так, что каждое из многообразий $M_+$ и $M_-$ в отдельности делит область $Ц_\varepsilon$ на две непересекающиеся подобласти.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение леммы для множества $M_+$. Для $M_-$ оно доказывается аналогично.

Поскольку $f_0(0,t)=0$, $f_1(0,t)\neq 0$, то $f_+(0,t)\neq 0$, т. е. векторное поле $\widehat{f}_+(x,t)$ направлено трансверсально оси $(0t)$, рассматриваемой как аналитическое одномерное многообразие в $\mathbb{R}^3$. Известно [41], что при данных условиях в некоторой окрестности $Ц_\varepsilon$ существует одна и только одна интегральная поверхность системы (4.2), проходящая через ось $(0t)$. Данная поверхность может быть описана, как множество нулей скалярной функции $\varphi_+\in C^k(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, для которой $\operatorname{grad}\varphi_+(x,t)\neq 0$ в точках оси $(0t)$. Сама функция $\varphi_+(x,t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial\varphi_+(x,t)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial\varphi_+(x,t)}{\partial x}, f_+(x,t)\right\rangle = 0 \qquad (4.5)$$

и условию $\varphi_+(0,t)=0$, $t\in[t_0,t_1]$.

Заметим, что $\operatorname{grad}\varphi_+(x,t)\neq 0$ для всех $(x,t)$ из окрестности $Ц_\varepsilon$. Поэтому множество $\mathcal{M}\doteq\{(x,t)\in Ц_\varepsilon:\varphi_+(x,t)=0\}$ разделяет окрестность $Ц_\varepsilon$ на две непересекающихся области

$$\{(x,t)\in Ц_\varepsilon:\varphi_+(x,t)>0\}\ \text{и}\ \{(x,t)\in Ц_\varepsilon:\varphi_+(x,t)<0\}$$

и является гладким, класса $C^k$ двумерным интегральным многообразием системы (4.2). Непосредственно из определения интегральной поверхности следует, что $\mathcal{M}=M_+\bigcap Ц_\varepsilon$.

Лемма доказана.

Из леммы 4.1 следует, что многообразия $M_+$ и $M_-$ можно представить в виде

$$M_+=\{(x,t):\varphi_+(x,t)=0\},\quad M_-=\{(x,t):\varphi_-(x,t)=0\},$$

где функция $\varphi_-(x,t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial\varphi_-(x,t)}{\partial t}+\Big\langle\frac{\partial\varphi_-(x,t)}{\partial x},f_-(x,t)\Big\rangle=0,\quad \varphi_-(0,t)=0.$$

О п р е д е л е н и е 4.4. Многообразие $M\subset\mathbb{R}^3$ называется *инвариантным многообразием* системы (4.1), если всякая допустимая траектория $\gamma(x_0,t_0)$, $(x_0,t_0)\in M$ системы (4.1) целиком содержится в многообразии $M$.

Л е м м а 4.2. *Пусть* $\operatorname{rank}K(t)\equiv 1$, $t\in\mathbb{R}$. *Тогда для любого отрезка* $[t_0,t_1]$ *найдется цилиндрическая окрестность*

$$Ц_\varepsilon\doteq O^2_\varepsilon\times(t_0-\varepsilon,t_1+\varepsilon),$$

*что* $\mathcal{L}_+\doteq L_+\bigcap Ц_\varepsilon\equiv\mathcal{L}_-\doteq L_-\bigcap Ц_\varepsilon$, *причем* $L_0\doteq\mathcal{L}_+$ *является гладким двумерным инвариантным многообразием системы* (4.4) *и, кроме того,* $T_{(0,t)}M_+=T_{(0,t)}M_-=T_{(0,t)}L_0$ *для всех* $t\in[t_0,t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично лемме (4.1) доказывается, что множества $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ являются гладкими двумерным интегральными многообразиям системы (4.4).

Покажем, что если $\operatorname{rank}K(t)\equiv 1$, то в каждой точке $(x,t)$ многообразия $\mathcal{L}_+$ касательное пространство $T_{(x,t)}\mathcal{L}_+$ содержит вектор

$$\widehat{a}_-(x,t)\doteq\operatorname{col}(A(t)x-b(t),1).$$

Поскольку многообразие $\mathcal{L}_+$ содержит все точки траектории $\zeta_+(\tau)$ в некоторой цилиндрической окрестности $Ц_{\varepsilon_1}$, то касательное пространство $T_{(x,t)}\mathcal{L}_+$ содержит вектор $\widehat{a}_+(x,t) \doteq \mathrm{col}(A(t)x+b(t),1)$ — касательный вектор к кривой $\zeta_+(\tau)$. Кроме того, пространству $T_{(x,t)}\mathcal{L}_+$ принадлежит вектор $\widehat{l}_+(y_+,t) \doteq \mathrm{col}(l_+(y_+,t),0)$, где $l_+(y_+,t) = l_+(y_+(t,\tau),t) \doteq \dfrac{\partial y_+(t,\tau)}{\partial \tau}$. Так как

$$y_+(t,\tau) = X(t,\tau)\int_\tau^t X(\tau,s)b(s)ds,$$

то

$$\frac{\partial y_+(t,\tau)}{\partial \tau} = -X(t,\tau)b(\tau). \tag{4.6}$$

В силу условия $b(\tau) \neq 0$ векторы $\widehat{a}_+(x,t)$ и $\widehat{l}_+(y_+,t)$ линейно независимы. Поскольку определитель $\det(b(t), A(t)b(t) - \dot{b}(t)) \equiv 0$, а функция $b(t) \neq 0$, то столбцы матрицы $K(t)$ пропорциональны, т. е. существует скалярная функция $k(t)$ такая, что $A(t)b(t) - \dot{b}(t) = k(t)b(t)$. Поэтому функция $b(t)$ является решением системы

$$\dot{b} = (A(t) - k(t)E)b, \tag{4.7}$$

где $E$ — единичная матрица второго порядка. Следовательно, для функции $b(t)$ выполнено равенство $b(t) = X_0(t,\tau)b(\tau)$, где $X_0(t,\tau)$ — матрица Коши системы (4.7). В таком случае $b(t) = \exp\bigl(-\int\limits_\tau^t k(s)ds\bigr)X(t,\tau)b(\tau)$ и в силу (4.6) получаем

$$\begin{aligned}\det(b(t), l_+(y_+,t)) &= \det(b(t), -X(t,\tau)b(\tau)) = \\ &= \exp\Bigl(-\int_\tau^t k(s)ds\Bigr)\det\Bigl(X(t,\tau)b(\tau), -X(t,\tau)b(\tau)\Bigr) \equiv 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Покажем, что векторы $\widehat{a}_+(x,t)$, $\widehat{l}_+(y_+,t)$ и $\widehat{a}_-(x,t)$, вычисленные вдоль траектории $\zeta_+(\tau)$, линейно зависимы, откуда будет следовать, что касательное пространство $T_{(x,t)}\mathcal{L}_+$ содержит вектор $\widehat{a}_-(x,t)$. Для этого найдем ранг матрицы, составленной из векторов $\widehat{a}_+(x,t)$, $\widehat{l}_+(y_+,t)$ и $\widehat{a}_-(x,t)$ :

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A(t)x + b(t) & A(t)x - b(t) & l_+(y_+,t) \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A(t)x+b(t) & b(t) & l_+(y_+,t) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1+\operatorname{rank}\Big(b(t), l_+(y_+,t)\Big) \equiv 2.$$

Поскольку пространство $T_{(x,t)}\mathcal{L}_+$ содержит векторы $\widehat{a}_+(x,t)$, $\widehat{a}_-(x,t)$, то оно также содержит векторы $\dfrac{1}{2}(\widehat{a}_+(x,t)+\widehat{a}_-(x,t)) = \operatorname{col}(A(t)x,1)$ и $\dfrac{1}{2}(\widehat{a}_+(x,t)-\widehat{a}_-(x,t)) = \operatorname{col}(b(t),0)$, а следовательно и векторы

$$\operatorname{col}(A(t)x+ub(t),1), \quad u\in[-1,1].$$

Поэтому для любого допустимого решения $x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ системы (4.4) с начальным условием $(x_0,t_0)\in\mathcal{L}_+$ следует, что $(x(t),t)\in\mathcal{L}_+$ для всех $(x(t),t)\in Ц_{\varepsilon_1}$, т. е. $\mathcal{L}_+$ является инвариантным многообразием системы (4.4). И поскольку вектор $\operatorname{col}(x_-(\tau,\tau),\tau)=\operatorname{col}(0,\tau)$ содержится в многообразии $\mathcal{L}_+$ для всех $\tau\in\mathbb{R}$, то траектория $\zeta_-(\tau)\subset\mathcal{L}_+$, и следовательно, многообразие $\mathcal{L}_-$, состоящее из траекторий $\zeta_-(\tau)$, также содержится в многообразии $\mathcal{L}_+$. Аналогично показывается, что $\mathcal{L}_+\subset\mathcal{L}_-$ в некоторой цилиндрической окрестности $Ц_{\varepsilon_2}$, т. е. $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ совпадают в окрестности $Ц_\varepsilon$, где $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Покажем, что касательные пространства к многообразиям $M_+$, $M_-$ и $L_0$ в точках отрезка $[t_0,t_1]$ совпадают. Это очевидно следует из того, что касательное пространство $T_{(0,t)}M_+$ является линейной оболочкой векторов $e_1\doteq(0,0,1)$ и $\widehat{f}_+(0,0,t)=\operatorname{col}(b_1(t),b_2(t),1)$, а пространство $T_{(0,t)}L_0$ совпадает с линейной оболочкой $e_1$ и $\widehat{a}_+(0,0,t)=\operatorname{col}(b_1(t),b_2(t),1)$. Понятно, что эти линейные оболочки совпадают и совпадают касательные пространства $T_{(0,t)}M_+=T_{(0,t)}L_0$. Аналогично доказывается, что в точках отрезка $[t_0,t_1]$ выполнено равенство $T_{(0,t)}M_-=T_{(0,t)}L_0$. Лемма доказана.

## §5. Достаточные и необходимые условия устойчивой управляемости системы второго порядка

В данном параграфе получены достаточные и необходимые условия устойчивой управляемости системы $\dot{x} = f_0(x,t) + uf_1(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^3$.

Опишем различные случаи взаимного расположения введенных ранее многообразий $M_+ = \{(x,t) : \varphi_+(x,t) = 0\}$ и $M_- = \{(x,t) : \varphi_-(x,t) = 0\}$. Очевидно, что $M_+$ и $M_-$ имеют общую прямую — ось $(Ot)$, но кроме оси $(Ot)$ они могут иметь и другие общие точки. Если многообразия $M_+$ и $M_-$ совпадают на некоторой площадке $S$, то, в силу аналитичности функций $f_0(x,t)$ и $f_1(x,t)$, они совпадают всюду.

О п р е д е л е н и е 5.1. Скажем, что многообразия $M_+$ и $M_-$ *касаются без пересечения* в точке $(0,\tau)$ на оси $(Ot)$, если найдется окрестность $O^3_\varepsilon(0,\tau)$, что $\varphi_+(x,t) > 0$ или $\varphi_+(x,t) < 0$ для всех точек $(x,t)$ из $(O^3_\varepsilon(0,\tau) \bigcap M_-) \setminus (Ot)$.

Как доказано в лемме 4.2, если $\operatorname{rank} K(t) \equiv 1$, то многообразия $M_+$ и $M_-$ в каждой точке оси $(Ot)$ имеют общую касательную плоскость, при этом они могут пересекаться в окрестности некоторой точки оси $(Ot)$ или касаться без пересечения. Кроме того, $M_+$ и $M_-$ могут иметь точки ветвления.

О п р е д е л е н и е 5.2. Точку $(0,\tau)$ на оси $(Ot)$ назовем *точкой ветвления*, если через эту точку проходит хотя бы одна кривая пересечения многообразий $M_+$ и $M_-$, отличная от оси $(Ot)$.

Заметим, что если через точку $(0,\tau) \in (Ot)$ проходит бесконечное число различных кривых пересечения многообразий $M_+$ и $M_-$, то в силу аналитичности функций $f_0(x,t)$ и $f_1(x,t)$, $M_+$ и $M_-$ совпадают.

