МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.926+517.977

Попова Светлана Николаевна

УПРАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Тонков Евгений Леонидович

Ижевск 2004

Оглавление

Список основных обозначений 4

Введение 6

Глава I. Управляемость и согласованность 29

§ 1. Управляемость и равномерная полная управляемость 30

§ 2. Согласованность 37

§ 3. Следствия для динамической системы сдвигов 48

§ 4. Согласованность и управляемость 55

§ 5. Коэффициентные признаки согласованности 58

§ 6. Метод поворотов Миллионщикова для согласованных систем 62

Глава II. Локальная достижимость линейных управляемых систем 68

§ 7. Метод поворотов и локальная достижимость линейных однородных систем 69

§ 8. Управляемость и достижимость 75

§ 9. Локальная достижимость относительно множества 86

§ 10. Согласованность и достижимость 91

§ 11. Некоторые следствия из свойства достижимости 101

Глава III. Локальная управляемость асимптотических инвариантов 107

§ 12. Локальная и глобальная управляемость асимптотических инвариантов 108

§ 13. Пропорциональная управляемость полного спектра показателей Ляпунова 112

§ 14. Одновременная локальная управляемость спектра и коэффициента неправильности Ляпунова правильных систем 121

§ 15. Расчлененные линейные однородные системы 126

§ 16. Локальная управляемость показателей Ляпунова расчлененных систем 135

§ 17. Пропорциональная локальная управляемость показателей Ляпунова двумерных систем 141

§ 18. Необходимое условие устойчивости показателей линейной однородной системы 150

§ 19. Необходимость условия равномерной полной управляемости для локальной управляемости показателей Ляпунова 153

§ 20. Управление показателями Ляпунова почти периодического уравнения 167

Глава IV. Глобальная управляемость асимптотических инвариантов 171

§ 21. Глобальная достижимость, глобальная ляпуновская приводимость и глобальная управляемость асимптотических инвариантов 172

§ 22. Критерии равномерной полной управляемости 183

§ 23. Теорема о глобальной достижимости 197

§ 24. Глобальная ляпуновская приводимость периодических систем 212

§ 25. Глобальная достижимость двумерных систем 221

§ 26. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа. Управление свойствами правильности, приводимости и устойчивости показателей Ляпунова 233

§ 27. Глобальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова, центральных, особых и экспоненциальных показателей 240

Список литературы 249

Список основных обозначений

$:=$ и $=:$ — "равно по определению" (двоеточие — со стороны определяемого объекта).

$*$ — операция транспонирования.

$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[\,.$

$\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с каноническим ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_n$ и нормой $\|x\| = \sqrt{x^* x}$.

$\mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — вектор-столбец с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

M_{mn} — пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной нормой, т. е. операторной нормой, индуцируемой в M_{mn} евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$.

$\mathrm{B}_\varepsilon(H) = \{G \in \mathrm{M}_{mn} : \|G - H\| \leqslant \varepsilon\}$ — шар радиуса ε с центром в $H \in \mathrm{M}_{mn}$.

$[h_1, h_2, \ldots, h_n]$ — $m \times n$-матрица, образованная вектор-столбцами h_1, $h_2, \ldots, h_n \in \mathbb{R}^m$.

$E = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ — единичная $n \times n$-матрица.

$\mathrm{Sp}\, A$ — след матрицы A.

$\mathrm{rank}\, A$ — ранг матрицы A.

$\varkappa(A) := \|A\|\, \|A^{-1}\|$ — спектральное число обусловленности обратимой матрицы A.

$(H)_k = \begin{pmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1} & \ldots & h_{kk} \end{pmatrix}$ — ведущая главная подматрица порядка k матрицы $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathrm{M}_n$.

$\mathcal{H} = \{H \in \mathrm{M}_n : \det(H)_k > 0,\ k = 1, \ldots, n\}$ — совокупность всех $n \times n$-матриц, имеющих положительные ведущие главные миноры.

$\mathcal{H}(\rho) := \{H \in \mathrm{M}_n : \det(H)_k \geqslant \rho,\ k = 1, \ldots, n\}$.

$\mathcal{H}(r, \rho) := \{H \in \mathrm{B}_r(E) \subset \mathrm{M}_n : \det(H)_k \geqslant \rho,\ k = 1, \ldots, n\}$.

$KC_{mn}(I)$ — множество ограниченных кусочно непрерывных отображений $U : I \to \mathrm{M}_{mn}$, определенных на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, с равномерной нормой $\|U\|_{C(I)} := \sup\{\|U(t)\| : t \in I\}$; $KC_n(I) := KC_{nn}(I)$.

$C_n(I)$ — пространство непрерывных отображений $U:\ I\to \mathrm{M}_n$, определенных на отрезке $I\subset\mathbb{R}$, с равномерной нормой $\|U\|_{C(I)}:=\sup\{\|U(t)\|:\ t\in I\}$.

$\mathcal{M}_n$ — совокупность всех линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot x = A(t)x,\quad t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

где $A(\cdot)\in KC_n(\mathbb{R})$. Каждая система из $\mathcal{M}_n$ отождествляется с ее матрицей коэффициентов.

ФСР — фундаментальная система решений.

$h(x;[\alpha,\beta]) := \dfrac{\ln(\|x(\beta)\|/\|x(\alpha)\|)}{\beta-\alpha}$ — рост нетривиального решения $x(\cdot)$ линейной однородной системы на отрезке $[\alpha,\beta]$.

$\overline{p} := \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t p(s)\,ds$, $\underline{p} := \underline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t p(s)\,ds$, $\breve{p} := \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t p(s)\,ds$ — соответственно верхнее, нижнее и точное средние значения функции $p:\ [0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$.

$\operatorname{int} D$ — внутренность множества $D\subset\mathrm{M}_{mn}$ относительно M_{mn}.

$\operatorname{conv} D$ — выпуклая оболочка множества $D\subset\mathrm{M}_{mn}$.

Линейную управляемую систему

$$\dot x = A(t)x + B(t)u,\quad t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m,$$

управление в которой не фиксировано, называем **открытой**; если в этой системе выбрано управление $u(t)\equiv 0$, то соответствующую систему

$$\dot x = A(t)x,\quad t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

называем **свободной**; если управление выбрано линейным по наблюдателю

$$y = C^*(t)x,\quad t\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^r,$$

т. е. имеет вид $u=U(t)y$, то соответствующую систему

$$\dot x = (A(t)+B(t)U(t)C^*(t))x$$

называем **замкнутой**. Так же называем систему

$$\dot x = (A(t)+B(t)U(t))x$$

в случае отсутствия наблюдателя, при выборе управления линейным по фазовой переменной x.

Введение

Одной из первых и наиболее важных задач классической теории автоматического регулирования была задача о стабилизации управляемого объекта, поведение которого описывается стационарной линейной системой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

где A и B — постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно. Под стабилизацией этого объекта (или, что то же самое, системы (0.1)) понимается построение такой линейной обратной связи $u = Ux$ с постоянной $m \times n$ матрицей U, что всякое решение замкнутой этим управлением стационарной системы

$$\dot{x} = (A + BU)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \tag{0.2}$$

по норме стремится к нулю при $t \to +\infty$ быстрее функции $e^{-\alpha t}$, где неотрицательная величина α заранее задана. Поскольку обусловленное поведение решений системы (0.2) полностью определяется вещественными частями собственных значений матрицы $A + BU$, задача стабилизации сводится к перемещению в область

$$\mathbb{C}_\alpha := \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\ \lambda < -\alpha\}$$

комплексной плоскости всех собственных значений $\lambda_i(A + BU)$ матрицы $A{+}BU$ под воздействием стационарного матричного управления U.

Прямым развитием этой задачи стабилизации является задача о назначении спектра, в которой требуется обеспечить точные равенства

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

для произвольного наперед заданного набора комплексных чисел μ_1, $\mu_2 \ldots, \mu_n$.

В 1969 году в работе [181] П. Бруновский указал, что в течение длительного времени был известен следующий факт: *в случае скалярного управления* ($m = 1$) *задача о назначении спектра разрешима в том и только том случае, когда* $n \times n$ *матрица*

$$[b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b]$$

обратима (здесь $b := B \in \mathrm{M}_{n,1}$). Отметим, что эта теорема может быть легко получена как следствие метода преобразования векового уравнения, предложенного в 1931 году великим русским механиком и кораблестроителем А. Н. Крыловым в работе [78] (см. также [32, с. 190 – 192]).

В начале 60-х годов В. М. Попов доказал [121, 194], что необходимое и достаточное условие разрешимости задачи о назначении спектра при произвольном $m \in \mathbb{N}$ совпадает с условием

$$\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n \tag{0.3}$$

полной управляемости (Р. Калман, [189, 190]) системы (0.1). Позднее М. Уонэм в своей работе [199] показал, что если числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ образуют спектр вещественного типа, т. е. такой, каким может обладать вещественная матрица, то матрица обратной связи U может быть выбрана вещественной.

Если мы ставим своей целью распространить этот результат на линейные нестационарные системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ t \in \mathbb{R}, \tag{0.4}$$

то мы вынуждены сначала ответить на три вопроса: во-первых, из какого класса выбирать матрицу обратной связи U, во-вторых, что понимать под спектром замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{0.5}$$

и, в-третьих, каким образом следует интерпретировать условие полной управляемости (0.3).

Наиболее просто эти вопросы решаются для периодических систем, в качестве спектра которых естественно рассматривать совокупность мультипликаторов $\mu_1, \ldots, \mu_n$, т. е. собственных значений матрицы $X(\omega, 0)$ [39, с. 185]; здесь ω — период системы (0.4), $X(t, s)$ — матрица Коши свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{0.6}$$

Матричное управление $U(\cdot)$, вероятно, следует выбирать таким, чтобы замкнутая система (0.5) принадлежала тому же классу систем, что и свободная система (0.6).

В одной из первых работ по управлению асимптотическими характеристиками нестационарных систем [181] П. Бруновский показал, что *для ω-периодических систем* (0.4) *с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами разрешимость задачи о назначении спектра при всяком наборе предписанных значений μ_i, $i = 1, \ldots, n$, образующих спектр вещественного типа, эквивалентна полной управляемости рассматриваемой системы.* При этом матрица управляющего воздействия $U(\cdot)$ может быть выбрана из множества ω-периодических непрерывно дифференцируемых $m \times n$ матриц.

В случае нестационарных и непериодических систем самым естественным обобщением понятия спектра является понятие полного спектра показателей Ляпунова [88, с. 34] (см. также [57, с. 71 – 72]).

Определение 0.1 (А. М. Ляпунов, [88, с. 34]). Совокупность чисел $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ образует полный спектр показателей Ляпунова системы (0.6), если выполнены следующие условия:
1) показатель Ляпунова

$$\lambda[x] := \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|$$

всякого нетривиального решения $x(\cdot)$ этой системы принадлежит множеству чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$;
2) для произвольной фундаментальной системы решений (ФСР) $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ системы (0.6) имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda[x_i] \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i;$$

3) существует ФСР $\widehat{x}_1(\cdot), \ldots, \widehat{x}_n(\cdot)$ системы (0.6) такая, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda[\widehat{x}_i] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Эта ФСР называется нормальной.

Если система (0.6) стационарна, то ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из набора вещественных частей собственных значений матрицы коэффициентов A [39, с. 138]. Если же матрица коэффициентов $A(\cdot)$ системы (0.6) имеет период ω, то ее мультипликаторы и характеристические показатели Ляпунова связаны равенствами

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln |\mu_j|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Следуя традиции асимптотической теории линейных систем, мы будем рассматривать однородные системы вида (0.6) с кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами. Совокупность всех таких систем обозначим $\mathcal{M}_n$. Чтобы замкнутая управлением

$$u = U(t)x \tag{0.7}$$

система (0.4) принадлежала тому же классу $\mathcal{M}_n$, потребуем кусочной непрерывности и ограниченности матрицы $B(\cdot)$, и само́ матричное управление $U(\cdot)$ будем выбирать из множества $KC_{mn}(\mathbb{R})$ кусочно непрерывных и ограниченных на числовой прямой $m \times n$ матриц.

Определение 0.2. Характеристические показатели линейной системы (0.5) называются глобально управляемыми, если для всякого набора вещественных чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ найдется кусочно непрерывная ограниченная матричная функция $U(\cdot)$ такая, что выполнены равенства

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\lambda_1(A + BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + BU)$ — полный спектр показателей системы (0.5) при $U = U(\cdot)$.

Выясним теперь, как понимать условие (0.3) полной управляемости стационарных систем в случае произвольных линейных управляемых систем. Оказывается, что коэффициентное обобщение критерия полной управляемости (0.3) на произвольные нестационарные системы справедливо только в случае систем с аналитическими коэффициентами (А. Чанг, [182]). Для систем с гладкими неаналитическими коэффициентами имеет место лишь достаточное условие полной управляемости (Н. Н. Красовский, [76, с. 148]), которое состоит в том, что ранг матрицы управляемости

$$Q(t) := [Q_0(t), Q_1(t), \ldots, Q_n(t)],$$

где

$$Q_0(t) := B(t), \quad Q_i(t) := A(t)Q_{i-1}(t) - \dot{Q}_{i-1}(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

должен достигать в некоторой точке рассматриваемого промежутка наибольшего возможного значения, равного размерности системы n.

Различные эффективные условия полной управляемости линейной нестационарной системы (0.4) получали также В. Т. Борухов [15], Л. Е. Забелло [42], А. А. Леваков [84], С. А. Минюк [111], Л. И. Родина и Е. Л. Тонков [151] и другие авторы.

Если условие $\operatorname{rank} Q(t) = n$ для матрицы управляемости $Q(t)$ выполнено при всех $t \in \mathbb{R}$, то система (0.4) является, во-первых, дифференциально управляемой [191, 197] (см. также [30, с. 223]), и, во-вторых, по матрице управляемости можно построить нестационарное преобразование фазового пространства, приводящее эту систему к канонической форме, которая в случае $m = 1$ эквивалентна скалярному уравнению n-го порядка, а в случае $m > 1$ — системе нескольких независимых скалярных уравнений (Е. Я. Смирнов [165, с. 41 – 53], И. В. Гайшун [30, с. 243 – 316]. Поскольку задача управления характеристическими показателями Ляпунова скалярного уравнения решается просто (добавлением к коэффициентам этого уравнения подходящих функций), для систем, у которых это приводящее преобразование оказывается ляпуновским или обобщенным ляпуновским преобразованием, могут быть получены достаточные условия управляемости полного спектра характеристических показателей.

Такие условия были получены в работах Е. Я. Смирнова [163 – 165] и В. А. Воловича [198] для систем (0.4) с матрицей $A(\cdot)$ класса $C^{2n-2}(\mathbb{R})$ и матрицей $B(\cdot)$ класса $C^{2n-1}(\mathbb{R})$. В работах И. В. Гайшуна [24 – 30] и Е. Л. Тонкова [195] для случая $m = 1$ было достигнуто существенное снижение требований к порядку гладкости коэффициентов системы (0.4), что позволило значительно расширить класс систем, охватываемых достаточными условиями управляемости показателей, которые основаны на приведении системы (0.4) к виду, эквивалентному скалярному уравнению.

Для произвольных систем вида (0.4) указанный подход, по-видимому, реализовать нельзя. Один из возможных альтернативных подходов был в свое время предложен Е. Л. Тонковым и оказался весьма плодотворным. Он основан на результатах его работы [171], где доказана эквивалентность условий равномерной полной управляемости в смысле Р. Калмана [189] исходной системы (0.4) и равномерной стабилизируемости замкнутой системы (0.5) в предположении равномерной непрерывности коэффициентов (близкие по смыслу результаты содержатся в работе [186] японских математиков М. Икеды, Х. Маеды и Ш. Кодамы). Из этой теоремы следует, что *если система* (0.4) *с равномерно непрерывными коэффициентами равномерно вполне управляема, то за счет выбора линейной обратной связи* (0.7) *характеристические показатели Ляпунова* $\lambda_i(A + BU)$, $i = 1, \dots, n$, *замкнутой системы* (0.5) *можно сделать меньшими любого наперед заданного отрицательного числа.*

В связи с этим результатом Е. Л. Тонковым была поставлена задача о построении для равномерно вполне управляемой системы (0.4) обратной связи вида (0.7), которая бы обеспечила совпадение совокупности характеристических показателей Ляпунова системы (0.5) с заранее заданным набором вещественных чисел.

Напомним, что система (0.4) называется ϑ-равномерно вполне управляемой (Р. Калман, [189]), если существует такое число $\alpha > 0$, что матрица управляемости (матрица Калмана)

$$W(t_0, t_0+\vartheta) := \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0, s)\, ds$$

при всяком $t_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$W(t_0, t_0+\vartheta) \geqslant \alpha E,$$

которое понимается в смысле квадратичных форм, т. е. для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\xi^* W(t_0, t_0+\vartheta)\xi \geqslant \alpha \|\xi\|^2.$$

Первые результаты для задачи управления спектром в такой постановке были получены автором в работах [122, 123], в которых рассматривался вопрос о локальной управляемости показателей.

Определение 0.3 [122]. Характеристические показатели Ляпунова системы (0.5) называются **локально управляемыми**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что всякому набору вещественных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_n$, таких, что $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |\mu_i| \leqslant \delta$ и $\lambda_i(A) + \mu_i \leqslant \lambda_{i+1}(A) + \mu_{i+1}$ при всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, отвечает кусочно непрерывная ограниченная матричная функция $U_\mu(\cdot)$, удовлетворяющая условию $\|U_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon$ и обеспечивающая выполнение равенств

$$\lambda_i(A+BU) = \lambda_i(A) + \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n;$$

здесь $\lambda_i(A)$ — показатели системы (0.6).

В [122, 123] была доказана локальная управляемость характеристических показателей Ляпунова линейной системы (0.5) для равномерно вполне управляемой системы (0.4) при условии диагонализируемости свободной системы (0.6), а также локальная управляемость попарно различных значений показателей при условии приводимости системы (0.6) к некоторому блочно-треугольному виду (это условие выполнено, например, в случае устойчивости показателей Ляпунова системы (0.6)). Кроме того, в этих работах был рассмотрен вопрос об управлении некоторыми другими ляпуновскими инвариантами, в частности, центральными показателями Винограда и интегральной разделенностью решений.

Позднее локальная управляемость показателей Ляпунова изучалась в работах Е. Л. Тонкова и его учеников Д. М. Оленчикова и

В. А. Зайцева. В работах [115 – 118] Д. М. Оленчиковым методами нестандартного анализа был осуществлен перенос ряда основных результатов о локальной управляемости показателей на системы с импульсной обратной связью

$$u = U(t)y, \quad U(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} U_i \delta(t - t_i),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, а управляющими параметрами являются матрицы U_i и моменты времени t_i. В статье Е. Л. Тонкова и В. А. Зайцева [48] рассмотрен вопрос об управлении показателями для билинейных систем

$$\dot{x} = (A_0(f^t\sigma) + u_1 A_1(f^t\sigma) + \ldots + u_r A_r(f^t\sigma))x,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \; u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{R}^r, \; \sigma \in \Sigma, \; t \in \mathbb{R},$$

параметризованных при помощи топологической динамической системы (Σ, f^t). В [175, 195] Е. Л. Тонковым впервые поставлена задача о неупреждающем управлении показателями и получены первые результаты в этом направлении.

Свойство локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова системы (0.5) эквивалентно открытости в точке $U(t) \equiv 0$ отображения, которое каждому допустимому управляющему воздействию $U(\cdot)$ ставит в соответствие совокупность характеристических показателей Ляпунова системы (0.5) с таким $U(\cdot)$. Некоторые результаты о свойствах этого отображения содержатся в статьях П. Колониуса и В. Климана [183 – 185].

В связи с результатами об управлении центральными показателями и интегральной разделенностью решений, полученными в работах [122, 123], был поставлен вопрос о локальной и глобальной управляемости не только полного спектра показателей Ляпунова, но и других инвариантов преобразований Ляпунова (иначе называемых **ляпуновскими**, или **асимптотическими инвариантами**).

Напомним некоторые понятия теории показателей Ляпунова.

Определение 0.4 (А. М. Ляпунов, [88, с. 42]). Линейное преобразование

$$y = L(t)x \tag{0.8}$$

называется **преобразованием Ляпунова**, если его матрица $L(\cdot)$ удовлетворяет условиям:

1) $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|L(t)\| < \infty$;
2) при каждом $t \in \mathbb{R}$ матрица $L(t)$ обратима и $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|L^{-1}(t)\| < \infty$;
3) функция $L(\cdot)$ кусочно непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\dot{L}(t)\| < \infty$.

Матрица $L(\cdot)$ преобразования Ляпунова (0.8) называется матрицей Ляпунова.

Применение преобразования (0.8) к системе (0.6) переводит ее в систему

$$\dot{y} = D(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \tag{0.9}$$

где

$$D(t) = L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{0.10}$$

Определение 0.5. Пусть (0.8) — преобразование Ляпунова. Матрицы $A(\cdot)$ и $D(\cdot)$, связанные соотношением (0.10), называются кинематически подобными, а соответствующие им системы (0.6) и (0.9) называются асимптотически эквивалентными (по Богданову) [13].

Замечание 0.1. В некоторых работах (см., например, [18, с. 12; 39, с. 159]) можно встретить иное определение асимптотической эквивалентности. На протяжении всей работы мы будем придерживаться определения Ю. С. Богданова.

Определение 0.6. Система (0.6) называется приводимой к системе (0.9), если она асимптотически эквивалентна этой системе. Система (0.6) называется приводимой, если она асимптотически эквивалентна некоторой автономной системе (0.9).

Определение 0.7. Система (0.6) называется правильной, если ее коэффициент неправильности Ляпунова

$$\sigma_{\text{Л}}(A) := \lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A) - \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{Sp} A(s)\, ds$$

равен нулю.

Хорошо известно, что преобразования Ляпунова образуют группу [1, с. 62; 12], а формула (0.10) задает действие этой группы на множестве $\mathcal{M}_n$ систем с ограниченными и кусочно непрерывными коэффициентами. Величины и свойства, сохраняющиеся под действием группы ляпуновских преобразований, называются ляпуновскими (асимптотическими) инвариантами.

К асимптотическим инвариантам относятся такие величины (свойства), как полный спектр показателей Ляпунова; свойства приводимости и правильности (А. М. Ляпунов, [88]); коэффициенты неправильности σ_{Π} О. Перрона [193] и σ_{Γ} Д. М. Гробмана [36] (их определения приведены на с. 237), нижний показатель

$$\pi[x] := \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|$$

О. Перрона [193]; нижний и верхний равномерные показатели

$$\underline{\beta}[x] := \varliminf_{t-s\to+\infty} \frac{1}{t-s} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|},$$

$$\overline{\beta}[x] := \varlimsup_{t-s\to+\infty} \frac{1}{t-s} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|}$$

П. Боля [179]; нижний и верхний центральные показатели

$$\underline{\omega}(A) := \lim_{T\to+\infty} \varliminf_{k\to+\infty} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^{k} \ln \|X((j-1)T, jT)\|^{-1},$$

$$\Omega(A) := \lim_{T\to+\infty} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^{k} \ln \|X(jT, (j-1)T)\|$$

Р. Э. Винограда [21]; верхний особый показатель

$$\Omega^0(A) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sup_{k} \ln \|X((k+1)T, kT)\|,$$

введенный впервые П. Болем [179], и, много позднее, но независимо от него, К. П. Персидским [120] (см. также [37]); экспоненциальные показатели

$$\Delta_0(A) = \lim_{t\to1+0} \varlimsup_{k\to\infty} t^{-k} \sum_{j=1}^{k} \ln \|X(t^{j-1}, t^j)\|^{-1},$$

$$\nabla_0(A) = \lim_{t\to1+0} \varlimsup_{k\to\infty} t^{-k} \sum_{j=1}^{k} \ln \|X(t^j, t^{j-1})\|$$

Н. А. Изобова [56, 61,65]; свойство интегральной разделенности решений системы (0.6) (Б. Ф. Былов, [16]), заключающееся в существовании ФСР $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ этой системы, для которой при всех $t \geqslant s$ выполняются неравенства

$$\frac{\|x_{k+1}(t)\|}{\|x_{k+1}(s)\|} : \frac{\|x_k(t)\|}{\|x_k(s)\|} \geqslant de^{c(t-s)}, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

с некоторыми положительными постоянными c и d; и многие-многие другие.

Огромное разнообразие асимптотических инвариантов линейных систем приводит к задаче об управлении не только отдельными инвариантами преобразований Ляпунова, а сразу всей их совокупностью.

Определение 0.8 [97]. Система (0.5) обладает свойством **глобальной ляпуновской приводимости**, если для любой системы

$$\dot{z} = F(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{0.11}$$

принадлежащей множеству $\mathcal{M}_n$ систем с ограниченными и кусочно непрерывными коэффициентами, существует такое кусочно непрерывное и ограниченное управление $U(\cdot)$, что система (0.5) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (0.11).

Ясно, что если система (0.5) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости, то всякий ее асимптотический инвариант выбором матричного управления $U(\cdot)$ можно сделать совпадающим с любым допустимым наперед заданным значением (т. е. эта система обладает свойством глобальной управляемости каждого ляпуновского инварианта). Для дискретных систем вопрос о достаточных условиях глобальной ляпуновской приводимости рассматривался В. А. Луньковым в [87]. Некоторые результаты для систем с непрерывным временем были получены В. А. Зайцевым в [47, 49 – 51].