Т е о р е м а 5.1. *Если найдется интервал $I = (\tau_0, \tau_1) \subset (t_0, t_1)$ такой, что для каждого $\tau \in I$ функция*

$$t \to S_+(t,\tau) \doteq \det\Big(f_1(x_+(t,\tau),t), \frac{\partial x_+(t,\tau)}{\partial \tau}\Big)$$

*меняет знак в точке $t = \tau$, то система* (4.1) *устойчиво локально управляема на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Т е о р е м а 5.2. *Если для каждого фиксированного* $\tau \in (t_0, t_1)$ *функция* $t \to S_+(t,\tau)$ *сохраняет знак при переходе через точку* $t = \tau$ *и на интервале* $(t_0, t_1)$ *нет точек ветвления, или если при* $t \in [t_0, t_1]$ *имеет место тождество* $S_+(t,\tau) \equiv 0$, *то система* (4.1) *не является устойчиво локально управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$.

З а м е ч а н и е 5.1. Отметим, что $S_+(\tau,\tau) = \det(b(\tau), \ell_+(y_+,\tau))$, и тогда в силу (4.8) из условия $\operatorname{rank}(b(\tau), A(\tau)b(\tau) - \dot{b}(\tau)) = 1$ следует, что $S_+(\tau,\tau) = 0$.

Прежде чем перейти к доказательству теорем, докажем вспомогательные утверждения.

Введем следующие обозначения. Пусть $\gamma_+^1(\tau)$ — полутраектория решения $x_+(t,\tau)$ при $t \leqslant \tau$, $\gamma_+^2(\tau)$ — полутраектория $x_+(t,\tau)$ при $t > \tau$, т. е.

$$\gamma_+^1(\tau) \doteq \{(x,t) : x = x_+(t,\tau), t \leqslant \tau\},\ \gamma_+^2(\tau) \doteq \{(x,t) : x = x_+(t,\tau), t > \tau\},$$
$$\gamma_-^1(\tau) \doteq \{(x,t) : x = x_-(t,\tau), t \leqslant \tau\},\ \gamma_-^2(\tau) \doteq \{(x,t) : x = x_-(t,\tau), t > \tau\}.$$

Представим $M_+$ в виде объединения $M_+ = M_+^1 \bigcup M_+^2$, $M_- = M_-^1 \bigcup M_-^2$, где

$$M_+^1 \doteq \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \gamma_+^1(\tau), \qquad M_+^2 \doteq \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \gamma_+^2(\tau),$$
$$M_-^1 \doteq \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \gamma_-^1(\tau), \qquad M_-^2 \doteq \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \gamma_-^2(\tau).$$

Л е м м а 5.1. *Если существует точка* $(0,\tau)$, $\tau \in (t_0, t_1)$, *в которой многообразия* $M_+$ *и* $M_-$ *касаются без пересечения, то система* (4.1) *устойчиво управляема на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство разобьем на две части. В первой докажем, что при условии касания без пересечения многообразий $M_+$ и $M_-$ в точке $(0,\tau)$, $\tau \in (t_0, t_1)$ существует $\vartheta > 0$ такое, что система (4.1) устойчиво управляема на отрезке $[\tau - \vartheta, \tau + \vartheta]$. Во второй части покажем, что если система устойчиво управляема на отрезке $[\tau - \vartheta, \tau + \vartheta] \subset [t_0, t_1]$, то она устойчиво управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

1. Поскольку отрезок $(0, [t_0, t_1])$ общий для $M_+$ и $M_-$ и они касаются без пересечения в точке $\tau$, то в силу гладкости $M_+$ и $M_-$ найдется $\vartheta > 0$ такое, что $M_+$ и $M_-$ касаются без пересечения для всех точек множества $(0, [\tau - \vartheta, \tau + \vartheta]) \subset (0, (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)) \subset O_\varepsilon^3(0,\tau)$ (см. рис. 1).

Рис. 1. Рис. 2.

Отметим теперь, что всякая точка $(x_0, t_0)$ множества $M \doteq M_+^1 \bigcup M_-^1$ переходит на ось $Ot$ за конечное время, двигаясь по траекториям системы (4.1) под действием одного из управлений $u \equiv 1$ или $u \equiv -1$. Рассмотрим цилиндрическую окрестность $Ц_{\varepsilon_0} \doteq O^2_{\varepsilon_0} \times (\tau - \vartheta, \tau + \vartheta)$. Поскольку $M_+$ и $M_-$ касаются без пересечения по оси $(0t)$, $t \in [\tau - \vartheta, \tau + \vartheta]$, то $\varepsilon_0 > 0$ можно выбрать так, что все точки $M_+ \bigcap Ц_{\varepsilon_0}$ лежат по одну сторону от $M_- \bigcap Ц_{\varepsilon_0}$. Отметим теперь, что цилиндр $Ц_{\varepsilon_0}$ содержит два непересекающихся открытых множества $V_+$ и $V_-$ с общей границей $M = M_+^1 \bigcup M_-^1$. Здесь $V_+$ — множество, не содержащее точек $M_+$, а $V_-$ — множество, не содержащее точек $M_-$ (таким образом, замыкание объединения $V_+$ и $V_-$ совпадает с замыканием цилиндра $Ц_{\varepsilon_0}$). На рисунке 2 показано, как расположены множества $V_+$ и $V_-$ в сечении плоскостью $t = \mathrm{const}$.

Обозначим через $\Gamma_+$ совокупность отрезков траекторий системы (4.3), расположенных в цилиндре $Ц_{\varepsilon_0}$ и пересекающих $M_+^1 \bigcap Ц_{\varepsilon_0}$, а через $\Gamma_-$ совокупность отрезков траекторий системы (4.2) в $Ц_{\varepsilon_0}$, пересекающих $M_-^1 \bigcap Ц_{\varepsilon_0}$, т. е.

$$\Gamma_+ \doteq \{(x,t) \in Ц_{\varepsilon_0} : x = x_-(t, x_0, \theta),\ t \leqslant \theta,\ (x_0, \theta) \in M_+^1\},$$
$$\Gamma_- \doteq \{(x,t) \in Ц_{\varepsilon_0} : x = x_+(t, x_0, \theta),\ t \leqslant \theta,\ (x_0, \theta) \in M_-^1\},$$

где $x_\pm(t, x_0, \theta)$ — решение системы (4.2) (соответственно (4.3)) с начальной точкой $(x_0, \theta)$. Понятно, что множество $\Gamma \doteq \Gamma_+ \bigcup \Gamma_-$ целиком покрывает цилиндр $Ц_\delta \doteq O^2_\delta \times [\tau - \vartheta, \tau + \vartheta]$ при некотором $\delta > 0$. Но тогда из любой точки $(x_0, \tau - \vartheta) \in V_+ \bigcap Ц_\delta$, двигаясь по траекториям системы (4.2), изображающая точка достигает $M^1_-$ и далее, двигаясь с управлением $u \equiv -1$, достигает оси $(Ot)$. Соответственно из любой точки $(x_0, \tau - \vartheta) \in V_- \bigcap Ц_\delta$, двигаясь по траекториям системы (4.3), изображающая точка достигает $M^1_+$ и далее, двигаясь с управлением $u \equiv 1$, достигает оси $(Ot)$, не покидая при этом цилиндра $Ц_{\varepsilon_0}$. То есть система (4.1) устойчиво управляема на отрезке $[\tau - \vartheta, \tau + \vartheta]$.

2. Докажем, что если система (4.1) устойчиво управляема на отрезке $[\tau - \vartheta, \tau + \vartheta] \subset [t_0, t_1]$, то она устойчиво управляема на отрезке $[t_0, t_1]$. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $O_\delta(0, \tau - \vartheta)$, все точки которой, двигаясь по траекториям системы (4.1), могут быть переведены в нуль за время, не превышающее $2\vartheta$, не покидая при этом окрестности $O_\varepsilon \times (\tau - \vartheta, \tau + \vartheta)$. Для $t \in [t_0, \tau - \vartheta]$ положим $u \equiv 0$. Тогда, в силу теоремы о непрерывной зависимости решений системы $\dot{x} = f_0(t, x)$ от начальных данных, для каждого $\delta > 0$ можно выбрать такое $\delta_0 > 0$, что любое решение этой системы, начинающееся в $O_{\delta_0}(0, t_0)$, не покинет окрестности $O_\delta \times (t_0, \tau - \vartheta)$ и перейдет в момент $\tau - \vartheta$ в точку окрестности $O_\delta(0, \tau - \vartheta)$. Следовательно, каждая точка из $O_{\delta_0}(0, t_0)$ может быть переведена в $(0, \tau + \vartheta)$, не покидая при этом окрестности $O_\varepsilon \times (t_0, \tau + \vartheta)$, что и требовалось доказать.

Л е м м а 5.2. *Если найдется интервал $I = (\tau_0, \tau_1) \subset (t_0, t_1)$, что функция $S_+(t, \tau)$ меняет знак при $t = \tau$ в каждой точке $\tau \in I$, то $M_+$ и $M_-$ касаются без пересечения в точках $(0, \tau)$, $\tau \in I$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$S_+(t, \tau) \doteq \det(f_1(x_+(t, \tau), t), \ell_+(x_+(t, \tau), t)) = \\ = -\det(\widehat{f}_+(x_+(t, \tau), t), \widehat{f}_-(x_+(t, \tau), t), \widehat{\ell}_+(x_+(t, \tau), t)),$$

то условие, что $S_+(t, \tau)$ меняет знак при $t = \tau$ равносильно тому, что векторы $\widehat{f}_+(x_+(t, \tau), t)$, $\widehat{f}_-(x_+(t, \tau), t)$, $\widehat{\ell}_+(x_+(t, \tau), t)$, рассмотренные вдоль траектории $\gamma_+(\tau)$, меняют ориентацию в точке $t = \tau$. Как доказано в лемме 4.1, $M_+$ — гладкое двумерное многообразие, поэтому

$$\operatorname{rank}(\widehat{f}_+(x, t), \widehat{\ell}_+(x, t)) = 2$$

для всех $(x, t) \in M_+$. Следовательно, если векторы

$$\widehat{f}_+(x_+(t, \tau), t),\ \widehat{f}_-(x_+(t, \tau), t),\ \widehat{\ell}_+(x_+(t, \tau), t)$$

меняют ориентацию при $t = \tau$, то векторы $\widehat{f}_-(x_+(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta)$ и $\widehat{f}_-(x_+(\tau-\Delta,\tau),\tau-\Delta)$, где $\Delta > 0$, лежат по разные стороны от касательных плоскостей к $M_+$, построенных в точках кривой $\gamma_+(\tau)$. Поскольку $f_-(0,t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $t$ из интервала $(\tau-\delta,\tau+\delta)$ вектор $\widehat{f}_-(x_+(t,\tau),t)$ не обращается в нуль и переходит при $t = \tau$ с одной стороны многообразия $M_+$ на другую, причем вектор $\widehat{f}_-(0,\tau)$ содержится в касательном пространстве $T_{(0,\tau)}M_+$.

Предположим, что для каждого $\tau \in (\tau_0,\tau_1)$ $S_+(t,\tau) < 0$ при $t < \tau$ и $S_+(t,\tau) > 0$ при $t > \tau$. Тогда получается, что на $M_+^1$ $S_+(t,\tau) < 0$, на $M_+^2$ $S_+(t,\tau) > 0$ и на оси $(Ot)$ $S_+(t,\tau) = 0$. Обозначим $\psi(\tau)$ — угол между осью $(Ot)$ и $\widehat{f}_-(0,\tau)$, он равен углу между осью $(Ot)$ и $\widehat{f}_+(0,\tau)$. Поскольку $|b(t)| \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то $\psi(\tau) \neq 0$. Следовательно, при $t < \tau$ кривая $\gamma_-(\tau)$ касается $M_+^2$, а при $t > \tau$ $\gamma_-(\tau)$ касается $M_+^1$, на которых $S_+(t,\tau)$ разных знаков. Тогда, если при $t < \tau$ все траектории с направляющими векторами $\widehat{f}_-$ входят в $M_+^2$ ґсверху,Є то и ґпредельнаяЄ траектория $\gamma_-(\tau_0)$ при $t < \tau$ находится ґвышеЄ $M_+^2$. Действительно, выбрав на $M_+^2$ сходящуюся последовательность $(\widehat{x}_i,\widehat{\tau}_i) \to (0,\tau_0)$, получаем, что $\gamma_-(\widehat{x}_i,\widehat{\tau}_i)$ сходится к $\gamma_-(\tau)$ при $t < \tau_i$, поскольку все траектории $\gamma_-(\widehat{x}_i,\widehat{\tau}_i)$ подходят к $M_+^2$ ґсверхуЄ трансверсально, то и $\gamma_-(\tau)$ подходит при $t \to \tau - 0$ к $M_+^2$ ґсверхуЄ.

На $M_+^1$ также выберем сходящуюся последовательность $(x_i,\tau_i) \to (0,\tau)$. Тогда все траектории $\gamma_-(x_i,\tau_i)$ при $t > \tau_i$ находятся ґвышеЄ $M_+$, а следовательно и предельная траектория $\gamma_-(\tau)$ при $t > \tau$ находится ґвышеЄ $M_+$. Склеивая предельные полутраектории $\gamma_-(\tau)$ при $t < \tau$ и $t \geqslant \tau$ получаем, что $\gamma_-(\tau)$ не пересекает $M_+$ в точке $(0,\tau)$.

Иначе, если $\gamma_-(\tau)$ пересекает $M_+$ то $\gamma_-(\tau)$ при $t > \tau$ находится в окрестности $M_+^2$, такое может быть только если $\widehat{f}_+(0,\tau) = (0,0,1)$. Противоречие с тем, что $\varphi(\tau) \neq 0$. Следовательно, $\gamma_-(\tau)$ касается $M_+$ без пересечения.

Очевидно, что все траектории $\gamma_-(\tau)$, где $\tau \in (\tau_0,\tau_1)$ также не будут пересекать многообразие $M_+$. Это и означает, что $M_-$ касается без пересечения $M_+$ в точках $(0,t)$, $t \in I$.

Доказательство теоремы 5.1. Из леммы 5.2 следует, что если существует интервал $I = (\tau_0,\tau_1) \subset (t_0,t_1)$, что $S_+(t,\tau)$ меняет знак при $t = \tau$ в каждой точке $\tau \in I$, то найдется точка $t \in I$, что $M_+$ и $M_-$

касаются без пересечения в точке $(0,t)$. Следовательно, по лемме 5.1 система (4.1) устойчиво управляема на отрезке $[t_0,t_1]$.

Л е м м а 5.3. *Если многообразия $M_+$ и $M_-$ пересекаются в каждой точке $(0,t)$, $t\in(t_0,t_1)$, и на $(t_0,t_1)$ нет точек ветвления, то система* (4.1) *не является устойчиво управляемой на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим $M_+$ в виде объединения $M_+=M_+^1\bigcup M_+^2$ и $M_-=M_-^1\bigcup M_-^2$. В силу гладкости $M_+$ и $M_-$ делят некоторую цилиндрическую окрестность $Ц_\varepsilon\doteq O_\varepsilon^2(0)\times(t_0-\varepsilon,t_1+\varepsilon)$ на четыре открытых множества. Пусть $V$ — открытое подмножество $Ц_\varepsilon$, ограниченное $M_+^2\bigcup M_-^2$, не содержащее точек $M_+^1\bigcup M_-^1$ (см. рис.3).

Рис. 3.

Покажем, что для любой точки $(x_0,t_0)\in V$ не существует допустимого управления, переводящего $(x_0,t_0)$ в нуль, чтобы соответствующая траектория $\gamma(x_0,t_0)$ не покидала бы $Ц_\varepsilon$.

Действительно, пусть для некоторой точки $(x_0,\tau_0)\in V$ существуют $\tau>t_0$ и допустимое управление $u_{x_0}(t)$, $t\in[t_0,\tau]$, такое, что соответствующее им решение $x(t)=x(t,x_0,u_{x_0})$ удовлетворяет условиям $x(t_0)=x_0$, $x(\tau)=0$, $|x(t)|<\varepsilon$ для всех $t\in[t_0,\tau]$. Тогда существует такой момент $\vartheta\in[t_0,\tau]$, что $x(\vartheta)=x_1\in M_+^2\bigcup M_-^2$ (может быть $\vartheta=\tau$). Рассмотрим совокупность решений $x(t,u_{x_0})$ системы (4.1) при данном управлении $u_{x_0}(t)$, $t\in[t_0,\tau]$. Заметим, что для всех $\delta>0$ управление $u_{x_0}(t)$ переводит окрестность $O_\delta^3(x_0,t_0)$ в некоторую окрестность $O_{\delta_1}^3(x_1,\vartheta)$. Выберем $\delta$ такое, чтобы $O_\delta(x_0,\tau_0)\subset V$, $O_{\delta_1}(x_1,\vartheta)\subset Ц_\varepsilon$. В таком случае для того же управления существует решение $\widehat{x}(t, u_{x_0})$, удовлетворяющее условиям $\widehat{x}(t_0, u_{x_0}) \in O_\delta(x_0, t_0) \subset V$, $\widehat{x}(\vartheta, u_{x_0}) \in O_{\delta_1}(x_1, \vartheta) \setminus V$, и $\widehat{x}(t, u_{x_0}) \neq 0$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, т. е. траектория данного решения пересекает многообразие $M_+^2 \bigcup M_-^2$ со стороны $V$ во внешнюю сторону (см. рис.3). Но это невозможно, поскольку на $M_+^2 \bigcup M_-^2$ все векторы допустимых скоростей системы направлены внутрь области $V$ или касаются $\partial V = M_+^2 \bigcup M_-^2$. Полученное противоречие показывает, что система (4.1) не является устойчиво управляемой на отрезке $[t_0, t_1]$.

З а м е ч а н и е 5.2. Заметим, что если у $M_+$ и $M_-$ есть кривые пересечения за пределами указанной окрестности, то система (4.1) не может быть устойчиво локально управляемой на отрезке $[t_0, t_1]$, при этом свойство локальной управляемости не исключается (см. приведенный далее пример 6.2).

Л е м м а 5.4. *Если в некоторой цилиндрической окрестности* Ц$_\varepsilon \doteq O_\varepsilon^2 \times (t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ *многообразия* $M_+$ *и* $M_-$ *совпадают, то система* (4.1) *не является устойчиво управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть в окрестности Ц$_\varepsilon$ выполнено равенство $M_0 \doteq M_+ = M_-$, тогда $TM_0 = TM_+ = TM_-$ в любой точке $(x, t) \in M_0$. Поскольку $M_+$ — интегральное многообразие поля $\widehat{f}_+$, а $M_-$ — интегральное многообразие поля $\widehat{f}_-$, то векторы $\widehat{f}_+(x, t)$ и $\widehat{f}_-(x, t)$ содержатся в касательном пространстве $T_{(x,t)}M_0$. Тогда $T_{(x,t)}M_0$ содержит также векторы $\mathrm{col}(f_0, 1) = \dfrac{1}{2}\big(\widehat{f}_+ + \widehat{f}_-\big)$ и $\mathrm{col}(f_1, 0) = \dfrac{1}{2}\big(\widehat{f}_+ - \widehat{f}_-\big)$. Поскольку векторы $\mathrm{col}(f_0, 1)$ и $\mathrm{col}(f_1, 0)$ линейно независимы, то они составляют базис касательного пространства $T_{(x,t)}M_0$. Тогда в пространстве $T_{(x,t)}M_0$ также содержится вектор $\mathrm{col}(f_0, 1) + u\,\mathrm{col}(f_1, 0)$ для любого $u \in [-1, 1]$. Следовательно, $M_0$ является инвариантным многообразием системы (4.1), т. е никакая допустимая траектория, выходящая из точки $(x_0, t_0) \notin M_0$ не попадет на $M_0$. Это означает, что система (4.1) не является локально управляемой на отрезке $[t_0, t_1]$, а значит не является и устойчиво локально управляемой на данном отрезке. Лемма доказана.

Л е м м а 5.5. *Если функция* $S_+(t, \tau)$ *не меняет знак при* $t = \tau$, *то* $M_+$ *и* $M_-$ *пересекаются в точке* $(0, t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция $S_+(t,\tau)$ не меняет знак при $t=\tau$, то векторы $\widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t)$, $\widehat{\ell}_+(x_+(t,\tau),t)$ и $\widehat{f}_-(x_+(t,\tau),t)$ не меняют ориентацию вдоль траектории $\gamma_+(\tau)$. Тогда векторы $\widehat{f}_-(x_+(t,\tau),t)$ для $t<\tau$ и $t>\tau$ лежат по одну сторону от касательных плоскостей к $M_+$, построенных в точках траектории $\gamma_+(\tau)$. Поскольку $\widehat{f}_-(x_+(t,\tau),t)\neq 0$, $\widehat{f}_-(0,\tau)\subset T_{(0,\tau)}M_+$, то существует окрестность $O^3_\varepsilon(0,\tau)\bigcap M_+$, в которой $\widehat{f}_-$ лежат по одну сторону от $M_+$. Это означает, что любая кривая с направляющим вектором $\widehat{f}_-$ пересекает $O^3_\varepsilon(0,\tau)\bigcap M_+$. Следовательно, кривая $\gamma_-(\tau)$ также пересекает $M_+$, тогда существуют точки, принадлежащие $\gamma_-(\tau)\subset O^3_\varepsilon(0,\tau)\bigcap M_-$, лежащие по разные стороны от $M_+$, откуда получаем, что многообразия $M_+$ и $M_-$ пересекаются в точке $(0,\tau)$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5.2. Если $S_+(t,\tau)$ не меняет знак в каждой точке $t\in(t_0,t_1)$, то, в силу леммы (5.5), $M_+$ и $M_-$ пересекаются во всех точках $(0,t)$, $t\in(t_0,t_1)$. Тогда из леммы (5.3) следует, что если на $(t_0,t_1)$ нет точек ветвления, то система (4.1) не является устойчиво управляемой на $[t_0,t_1]$. Условие $S_+(t,\tau)\equiv 0$ на $[t_0,t_1]$ равносильно условию линейной зависимости векторов $\widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t)$, $\widehat{f}_-(x_+(t,\tau),t)$ и $\widehat{\ell}_+(x_+(t,\tau),t)$, тогда, поскольку $\widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t)$ и $\widehat{\ell}_+(x_+(t,\tau),t)$ составляют базис касательного пространства $TM_+$, то $\widehat{f}_-(x_+(t,\tau),t)$ также содержится в $TM_+$. Это означает, что $M_+$ является инвариантным многообразием системы (4.1), аналогично $M_-$ также является инвариантным многообразием системы (4.1) и поскольку $M_+\bigcap M_-$ непусто, то $M_+\equiv M_-$ в некоторой окрестности $Ц_\varepsilon\doteq O^2_\varepsilon\times(t_0-\varepsilon,t_1+\varepsilon)$. Тогда по лемме (4.3) система (4.1) не является устойчиво управляемой на отрезке $[t_0,t_1]$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5.3. Утверждение теорем 5.1 и 5.2 останется справедливым, если вместо функции $S_+(t,\tau)$ рассматривать функцию $S_-(t,\tau)\doteq\det\Big(f_1(x_-(t,\tau),t),\dfrac{\partial x_-(t,\tau)}{\partial\tau}\Big)$.

З а м е ч а н и е 5.4. Заметим, что теорема 5.1 имеет применение и в случае, когда система (4.1) не является интегрируемой при $u=1$ или $u=-1$. Для этого достаточно написать разложения решения $x_+(t,\tau)$ или $x_-(t,\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $t-\tau$ и вычислить несколько первых членов ряда для функции $S_+(t,\tau)$ или $S_-(t,\tau)$ соответственно.

## §6. Примеры

Приведены примеры применения теорем (5.1) и (5.2) для исследования устойчивой управляемости нелинейных систем, сравниваются различные виды локальной управляемости.

В примерах данного параграфа решается вопрос об устойчивой локальной управляемости нелинейных систем в ґкритическом случаеЄ. Также приведены примеры, которые показывают, что для нестационарных систем из локальной управляемости не следует устойчивая управляемость, а из устойчивой управляемости в точке не следует устойчивая управляемость на определенном отрезке.