Из результатов о локальной управляемости показателей Ляпунова, т. е. об открытости в точке $U(t) \equiv 0 \in \mathrm{M}_{mn}$ отображения

$$U \mapsto (\lambda_1(A + BU), \ldots, \lambda_n(A + BU)),$$

вытекает открытость при $Q(t) \equiv 0 \in \mathrm{M}_n$ отображения

$$Q \mapsto (\lambda_1(A + Q), \ldots, \lambda_n(A + Q)),$$

ставящее в соответствие всякой кусочно непрерывной и ограниченной матричной функции $Q(\cdot)$ полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}. \tag{0.12}$$

С этими результатами тесную связь имеют результаты исследований в задаче об отыскании достижимых границ подвижности показателей системы (0.12), т. е. величин

$$\gamma^k(A) := \inf_Q \lambda_k(A + Q),$$

$$\Gamma^k(A) := \sup_Q \lambda_k(A+Q),$$

где $Q(\cdot)$ предполагается принадлежащим какому-либо классу малости [18, 57]. Наиболее полно изучены границы подвижности вверх старшего показателя λ_n. Несколько менее — границы подвижности вниз младшего показателя λ_1. Ранее всего был вычислен верхний центральный показатель $\Omega(A)$, введенный Р. Э. Виноградом в [21] как оценка сверху для старшего показателя системы (0.12) с малыми возмущениями. Достижимость этой оценки в классе малых возмущений доказана В. М. Миллионщиковым в [107]. Из этих двух работ вытекает, что

$$\Omega(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{\lambda_n(A+Q) : \, \|Q\|_C \leqslant \varepsilon\}.$$

В [107] В. М. Миллионщиковым получена также формула для вычисления младшего центрального показателя

$$\overline{\omega}(A) := \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^{k} \ln \|X((j-1)T, jT)\|^{-1},$$

совпадающего с достижимой нижней границей младшего показателя системы (0.12) в классе малых возмущений. В [153] И. Н. Сергеевым показано, что оба центральных показателя достижимы также в классе бесконечно малых возмущений, т. е. справедливы равенства

$$\overline{\omega}(A) = \inf\{\lambda_1(A+Q) : \, \lim_{t\to+\infty} \|Q(t)\| = 0\},$$

$$\Omega(A) = \sup\{\lambda_n(A+Q) : \, \lim_{t\to+\infty} \|Q(t)\| = 0\}.$$

Старший сигма-показатель $\nabla_\sigma(A)$, соответствующий классу σ-возмущений, т. е. возмущений, удовлетворяющих неравенству

$$\|Q(t)\| \leqslant N_Q e^{-\sigma t}, \quad t \geqslant 0,$$

в котором N_Q — положительная константа, зависящая от $Q(\cdot)$, вычислен Н. А. Изобовым в [56]. Старший экспоненциальный показатель $\nabla_0(A)$, соответствующий предельному классу всех экспоненциально убывающих возмущений и играющий важную роль в решении задач Ляпунова об устойчивости по линейному приближению, вычислен Н. А. Изобовым в [61], где получена также и формула для младшего экспоненциального показателя $\Delta_0(A)$.

В [153, 156] И. Н. Сергеевым построены достижимые границы подвижности вверх для всех промежуточных показателей при малых и бесконечно малых возмущениях. В работах Н. А. Изобова [58 – 60] введено понятие минимального показателя линейной дифференциальной системы, представляющего собой достижимую границу подвижности вниз старшего показателя при малых возмущениях, дана формула для его вычисления в случае двумерной системы и оценка снизу в общем случае. В работах И. Н. Сергеева [158 – 162] вычислен минимальный показатель трехмерной системы, а также найдена достижимая граница подвижности вниз ее промежуточного показателя при малых возмущениях. Ранее в работе [157] И. Н. Сергеевым были полностью вычислены границы подвижности всех показателей линейной дифференциальной системы для возмущений, малых в среднем.

Обобщением задачи о вычислении достижимых границ подвижности показателей является задача о построении спектрального множества линейной дифференциальной системы, т. е. совокупности значений спектрального вектора $(\lambda_1(A+Q),\ldots,\lambda_n(A+Q))$, принимаемых им на всем множестве систем (0.12) с возмущениями из рассматриваемого класса. Впервые спектральное множество было полностью вычислено в работе М. И. Рахимбердиева и Н. Х. Розова [150] для стационарной системы с малыми в среднем периодическими возмущениями. Спектральные множества систем с гробмановскими возмущениями вычислялись Н. А. Изобовым в [63, 64]. Ряд результатов о спектральных множествах линейных сингулярных систем с экспоненциальными возмущениями получен в работах Н. А. Изобова и С. Г. Красовского [67, 77, 187]. Для случая малых возмущений весьма серьезные продвижения достигнуты в работах М. И. Рахимбердиева [144 – 149].

Вычисление точных границ характеристических показателей и построение спектральных множеств линейных дифференциальных систем с ограниченными возмущениями, не являющимися малыми, но удовлетворяющими некоторым дополнительным ограничениям, производилось в работах С. А. Гришина [34], Н. А. Изобова [62], Н. А. Изобова и Т. Е. Зверевой [66], А. Г. Суркова [166 – 169].

В заключение обзорной части введения отметим, что задачами стабилизации различных систем при различных предположениях в разное время занимались Э. Г. Альбрехт [2], П. Бруновский [20], С. А. Гришин и Н. Х. Розов [35], С. А. Гришин [34], Ю. Ф. Долгий [40], Л. Е. Забелло [43, 45], В. А. Зайцев [49], Н. Н. Красовский [72 – 75], В. Н. Лаптинский [83], Г. А. Леонов [85], В. А. Луньков и Е. Л. Тонков [86], С. А. Нефедов и Ф. А. Шолохович [113], Ю. С. Осипов [73, 119], И. Н. Сергеев [155] Е. Я. Смирнов [165], Е. Л. Тонков [175], Ф. А. Шолохович [178], R. Brockett [180], C. E. Langenhop [192] и другие авторы. Некоторые утверждения об управлении мультипликаторами периодических систем получены В. Н. Лаптинским в работах [81, 82]. Задачи управления приводимостью и правильностью решались Е. Я. Смирновым в [164, с. 33] и И. В. Гайшуном в [30, с. 310–311].

* * *

Диссертация состоит из введения, четырех глав, включающих двадцать семь параграфов (нумерация параграфов сквозная), и списка литературы.

В первом параграфе приведен обзор известных результатов о полной управляемости линейных систем вида (0.4). В последующих параграфах первой главы введены и исследованы свойства **согласованности** и **равномерой согласованности** линейной управляемой системы с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ y = C^*(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^r. \tag{0.13}$$

Эти понятия являются непосредственным обобщением на такие системы понятий полной и равномерной полной управляемости линейных управляемых систем без наблюдателя вида (0.4).

Основной объект исследований второго параграфа — семейство линейных управляемых систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{0.14}$$

с наблюдателем

$$y = C^*(f^t\sigma)x, \quad y \in \mathbb{R}^r, \tag{0.15}$$

заданных топологической динамической системой (Σ, f^t) (Σ — полное метрическое пространство со счетной базой, f^t — поток на Σ) и функцией $\varphi := (A, B, C) \,:\, \Sigma \to \mathrm{M}_{n,n+m+r}$. Система (0.14), (0.15) отождествляется с функцией $t \to \varphi(f^t\sigma)$. В определении 2.1 введено понятие согласованности системы $\varphi(f^t\sigma)$ на фиксированном отрезке времени $[0, \vartheta]$. Согласованность системы $\varphi(f^t\sigma)$ на отрезке означает разрешимость на этом отрезке некоторой матричной задачи управления.

Эта задача аналогична задаче поиска при произвольном $x_0 \in \mathbb{R}^n$ управления $u(\cdot)$ такого, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (0.4) при $u = u(\cdot)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ удовлетворяет условию $x(\vartheta) = 0$ (разрешимость такой задачи при каждом x_0 означает полную управляемость системы (0.4) на отрезке $[0, \vartheta]$). По системе $\varphi(f^t\sigma)$ строится постоянная симметрическая $n^2 \times n^2$-матрица $\Gamma(\vartheta, \sigma)$ (так называемая матрица согласования — аналог матрицы Калмана), и доказывается, что согласованность системы $\varphi(f^t\sigma)$ эквивалентна положительной определенности матрицы согласования (теорема 2.1). Определением 2.2 введено понятие равномерной (на замыкании траектории $\overline{\gamma(\sigma_0)}$) согласованности системы $\varphi(f^t\sigma_0)$.

В § 3 результаты предыдущего параграфа переносятся на случай, когда в качестве пространства (Σ, f^t) рассматривается динамическая система сдвигов, порожденная фиксированной линейной управляемой системой с наблюдателем вида (0.13). Показано, что в случае линейной управляемой системы без наблюдателя введенное понятие согласованности эквивалентно понятию полной управляемости (теорема 3.1). Установлена инвариантность свойства равномерной согласованности относительно ляпуновских преобразований (следствие 3.2) и грубость этого свойства (следствие 3.3).

В четвертом параграфе по линейной управляемой системе с наблюдателем строится линейная управляемая система без наблюдателя бо́льшей размерности — так называемая “большая” система. Показано (теорема 4.1), что согласованность исходной системы эквивалентна полной управляемости большой системы. В следующем параграфе на основании результатов § 4 получены коэффициентные признаки согласованности (и несогласованности) линейных управляемых систем с наблюдателем.

В последнем параграфе главы установлена возможность применения метода поворотов В. М. Миллионщикова [107, 110] (см. также обзор Н. А. Изобова [57]) к системе (0.13), замкнутой линейной по y обратной связью $u = Uy$, т. е. к системе

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{0.16}$$

Во второй главе исследовано свойство локальной достижимости замкнутой системы (0.16) (см. определения 10.1 и 10.2). Указанное свойство заключается в возможности построения такого матричного управления $U(\cdot)$, что для матрицы Коши $X_U(t, s)$ этой системы при

$U=U(\cdot)$ имеет место равенство

$$X_U(t_0+\vartheta,t_0)=X(t_0+\vartheta,t_0)H, \tag{0.17}$$

где $H\in \mathrm{M}_n$ — произвольная достаточно близкая к E матрица, а $X(t,s)$, как и прежде, матрица Коши свободной системы (0.6). Именно свойство локальной достижимости системы (0.16) позволяет перенести метод поворотов Миллионщикова на линейные управляемые системы с наблюдателем.

В § 8 рассмотрен частный случай системы (0.13) — линейная управляемая система (0.4) без наблюдателя. Этому случаю отвечают значения $r=n$, $C(t)\equiv E$. Показано, что равномерная полная управляемость системы (0.4) необходима и достаточна для равномерной локальной достижимости системы (0.5) (теорема 8.2).

В десятом параграфе установлено, что равномерная согласованность системы (0.5) достаточна, но не необходима для равномерной локальной достижимости системы (0.16) (теоремы 10.1 и 10.2). Таким образом, свойство равномерной согласованности системы (0.13) “с запасом” обеспечивает возможность применения метода поворотов Миллионщикова к линейным управляемым системам с наблюдателем. Кажется довольно очевидным, что какие-либо достаточные легко проверяемые условия само́й достижимости получить весьма непросто. С другой стороны, с достаточными условиями согласованности таких проблем не возникает (можно, например, воспользоваться результатами параграфов 4, 5). Отсюда следует практическая ценность полученных в главе I результатов о равномерной согласованности линейных управляемых систем с наблюдателем.

В § 11 показано, что если система (0.16) равномерно локально достижима, то для каждого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что множество $\mathfrak{N}_\varepsilon(A)$ замкнутых систем вида (0.16), где $\|U\|_C\leqslant\varepsilon$, и множество $\mathfrak{M}_\delta(A)$ возмущенных систем

$$\dot{x}=(A(t)+P(t))\,x, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $\|P\|_C\leqslant\delta$, неотличимы с точки зрения асимптотического поведения решений систем, входящих в эти множества (следствие 11.1). Доказательство этого результата основано на том, что свойство асимптотической эквивалентности систем дискретизуемо в следующем смысле (Е. К. Макаров, [90]): если матрицы Коши $X(t,s)$ и $Z(t,s)$ двух линейных однородных систем (0.6) и (0.11), принадлежащих множеству $\mathcal{M}_n$, при некотором $\vartheta > 0$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют равенствам

$$Z((k+1)\vartheta, k\vartheta) = X((k+1)\vartheta, k\vartheta),$$

то эти системы асимптотически эквивалентны. Заметим, что дискретизуемость (т. е. возможность вычисления на фиксированной последовательности моментов времени) отдельных ляпуновских инвариантов впервые была замечена, вероятно, Н. А. Изобовым в [55], где была установлена вычислимость на произвольной возрастающей арифметической прогрессии моментов времени полного спектра показателей Ляпунова (см. также [18, с. 537]). В работе Р. А. Прохоровой [143] отмечено, что не только характеристические показатели, но и многие другие ляпуновские инварианты, такие, как центральные, особые и экспоненциальные показатели, коэффициенты неправильности и т. п., имеют дискретный характер, т. е. их вычисление также можно проводить по последовательности $k\vartheta$, $k \in \mathbb{N}$, с произвольным фиксированным $\vartheta > 0$.

На основании следствия 11.1 и классических теорем современной теории показателей Ляпунова (В. М. Миллионщиков, [108, 110]) установлено существование во множестве $\mathfrak{N}_\varepsilon(A)$ при каждом $\varepsilon > 0$ системы с интегральной разделенностью (теорема 11.2), доказана достижимость верхнего центрального показателя $\Omega(A)$ системы (0.6) на возмущениях из класса $\mathfrak{N}(A) := \bigcup\limits_{\varepsilon>0} \mathfrak{N}_\varepsilon(A)$ (теорема 11.3) и показано, что устойчивость показателей Ляпунова на произвольных малых возмущениях эквивалентна их устойчивости на возмущениях из класса $\mathfrak{N}(A)$ (теорема 11.4).

В девятом параграфе исследовано свойство ϑ-**равномерной локальной достижимости системы** (0.5) **относительно множества** $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$, которое заключается в возможности построения для любой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(E)$ на произвольном отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$ такого матричного управления $U : [t_0, t_0+\vartheta] \to \mathbb{U}$, что выполнено равенство (0.17), при этом δ не зависит от t_0. Доказано, что для ϑ-равномерной локальной достижимости системы (0.5) относительно ограниченного множества $\mathbb{U}$ необходима ϑ-равномерная полная управляемость соответствующей открытой системы (теорема 9.2). Условие ограниченности множества $\mathbb{U}$ здесь существенно (пример 9.1). В § 8 приведен пример 8.1 скалярного управляемого уравнения, равномерно локально достижимого относительно множества $\mathbb{U} = [\alpha, \beta]$ при произвольных $\alpha < \beta$. Этот эффект является следствием того, что коэффициент $b(\cdot)$ при управлении подходящим образом меняет знак. В десятом параграфе, в свою очередь, построен пример 10.1 двумерной системы, у которой все коэффициенты при управлении неотрицательны, а сама система является равномерно локально достижимой относительно множества, не содержащего нуль во внутренности выпуклой оболочки.