П р и м е р 6.1. Исследуем устойчивую управляемость на отрезке $[t_0, t_1]$, $t_0 > 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_2^3 + 2tx_2 + t^2 u \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \qquad |u| \leqslant 1. \tag{6.1}$$

Системе (6.1) соответствует следующая система линейного приближения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2tx_2 + t^2 u \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \qquad |u| \leqslant 1. \tag{6.2}$$

Для системы (6.2) $\operatorname{rank} K(t) \equiv 1$ и в силу теоремы 2.1 система (6.2) не является локально управляемой. Следовательно, к системе (6.1) не применима теорема о локальной управляемости по первому приближению. При $u \equiv 1$ система (6.1) интегрируема, поэтому решение $x_+(t, \tau)$, соответствующее управлению $u \equiv 1$ и удовлетворяющее условию $x_+(\tau, \tau) = 0$, выписывается явно:

$$\begin{cases} x_1 = t^2(t-\tau) + \dfrac{1}{20}(t-\tau)^4(4t+\tau) \\ x_2 = t - \tau. \end{cases}$$

Найдем

$$S_+(t,\tau) = \begin{vmatrix} t^2 & -t^2 + \dfrac{1}{4}(\tau - t)^3(3t+\tau) \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(\tau - t)^3(3t+\tau).$$

Очевидно, что функция $t \to S_+(t,\tau)$ меняет знак при $t=\tau$ для любого $\tau>0$. Поэтому, в силу теоремы 5.1, система (6.1) устойчиво управляема на отрезке $[t_0,t_1]$.

Отметим, что управляемость системы (6.1) можно установить и с помощью леммы 4.1. Действительно, поскольку матрица $A(t)$ верхняя треугольная, то для каждого момента $t=\tau$ линейной оболочкой множества управляемости системы (6.2) на отрезке $[\tau,t_1]$ является прямая

$$b_2(\tau)x_1 - b_1(\tau)x_2 = 0. \tag{6.3}$$

Следовательно, многообразие $L_0 = \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-$ в цилиндрической окрестности $Ц_\varepsilon \doteq O^2_\varepsilon \times (t_0-\varepsilon, t_1+\varepsilon)$ представляет собой некоторую линейчатую поверхность, такую, что в сечении этой поверхности плоскостями $t=\tau$ получаются различные прямые (6.3). Поэтому для системы (6.2) существует инвариантное многообразие, которое задается в $\mathbb{R}^3$ уравнением $x_1 = t^2x_2$, т. е. $L_0 = \{(x,t)\in\mathbb{R}^3 : x_1 = t^2x_2\}$, причем для каждого фиксированного $t$ касательным пространством $T_{(0,t)}M_+ = T_{(0,t)}M_- = T_{(0,t)}L_0$ является плоскость $x_1 = t^2x_2$.

Найдем также $x_-(t,\tau)$ — допустимое решение (6.1), соответствующее управлению $u\equiv -1$ и начальному условию $x_-(\tau,\tau)=0$

$$\begin{cases} x_1 = t^2(-t+\tau) - \dfrac{1}{20}(\tau-t)^4(4t+\tau) \\ x_2 = -t+\tau. \end{cases}$$

Откуда получаем, что многообразия $M_+$ и $M_-$ задаются в $\mathbb{R}^3$ следующим образом

$$M_+ = \{(x,t)\in\mathbb{R}^3 : x_1 = t^2x_2 + \frac{1}{20}x_2^4(5t-x_2)\},$$
$$M_- = \{(x,t)\in\mathbb{R}^3 : x_1 = t^2x_2 - \frac{1}{20}x_2^4(5t-x_2)\}.$$

Отметим, что для $t_0>0$ существует окрестность $Ц_\varepsilon$, в которой $M_+$ и $M_-$ не имеют общих точек, кроме точек, лежащих на оси $(Ot)$, и в этой окрестности многообразие $L_0$ разделяет $M_+$ и $M_-$. Отсюда следует, что многообразия $M_+$ и $M_-$ касаются без пересечения во всех точках $(0,t)$ из $O^2_\varepsilon \times [t_0,t_1]$, и поэтому устойчивая управляемость системы (6.1) на отрезке $[t_0,t_1]$ следует из леммы 4.1.

П р и м е р 6.2. Исследуем локальную управляемость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = 4x_1^3 + 3x_1^2(e^{-t} - 1) - x_1^3 e^{-t} u, \end{cases} \qquad |u| \leqslant 1, \tag{6.4}$$

на произвольном отрезке $[t_0, t_1]$, где $t_0 > 0$.

Пусть $x_+(t,\tau)$ — допустимое решение системы (6.4), с начальным условием $x_+(\tau,\tau) = 0$, соответствующее управлению $u \equiv 1$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = t - \tau \\ x_2 = (t-\tau)^3(t - \tau - 1 + e^{-t}). \end{cases}$$

Найдем также $x_-(t,\tau)$ — допустимое решение (6.4) с начальным условием $x_-(\tau,\tau) = 0$, соответствующее управлению $u \equiv -1$

$$\begin{cases} x_1 = -t + \tau \\ x_2 = (t-\tau)^3(\tau - t - 1 + e^{-t}). \end{cases}$$

Тогда получаем, что многообразия $M_+$ и $M_-$ являются поверхностями в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющими соотношениям

$$M_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 : \, x_2 = x_1^3(x_1 - 1 + e^{-t})\},$$
$$M_- = \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 : \, x_2 = -x_1^3(x_1 - 1 + e^{-t})\}.$$

Найдем

$$S_+(t,\tau) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -(t-\tau)^3 e^{-t} & (t-\tau)^2(-4(t-\tau) + 3(1 - e^{-t})) \end{vmatrix} =$$
$$= (t-\tau)^2[3(1 - e^{-t}) - (t-\tau)(4 + e^{-t})].$$

Функция $t \to S_+(t,\tau)$ сохраняет знак в каждой точке $t = \tau$ луча $(t_0, \infty)$, $t_0 > 0$. Далее, поскольку при $t_0 > 0$ через ось $(Ot)$ не проходят кривые пересечения данных многообразий, то на интервале $(t_0, \infty)$ отсутствуют точки ветвления. Следовательно, в силу теоремы 5.2, для любого $t_0 > 0$ система (6.4) не является устойчиво управляемой ни на каком отрезке $[t_0, t_1]$, $t_0 > 0$.

Однако система (6.4) локально управляема на любом отрезке $[t_0, t_1]$, где $t_1 - t_0 \geqslant 2$. Действительно, кроме оси $(Ot)$ многообразия $M_+$ и $M_-$ имеют общую кривую $x_1 = 1 - e^{-t}$, $x_2 = 0$ (на рис. 4 показано взаимное расположение многообразий $M_+$ и $M_-$). На рис. 5 изображены $M_+$ и $M_-$

в сечении плоскостью $t = \mathrm{const} > 0$ и проекции на эту плоскость траекторий системы (6.4), соответствующих управлениям $u \equiv 1$ и $u \equiv -1$. Заметим, что из любой точки в заштрихованной области (см. рис. 5), двигаясь с управлением $u \equiv 1$, за конечное время можно достичь многообразия $M^1_-$, а далее с управлением $u \equiv -1$, двигаясь по многообразию $M^1_-$, достигаем оси $(Ot)$. Управление в нуль из точек незаштрихованной области осуществляется наоборот: сначала с управлением $u \equiv -1$ за конечное время достигаем многообразия $M^1_+$, а далее с управлением $u \equiv 1$ по многообразию $M^1_+$ достигаем оси $(0t)$. Таким образом, система (6.4) локально управляема на любом отрезке $[t_0, t_1]$, $t_1 - t_0 \geqslant 2$.

Рис. 4. Рис. 5.

П р и м е р 6.3. Покажем, что система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = 4x_1^3 - 3x_1^2 e^{-t} + x_1^3 e^{-t} u, \end{cases} \qquad |u| \leqslant 1 \tag{6.5}$$

не является устойчиво управляемой ни на каком отрезке $[t_0, t_1]$, но устойчиво управляема в любой точке $t_0 < \infty$.

Найдем допустимые решения

$$x_+(t,\tau): \qquad \begin{cases} x_1 = t - \tau \\ x_2 = (t-\tau)^3(t - \tau - e^{-t}) \end{cases}$$

$$\text{и} \quad x_-(t,\tau): \qquad \begin{cases} x_1 = -t + \tau \\ x_2 = (t-\tau)^3(\tau - t - e^{-t}). \end{cases}$$

Заметим, что многообразия $M_+$ и $M_-$ удовлетворяют соотношениям

$$M_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 : \, x_2 = x_1^3(x_1 - e^{-t})\},$$
$$M_- = \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 : \, x_2 = -x_1^3(x_1 - e^{-t})\}.$$

При $t_0 > 0$ через ось $(Ot)$ не проходит никакая кривая пересечения многообразий, значит на интервале $(t_0, \infty)$ отсутствуют точки ветвления. Поскольку $S_+(t,\tau) = (t-\tau)^2[3e^{-t} + (t-\tau)(e^{-t} - 4)]$ не меняет знак ни в какой точке $t = \tau \in (t_0, \infty)$ то, в силу теоремы 5.2, для любого $t_0 > 0$ система (6.5) не является устойчиво управляемой ни на каком отрезке $[t_0, t_1]$.

Однако многообразия $M_+$ и $M_-$, кроме оси $(Ot)$, пересекаются по кривой $x_1 = e^{-t}$, $x_2 = 0$, которая асимптотически приближается к оси $(Ot)$. Следовательно, из любой окрестности начальной точки $t_0$ можно попасть на множество $M = M_+^1 \bigcup M_-^1$, а затем в нуль, т. е. система устойчиво управляема в любой точке $t_0 < \infty$.

# Глава 3. Устойчивая управляемость нелинейной нестационарной системы в $\mathbb{R}^n$

В данной главе получены достаточные условия устойчивой локальной управляемости нестационарной системы

$$\dot{x} = f_0(x,t) + uf_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in [-1,1]$$

в ґкритическомЄ случае, т. е. в случае, когда $\operatorname{rank} K(t) \leqslant n-1$ для всех $t \in \mathbb{R}$). Здесь

$$K(t) \doteq (q_1(t) \dots q_n(t)),\ q_1(t) \doteq b(t),\ q_i(t) \doteq A(t)q_{i-1}(t) - \dot{q}_{i-1}(t),\ i = 2 \dots n.$$

## §7. Множество управляемости нелинейной системы произвольного порядка

В данном параграфе определены множество управляемости и расширенное множество управляемости для линейной и нелинейной систем. Доказаны также некоторые вспомогательные утверждения, в которых анализируется структура данных множеств управляемости.

Рассмотрим нестационарную систему

$$\dot{x} = f_0(x,t) + uf_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in [-1,1] \tag{7.1}$$

и систему линейного приближения

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in [-1,1]. \tag{7.2}$$

Всюду далее мы будем предполагать, что $f_0(x,t)$, $f_1(x,t) \in C^n(\mathbb{R}^{n+1})$, $f_0(0,t) = 0$, $f_1(0,t) \neq 0$, $A(t) \doteq \dfrac{\partial f_0(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}$, $b(t) \doteq f_1(0,t)$.

Для системы (7.2) введем матрицу $K(t) = (q_1(t) \dots q_n(t))$, где

$$q_1(t) \doteq b(t), \quad q_i(t) \doteq A(t)q_{i-1}(t) - \dot{q}_{i-1}(t), \quad i = 2 \dots n. \tag{7.3}$$

В качестве *допустимых управлений* берутся всевозможные измеримые функции $u : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

Определение 7.1. Множество $D(t_0,t_1)$ точек $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует такое допустимое управление $u(t,x_0)$, $t \in [t_0,t_1]$, что соответствующее ему решение $x = x(t,u(\cdot))$ системы (7.1) удовлетворяет условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, называется *множеством управляемости системы* (7.1) *на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Определение 7.2. Множество $\mathcal{D}(t_0,t_1)$ точек $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, таких, что $x \in D(t,t_1)$, $t \in [t_0,t_1]$ называется *расширенным множеством управляемости системы* (7.1) *на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Аналогично через $G(t_0,t_1)$ и $\mathcal{G}(t_0,t_1)$ обозначим соответственно множество управляемости и расширенное множество управляемости на отрезке $[t_0,t_1]$ для системы (7.2).

Замечание 7.1. Очевидно, что $0 \in G(t_0,t_1)$, $0 \in D(t_0,t_1)$, $(0,t) \in \mathcal{G}(t_0,t_1)$ и $(0,t) \in \mathcal{D}(t_0,t_1)$ для всех $t \in (t_0,t_1)$.

Понятно, что *локальная управляемость на отрезке* $[t_0, t_1]$ эквивалентна условию $0 \in \operatorname{int} D(t_0, t_1)$.

Напомним, что система (7.1) называется *устойчиво локально управляемой* или просто *устойчиво управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждой точки $x_0 \in O^2_\delta$ существует допустимое решение $x(t)$ системы (7.1), удовлетворяющее условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, $|x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

З а м е ч а н и е 7.2. Из теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий следует, что если система (7.1) управляема или устойчиво управляема на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$, то она управляема или соответственно устойчиво локально управляема на любом отрезке $[t_0, t_1]$, содержащем $[\tau_0, \tau_1]$, т. е. если $[\tau_0, \tau_1] \subset [t_0, t_1]$, то $G(\tau_0, \tau_1) \subset G(t_0, t_1)$, $D(\tau_0, \tau_1) \subset D(t_0, t_1)$, $\mathcal{G}(\tau_0, \tau_1) \subset \mathcal{G}(t_0, t_1)$ и $\mathcal{D}(\tau_0, \tau_1) \subset \mathcal{D}(t_0, t_1)$.

Проведем геометрический анализ множеств управляемости $G(t_0, t_1)$, $\mathcal{G}(t_0, t_1)$, $D(t_0, t_1)$ и $\mathcal{D}(t_0, t_1)$. Прежде всего приведем известные факты.

Л е м м а 7.1 (см., например, [26]). *Для любых $t_0$, $t_1$, $t_0 < t_1$, множество $G(t_0, t_1)$ компактно, выпукло, симметрично относительно нуля и непрерывно зависит от $t_0$.*

С л е д с т в и е 7.1. *Множество $\mathcal{G}(t_0, t_1)$ компактно, симметрично относительно оси $(Ot)$ и непрерывно зависит от $t_0$.*

Если предположить, что все допустимые решения системы (7.1) существуют на интервале $I$, содержащем $(t_0, t_1)$, то справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 7.2 ([26]). *Множество $D(t_0, t_1)$ компактно и непрерывно зависит от $t_0$.*

С л е д с т в и е 7.2. *Множество $\mathcal{D}(t_0, t_1)$ компактно и непрерывно зависит от $t_0$.*

Л е м м а 7.3. *Пусть $\operatorname{rank} K(t) = n - 1$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Тогда существуют $\tau \in (t_0, t_1)$ и $\varepsilon > 0$, что первые $n-1$ векторов $q_1(t) \dots q_{n-1}(t)$ линейно независимы при каждом фиксированном $t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ как векторы в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Если $\operatorname{rank} K(t) = n-1$ для всех $t$ из отрезка $[t_0, t_1]$, то векторы $q_1(t) \dots q_{n-1}(t)$ линейно зависимы при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$ как векторы в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для любой фиксированной точки $\tau_1 \in (t_0, t_1)$ найдутся постоянная $\varepsilon > 0$ и дифференцируемые скалярные функции $c_1(t) \dots c_n(t)$, одновременно не равные нулю на интервале $(\tau_1 - \varepsilon, \tau_1 + \varepsilon)$, что выполнено тождество

$$c_1(t)q_1(t) + \cdots + c_n(t)q_n(t) \equiv 0. \tag{7.4}$$

Действительно, поскольку $\operatorname{rank} K(t) = n-1$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, то для любой фиксированной точки $\tau_1 \in (t_0, t_1)$ существует некоторый отличный от нуля минор $n-1$-го порядка матрицы $K(t)$, например, $K_{ij}(t)$ — минор, получившийся выбрасыванием строки $i$ и столбца $j$. Следовательно, $K_{ij}(t) \neq 0$ в некоторой окрестности $(\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)$. Нетрудно проверить, что из условия $\det K(t) \equiv 0$ следует тождество

$$(-1)^{i+1}q_1(t)K_{i1}(t) + \cdots + (-1)^{i+j}q_j(t)K_{ij}(t) + \cdots + (-1)^{i+n}q_n(t)K_{in}(t) \equiv 0,$$

откуда получаем, что функции $c_j(t) = (-1)^{i+j}K_{ij}(t)$, $j = 1 \dots n$ на интервале $(\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)$ удовлетворяют (7.4). Отсюда, в силу гладкости функций $q_i(t)$ следует, что функции $c_j(t)$, $j = 1 \dots n$ дифференцируемы на интервале $(\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)$.

Рассмотрим первый случай. Если найдется точка $\tau \in (\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)$, что $c_n(\tau) \neq 0$, то в силу непрерывности функции $c_n(t)$ существует окрестность $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$, принадлежащая $(\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)$, во всех точках которой функция $c_n(t)$ не обращается в нуль. Тогда

$$q_n(t) = \widehat{c}_1(t)q_1(t) + \cdots + \widehat{c}_{n-1}(t)q_{n-1}(t), \text{ где } \widehat{c}_i(t) = -\frac{c_i(t)}{c_n(t)},\ i = 1 \dots n-1.$$

Поскольку для $t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$

$$\begin{gathered}\operatorname{rank} K(t) = \operatorname{rank}(q_1(t) \dots q_{n-1}(t), \widehat{c}_1(t)q_1(t) + \cdots + \widehat{c}_{n-1}(t)q_{n-1}(t)) = \\ = \operatorname{rank}(q_1(t) \dots q_{n-1}(t)) = n-1,\end{gathered}$$

то для каждого фиксированного $t$ из окрестности $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ векторы $q_1(t) \dots q_{n-1}(t)$ линейно независимы.

Рассмотрим второй случай: $c_n(t) \equiv 0$ на отрезке $[\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1]$. Тогда из (7.4) получаем

$$c_1(t)q_1(t) + \cdots + c_{n-1}(t)q_{n-1}(t) \equiv 0. \tag{7.5}$$

Продифференцируем соотношение (7.5):

$$\dot c_1(t)q_1(t) + \dots + \dot c_{n-1}(t)q_{n-1}(t) + c_1(t)\dot q_1(t) + \dots + c_{n-1}(t)\dot q_{n-1}(t) \equiv 0. \quad (7.6)$$

Умножим (7.5) на $A(t)$ и вычтем из него (7.6)

$$\begin{aligned} &c_1(t)A(t)q_1(t) + \dots + c_{n-1}(t)A(t)q_{n-1}(t) - \\ &- (\dot c_1(t)q_1(t) + \dots + \dot c_{n-1}(t)q_{n-1}(t) + c_1(t)\dot q_1(t) + \dots + c_{n-1}(t)\dot q_{n-1}(t)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Далее, с учетом равенства $q_k(t) = A(t)q_{k-1}(t) - \dot q_{k-1}(t)$, $k = 2\dots n$ получаем

$$\begin{aligned} &- \dot c_1(t)q_1(t) + (c_1(t) - \dot c_2(t))q_2(t) + \dots + \\ &\qquad + (c_{n-2}(t) - \dot c_{n-1}(t))q_{n-1}(t) + c_{n-1}(t)q_n(t) \equiv 0. \quad (7.7) \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{rank} K(t) = n-1$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, то коэффициенты уравнений (7.5) и (7.7) должны быть пропорциональными для всех $t \in (\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)$, т.е. должна существовать скалярная функция $\alpha(t) \neq 0$, что на интервале $(\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)$ выполнены тождества

$$\begin{gathered} c_1(t) \equiv -\alpha(t)\dot c_1(t), \quad c_2(t) \equiv \alpha(t)(c_1(t) - \dot c_2(t)), \quad \dots \\ c_{n-1}(t) \equiv \alpha(t)(c_{n-2}(t) - \dot c_{n-1}(t)), \quad 0 \equiv \alpha(t)c_{n-1}(t). \end{gathered}$$

Понятно, что такое возможно только в том случае, когда все функции $c_i(t) \equiv 0$ на отрезке $[\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1]$. Получили противоречие с тем, что функции $c_1(t)\dots c_n(t)$ одновременно не равны нулю на отрезке $[t_0, t_1]$. Следовательно, второй случай невозможен. Лемма доказана.

Л е м м а 7.4. *Если* $\operatorname{rank} K(t) = n-1$ *для всех* $t \in [t_0, t_1]$, *то линейное подпространство* $\operatorname{Lin} G(t_0, t_1)$ *содержит векторы* $q_1(t_0)\dots q_n(t_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьем на два этапа.

1. Рассмотрим систему

$$\dot y = \widehat A(t)y + u\widehat b(t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{7.8}$$

где $\widehat A(t) = \{\widehat A_{ij}(t)\}_{i,j=1}^2$, матрица $\widehat A_{11}(t)$ — верхняя треугольная размера $(n-1)\times(n-1)$, $\widehat A_{22}(t) = \widehat a_{nn}(t)$, $\widehat A_{21}(t) \equiv 0$, вектор $\widehat b(t) = \operatorname{col}(b_1(t), 0)$, где $b_1(t) = \operatorname{col}(\widehat b_1(t)\dots \widehat b_{n-1}(t))$ и $\widehat b_{n-1}(t) \not\equiv 0$ на $[t_0, t_1]$.

Обозначим $\widehat{K}(t) \doteq (\widehat{q}_1(t) \dots \widehat{q}_n(t))$, где

$$\widehat{q}_1(t) = \widehat{b}(t), \quad \widehat{q}_i(t) = \widehat{A}(t)\widehat{q}_{i-1}(t) - \dot{\widehat{q}}_{i-1}(t), \quad i = 2 \dots n.$$

Пусть $\operatorname{rank} \widehat{K}(t) = n - 1$ для любого $t \in [t_0, t_1]$. Представим вектор $y$ в виде $y = (\widehat{y}, y_n)$, где $\widehat{y} = \operatorname{col}(y_1 \dots y_{n-1})$ и рассмотрим систему

$$\dot{\widehat{y}} = \widehat{A}_{11}(t)\widehat{y} + b_1(t)u, \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{7.9}$$

Для системы (7.9) построим матрицу $\widehat{K}^{(n-1)}(t) \doteq (\widehat{q}_1^0(t) \dots \widehat{q}_n^0(t))$ и заметим, что для системы (7.8) векторы $\widehat{q}_i(t) = \operatorname{col}(\widehat{q}_i^0(t), 0)$, $i = 1 \dots n-1$. В силу леммы 7.3 существует точка $\tau \in [t_0, t_1]$, что векторы $\widehat{q}_1(\tau) \dots \widehat{q}_{n-1}(\tau)$ линейно независимы. Кроме того, поскольку у векторов $\widehat{q}_1(t) \dots \widehat{q}_n(t)$ последняя координата равна нулю, то выполнены следующие равенства

$$\operatorname{rank} \widehat{K}^{(n-1)}(\tau) = \operatorname{rank}(\widehat{q}_1(\tau) \dots \widehat{q}_{n-1}(\tau)) = \operatorname{rank} \widehat{K}(\tau) = n - 1.$$

Следовательно, существует точка $\tau \in [t_0, t_1]$, что $\operatorname{rank} \widehat{K}(\tau) = n-1$. Отсюда в силу теоремы 1.2 следует, что система (7.9) локально управляема. Тогда линейное подпространство $\operatorname{Lin} \widehat{G}(t_0, t_1)$ для системы (7.8) с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$ задается уравнением $y_n = 0$ и *линейная оболочка $\widehat{G}(t_0, t_1)$ совпадает с линейной оболочкой векторов $\widehat{q}_1(t_0) \dots \widehat{q}_n(t_0)$.*

2.Рассмотрим систему (7.2). Если система (7.2) локально управляема, то $\operatorname{Lin} \widehat{G}(t_0, t_1)$ совпадает с $\mathbb{R}^n$ и векторы $\widehat{q}_1(t_0) \dots \widehat{q}_n(t_0)$ содержатся в $\operatorname{Lin} \widehat{G}(t_0, t_1)$.