В третьей главе доказаны основные результаты диссертации, касающиеся локальной управляемости инвариантов ляпуновских преобразований.

В двенадцатом параграфе введены ключевые понятия работы — локальной и глобальной управляемости асимптотических инвариантов замкнутой системы (0.16), а также пропорциональной локальной и пропорциональной глобальной управляемости ляпуновских инвариантов. Пусть ι — некоторый ляпуновский инвариант. Согласно определению 12.1, инвариант ι называется глобально управляемым, если для любого возможного значения этого инварианта, т. е. для любого $\iota_0 \in \iota(\mathcal{M}_n)$, найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$ такое, что значение $\iota(A + BUC^*)$ рассматриваемого инварианта для замкнутой системы (0.16) при $U = U(\cdot)$ совпадает с ι_0. В случае, когда множество значений инварианта ι содержится в некотором метрическом пространстве $(\mathfrak{X}, \rho)$, введено понятие локальной управляемости инварианта. Инвариант ι называется локально управляемым (определение 12.2), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $\iota_0 \in \iota(\mathcal{M}_n)$, удовлетворяющего неравенству $\rho(\iota(A), \iota_0) \leqslant \delta$, существует управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, гарантирующее выполнение равенства $\iota(A + BUC^*) = \iota_0$. Понятие пропорциональной локальной (и пропорциональной глобальной) управляемости инварианта дополнительно включает в себя липшицеву оценку нормы управления в зависимости от величины смещения $\rho(\iota(A), \iota_0)$ инварианта (см. определение 12.2).

В § 13 установлено (лемма 13.2), что если замкнутая система (0.16) равномерно локально достижима, то из пропорциональной глобальной управляемости произвольной конечной совокупности ляпуновских инвариантов системы

$$\dot{x} = (A(t) + U)x, \tag{0.18}$$

отвечающей значениям $n = m = r$, $B(t) = C(t) \equiv E$, вытекает их локальная управляемость для системы (0.16). В случае отсутствия наблюдателя имеет место более сильное утверждение (лемма 13.1): если система (0.4) равномерно вполне управляема, то из пропорциональной глобальной управляемости произвольной конечной совокупности ляпуновских инвариантов системы (0.18) следует их пропорциональная локальная управляемость для системы (0.5). На основании этих результатов получены достаточные условия локальной и пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова систем (0.16) и (0.5) соответственно (теоремы 13.4 и 13.5). Для доказательства этих теорем предварительно получены достаточные условия пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (0.18). Установлено, в частности, что такими достаточными условиями являются устойчивость показателей Ляпунова однородной системы (0.6) (теорема 13.1), ее правильность (теорема 13.2) и диагонализируемость (теорема 13.3).

В четырнадцатом параграфе в случае правильности однородной системы (0.6) доказана одновременная пропорциональная локальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова и коэффициента неправильности Ляпунова замкнутой системы (0.5) при условии равномерной полной управляемости системы (0.4).

В следующем параграфе введено и исследовано понятие расчлененности линейной однородной системы (0.6), которое играет ведущую роль в получении достаточных условий локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. Расчлененность системы (0.6) означает существование расчлененной нормальной ФСР этой системы (определение 15.3). В свою очередь (теорема 15.2), ФСР $x_1(\cdot),\dots,x_n(\cdot)$ расчленена, если для всякого входящего в нее решения $x_i(\cdot)$ найдутся число $\alpha\in]0,\pi/2]$ и монотонно возрастающая к $+\infty$ последовательность моментов времени $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, такие, что

$$\lambda[x_i]=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_k}\ln\|x_i(t_k)\|,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{mes}G_i^{\alpha}(t_k)}{t_k}>0,$$

где

$$G_i^{\alpha}(T):=\{t\in[0,T]:\ \varphi_i(t)\geqslant\alpha\},$$

$\varphi_i(t)$ — угол между вектором $x_i(t)$ и линейной оболочкой векторов $x_j(t)$, $j=1,\dots,n$, $j\neq i$.

В § 16 доказана пропорциональная локальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова системы (0.5) при условии равномерной полной управляемости системы (0.4) и расчлененности свободной системы (0.6) (теорема 16.1, следствия 16.2 и 16.3). В § 17 на основе этих результатов установлена пропорциональная локальная управляемость показателей Ляпунова двумерной системы (0.5) в случае равномерной полной управляемости системы (0.4) и некратности полного спектра соответствующей свободной системы (теорема 17.2).

На основании понятия расчлененности в § 18 получено новое необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова системы (0.6). Доказано, что если эта система имеет не нормальную расчлененную ФСР, то ее показатели Ляпунова неустойчивы (теорема 18.1). Рассмотрен пример 18.1 двумерной системы, имеющей расчлененную не нормальную ФСР.

Все достаточные условия локальной управляемости ляпуновских инвариантов получены при условии равномерной локальной достижимости системы (0.16) (либо, в случае $r = n$, $C(t) \equiv E$, при условии равномерной полной управляемости системы (0.4)). В § 19 выясняется вопрос о необходимости этого условия для локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. В этом параграфе введено понятие равномерной (относительно $\sigma \in \overline{\gamma_+(\sigma_0)}$) локальной управляемости показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = (A(f^t\sigma_0) + B(f^t\sigma_0)UC^*(f^t\sigma_0))x$$

и получены достаточные условия такой управляемости (теоремы 19.1 и 19.2). В случае $C(\sigma) \equiv E$ изучен вопрос о необходимости условия равномерной полной управляемости системы (0.14) для равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова (теорема 19.3).

В последнем параграфе третьей главы для скалярного уравнения n-го порядка

$$z^{(n)} + u\sigma_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + u\sigma_n(t)z = 0$$

с почти периодическими по Бору и линейно независимыми на $\mathbb{R}$ коэффициентами $\sigma_1(\cdot), \ldots, \sigma_n(\cdot)$ установлена равномерная локальная управляемость показателей Ляпунова.

В главе IV получены основные результаты диссертации, касающиеся глобальной достижимости, глобальной ляпуновской приводимости и глобальной управляемости отдельных асимптотических инвариантов замкнутой системы (0.5).

В § 21 введено понятие глобальной достижимости системы (0.5). Согласно определению 21.2, эта система называется

ϑ-равномерно глобально достижимой относительно неограниченного множества $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$, если для произвольных $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ найдется такое

положительное число l, что для любой матрицы $H \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|H\| \leqslant \alpha$ и $\det H \geqslant \beta$, и для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ существует кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0 + \vartheta] \to \mathbb{U}$, $\|U\|_C \leqslant l$, гарантирующее выполнение равенства (0.17);
ϑ-равномерно глобально достижимой, если она ϑ-равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$.

Примером 21.1 показано, что из ϑ-равномерной полной управляемости системы (0.4) не следует ϑ-равномерная глобальная достижимость системы (0.5). В то же время, если система (0.5) ϑ-равномерно глобально достижима, то соответствующая система (0.4) ϑ-равномерно вполне управляема (теорема 21.2). Далее в этом параграфе введено определение 21.3 глобальной ляпуновской приводимости системы (0.5) относительно неограниченного множества $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$. Это свойство означает, что для любой матрицы $F(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$ найдется кусочно непрерывное ограниченное управление $U : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы (0.11) и системы (0.5) при $U = U(\cdot)$. Доказано (теорема 21.3), что если система (0.5) равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U}$, то эта система обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости относительно $\mathbb{U}$. Обратное неверно (см. пример 21.2). В заключение параграфа установлено (теорема 21.4), что из глобальной ляпуновской приводимости системы (0.5) вытекает глобальная управляемость всякой ее конечной совокупности ляпуновских инвариантов.

Основные результаты главы IV доказаны при условии равномерной полной управляемости системы (0.4) и кусочной равномерной непрерывности матрицы $B(\cdot)$. В § 22 получены критерии равномерной полной управляемости системы (0.4) в предположении кусочной равномерной непрерывности $B(\cdot)$. Ведущую роль в построениях главы играет теорема 22.2, в которой установлено, что из ϑ-равномерной полной управляемости системы (0.4) следует существование таких $\alpha > 0$ и $\delta_0 > 0$, что для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдутся векторы единичной длины $\nu_i \in \mathbb{R}^m$ и моменты времени $t_i \in [t_0 + \delta_0, t_0 + \vartheta - \delta_0]$, $t_i - t_{i-1} \geqslant \delta_0$, $i = 1, \ldots, n$, для которых матрица

$$F(t_0) := [X(t_0, t_1)B(t_1)\nu_1, \ldots, X(t_0, t_n)B(t_n)\nu_n]$$

обратима и $\|F^{-1}(t_0)\| \leqslant \alpha$. Базис пространства $\mathbb{R}^n$, матрицей которого является $F(t_0)$, назван базисом чистых движений системы (0.4) на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Это понятие обсуждено в конце § 22.

В § 23 выясняется, для каких матриц $H \in \mathrm{M}_n$ с положительным определителем выбором кусочно непрерывного ограниченного управления $U(\cdot)$ можно добиться выполнения равенства (0.17), если свободная система (0.4) ϑ-равномерно вполне управляема (для произвольной матрицы H с положительным определителем такого управления в общем случае не существует). Доказано, в частности (следствие 23.1), что для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ и для произвольных матриц с положительными диагональными элементами, нижней треугольной L и верхней треугольной G, найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, обеспечивающее выполнение равенства

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0) F(t_0) LGF(t_0)^{-1}.$$

На основании этого результата (см. также теорему 23.3, следствие 23.2) в конце параграфа установлена пропорциональная глобальная управляемость верхнего особого показателя системы (0.5) (теорема 23.4). Отсюда вытекает равномерная стабилизируемость этой системы (определение 23.2).

В § 24 установлена эквивалентность полной управляемости периодической системы (0.4) с кусочно непрерывными коэффициентами и глобальной ляпуновской приводимости соответствующей замкнутой системы (0.5) (теорема 24.1). Из этой теоремы следует, что если ω-периодическая система (21.1) вполне управляема, то мультипликаторы соответствующей замкнутой системы (0.5) глобально управляемы в следующем смысле: для любой матрицы $\Lambda \in \mathrm{M}_n$ с положительным определителем найдутся управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ и ляпуновское преобразование $z = L(t)x$, такие, что система (0.5) с управлением $U(\cdot)$ приводится этим преобразованием к ω-периодической системе (0.11), имеющей своими мультипликаторами собственные значения матрицы Λ. Таким образом, достигнуто существенное снижение требований к порядку гладкости коэффициентов системы по сравнению с результатом П. Бруновского [181]. Отметим, что метод доказательства глобальной управляемости мультипликаторов, примененный Бруновским, не позволяет снизить гладкость коэффициентов.

В двадцать пятом параграфе доказана глобальная достижимость произвольной двумерной ($n = 2$) замкнутой системы вида (0.5) при условии равномерной полной управляемости соответствующей открытой системы (0.4) (теорема 25.1). Из этой теоремы вытекает глобальная ляпуновская приводимость двумерной системы (0.5), и, следовательно, глобальная управляемость всякой конечной совокупности ляпуновских инвариантов этой системы.

В § 26 установлено, что для произвольной скалярной функции $p(\cdot)$ и всякой равномерно вполне управляемой системы вида (0.4) можно построить такое матричное управление $U(\cdot)$, что соответствующая замкнутая система (0.5) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе

$$\dot{z} = p(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

(теорема 26.1). Как следствие доказана глобальная управляемость таких ляпуновских инвариантов, как коэффициенты неправильности (теорема 26.2), свойства правильности (следствие 26.2), приводимости (следствие 26.3) и устойчивости полного спектра показателей Ляпунова (теорема 26.3).

В § 27 доказано (лемма 27.1), что при условии равномерной полной управляемости системы (0.4) для любых непрерывных и ограниченных функций $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, существует матричное управление $U(\cdot)$ такое, что замкнутая система (0.5) при $U = U(\cdot)$ асимптотически эквивалентна системе с верхней треугольной кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ матрицей, диагональ которой совпадает с $(p_1(\cdot), \ldots, p_n(\cdot))$. На основе этого результата установлена глобальная управляемость следующих асимптотических инвариантов системы (0.5): полного спектра показателей Ляпунова (теорема 27.4), одновременная глобальная управляемость центральных показателей $\underline{\omega}(A+BU)$, $\overline{\omega}(A+BU)$ и $\Omega(A+BU)$ (теорема 27.1), особых показателей $\omega_0(A+BU)$, $\omega^0(A+BU)$ и $\Omega^0(A+BU)$ П. Боля (теорема 27.2) и экспоненциальных показателей $\Delta_0(A+BU)$ и $\nabla_0(A+BU)$ Н. А. Изобова (теорема 27.3).

Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в работах [91 – 101, 124 – 142]. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены лишь результаты, полученные автором. Теорема 8.1 из совместной работы [95], теорема 17.2 из совместной работы [101] и теорема 25.1 из совместной работы [97] принадлежат диссертанту и соавтору Е. К. Макарову в равной мере. Результаты главы I, носящей предварительный характер, получены в равной степени автором и научным консультантом Е. Л. Тонковым.

Автор выражает искреннюю признательность научному консультанту профессору Е. Л. Тонкову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа поддержана программой “Университеты России” по направлению “Фундаментальные проблемы математики и механики” (проект 1.5.22), Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 94 – 01 – 00843 – a, 97 – 01 – 00413, 99 – 01 – 00454, 03 – 01 – 00014), Конкурсным центром фундаментального естествознания (гранты 93 – 1 – 46 – 18, 97 – 0 – 1.9, E 00 – 1.0 – 5, E 02 – 1.0 – 100) и Конкурсным центром Удмуртского государственного университета (грант 97 – 04).

ГЛАВА I. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И СОГЛАСОВАННОСТЬ

В этой главе понятия полной управляемости (Р. Калман, [189]; Н. Н. Красовский, [76]) и равномерной полной управляемости (Р. Калман, [189]) линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m,$$

перенесены на линейные управляемые системы с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \ y = C^*(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ y \in \mathbb{R}^r. \tag{I.1}$$

Соответствующие свойства этой системы названы согласованностью и равномерной согласованностью соответственно. Изучены свойства согласованных и равномерно согласованных систем и получены различные (в том числе и коэффициентные) признаки согласованности и равномерной согласованности. По системе (I.1) построена управляемая система без наблюдателя бо́льшей размерности — так называемая большая система. Показано, что полная управляемость большой системы эквивалентна согласованности системы (I.1). В последнем параграфе главы установлена возможность применения метода поворотов Миллионщикова к системе (I.1), замкнутой линейной по y обратной связью, т. е. к системе

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

§ 1. Управляемость и равномерная полная управляемость

В этом параграфе приведен обзор известных результатов об управляемости линейных систем.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

с кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ матричными коэффициентами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$. В качестве управлений $u(\cdot)$ в системе (1.1) будем рассматривать измеримые по Лебегу и ограниченные на своей области определения функции.

Определение 1.1 (Р. Калман, [189]). Состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы (1.1) называется управляемым в момент времени t_0, если его можно перевести за конечное время $[t_0, t_1]$ в начало координат вдоль решения системы (1.1), т. е. существуют $t_1 > t_0$ и управление $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ такие, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \tag{1.2}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

удовлетворяет равенству $x(t_1) = 0$. Система (1.1) называется вполне управляемой в момент t_0, если всякое состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ управляемо в этот момент времени.

Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{1.4}$$

Рассмотрим при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ симметричную $n \times n$ матрицу

$$W(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} X(t_0, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0, s)\, ds,$$

которую называют матрицей управляемости (матрицей Калмана) системы (1.1) на отрезке $[t_0, t_1]$.

Оказывается (Р. Калман, [189]), что *состояние* x_0 *системы* (1.1) *управляемо в момент времени* t_0 *в том и только том случае, когда при некотором* $t_1 > t_0$ *точка* x_0 *принадлежит множеству значений оператора* $W(t_0, t_1)$.

Известно (Р. Калман, [68]), что функция $t \mapsto \operatorname{rank} W(t_0, t)$ не убывает на $[t_0, +\infty[$. Поскольку эта функция принимает значения во множестве чисел $\{0, 1, \dots, n\}$, то существует момент $t_1 > t_0$ такой, что

$$\operatorname{rank} W(t_0, t_1) = \max\{\operatorname{rank} W(t_0, t) : t \in [t_0, +\infty[\}.$$

Если этот максимальный ранг равен n (размерности системы), то всякое состояние системы (1.1) управляемо в нуль за время $[t_0, t_1]$. Таким образом, *система* (1.1) *вполне управляема в момент* t_0 *в том и только том случае, когда существует* $\vartheta > 0$ *такое, что всякое состояние* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *управляемо в нуль на* $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Поэтому можно ввести следующее определение.

Определение 1.2 (Р. Калман, [189]; Н. Н. Красовский, [76]). Система (1.1) называется:
вполне управляемой на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$, если для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u : [t_0, t_0+\vartheta] \to \mathbb{R}^m$ такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши (1.2), (1.3) удовлетворяет равенству

$$x(t_0 + \vartheta) = 0; \tag{1.5}$$

вполне управляемой, если для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется $\vartheta > 0$ такое, что система (1.1) вполне управляема на $[t_0, t_0 + \vartheta]$.

Для произвольного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \xi^* W(t_0, t_0 + \vartheta)\xi &= \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \xi^* X(t_0, s) B(s) B^*(s) X^*(t_0, s)\xi \, ds = \\ &= \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* X(t_0, s) B(s)\|^2 \, ds. \end{aligned} \tag{1.6}$$

поэтому равенство $\operatorname{rank} W(t_0, t_0 + \vartheta) = n$ эквивалентно положительной определенности матрицы $W(t_0, t_0 + \vartheta)$. Таким образом, *система* (1.1) *вполне управляема на отрезке* $[t_0, t_0 + \vartheta]$ *в том и только том случае, когда ее матрица управляемости* $W(t_0, t_0 + \vartheta)$ *положительно определена.* Заметим также, что положительная определенность матрицы $W(t_0, t_0 + \vartheta)$ эквивалентна существованию такого числа $\alpha > 0$, что для каждого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\xi^* W(t_0, t_0 + \vartheta)\xi \geqslant \alpha \|\xi\|^2. \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) вытекает еще один критерий полной управляемости: *система* (1.1) *вполне управляема на отрезке* $[t_0, t_0 + \vartheta]$ *в том и* *только том случае, когда строки матрицы* $X(t_0,t)B(t)$ *линейно независимы на этом отрезке.* Действительно, если система (1.1) вполне управляема на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$, то для каждого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$0 < \xi^* W(t_0, t_0+\vartheta)\xi = \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* X(t_0,s)B(s)\|^2\,ds,$$

из которого вытекает соотношение

$$\xi^* X(t_0,t)B(t) \not\equiv 0 \text{ на } [t_0, t_0+\vartheta],$$

что означает линейную независимость строк $X(t_0,t)B(t)$ на $[t_0, t_0+\vartheta]$. Обратно, если строки этой матрицы линейно независимы на $[t_0, t_0+\vartheta]$, то для каждого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$0 < \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* X(t_0,s)B(s)\|^2\,ds = \xi^* W(t_0, t_0+\vartheta)\xi,$$

откуда следует полная управляемость системы (1.1) на $[t_0, t_0+\vartheta]$.

Предположим, что система (1.1) вполне управляема на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$. Зафиксируем ее произвольное начальное состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Существует бесконечно много управлений, осуществляющих перевод x_0 в начало координат за время $[t_0, t_0+\vartheta]$. Пусть $u(\cdot)$ — одно из таких управлений. В задачах, связанных с механикой, функционал

$$\mathcal{E}(u) := \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|u(t)\|^2 dt$$

характеризует энергию, затраченную на переход начального состояния x_0 системы в нуль под воздействием управления $u(\cdot)$. Пусть

$$\mathcal{E}(x_0, t_0; 0, t_0+\vartheta) := \inf\{\mathcal{E}(u) : u(\cdot) \text{ переводит}$$

$$\text{состояние } x_0 \text{ в нуль за время } [t_0, t_0+\vartheta]\}$$

— минимальная энергия перевода начального состояния x_0 в нуль за время $[t_0, t_0+\vartheta]$. Так как система (1.1) вполне управляема на $[t_0, t_0+\vartheta]$, то ранг матрицы $W(t_0, t_0+\vartheta)$ равен n, поэтому она обратима. Среди бесконечного множества управлений, осуществляющих перевод этого состояния в начало координат, имеется кусочно непрерывное управление

$$\hat{u}(t) = -B^*(t)X^*(t_0,t)W^{-1}(t_0, t_0+\vartheta)x_0.$$

Оно обладает тем замечательным свойством (Р. Калман, [189]), что

$$\mathcal{E}(x_0, t_0; 0, t_0 + \vartheta) = \mathcal{E}(\widehat{u}),$$

то есть энергия перевода x_0 в нуль минимальна, если этот перевод осуществляется управлением $\widehat{u}(\cdot)$. Кроме того, для нормы управления $\widehat{u}$ имеет место оценка

$$\|\widehat{u}\|_C \leqslant be^{a\vartheta}\|W^{-1}(t_0, t_0 + \vartheta)\| \, \|x_0\| =: l\|x_0\|,$$

где положительная величина l не зависит от выбора x_0. Таким образом (С. Ю. Култышев, Е. Л. Тонков, [79]), *система* (1.1) *вполне управляема на отрезке* $[t_0, t_0 + \vartheta]$ *тогда и только тогда, когда существует* $l > 0$ *такое, что для каждого* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *найдется кусочно непрерывное управление* $u : [t_0, t_0 + \vartheta] \to \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющее оценке* $\|u\|_C \leqslant l\|x_0\|$ *и гарантирующее для решения задачи Коши* (1.2), (1.3) *выполнение равенства* (1.5).

Отметим, что если система (1.1) вполне управляема, то при переходе от одного начального момента к другому длина отрезка управляемости может изменяться, а при стремлении t_0 к $+\infty$ стремиться к $+\infty$. Рассмотрим важный частный случай, когда, во-первых, эта длина может быть выбрана одной и той же для каждого начального момента t_0, и, во-вторых, число α в неравенстве (1.7) не зависит от t_0.

Определение 1.3 (Р. Калман, [189]). Система (1.1) называется:
равномерно вполне управляемой, если найдутся такие $\vartheta > 0$ и $\alpha > 0$, что при каждых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ для матрицы Калмана системы (1.1) выполнено неравенство (1.7);
ϑ-равномерно вполне управляемой, если (1.1) равномерно вполне управляема на отрезках длины ϑ.

Из соотношения (1.6) следует, что при каждых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ функция $\vartheta \mapsto \xi^* W(t_0, t_0 + \vartheta)\xi$ не убывает на $[0, +\infty[$, поэтому *если система* (1.1) *ϑ-равномерно вполне управляема, то при каждом* $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$ *эта система ϑ_1-равномерно вполне управляема.*

На протяжении всей работы мы будем часто пользоваться следующим критерием Е. Л. Тонкова равномерной полной управляемости системы (1.1).

Теорема 1.1 (Е. Л. Тонков, [171, 173]). *Система* (1.1) *ϑ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существует* $l > 0$ *такое, что для каждых* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *найдется кусочно* *непрерывное управление* $u : [t_0, t_0 + \vartheta] \to \mathbb{R}^m$, *удовлетворяющее оценке* $\|u\|_C \leqslant l\|x_0\|$ *и обеспечивающее для решения задачи Коши* (1.2), (1.3) *выполнение равенства* (1.5).

Следствие 1.1. *Система* (1.1) ϑ*-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существует* $l > 0$ *такое, что для каждых* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $H \in \mathrm{M}_n$ *найдется кусочно непрерывное матричное управление* $U : [t_0, t_0+\vartheta] \to \mathrm{M}_{mn}$, *удовлетворяющее оценке* $\|U\|_C \leqslant l\|H\|$ *и обеспечивающее для решения* $X(\cdot)$ *матричной задачи Коши*

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)U(t), \quad X(t_0) = H$$

выполнение равенства

$$X(t_0 + \vartheta) = 0.$$

Приведем (с доказательствами) необходимые для дальнейших исследований утверждения о равномерной полной управляемости.

Теорема 1.2 (см., например, [123]). *Если система* (1.1) ϑ*-равномерно вполне управляема, то для любой кусочно непрерывной ограниченной функции* $U : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{mn}$ *система*

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x + B(t)u \tag{1.8}$$

ϑ*-равномерно вполне управляема.*

Доказательство. Воспользуемся критерием равномерной полной управляемости Е. Л. Тонкова. Возьмем произвольные t_0 и x_0 и построим управление $u(\cdot)$, гарантирующее для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (1.2), (1.3) выполнение равенства $x(t_0 + \vartheta) = 0$ и удовлетворяющее оценке $\|u\|_C \leqslant l\|x_0\|$. Тогда имеет место представление

$$x(t) = X(t, t_0)\Big(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, s)B(s)u(s)\, ds\Big), \tag{1.9}$$

поэтому

$$\sup_{t\in[t_0,t_0+\vartheta]} \|x(t)\| \leqslant e^{a\vartheta}(\|x_0\| + \vartheta b e^{a\vartheta} l\|x_0\|) =: l_1\|x_0\|.$$

Для произвольной матричной функции $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ положим

$$v(t) = -U(t)x(t) + u(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \vartheta].$$

Тогда

$$\|v\|_C \leqslant \|U\|_C \cdot l_1\|x_0\| + l\|x_0\| =: l_2\|x_0\|.$$

Кроме того,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) =$$
$$= (A(t) + B(t)U(t))x(t) - B(t)U(t)x(t) + B(t)u(t) =$$
$$= (A(t) + B(t)U(t))x(t) + B(t)v(t),$$

т. е. $x(\cdot)$ — это решение системы (1.8) при $u = v(\cdot)$, удовлетворяющее начальному условию (1.3) и такое, что $x(t_0 + \vartheta) = 0$. В силу критерия равномерной полной управляемости Тонкова система (1.8) ϑ-равномерно вполне управляема. Теорема доказана.

Пусть

$$y = L(t)x \tag{1.10}$$

— преобразование Ляпунова [18, с. 247; 88, с. 42], т. е. линейное преобразование, матрица $L(\cdot)$ которого удовлетворяет условиям:
1) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|L(t)\| < \infty$;
2) при каждом $t \in \mathbb{R}$ матрица $L(t)$ обратима, причем $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|L^{-1}(t)\| < \infty$;
3) функция $L(\cdot)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\dot{L}(t)\| < \infty$.