Если система (7.2) не является локально управляемой, то в силу теоремы 1.3, существует преобразование Перрона $X = U(t)Y$, приводящее ее к системе (7.8) с верхней треугольной матрицей $\widehat{A}(t)$. В силу леммы 2.1 выпонены равенства

$$\operatorname{rank} K(t) = \operatorname{rank} \widehat{K}(t) \quad \text{и} \quad q_k(t) = U(t)\widehat{q}_k(t), \quad k = 1 \dots n.$$

Из леммы 2.1 также следует, что матрицы Калмана $W(t_0, t_1)$ и $\widehat{W}(t_0, t_1)$ систем (7.2) и (7.8) связаны соотношением

$$W(t_0, t_1) = U(t_0)\widehat{W}(t_0, t_1)U^*(t_0).$$

Поскольку линейное подпространство $\operatorname{Lin} \widehat{G}(t_0, t_1)$ является множеством значений оператора $\widehat{W}(t_0, t_1)$, то векторы $\widehat{q}_1(t_0) \dots \widehat{q}_n(t_0)$ содержатся в множестве $\operatorname{Im} \widehat{W}(t_0, t_1)$. Следовательно, существуют векторы

$\widehat{z}_1 \dots \widehat{z}_n$, такие что $\widehat{q}_k(t_0) = \widehat{W}(t_0,t_1)\widehat{z}_k$. По векторам $\widehat{z}_1 \dots \widehat{z}_n$ построим векторы $z_k = U(t_0)\widehat{z}_k$, $k = 1 \dots n$ и найдем

$$W(t_0,t_1)z_k = U(t_0)\widehat{W}(t_0,t_1)U^*(t_0)U(t_0)\widehat{z}_k = U(t_0)\widehat{q}_k(t_0) = q_k(t_0).$$

Следовательно, векторы $q_1(t_0) \dots q_n(t_0)$ содержатся в множестве значений линейного оператора $W(t_0,t_1)$, которое совпадает с линейным подпространством $\operatorname{Lin} G(t_0,t_1)$. Лемма доказана.

Л е м м а 7.5. *Пусть* $\operatorname{rank} K(\tau) = n-1$. *Тогда найдется такой интервал* $(\tau-\vartheta,\tau+\vartheta)$, *что для любого отрезка* $[t_0,t_1]$, *принадлежащего* $(\tau-\vartheta,\tau+\vartheta)$, *множества* $G(t_0,t_1)$ *и* $\mathcal{G}(t_0,t_1)$ *содержат гладкие симметричные относительно оси* $(Ot)$ *многообразия* $N^{n-1}(t_0,t_1)$ *и* $\mathcal{N}^n(t_0,t_1)$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что поскольку $\operatorname{rank} K(\tau) = n-1$ и $\operatorname{rank} K(t) \leqslant n-1$ для любого $t \in \mathbb{R}$, то из векторов $q_1(\tau) \dots q_n(\tau)$ можно выбрать $n-1$ линейно независимых векоров $q_{i_1}(\tau) \dots q_{i_{n-1}}(\tau)$. Поскольку вектор-функции $q_{i_1}(t) \dots q_{i_{n-1}}(t)$ непрерывно дифференцируемы, то существует такое $\vartheta > 0$, что векторы $q_{i_1}(t) \dots q_{i_{n-1}}(t)$ линейно независимы в каждой точке $t \in (\tau-\vartheta,\tau+\vartheta)$. Тогда из леммы 7.4 следует, что векторы $q_{i_1}(t_0) \dots q_{i_{n-1}}(t_0)$ принадлежат $\operatorname{Lin} G(t_0,t_1)$ для любого отрезка $[t_0,t_1] \subset (\tau-\vartheta,\tau+\vartheta)$. Поскольку множество $G(t_0,t_1)$ выпукло и симметрично относительно оси $(Ot)$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что все точки множества

$$N^{n-1}(t_0,t_1) \doteq \{(x,t_0) : \, x = c_1 q_{i_1}(t_0) + \dots + c_{n-1} q_{i_{n-1}}(t_0), \, |c_i| < \varepsilon\}$$

содержатся в множестве управляемости $G(t_0,t_1)$. Очевидно, что множество $N^{n-1}(t_0,t_1)$ является гладким симметричным относительно оси $(Ot)$ $(n-1)$-мерным многообразием.

Без ограничения общности можно считать, что управления $u_i(t)$, $i = 1 \dots n-1$, которые в момент $t_1$ переводят $n-1$ линейно независимых точек $x_1(t_0) = \varepsilon_1 q_{i_1}(t_0), \dots, x_{n-1}(t_0) = \varepsilon_1 q_{i_{n-1}}(t_0)$, $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ в нуль, являются непрерывно дифференцируемыми и, кроме того, точки $x_i(t) = x(t,u_i(\cdot))$ линейно независимы в каждый момент времени $t \in [t_0,t_1]$. Это означает, что при фиксированном $t_1$ расширенное множество управляемости $\mathcal{G}(t_0,t_1) \doteq \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \, x \in G(t,t_1), \, t \in [t_0,t_1]\}$

содержит гладкое $n$ - мерное многообразие

$$\mathcal{N}^n(t_0,t_1) \doteq \{(x,t):\, x = c_1x_1(t)+\dots+c_{n-1}x_{n-1}(t),\ |c_i|<1,\ t\in(t_0,t_1)\}.$$

Л е м м а 7.6. *Пусть* $\operatorname{rank} K(\tau) = n-1$. *Тогда найдется интервал* $(\tau-\vartheta,\tau+\vartheta)$ *такой, что на любом отрезке* $[t_0,t_1]\subset(\tau-\vartheta,\tau+\vartheta)$ *множества* $D(t_0,t_1)$ *и* $\mathcal{D}(t_0,t_1)$ *содержат гладкие многообразия* $M^{n-1}(t_0,t_1)$ *и* $\mathcal{M}^n(t_0,t_1)$ *соответственно, причем* $0\in D(t_0,t_1)$, $(0,t)\in\mathcal{D}(t_0,t_1)$ *для всех* $t\in(t_0,t_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 7.5 найдется постоянная $\vartheta>0$, что на любом отрезке $[t_0,t_1]\subset(\tau-\vartheta,\tau+\vartheta)$ существуют допустимые управления $u_i(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, $i=1\dots n-1$, которые переводят систему (7.2) из линейно независимых точек

$$\operatorname{col}(x_i(t_0),t_0) = \operatorname{col}(x(t_0,u_i(\cdot)),t_0),\quad i=1\dots n-1$$

в точку $\operatorname{col}(0,t_1)$. Без ограничения общности будем полагать, что:

а) $x_1(t_0)=cq_{i_1}(t_0),\dots,x_{n-1}(t_0)=cq_{i_{n-1}}(t_0)$;

б) $u_i(t)\in C^\infty([t_0,t_1])$, $i=1\dots n-1$;

в) управления $u_i(t)$ выбраны так, что в каждый момент времени $t\in[t_0,t_1]$ точки $x_i(t)=x(t,u_i(\cdot))$, $i=1\dots n-1$ являются линейно независимыми.

Обозначим $u(t,\xi) = u(t,\xi_1\dots\xi_{n-1}) = \xi_1u_1(t)+\dots+\xi_{n-1}u_{n-1}(t)$, где $\xi=(\xi_1\dots\xi_{n-1})$, $|\xi|\leqslant 1$. Пусть $x(t,\xi)=x(t,\xi_1\dots\xi_{n-1})$ — решение системы (7.1), удовлетворяющее условию $x(t_1,\xi)=0$. Можно полагать, что при всех $\xi\in O_1^{n-1}$ данное решение существует на отрезке $[t_0,t_1]$. Введем в рассмотрение $n\times n-1$ матрицу $Z(t)=\left(\dfrac{\partial x(t,\xi)}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}$. Поскольку $x(t,\xi)$ — решение системы (7.1), соответствующее управлению $u(t,\xi)$, то

$$\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial t} = f_0(x(t,\xi),t)+u(t,\xi)f_1(x(t,\xi),t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\xi} = (f_0(x(t,\xi),t))_x\frac{\partial x}{\partial\xi}+u(t,\xi)(f_1(x(t,\xi),t))_x\frac{\partial x}{\partial\xi}+f_1(x(t,\xi),t)\frac{\partial u}{\partial\xi}.$$

Учитывая условия $x(t,0)=0$, $u(t,0)=0$, получаем

$$\dot Z(t) = A(t)Z(t)+b(t)u^*(t),$$

где $b(t)u^*(t)$ есть матричное произведение вектор-столбца $b(t)$ на вектор-строку $u^*(t) = (u_1(t) \dots u_{n-1}(t))$. Отсюда следует, что столбцы $z_i(t)$ матрицы $Z(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{z}_i(t) = A(t)z_i(t) + b(t)u_i(t), \quad z_i(t_1) = 0, \quad i = 1 \dots n-1.$$

В силу условия а) векторы $z_1(t_0) = cq_{i_1}(t_0), \dots, z_{n-1}(t_0) = cq_{i_{n-1}}(t_0)$ являются линейно независимыми. В таком случае отображение $\xi \to x(t_0, \xi)$ является непрерывно дифференцируемым отображением окрестности $O_1^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим теперь, что поскольку $\operatorname{rank} Z(t_0) = n-1$, то существует такая окрестность $O_\delta^k$, что $\operatorname{rank} Z(t) = n-1$ для всех $\xi \in O_\delta^{n-1}$. А это означает, что множество $M^{n-1}(t_0, t_1) \doteq \{x = x(t_0, \xi) : \xi \in O_\delta^{n-1}\}$ является гладким многообразием размерности $n-1$, причем $M^{n-1}(t_0, t_1)$ очевидно содержится в множестве управляемости $D(t_0, t_1)$.

Далее заметим, что точки $x_i(t) = x(t, u_i(\cdot))$ линейно независимы в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$. Тогда отображение $(\xi, t) \to (x(t_0, \xi), t)$ также является непрерывно дифференцируемым отображением окрестности $O_1^{n-1} \times (t_0, t_1)$ в $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]$, а следовательно множество

$$\mathcal{M}^n(t_0, t_1) \doteq \{(x, t) = (x(t, \xi), t) : \xi \in O_\delta^{n-1}, \, t_0 < t < t_1\}$$

является гладким многообразием размерности $n$, причем $\mathcal{M}^n(t_0, t_1)$ очевидно содержится в множестве управляемости $\mathcal{D}(t_0, t_1)$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 7.3. Заметим, что линейная оболочка векторов $z_1(t_0) \dots z_{n-1}(t_0)$ является касательным пространством к многообразию $M^{n-1}(t_0, t_1)$ в точке $(0, t_0)$ и поскольку для векторов $z_i(t_0)$ выполнены равенства $z_1(t_0) = cq_{i_1}(t_0), \dots, z_{n-1}(t_0) = cq_{i_{n-1}}(t_0)$, то касательное пространство $T_{(0,t_0)}M^{n-1}(t_0, t_1)$ является линейной оболочкой векторов $q_{i_1}(t_0) \dots q_{i_{n-1}}(t_0)$.

## §8. Достаточные условия устойчивой управляемости нелинейной системы в $\mathbb{R}^n$

Здесь получены достаточные условия устойчивой управляемости систем общего вида в ґкритическом случаеЄ.

Вместе с системой (7.1) рассмотрим следующие системы

$$\dot{x} = f_+(x,t) \doteq f_0(x,t) + f_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{8.1}$$

$$\dot{x} = f_-(x,t) \doteq f_0(x,t) - f_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{8.2}$$

отвечающие управлениям $u \equiv 1$ и $u \equiv -1$ соответственно. Обозначим $\widehat{f}_+(x,t) \doteq \operatorname{col}(f_+(x,t),1)$, $\widehat{f}_-(x,t) \doteq \operatorname{col}(f_-(x,t),1)$, а $x_+(t,\tau)$ и $x_-(t,\tau)$ — соответственно решения систем (8.1) и (8.2), удовлетворяющие условию $x_+(\tau,\tau) = x_-(\tau,\tau) = 0$. Через $\gamma_+(\tau)$ и $\gamma_-(\tau)$ обозначим траектории данных решений в $\mathbb{R}^{n+1}$. Очевидно, что решения систем (8.1) и (8.2) являются допустимыми решениями системы (7.1).

Т е о р е м а 8.1. *Пусть на отрезке* $[t_0,t_1]$ *найдется точка* $\tau$, *что* $\operatorname{rank} K(\tau) = n-1$. *Тогда существуют окрестность* $O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$ *и скалярная функция* $\varphi(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$, *что:*

*а)* $\operatorname{col}\Big(\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\Big)\Big|_{(0,\tau)} \neq 0;$

б) $\mathcal{M}^n \doteq \{(x,t) \in O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau) \,:\, \varphi(x,t) = 0\} \subset \mathcal{D}(t_0,t_1).$

*Далее, если при всех* $t \in (\tau,\tau+\varepsilon)$ *выполнено неравенство*

в) $\varphi(x_+(t,\tau),t)\varphi(x_-(t,\tau),t) < 0,$

*то система* (0.2) *устойчиво локально управляема на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство пунктов а) и б) теоремы следует из леммы 7.6.

Пусть $\mathcal{M}^n \doteq \{(x,t) \in O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau) \,:\, \varphi(x,t)=0\}$ — многообразие, содержащееся в расширенном множестве управляемости $\mathcal{D}(t_0,t_1)$ и удовлетворяющее условиям а) и б). Предположим, что для всех $\Delta$, $0 < \Delta < \varepsilon$, выполнено неравенство $\varphi(x_+(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta)\varphi(x_-(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta) < 0$. Пусть для определенности

$$\varphi(x_+(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta) > 0, \quad \varphi(x_-(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta) < 0.$$

Обозначим

$$\min\{d((x_+(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta),\mathcal{M}^n), d((x_-(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta),\mathcal{M}^n)\} = 2r,$$

тогда найдется шар $O_r^+ \doteq O_r(x_+(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta)$ радиуса $r$ с центром в точке $(x_+(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta)$, для всех точек которого $\varphi(x,t) > 0$. Найдется также шар $O_r^- \doteq O_r(x_-(\tau+\Delta,\tau),\tau+\Delta)$, что для всех $(x,t)\in O_r^-$ выполнено неравенство $\varphi(x,t) < 0$. По теореме о непрерывной зависимости от начальных условий, найдется окрестность $O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$, все точки которой под действием управления $u\equiv 1$ попадают в $O_r^+$, а под действием $u\equiv -1$ попадают в $O_r^-$. Это означает, что все точки из $O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$ под действием одного из управлений $u\equiv 1$ или $u\equiv -1$ попадают на многообразие $\mathcal{M}^n$. Действительно, $\mathcal{M}^n$ разделяет окрестность $O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$ на два открытых множества $V_+ \doteq \{(x,t)\in O_\delta(0,\tau) : \varphi(x,t) > 0\}$ и $V_- \doteq \{(x,t)\in O_\delta(0,\tau) : \varphi(x,t) < 0\}$. Построим управление $u(x,t) = 1$, если $(x,t)\in V_-$ и $u(x,t) = -1$, если $(x,t)\in V_+$. Понятно, что под действием такого управления все точки из $O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$ попадают на многообразие $\mathcal{M}^n$ и затем в нуль. Рассмотрим множество траекторий из $O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$, проходящих через $O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)\bigcap\mathcal{M}^n$ под действием построенного управления $u(x,t)$. Понятно, что в таком множестве содержится некоторая окрестность $O_\delta^{n+1}(0,\tau)$, все точки которой попадают на многообразие $\mathcal{M}^n$, не выходя за пределы $O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$. Тогда в нуль попадают также точки из $(O_\delta^n(0),\tau)$, а это и означает, что система (7.1) устойчиво управляема на отрезке $[\tau,t_1]$, а следовательно, и на отрезке $[t_0,t_1]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8.1. Учитывая замечание 7.1, можно считать, что кроме пунктов а) и б) теоремы 8.1 выполнено условие

$$T_{(0,\tau)}\mathcal{M}^n = \mathrm{Lin}\{\mathrm{col}(0\ldots 0,1), \mathrm{col}(q_1(\tau),0)\ldots\mathrm{col}(q_n(\tau),0)\}. \tag{8.3}$$

Л е м м а 8.1. *Если найдутся* $\tau\in(t_0,t_1)$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что при* $\tau < t < \tau+\varepsilon$

$$\langle \mathrm{grad}\,\varphi(x_+(t,\tau),t), \widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t)\rangle \times \\ \times \langle \mathrm{grad}\,\varphi(x_-(t,\tau),t), \widehat{f}_-(x_-(t,\tau),t)\rangle < 0, \tag{8.4}$$

*то система* (7.1) *устойчиво локально управляема на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности

$$\langle \operatorname{grad} \varphi(x_+(t,\tau),t), \widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t)\rangle > 0, \langle \operatorname{grad} \varphi(x_-(t,\tau),t), \widehat{f}_-(x_-(t,\tau),t)\rangle < 0$$

при $\tau < t < \tau + \varepsilon$. Заметим, что производная в силу системы

$$\frac{d\varphi(x_+(t,\tau),t)}{dt} = \langle \operatorname{grad} \varphi(x_+(t,\tau),t), \widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t)\rangle > 0,$$

следовательно, функция $t \to \varphi(x_+(t,\tau),t)$ — возрастающая. Кроме того, $\varphi(0,\tau) = 0$ при $t = \tau$, значит, $\varphi(x_+(t,\tau),t) > 0$ при $\tau < t < \tau + \varepsilon$. Аналогично получаем, что при $\tau < t < \tau + \varepsilon$ выполнено неравенство $\varphi(x_-(t,\tau),t) < 0$, следовательно, $\varphi(x_+(t,\tau),t)\varphi(x_-(t,\tau),t) < 0$. Тогда, в силу теоремы 8.1, система (7.1) устойчиво локально управляема на отрезке $[t_0,t_1]$. Лемма доказана.

Пусть $\operatorname{rank} K(\tau) = n - 1$. Тогда из векторов $q_1(\tau)\dots q_n(\tau)$ можно выбрать $n-1$ линейно независимых. Обозначим их через $q_{i_1}(\tau)\dots q_{i_{n-1}}(\tau)$ и введем в рассмотрение скалярные функции

$$s_+(t,\tau) \doteq \det(f_+(x_+(t,\tau),t), q_{i_1}(\tau)\dots q_{i_{n-1}}(\tau)),$$
$$s_-(t,\tau) \doteq \det(f_-(x_-(t,\tau),t), q_{i_1}(\tau)\dots q_{i_{n-1}}(\tau)).$$

Обозначим через $\widetilde{K}(t) \doteq (\widetilde{q}_0(t),\dots,\widetilde{q}_n(t))$ матрицу размера $(n+1)\times(n+1)$, где $\widetilde{q}_0(t) \doteq \operatorname{col}(0\dots 0,1)$, $\widetilde{q}_i(t) \doteq \operatorname{col}(q_i(t),0)$, $i = 1\dots n$.

Т е о р е м а 8.2. *Если найдутся $\tau \in (t_0,t_1)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\operatorname{rank} K(\tau) = n-1$ и $s_+(t,\tau)s_-(t,\tau) < 0$ при $\tau < t < \tau+\varepsilon$, то система (7.1) устойчиво локально управляема на отрезке $[t_0,t_1]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опишем касательное пространство $T_{(x,t)}\mathcal{M}^n$. В силу леммы 7.6 существует окрестность $O^{n+1}_\varepsilon(0,\tau)$ такая, что для всех точек $(x,t) \in O^{n+1}_\varepsilon(0,\tau)$ $\operatorname{grad}\varphi(x,t) \neq 0$ и, кроме того, $\langle \operatorname{grad}\varphi(0,\tau), \widetilde{q}_i(\tau)\rangle = 0$, $i = 0\dots n$, т.е. в точке $(O,\tau)$ касательное пространство $T_{(0,\tau)}\mathcal{M}^n$ является линейной оболочкой векторов $\widetilde{q}_0(\tau)\dots\widetilde{q}_n(\tau)$, и следовательно, векторов $\widetilde{q}_0(\tau), \widetilde{q}_{i_1}(\tau)\dots\widetilde{q}_{i_{n-1}}(\tau)$. Покажем, что в окрестности $O^{n+1}_\varepsilon(0,\tau)$ существуют непрерывные скалярные функции $\alpha_k(x,t)$, $\alpha_i(0,\tau) = 0$, $k = 0\dots n-1$, такие что векторы

$$Q_0(x,t) \doteq \alpha_0(x,t)\operatorname{grad}\varphi(x,t) + \widetilde{q}_0(\tau),$$
$$Q_k(x,t) \doteq \alpha_k(x,t)\operatorname{grad}\varphi(x,t) + \widetilde{q}_{i_k}(\tau), \quad k = 1\dots n-1$$

линейно независимы и $\langle \operatorname{grad} \varphi(x,t), Q_k(x,t)\rangle = 0$. Действительно, в качестве $\alpha_k(x,t)$ возьмем функции

$$\alpha_0(x,t) = -\frac{\langle \operatorname{grad} \varphi(x,t), \widetilde{q}_0(\tau)\rangle}{|\operatorname{grad} \varphi(x,t)|^2}, \quad \alpha_k(x,t) = -\frac{\langle \operatorname{grad} \varphi(x,t), \widetilde{q}_{i_k}(\tau)\rangle}{|\operatorname{grad} \varphi(x,t)|^2},$$

$k = 1 \dots n-1$. Тогда линейная независимость $Q_k(x,t)$, $k = 0 \dots n-1$ следует из линейной независимости векторов $\widetilde{q}_0(\tau), \widetilde{q}_{i_1}(\tau) \dots \widetilde{q}_{i_{n-1}}(\tau)$. Отсюда получаем, что касательное пространство $T_{(x,t)}\mathcal{M}^n$ является линейной оболочкой векторов $Q_0(x,t) \dots Q_{n-1}(x,t)$. Следовательно, для всех точек $(x,t) \in O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$

$$\det(\operatorname{grad} \varphi(x,t), Q_0(x,t) \dots Q_{n-1}(x,t)) = \\ = \det(\operatorname{grad} \varphi(x,t), \widetilde{q}_0(\tau), \widetilde{q}_{i_1}(\tau) \dots \widetilde{q}_{i_{n-1}}(\tau)) \neq 0.$$

Положим для определенности, что для $(x,t) \in O_\varepsilon^{n+1}(0,\tau)$

$$\det(\operatorname{grad} \varphi(x,t), \widetilde{q}_0(\tau), \widetilde{q}_{i_1}(\tau) \dots \widetilde{q}_{i_{n-1}}(\tau)) > 0.$$

Введем обозначение $\widetilde{s}_+(t,\tau) \doteq \det(\widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t), \widetilde{q}_0(\tau), \widetilde{q}_{i_1}(\tau) \dots \widetilde{q}_{i_{n-1}}(\tau))$. Если $\widetilde{s}_+(t,\tau) > 0$, то система векторов $\widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t), \widetilde{q}_0(\tau), \widetilde{q}_{i_1}(\tau) \dots \widetilde{q}_{i_{n-1}}(\tau)$ и векторы $\operatorname{grad} \varphi(x,t), \widetilde{q}_0(\tau), \widetilde{q}_{i_1}(\tau) \dots \widetilde{q}_{i_{n-1}}(\tau)$ имеют одинаковую ориентацию, что равносильно условию $\langle \operatorname{grad} \varphi(x_+(t,\tau),t), \widehat{f}_+(x_+(t,\tau),t)\rangle > 0$. Аналогично получаем, что условие

$$\widetilde{s}_-(t,\tau) \doteq \det(\widetilde{f}_-(x_-(t,\tau),t), \widetilde{q}_0(\tau), \widetilde{q}_{i_1}(\tau) \dots \widetilde{q}_{i_{n-1}}(\tau)) < 0$$

равносильно условию $\langle \operatorname{grad} \varphi(x_-(t,\tau),t), \widehat{f}_-(x_-(t,\tau),t)\rangle < 0$.

Заметим, что $\widetilde{s}_+(t,\tau) = (-1)^{n+1} s_+(t,\tau)$ и $\widetilde{s}_-(t,\tau) = (-1)^{n+1} s_-(t,\tau)$, следовательно, неравенство $s_+(t,\tau)s_-(t,\tau) = \widetilde{s}_+(t,\tau)\widetilde{s}_-(t,\tau) < 0$ равносильно неравенству (8.4) и в силу леммы 8.1 система (7.1) устойчиво локально управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

З а м е ч а н и е 8.2. Если система (7.1) не интегрируема при $u = 1$ или $u = -1$, достаточно найти разложение решений $x_+(t,\tau)$ и $x_-(t,\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $t-\tau$ и затем найти несколько первых членов ряда для функций $s_+(t,\tau)$, $s_-(t,\tau)$ и произведения $s_+(t,\tau)s_-(t,\tau)$.