Применим ляпуновское преобразование (1.10) к системе (1.1), получим

$$\dot{y} = (L(t)x)^{\cdot} = \dot{L}(t)x + L(t)\dot{x} =$$
$$= \dot{L}(t)L^{-1}(t)y + L(t)(A(t)x + B(t)u) =$$
$$= (L(t)A(t)L^{-1}(t) + L(t)L^{-1}(t))y + L(t)B(t)u.$$

Таким образом, преобразование (1.10) переводит систему (1.1) в систему

$$\dot{y} = (L(t)A(t)L^{-1}(t) + L(t)L^{-1}(t))y + L(t)B(t)u. \tag{1.11}$$

Теорема 1.3 (см., например, [123]). *Ляпуновское преобразование сохраняет свойство ϑ-равномерной полной управляемости системы, т. е. если система* (1.1) *ϑ-равномерно вполне управляема, $y = L(t)x$ — преобразование Ляпунова, то преобразованная система* (1.11) *ϑ-равномерно вполне управляема.*

Доказательство. Построим матрицу Калмана $W_L(t_0, t_0 + \vartheta)$ системы (1.11). Пусть $Y(t, s)$ — матрица Коши однородной системы

$$\dot{y} = (L(t)A(t)L^{-1}(t) + L(t)L^{-1}(t))y.$$

Тогда непосредственно из (1.10) следует, что при каждых $t, s \in \mathbb{R}$ имеет место равенство
$$Y(t,s) = L(t)X(t,s)L^{-1}(s),$$
поэтому
$$W_L(t_0, t_0+\vartheta) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Y(t_0,s)L(s)B(s)(L(s)B(s))^* Y^*(t_0,s)\,ds =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} L(t_0)X(t_0,s)B(s)B^*(s)X^*(t_0,s)L^*(t_0)\,ds =$$
$$= L(t_0)W(t_0, t_0+\vartheta)L^*(t_0),$$
где $W(t_0, t_0+\vartheta)$ — матрица Калмана системы (1.1). Из свойства ϑ-равномерной полной управляемости этой системы следует, что существует не зависящее от t_0 положительное число α, для которого
$$\min_{\|\xi\|\neq 0} \frac{\xi^* W(t_0, t_0+\vartheta)\xi}{\|\xi\|^2} \geqslant \alpha.$$
Для произвольного ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем оценку
$$\frac{\xi^* W_L(t_0, t_0+\vartheta)\xi}{\|\xi\|^2} = \frac{\xi^* L(t_0)W(t_0, t_0+\vartheta)L^*(t_0)\xi}{\|\xi\|^2} =$$
$$= \frac{\xi^* L(t_0)W(t_0, t_0+\vartheta)L^*(t_0)\xi}{\|L^*(t_0)\xi\|^2} \cdot \frac{\|L^*(t_0)\xi\|^2}{\|\xi\|^2} \geqslant$$
$$\geqslant \alpha \cdot \min_{\|\eta\|\neq 0} \frac{\|L^*(t_0)\eta\|^2}{\|\eta\|^2} = \alpha \cdot \|L^{-1}(t_0)\|^{-2} =: \alpha_1,$$
где положительная величина α_1 не зависит от t_0 (это следует из того, что $L(\cdot)$ — матрица Ляпунова). Следовательно,
$$\min_{\|\xi\|\neq 0} \frac{\xi^* W_L(t_0, t_0+\vartheta)\xi}{\|\xi\|^2} \geqslant \alpha_1,$$
т. е. преобразованная система (1.11) ϑ-равномерно вполне управляема. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа отметим (Е. Л. Тонков, [173]), что свойство равномерной полной управляемости является грубым, а именно: *если система* (1.1) *ϑ-равномерно вполне управляема, то существует $\delta > 0$ такое, что для произвольных матричных функций*

$A_1(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$ и $B_1(\cdot) \in KC_{nm}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих неравенствам $\|A - A_1\|_C \leqslant \delta$ и $\|B - B_1\|_C \leqslant \delta$, система

$$\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)u$$

ϑ-равномерно вполне управляема.

§ 2. Согласованность

Здесь введены и изучены понятия согласованности и равномерной согласованности линейных управляемых систем с наблюдателем.

Пусть (Σ, f^t) — топологическая динамическая система, т. е. Σ — полное метрическое пространство со счетной базой, f^t — поток на Σ (однопараметрическая группа преобразований Σ в себя, непрерывная по $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ [4, с. 156]).

Рассмотрим семейство линейных управляемых систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

с наблюдателем

$$y = C^*(f^t\sigma)x, \quad y \in \mathbb{R}^r, \tag{2.2}$$

заданных динамической системой (Σ, f^t) и функцией $\varphi := (A, B, C) : \Sigma \to \mathrm{M}_{n,n+m+r}$. Будем предполагать, что для каждого $\sigma_0 \in \Sigma$ функция $t \mapsto \|\varphi(f^t\sigma_0)\|$ измерима по Лебегу, ограничена на $\mathbb{R}$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leqslant N} \int_t^{t+1} \|\varphi(f^s\sigma) - \varphi(f^s\sigma_0)\| \, ds < \varepsilon,$$

как только $\rho(\sigma, \sigma_0) < \delta$ (ρ — метрика в Σ). Систему (2.1), (2.2) будем отождествлять с функцией $t \to \varphi(f^t\sigma)$.

Обозначим через $X(t, s, \sigma)$ матрицу Коши однородной системы

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x.$$

При всех $t, s, \tau \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$X(t + \tau, s + \tau, \sigma) = X(t, s, f^\tau\sigma),$$

а функция $\sigma \mapsto X(t, s, \sigma)$ непрерывна в каждой точке $\sigma_0 \in \Sigma$ равномерно относительно (t, s) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$.

О п р е д е л е н и е 2.1 [126]. Система $\varphi(f^t\sigma_0)$ называется: **согласованной на** $[0,\vartheta]$, если существует $l>0$ такое, что для всякой матрицы $G\in \mathrm{M}_n$ найдется измеримое управление $U_G:\,[0,\vartheta]\to \mathrm{M}_{mr}$, удовлетворяющее оценке

$$\sup_{t\in[0,\vartheta]}\|U_G(t)\|\leqslant l\,\|G\| \qquad (2.3)$$

и обеспечивающее разрешимость (относительно $Z(\cdot)$) матричной задачи управления

$$\dot Z = A(f^t\sigma)Z + B(f^t\sigma)UC^*(f^t\sigma)X(t,0,\sigma), \qquad (2.4)$$

$$Z(0)=0,\quad Z(\vartheta)=G; \qquad (2.5)$$

согласованной, если найдется такое $\vartheta>0$, что $\varphi(f^t\sigma_0)$ согласованна на $[0,\vartheta]$.

Положим

$$\widehat{B}(t,\sigma):=X(0,t,\sigma)B(f^t\sigma),\quad \widehat{C}(t,\sigma):=X^*(t,0,\sigma)C(f^t\sigma)$$

и для каждых $i,j,p,s\in\{1,\ldots,n\}$ обозначим

$$\gamma_{ijps}(\vartheta,\sigma)=\int\limits_0^{\vartheta} e_i^*\widehat{B}(t,\sigma)\widehat{B}^*(t,\sigma)e_je_p^*\widehat{C}(t,\sigma)\widehat{C}^*(t,\sigma)e_s\,dt.$$

Построим $n\times n$-матрицы

$$\Gamma_{ij}(\vartheta,\sigma)=\{\gamma_{ijps}(\vartheta,\sigma)\}_{p,s=1}^n,\quad i,j=1,\ldots,n,$$

и $n^2\times n^2$-матрицу

$$\Gamma(\vartheta,\sigma)=\{\Gamma_{ij}(\vartheta,\sigma)\}_{i,j=1}^n,$$

которую будем называть **матрицей согласования** (системы (2.1), (2.2) на $[0,\vartheta]$).

Л е м м а 2.1 [126]. *Матрица согласования обладает следующими свойствами:*

а) $\Gamma(\vartheta,\sigma)=\Gamma^*(\vartheta,\sigma)$;

б) $\mu(\vartheta,\sigma)\geqslant 0$ ($\mu(\vartheta,\sigma)$ — *наименьшее собственное значение матрицы* $\Gamma(\vartheta,\sigma)$);

в) $\mu(\vartheta_1,\sigma)\geqslant\mu(\vartheta_1,\sigma)$ *при* $\vartheta_1\geqslant\vartheta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение а) следует из равенств

$$\gamma_{ijps}=\gamma_{jips}=\gamma_{ijsp}=\gamma_{jisp}.$$

Для доказательства утверждения б) достаточно показать, что для любого вектора

$$h = \mathrm{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nn})$$

справедливо неравенство $h^*\Gamma h \geqslant 0$. Нетрудно проверить, что

$$h^*\Gamma h = \sum_{i,j,p,s=1}^{n} h_{ij} h_{ps} \gamma_{ijps}.$$

Для произвольных $i \in \{1, \ldots, n\}$, $v \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, r\}$ обозначим

$$b_i(t) = \widehat{B}^*(t, \sigma) e_i$$

— i-й столбец матрицы $\widehat{B}^*(t, \sigma)$, $b_{vi}(t)$ — v-я координата вектора $b_i(t)$,

$$c_i(t) = \widehat{C}^*(t, \sigma) e_i$$

— i-й столбец матрицы $\widehat{C}^*(t, \sigma)$, $c_{qi}(t)$ — q-я координата вектора $c_i(t)$. Тогда с учетом структуры γ_{ijps} имеем равенства

$$\begin{aligned} h^*\Gamma(\vartheta, \sigma) h &= \int_0^{\vartheta} \sum_{i,j,p,s=1}^{n} h_{ij} h_{ps} \Big(\sum_{v=1}^{m} b_{vi}(t) b_{vp}(t) \Big) \Big(\sum_{q=1}^{r} c_{qj}(t) c_{qs}(t) \Big)\, dt = \\ &= \int_0^{\vartheta} \sum_{v=1}^{m} \sum_{q=1}^{r} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} b_{vi}(t) c_{qj}(t) \Big) \Big(\sum_{p,s=1}^{n} h_{ps} b_{vp}(t) c_{qs}(t) \Big)\, dt = \\ &= \int_0^{\vartheta} \sum_{v=1}^{m} \sum_{q=1}^{r} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} b_{vi}(t) c_{qj}(t) \Big)^2 dt, \end{aligned} \tag{2.6}$$

из которых вытекает, что

$$h^*\Gamma(\vartheta, \sigma) h \geqslant 0$$

и

$$h^*\Gamma(\vartheta_1, \sigma) h \geqslant h^*\Gamma(\vartheta, \sigma) h$$

при каждых $h \in \mathbb{R}^{n^2}$ и $\vartheta_1 \geqslant \vartheta > 0$. Отсюда следуют утверждения б) и в). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение функции $U_{ij} : [0, \vartheta] \times \Sigma \to \mathrm{M}_{mr}$, определенные равенствами

$$U_{ij}(t, \sigma) = \widehat{B}^*(t, \sigma) e_i e_j^* \widehat{C}(t, \sigma), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Лемма 2.2 [126]. *Для того чтобы совокупность функций $U_{ij}(\cdot, \sigma)$, $i, j = 1, \ldots, n$, была линейно независима на $[0, \vartheta]$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\vartheta, \sigma) > 0$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим противное, пусть совокупность функций $U_{ij}(\cdot,\sigma)$, $i,j=1,\ldots,n$, линейно независима на $[0,\vartheta]$, но $\mu(\vartheta,\sigma)=0$. Тогда существует ненулевой вектор

$$h=\mathrm{col}(h_{11},\ldots,h_{1n},\ldots,h_{n1},\ldots,h_{nn})\in\mathbb{R}^{n^2},$$

такой, что $\Gamma(\vartheta,\sigma)h=0$, поэтому $h^*\Gamma(\vartheta,\sigma)h=0$. Из (2.6) следуют равенства

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}b_{vi}(t)c_{qj}(t)=0,\quad v=1,\ldots,m,\ q=1,\ldots,r. \tag{2.8}$$

Поскольку

$$b_{vi}(t)=e_v^*\widehat{B}^*(t,\sigma)e_i,$$
$$c_{qj}(t)=e_q^*\widehat{C}^*(t,\sigma)e_j=e_j^*\widehat{C}(t,\sigma)e_q,$$

равенства (2.8) эквивалентны соотношениям

$$e_v^*\Big(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}U_{ij}(t,\sigma)\Big)e_q=0,\ t\in[0,\vartheta],\ v=1,\ldots,m,\ q=1,\ldots,r.$$

Это противоречит линейной независимости функций $U_{ij}(\cdot,\sigma)$ на $[0,\vartheta]$.

Достаточность. Пусть $\mu(\vartheta,\sigma)>0$. Предположим, что функции U_{ij} линейно зависимы, тогда найдется такой ненулевой вектор $h\in\mathbb{R}^{n^2}$, $h=\mathrm{col}(h_{11},\ldots,h_{nn})$, для которого

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}U_{ij}(t,\sigma)=0$$

при всех $t\in[0,\vartheta]$. Тогда для всех $t\in[0,\vartheta]$, $v=1,\ldots,m$, $q=1,\ldots,r$, выполнены равенства (2.8), поэтому в силу (2.6) имеем $h^*\Gamma(\vartheta,\sigma)h=0$. Отсюда следует, что $\mu(\vartheta,\sigma)=0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание 2.1. Матрица $\Gamma(\vartheta,\sigma)$ представляет собой аналог матрицы Грама для совокупности функций $U_{ij}(\cdot,\sigma)$, $i,j=1,\ldots,n$.