П р и м е р 8.1. Исследуем устойчивую управляемость на отрезке $[t_0, t_1]$ системы

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 + tx_2^2 + u \qquad |u| \leqslant 1. \\ \dot{x}_3 = 4t^2x_1^3 + 2tx_1^4u, \end{array}\right. \tag{8.5}$$

Системе (8.5) соответствует следующая система линейного приближения

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \qquad |u| \leqslant 1. \\ \dot{x}_3 = 0, \end{array}\right.$$

Поскольку для данной системы $\operatorname{rank} K(t) \equiv 2$, то к системе (8.5) не применима теорема о локальной управляемости по первому приближению. Для исследования устойчивой управляемости системы (8.5) достаточно найти $x_+^1(t,\tau) = t - \tau$, тогда

$$s_+(t,\tau) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ f_+^2(x_+(t,\tau),t) & 1 & 1 \\ 4t^2(t-\tau)^3 + 2t(t-\tau)^4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4t^2(t-\tau)^3 + 2t(t-\tau)^4.$$

Аналогично находим, что $s_-(t,\tau) = -4t^2(t-\tau)^3 - 2t(t-\tau)^4$. Следовательно, произведение $s_+(t,\tau)s_-(t,\tau) < 0$ для всех $t > \tau$ и для любых $\tau$. Поэтому, в силу теоремы 8.2 система (8.5) устойчиво управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

П р и м е р 8.2. Исследуем устойчивую управляемость на отрезке $[t_0, t_1]$ системы

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2^3 + tu \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 + u \qquad |u| \leqslant 1. \\ \dot{x}_3 = t^2x_1^3 + tx_2^2u, \end{array}\right. \tag{8.6}$$

Для системы линейного приближения

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = tu \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \qquad |u| \leqslant 1 \\ \dot{x}_3 = 0, \end{array}\right. \tag{8.7}$$

найдем $K(t) = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Понятно, что $\operatorname{rank} K(t) \equiv 2$ и система (8.7) не является локально управляемой. Найдем разложение решения $x_+(t,\tau) = (x_+^1, x_+^2, x_+^3)$ в ряд Тейлора по степеням $t-\tau$.

$x_+^1(t,\tau) = t(t-\tau) + \frac{1}{4}(t-\tau)^4 + O((t-\tau)^5)$,

$x_+^2(t,\tau) = t-\tau+\frac{1}{2}(t-\tau)^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{t^2}{3}\right)(t-\tau)^3+\left(\frac{1}{24}+\frac{t^2}{12}\right)(t-\tau)^4+O((t-\tau)^5)$,

$x_+^3(t,\tau) = \frac{t}{3}(t-\tau)^3 + \left(\frac{t^3}{12}+\frac{t}{4}\right)(t-\tau)^4 + O((t-\tau)^5)$, тогда

$$s_+(t,\tau) = \begin{vmatrix} f_+^1(x_+(t,\tau)) & t & -1 \\ f_+^2(x_+(t,\tau)) & 1 & 1 \\ t^2(x_+^1)^3 + t(x_+^2)^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = t(t+1)(t(x_+^1)^3 + (x_+^2)^2) =$$

$$= t(t+1)\Big[(t-\tau)^2 + (1+t^4)(t-\tau)^3 + \left(\frac{7}{12}+\frac{2t^2}{3}\right)(t-\tau)^4 + O((t-\tau)^5)\Big].$$

Аналогично находим, что

$$s_-(t,\tau) = t(t+1)\Big[-(t-\tau)^2-(1+t^4)(t-\tau)^3+\left(-\frac{7}{12}+\frac{2t^2}{3}\right)(t-\tau)^4+O((t-\tau)^5)\Big].$$

Следовательно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что произведение

$$s_+(t,\tau)s_-(t,\tau) = t^2(t+1)^2(-((t-\tau)^2 + (1+t^4)(t-\tau)^3)^2 + O(t-\tau)^6)) < 0$$

для всех $\tau < t < \tau + \varepsilon$ и для любых $\tau$. Поэтому, в силу теоремы 8.2 система (8.6) устойчиво локально управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

## Список литературы


1. Альбрехт Э. Г., Красовский Н. Н. О наблюдении нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения // Автоматика и телемеханика. 1964. **25**. Ґ 7. С. 216-228.

2. Вахрамеев С. А. Нелинейные управляемые системы постоянного ранга и условия релейности экстремальных управлений // Докл. АН СССР. 1984. **279**. Ґ 2. С. 265-269.

3. Габасов Р. К теории управляемости динамических систем // Дифференц. уравнения. 1968. **4**. Ґ 9. С. 1499-1507.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М. Наука, 1971. 508 с.

5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М. Наука, 1973. 256 с.

6. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Изв. АН СССР, серия матем. 1958. **22**. Ґ 4. С. 449-474.

7. Гамкрелидзе Р. В. К общей теории оптимальных процессов // ДАН СССР, 1958. **123**. Ґ 2. С. 223-226.

8. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1967. 472 с.

9. Емельянов С. В., Коровин С. К., Мамедов И. Г., Никитин С. В. Критерии управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях // Докл. АН СССР. 1986. **290**. Ґ 1. С. 18-22.

10. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М. Наука, 1970. 703 с.

11. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. О множестве управляемости линейной почти периодической системы // Дифференц. уравнения. 1991. **27**. Ґ 10. С. 1692-1699.

12. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. О равномерной локальной управляемости линейной системы // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. Ґ 9. С. 1499-1507.

13. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды I Международного конгресса ИФАК. Изд-во АН СССР. 1961. **2**. С. 521-547.

14. Калман Р. (Kalman R. E.) Contributions to the theory of optimal control. Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1960. Ґ5. P. 102-119.

15. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

16. Карасев И. П. Об эффективности определения ґ управляемость в маломЄ для исследования управляемости систем дифференциальных уравнений // Труды РРТИ. 1975. Ґ 62. С. 54-62.

17. Ковалев А. М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев. Наукова думка. 1980. 175 с.

18. Копейкина Т. Б. К необходимым условиям управляемости нелинейных систем в критическом случае // Ин-т мат. АН БССР, препр. 1985. Ґ 27/236. 44 с.

19. Копейкина Т. Б. О локальной управляемости нелинейных систем в критическом случае // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1987. Ґ 27/236. С. 8-15.

20. Коробов В. И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференц. уравнения. 1973. **9**. Ґ 4. С. 614-619.

21. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М. Наука, 1968. 476 с.

22. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М. Наука, 1985. 518 с.

23. Кротов В. Ф. Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М. Наука, 1973. 446 с.

24. Крищенко А. П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1984. Ѓ 6. С. 30-36.

25. Леваков А. А. К управляяемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. 1987. **23**. Ѓ 5. С. 798-806.

26. Ли Э. М., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М. Наука. 1972. 576 с.

27. Мастерков Ю. В. Об устойчивой локальной нуль-управляемости систем с квадратичной нелинейностью на плоскости // Изв. отд. мат. и инф. Ижевск. 1993. Ѓ 2. С. 3-24.

28. Мастерков Ю. В. О глобальной устойчивой управляемости // Изв. Ин-та. мат. и инф. Ижевск. 1997. Ѓ 1(9). С. 67-76.

29. Мастерков Ю. В. К вопросу о локальной управляемости в критическом случае // Изв. ВУЗ-ов. Математика. 1999. Ѓ 2(441). С. 68-74.

30. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Условия управляемости нелинейных нестационарных систем на плоскости // Тезисы 5-ой Российской Унив.-акад. конф. Ижевск, 2001. С. 47.

31. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Об устойчивой управляемости нелинейной нестационарной системы на плоскости // Тезисы ВВМШ. Воронеж. 2001. С. 107.

32. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Условия локальной управляемости нестационарной системы в критическом случае // Деп. в ВИНИТИ. 21.11.2001 Ѓ 11330-В01.

33. Митрохин Ю. С., Степанов А. Н. Критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений оптимального регулирования // Дифференциальные уравнения (качественная теория). Рязань. 1985. С. 61-70.

34. Николаев С. Ф. Тонков Е. Л. Позиционное управление нелинейной системой близкой к докритической // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск. 1998. Ѓ 2 (13). С. 3-26.

35. Nickolayev S. F., Tonkov E. L. Differentiability of Speed Function and Feedback Control of Linear Nonstationary System // Nonsmooth and Discontin. Probl. of Contr. and Optimiz. / A Proceed. vol. from the IFAC Workshop (Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998). 1999. P. 177-186.

36. Николаев С. Ф. Тонков Е. Л. Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференц. уравнения. 1999. **35**. Ґ 1. С. 107-115.

37. Никольский М. С. Об условиях второго порядка в задаче о нуль управляемости // Дифф. уравнения. 1998. **33**. Ґ 1. С. 137.

38. Петров Н. Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифф. уравнения. 1968. **4**. Ґ 4. С. 1218-1232.

39. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифф. уравнения. 1968. **4**. Ґ 7. С. 606-617.

40. Петров Н. Н. Решение одной задачи теории управляемости // Дифф. уравнения. 1969. **5**. Ґ 5. С. 962-963.

41. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Изд-во МГУ. 1984. 296 с.

42. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука. 1976. 392 с.

43. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. Ґ 2. С. 226-235.

44. Родина Л. И. К вопросу о полной управляемости линейной нестационарной системы // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск. 2000. Ґ 1(20). С. 59-103.

45. Родина Л. И. Условия управляемости линейной нестационарной системы // Тезисы 5-ой Российской Университетско-академической конференции. Ижевск. 2001. С. 46.

46. Родионова А. Г., Тонков Е. Л. О непрерывности функции быстродействия линейной системы в критическом случае // Изв. ВУЗ-ов. Математика. 1993. Ѓ 5(372). С. 101-111.

47. Тонков Е. Л. Неосцилляция линейных систем. Связь с управляемостью и числом переключений // Тр. Московск. ин-та химич. машиностр. 1972. Вып. 39. С. 32-37.

48. Тонков Е. Л. Неосцилляция и число переключений в линейной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференц. уравнения. 1973. **9**. Ѓ 12. С. 2180-2185.

49. Тонков Е. Л. Управляемость нелинейной системы по линейному приближению // Прикл. матем и мех. 1974. Вып. 4. С. 599-606.

50. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ. 1959. Ѓ 2. С. 23-58.

51. Aeyels Dirk. Global controllability for smooth nonlinear systems: a geometrical approach // SIAM J. Contr. and Optim. 1985. **23**. Ѓ 3. P. 462-465.

52. Aronsson G. Global controllability and bang-bang steering of certain nonlinear systems // SIAM J. Contr. and Optim. 1973. **11**. Ѓ 4. P. 607-619.

53. Concalves J. Basto. Geometric conditions for local controllability // J. Differ. Equat. 1991. **89**. Ѓ 2. P. 388-395.

54. Dauer Jerald P. Controllability of Nonlinear Systems with Restrained Controls // Journal of optimization theory and applications. 1974. **14**. Ѓ 3. P. 251-261.

55. Hermes H., Haynes G. On the nonlinear control problem with control appearing linearly // J. Soc. Ind. and Appl. Math. Control. 1963. **1**. Ѓ 2. P. 59-68.

56. Kawski, Matthias. A necessary condition for local controllability // Contemp. Math. 1987. **68**. P. 143-155.

57. La Salle J. P. Time optimal control systems. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. Vol.45. P. 4-13.

58. Lukes D. L. Global controllability of nonlinear systems // SIAM J. Contr. and Optim. 1972. **10**. Ѓ 1. P. 112-126.

59. Stefani Gianna. Lokal properties of nonlinear control systems // Sci. Pap. Inst. Techn. Cybern. Techn. Univ. Wrocl. 1985. Ѓ 29 P. 219-226.

60. Sussman H. J., Jurdjevic. Controllability of Nonlinear Systems // Journal of Differential Equations. 1972. **12**. Ѓ 1. P. 95-116.