Теорема 2.1 [126]. *Следующие условия эквивалентны:*
а) *система* $\varphi(f^t\sigma)$ *согласованна на* $[0,\vartheta]$;
б) *матрица согласования* $\Gamma(\vartheta,\sigma)$ *положительно определена*;
в) *совокупность функций* $\{U_{ij}(\cdot,\sigma)\}_{i,j=1}^{n}$, *определенных соотношениями* (2.7), *линейно независима на* $[0,\vartheta]$.

Доказательство. Условия б) и в) эквивалентны в силу леммы 2.2.

Покажем, что из б) следует а). Пусть $\mu(\vartheta,\sigma) > 0$. Решение матричного уравнения (2.4) с произвольным измеримым ограниченным управлением $U(\cdot)$, удовлетворяющее первому условию (2.5), по формуле Коши записывается в виде

$$Z(t,\sigma) = \int\limits_0^t X(t,s,\sigma)B(f^s\sigma)U(s)C^*(f^s\sigma)X(s,0,\sigma)\,ds.$$

Возьмем любую матрицу $G \in \mathrm{M}_n$. Для того чтобы было выполнено второе условие (2.5), достаточно построить такое управление $U_G(\cdot)$, что

$$\int\limits_0^\vartheta X(t,s,\sigma)B(f^s\sigma)U_G(s)C^*(f^s\sigma)X(s,0,\sigma)\,ds = G,$$

или, эквивалентно,

$$\int\limits_0^\vartheta \widehat{B}(t,\sigma)U_G(t)\widehat{C}^*(t,\sigma)\,dt = G(\vartheta,\sigma), \tag{2.9}$$

где $G(\vartheta,\sigma) := X(0,\vartheta,\sigma)G$. Управление $U_G(\cdot)$ будем искать в виде

$$U_G(t) = \sum_{j,p=1}^n h_{jp}U_{jp}(t),\ t \in [0,\vartheta],$$

где U_{jp} определены равенствами (2.7). Подставляя это управление в (2.9) и умножая (2.9) слева на e_i^*, а справа на e_s, получим систему n^2 алгебраических уравнений относительно h_{jp}:

$$\sum_{j,p=1}^n \gamma_{ijps}h_{jp} = g_{is}, \quad i,s = 1,\ldots,n, \tag{2.10}$$

где $g_{is} = e_i^*G(\vartheta,\sigma)e_s$. Решение $h = \mathrm{col}(h_{11},\ldots,h_{1n},\ldots,h_{n1},\ldots,h_{nn})$ системы (2.10) удовлетворяет оценке

$$\|h\| \leqslant \|\Gamma^{-1}(\vartheta,\sigma)\|\,\|g(\vartheta,\sigma)\|, \tag{2.11}$$

где $g := \mathrm{col}(g_{11},\ldots,g_{1n},\ldots,g_{n1},\ldots,g_{nn})$, из которой вытекают неравенства

$$\|U_G(t)\| \leqslant \sum_{i,j=1}^n \|U_{ij}(t)\|\,|h_{ij}| \leqslant \|h\| \sum_{i,j=1}^n \|U_{ij}(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Gamma^{-1}(\vartheta,\sigma)\|\,\|G(\vartheta,\sigma)\| \sum_{i,j=1}^n \|U_{ij}(t)\|.$$

Из равномерной ограниченности на множестве $(t,s) \in [0,\vartheta]\times[0,\vartheta]$ функций $B(f^t\sigma)$, $C(f^t\sigma)$ и $X(t,s,\sigma)$ следует ограниченность на $[0,\vartheta]$

функций $U_{ij}(t)$, поэтому найдется константа $l > 0$ (не зависящая от G, но зависящая от ϑ), такая, что

$$\|U_G(t)\| \leqslant l\|G\|, \quad 0 \leqslant t \leqslant \vartheta.$$

В силу определения 2.1 система $\varphi(f^t\sigma)$ согласованна на $[0,\vartheta]$.

Докажем, что из а) следует в). Для этого достаточно показать, что если уравнение (2.9) разрешимо относительно $U_G(\cdot)$ для любой матрицы G, то совокупность функций $\{U_{ij}(\cdot,\sigma)\}_{i,j=1}^n$ линейно независима на $[0,\vartheta]$.

Предположим противное, пусть существует ненулевой вектор

$$h = \operatorname{col}(h_{11},\ldots,h_{1n}\ldots,h_{n1}\ldots,h_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2},$$

такой, что

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij}U_{ij}(t) \equiv 0, \quad t \in [0,\vartheta].$$

Тогда

$$\widehat{B}^*(t,\sigma)H\widehat{C}(t,\sigma) = 0, \quad t \in [0,\vartheta], \tag{2.12}$$

где $H := \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathrm{M}_n$. Для выбранной матрицы H существует функция $U(t) \in \mathrm{M}_{mr}$, $U(t) = \{u_{ps}(t)\}_{p,s=1}^{m,r}$, такая, что

$$\int_0^\vartheta \widehat{B}(t,\sigma)U(t)\widehat{C}^*(t,\sigma)\,dt = H,$$

поэтому для всех $i,j = 1,\ldots,n$

$$\int_0^\vartheta e_i^*\widehat{B}(t,\sigma)U(t)\widehat{C}^*(t,\sigma)e_j\,dt = h_{ij}.$$

Умножая каждое из этих равенств на h_{ij} и суммируя по $i,j = 1,\ldots,n$, получим

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2 &= \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\int_0^\vartheta \sum_{p=1}^m\sum_{s=1}^r e_i^*\widehat{B}(t,\sigma)e_p u_{ps}(t)e_s^*\widehat{C}^*(t,\sigma)e_j\,dt = \\ &= \int_0^\vartheta \sum_{p=1}^m\sum_{s=1}^r u_{ps}(t)\Big(\sum_{i,j=1}^n h_{ij}e_i^*\widehat{B}(t,\sigma)e_p e_s^*\widehat{C}^*(t,\sigma)e_j\Big)\,dt.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Из (2.12) следует, что для всех $p = 1,\ldots,m$ и $s = 1,\ldots,r$

$$e_p^*\widehat{B}^*(t,\sigma)H\widehat{C}(t,\sigma)e_s = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}e_p^*\widehat{B}^*(t,\sigma)e_i e_j^*\widehat{C}(t,\sigma)e_s = 0$$

при $t \in [0, \vartheta]$, поэтому

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} e_i^* \widehat{B}(t,\sigma) e_p e_s^* \widehat{C}^*(t,\sigma) e_j = 0, \quad t \in [0,\vartheta],$$

и из равенств (2.13) получаем $\sum\limits_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2 = 0$, что противоречит предположению $h \neq 0$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 2.1 [126]. *Если система* $\varphi(f^t\sigma)$ *согласованна на* $[0,\vartheta]$, *то она согласованна на* $[0,\vartheta_1]$ *при любом* $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система $\varphi(f^t\sigma)$ согласованна на $[0,\vartheta]$ при некотором $\vartheta > 0$. Из утверждения б) теоремы 2.1 вытекает положительность величины $\mu(\vartheta,\sigma)$. Возьмем любое $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$, тогда из утверждения в) леммы 2.1 следует неравенство

$$\mu(\vartheta_1,\sigma) \geqslant \mu(\vartheta,\sigma) > 0.$$

Вновь пользуясь эквивалентностью а) и б) (теорема 2.1), получаем, что система $\varphi(f^t\sigma)$ согласованна на $[0,\vartheta_1]$.

С л е д с т в и е 2.2 [126]. *Если система* $\varphi(f^t\sigma)$ *согласованна на* $[0,\vartheta]$, *то система* (2.1) *вполне управляема на* $[0,\vartheta]$, *а система*

$$\dot{x} = -A^*(f^t\sigma)x, \quad y = C^*(f^t\sigma)x, \tag{2.14}$$

вполне наблюдаема [76, с. 304] *на* $[0,\vartheta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система (2.1) вполне управляема на $[0,\vartheta]$ в том и только том случае (С. Ю. Култышев, Е. Л. Тонков, [79]), когда существует $l_1 > 0$ такое, что каждой матрице $G \in \mathrm{M}_n$ отвечает измеримое управление $V_G : [0,\vartheta] \to \mathrm{M}_{mn}$, $\|V_G(t)\| \leqslant l_1\|G\|$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, обеспечивающее разрешимость матричной задачи управления

$$\dot{Z} = A(f^t\sigma)Z + B(f^t\sigma)V, \quad Z(0) = 0,\ Z(\vartheta) = G. \tag{2.15}$$

Пусть система $\varphi(f^t\sigma)$ согласованна на $[0,\vartheta]$. Возьмем произвольную матрицу $G \in \mathrm{M}_n$ и в качестве управления $V_G(\cdot)$, разрешающего задачу (2.15), выберем

$$V_G(t) = U_G(t)C^*(f^t\sigma)X(t,0,\sigma),$$

где $U_G(\cdot)$ — управление, разрешающее (2.4), (2.5). Из (2.3) следует, что

$$\|V_G(t)\| \leqslant \|U_G(t)\|\,\|C^*(f^t\sigma)\|\,\|X(t,0,\sigma)\| \leqslant ce^{a\vartheta}l\|G\| =: l_1\|G\|,\ t \in [0,\vartheta].$$

Таким образом, согласованность влечет за собой полную управляемость системы (2.1).

Докажем, что из согласованности $\varphi(f^t\sigma)$ следует полная наблюдаемость системы (2.14). В силу теоремы двойственности (Н. Н. Красовский, [76, с. 304]) свойство полной наблюдаемости системы (2.14) эквивалентно свойству полной управляемости системы

$$\dot{x} = -A^*(f^t\sigma)x + C(f^t\sigma)u,$$

что, в свою очередь [79], эквивалентно существованию для произвольной $G \in \mathrm{M}_n$ управления $V_G : [0,\vartheta] \to \mathrm{M}_{rn}$, удовлетворяющего оценке

$$\|V_G(t)\| \leqslant l_2\|G\|, \quad 0 \leqslant t \leqslant \vartheta,$$

с не зависящей от G положительной величиной l_2, и обеспечивающего разрешимость задачи

$$\dot{Z} = -A^*(f^t\sigma)Z + C(f^t\sigma)V, \quad Z(0) = 0,\ Z(\vartheta) = G.$$

Разрешимость этой задачи эквивалентна разрешимости относительно $V_G(\cdot)$ уравнения

$$\int_0^\vartheta X^*(t,0,\sigma)C(f^t\sigma)V_G(t)\,dt = X^*(\vartheta,0,\sigma)G.$$

Транспонируя его, получим

$$\int_0^\vartheta V_G^*(t)\widehat{C}^*(t,\sigma)\,dt = G^*X(\vartheta,0,\sigma).$$

Если система $\varphi(f^t\sigma)$ согласованна, то управление

$$V_G(t) = U_G^*(t)\widehat{B}^*(t,\sigma)$$

является одним из решений этого уравнения. Следствие доказано.

Замечание 2.2. Одновременное выполнение условий полной управляемости системы (2.1) и полной наблюдаемости системы (2.14) на $[0,\vartheta]$ не обеспечивает согласованности $\varphi(f^t\sigma)$ на этом отрезке.

Пример 2.1 [126]. Рассмотрим систему с наблюдателем

$$\dot{x} = b(t)u, \quad y = b(t-1)x, \quad n = 1,$$

где

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [2k, 2k+1[, \\ 0 & \text{при } t \in [2k+1, 2k+2[, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$. Эта система вполне управляема и вполне наблюдаема на отрезке $[0, 2]$, но не является согласованной ни на каком отрезке $[0, \vartheta]$, поскольку

$$\Gamma(\vartheta) = \gamma_{1111}(\vartheta) = \int\limits_0^{\vartheta} b^2(t) b^2(t-1)\, dt = 0.$$

при каждом $\vartheta > 0$.

Пусть

$$\gamma(\sigma_0) := \{\sigma \in \Sigma : \sigma = f^t\sigma_0, \, t \in \mathbb{R}\}$$

— **траектория** движения $t \mapsto f^t\sigma_0$, $\overline{\gamma(\sigma_0)}$ — замыкание (в метрике ρ) траектории $\gamma(\sigma_0)$.

Определение 2.2 [126]. Система $\varphi(f^t\sigma_0)$ называется **равномерно согласованной (на $\overline{\gamma(\sigma_0)}$)**, если существуют $\vartheta > 0$ и $l > 0$ такие, что для всякой непрерывной матричной функции $G : \Sigma \to \mathrm{M}_n$ найдется измеримое по t и непрерывное по σ управление $U_G : [0, \vartheta] \times \overline{\gamma(\sigma_0)} \to \mathrm{M}_{mr}$, удовлетворяющее оценке $\|U_G(t, \sigma)\| \leqslant l \|G(\sigma)\|$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, и обеспечивающее свойство: для каждого $\sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}$ матричная задача управления (2.4), (2.5) при $G = G(\sigma)$, $U = U_G(t, \sigma)$ разрешима.

Теорема 2.2 [126]. *Пусть множество $\overline{\gamma(\sigma_0)}$ компактно. Система $\varphi(f^t\sigma_0)$ равномерно согласованна в том и только том случае, когда найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что наименьшее собственное значение $\mu(\vartheta, \sigma)$ матрицы согласования $\Gamma(\vartheta, \sigma)$ удовлетворяет неравенству $\mu(\vartheta, \sigma) \geqslant \varepsilon$ для всех $\sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\varphi(f^t\sigma_0)$ равномерно согласованна. Поскольку множество $\overline{\gamma(\sigma_0)}$ компактно, а функция $\sigma \mapsto \mu(\vartheta, \sigma)$ непрерывна, существует такое $\sigma_1 \in \overline{\gamma(\sigma_0)}$, что

$$\mu(\vartheta, \sigma_1) = \min\{\mu(\vartheta, \sigma) : \sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}\}.$$

Допустим, что $\mu(\vartheta, \sigma_1) = 0$. Тогда в силу теоремы 2.1 система $\varphi(f^t\sigma_1)$ не является согласованной, что противоречит определению 2.2. Поэтому

$$\varepsilon := \min\{\mu(\vartheta, \sigma) : \sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}\} > 0.$$

Достаточность. Пусть $\mu(\vartheta, \sigma) \geqslant \varepsilon$ для всех $\sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}$. Тогда для каждого $\sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}$ система $\varphi(f^t\sigma)$ согласованна (теорема 2.1), поэтому задача (2.4), (2.5) разрешима при

$$U_G(t, \sigma) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} U_{ij}(t, \sigma),$$

где $U_{ij}(t,\sigma)$ определены равенствами (2.7), а h_{ij} находятся из уравнений (2.10). Поскольку имеет место оценка (2.10), а $\|\Gamma^{-1}(\vartheta,\sigma)\| \leqslant \varepsilon^{-1}$ для всех $\sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}$, то $\|h\| \leqslant \varepsilon^{-1}\|g(\vartheta,\sigma)\|$. Из ограниченности функции $\varphi(\sigma)$ на $\overline{\gamma(\sigma_0)}$ и инвариантности $\overline{\gamma(\sigma_0)}$ относительно f^t следует существование такого $\varkappa > 0$, что

$$\|U_{ij}(t,\sigma)\| \leqslant \varkappa, \quad (t,\sigma) \in [0,\vartheta] \times \overline{\gamma(\sigma_0)}.$$

Поэтому

$$\|U_G(t,\sigma)\| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|h_{ij}\|\,\|U_{ij}(t,\sigma)\| \leqslant l\,\|G(\sigma)\|$$

при всех $(t,\sigma) \in [0,\vartheta]\times\overline{\gamma(\sigma_0)}$, где положительная величина l не зависит ни от t, ни от σ. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.3. Непосредственно из определения 2.2 и теоремы 2.2 следует, что если множество $\overline{\gamma(\sigma_0)}$ компактно и система $\varphi(f^t\sigma_0)$ равномерно согласованна, то найдутся $\vartheta > 0$ и $l > 0$ такие, что для каждого $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$, всех $\tau \in \mathbb{R}$ и любой матричной функции $G : \overline{\gamma(\sigma_0)} \to \mathrm{M}_n$ задача

$$\dot{Z} = A(f^t\sigma_0)Z + B(f^t\sigma_0)UC^*(f^t\sigma_0)X(t,\tau,\sigma_0),$$
$$Z(\tau) = 0, \quad Z(\tau+\vartheta_1) = G(f^\tau\sigma_0),$$

разрешима при некотором измеримом управлении $U = U_G(t, f^\tau\sigma_0)$, удовлетворяющем неравенству

$$\|U_G(t,f^\tau\sigma_0)\| \leqslant l\|G(f^\tau\sigma_0)\|, \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau+\vartheta_1,$$

где l не зависит от τ и G.

Для доказательства этого утверждения достаточно сделать замену $t \to t+\tau$. Тогда приходим к задаче (2.4), (2.5) (при $\sigma = f^\tau\sigma_0$), в которой вместо ϑ следует писать ϑ_1. Поскольку $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$, выполнено неравенство $\mu(\vartheta_1,\sigma) \geqslant \mu(\vartheta,\sigma)$ (лемма 2.1).

Напомним [112, с. 400–402], что множество $\Sigma_0 \subset \Sigma$ называется **минимальным**, если $f^t(\Sigma_0) = \Sigma_0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\overline{\gamma(\sigma)} = \Sigma_0$ для каждого $\sigma \in \Sigma_0$. В силу теоремы Биркгофа [112, с. 402] всякая точка минимального компактного множества **рекуррентна**, т. е. для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ множество

$$\{\tau \in \mathbb{R} :\ \max_{|t|\leqslant N} \rho(f^{t+\tau}\sigma_0, f^t\sigma_0) < \varepsilon\}$$

относительно плотно на числовой прямой.

Т е о р е м а 2.3 [126]. *Пусть множество $\overline{\gamma(\sigma_0)}$ минимально и компактно. Для того чтобы система $\varphi(f^t\sigma_0)$ была равномерно согласованна, необходимо и достаточно, чтобы она была согласованна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь очевидна.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что система $\varphi(f^t\sigma_0)$ согласованна, но не является равномерно согласованной. Обозначим

$$\alpha(\vartheta) = \min\{\mu(\vartheta, \sigma) : \sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}\}.$$

Функция $\vartheta \mapsto \alpha(\vartheta)$ является возрастающей и неотрицательной на $\mathbb{R}_+$.

Если существует $\vartheta_0 > 0$ такое, что $\alpha(\vartheta_0) > 0$, то в силу теоремы 2.2 система $\varphi(f^t\sigma_0)$ равномерно согласованна.

Пусть $\alpha(\vartheta) = 0$ при всех $\vartheta \geqslant 0$. Тогда найдутся такие последовательности $\{\vartheta_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\vartheta_i \to +\infty$ при $i \to \infty$; $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\sigma_i = \sigma_i(\vartheta_i)$; $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$, $h_i \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\|h_i\| = 1$, что

$$0 = \mu(\vartheta_i, \sigma_i) = h_i^*\Gamma(\vartheta_i, \sigma_i)h_i.$$

Выделяя из последовательности $\{(\sigma_i, h_i)\}_{i=1}^{\infty}$ сходящуюся подпоследовательность (которую мы снова обозначим $\{(\sigma_i, h_i)\}_{i=1}^{\infty}$) и переходя в последнем равенстве к пределу, получим

$$h^*\Gamma(\infty, \sigma)h = 0$$

для некоторых $\sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}$ и $h \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\|h\| = 1$. Из неравенства (2.6) и замечания 2.3 следует равенство

$$h^*\Gamma(\vartheta, f^\tau\sigma)h = 0$$

для всех $\vartheta \geqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$. Поэтому $h^*\Gamma(\vartheta, \hat{\sigma})h = 0$ для $\hat{\sigma} \in \overline{\gamma_+(\sigma)}$, где $\overline{\gamma_+(\sigma)}$ — замыкание положительной полутраектории, выходящей из точки σ. Поскольку для минимального множества справедливы равенства

$$\overline{\gamma_+(\sigma)} = \overline{\gamma(\sigma)} = \overline{\gamma(\sigma_0)},$$

то $h^*\Gamma(\vartheta, \sigma_0)h = 0$ для любого $\vartheta \geqslant 0$. Это противоречит свойству согласованности системы $\varphi(f^t\sigma_0)$. Теорема доказана.

§ 3. Следствия для динамической системы сдвигов

Здесь результаты предыдущего параграфа переносятся на случай, когда в качестве пространства (Σ, f^t) рассматривается динамическая система сдвигов, порожденная фиксированной линейной управляемой системой с наблюдателем. Показано, что в случае линейной управляемой системы без наблюдателя введенное понятие согласованности эквивалентно понятию полной управляемости (теорема 3.1).

Пусть задана ограниченная функция

$$\sigma_0(t) = (A_0(t), B_0(t), C_0(t)) \in \mathrm{M}_{n,n+m+r}, \quad t \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющая условию: для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $|\tau| \leqslant \delta$ выполнено неравенство

$$\max_{|t|\leqslant N} \int\limits_t^{t+1} \|\sigma_0(s+\tau) - \sigma_0(s)\| \, ds \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим через $\sigma_\tau(t) = \sigma_0(t+\tau)$ сдвиг σ_0 на τ и рассмотрим множество

$$\Sigma = \mathrm{cl}\,\{\sigma_\tau(\cdot) : \tau \in \mathbb{R}\},$$

где $\mathrm{cl}\,\mathfrak{M}$ — замыкание множества $\mathfrak{M}$ в метрике

$$\rho_0(\sigma, \widehat{\sigma}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\{ \int\limits_t^{t+1} \|\sigma(s) - \widehat{\sigma}(s)\| \, ds, \; |t|^{-1}\}.$$

Пространство Σ компактно (А. Г. Иванов, [52]). Определим на Σ поток f^t равенством $f^t\sigma = \sigma_t(\cdot)$. Тогда (Σ, f^t) — динамическая система сдвигов и $\Sigma = \overline{\gamma(\sigma_0)}$, где $\gamma(\sigma_0)$ — траектория движения $t \mapsto f^t\sigma_0$. Далее, определим функцию $\varphi : \Sigma \to \mathrm{M}_{n,n+m+r}$ равенством $\varphi(\sigma) = \sigma(t)\big|_{t=0}$. Тогда функция $\varphi(f^t\sigma_0)$ задает систему

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u, \quad y = C_0^*(t)x, \tag{3.1}$$

а при изменении $\sigma \in \Sigma$ получим совокупность всех систем вида (3.1), получаемых из (3.1) с помощью всевозможных сдвигов времени и замыкания множества систем.

Определение 2.2 равномерной согласованности, примененное к системе (3.1), выглядит следующим образом.

Определение 3.1 [126]. Система (3.1) называется **равномерно согласованной**, если существуют $\vartheta > 0$ и $l > 0$ такие, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и любой $G \in \mathrm{M}_n$ существует измеримое управление $U_G : [\tau, \tau+\vartheta] \to \mathrm{M}_{mr}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|U_G\| \leqslant l\|G\|, \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau + \vartheta,$$

и обеспечивающее разрешимость относительно $Z(\cdot)$ задачи

$$\dot{Z} = A_0(t)Z + B_0(t)UC_0^*(t)X_0(t,\tau),$$

$$Z(\tau) = 0, \quad Z(\tau+\vartheta) = G,$$

при $U = U_G$; здесь $X_0(t,s)$ — матрица Коши однородной системы

$$\dot{x} = A_0(t)x.$$

Матрица согласования для системы (3.1) имеет вид

$$\Gamma^0(\vartheta,\tau) = \{\Gamma^0_{ij}(\vartheta,\tau)\}_{i,j=1}^n, \quad \Gamma^0_{ij}(\vartheta,\tau) = \{\gamma^0_{ijps}(\vartheta,\tau)\}_{p,s=1}^n,$$

$$\gamma^0_{ijps}(\vartheta,\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} e_i^* \widehat{B}_0(t,\tau)\widehat{B}_0^*(t,\tau)e_j e_p^* \widehat{C}_0(t,\tau)\widehat{C}_0^*(t,\tau)e_s\,dt,$$

где

$$\widehat{B}_0(t,\tau) := X_0(\tau,t)B_0(t), \ \widehat{C}_0(t,\tau) := X_0^*(t,\tau)C_0(t).$$

Пусть $\mu^0(\vartheta,\tau)$ — наименьшее собственное значение матрицы $\Gamma^0(\vartheta,\tau)$.

Следствие 3.1 [126]. *Система (3.1) равномерно согласованна в том и только том случае, когда существуют $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\mu^0(\vartheta,\tau) \geqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Введенные в рассмотрение динамическая система сдвигов (Σ, f^t) и функция $\varphi(\sigma) = \sigma(t)\big|_{t=0}$ позволяют рассматривать семейство систем $\varphi(f^t\sigma)$, среди которых содержится, в частности, система (3.1). Если некоторая система получена из (3.1) простым сдвигом $\big(\sigma_\tau, \ \tau \in \mathbb{R}\big)$, то $\Gamma^0(\vartheta,\tau)$ совпадает с матрицей согласования $\Gamma(\vartheta, f^\tau\sigma_0)$, введенной ранее. Но в Σ могут присутствовать точки, получающиеся из (3.1) предельным переходом $\Big(\rho_0(\sigma, f^{\tau_i}\sigma_0) \to 0$ при $\tau_i \to +\infty$ или $\tau_i \to -\infty\Big)$. В силу непрерывности функции $\sigma \mapsto \Gamma(\vartheta,\sigma)$ для таких точек имеем сходимость

$$\Gamma^0(\vartheta,\tau_i) \to \Gamma(\vartheta,\sigma) \text{ при } i \to \infty.$$

Поэтому, учитывая компактность множества $\Sigma = \overline{\gamma(\sigma_0)}$, получаем равенство

$$\inf_{\tau\in\mathbb{R}} \mu^0(\vartheta,\tau) = \min_{\sigma\in\Sigma} \mu(\vartheta,\sigma).$$

Доказательство следствия завершается ссылкой на теорему 2.2.

Определение 3.2 [126]. Система (3.1) называется ϑ_1-**равномерно согласованной**, если она равномерно согласованна при $\vartheta = \vartheta_1$.

Следствие 3.2 [126]. *Ляпуновское преобразование сохраняет свойство ϑ-равномерной согласованности системы.*

Доказательство. Пусть $L : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n$ — матрица Ляпунова. Применим преобразование $x = L(t)z$ к системе (3.1), получим

$$\dot z = (L^{-1}(t)A_0(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot L(t))z + L^{-1}(t)B_0(t)u,$$

$$y = C_0^*(t)x = C_0^*(t)L(t)z,$$

т. е. система (3.1) переходит в систему

$$\dot z = F_0(t)z + D_0(t)u, \quad y = P_0^*(t)z,$$

где

$$F_0(t) := L^{-1}(t)A_0(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot L(t),$$
$$P_0(t) := L^*(t)C_0(t).$$

Для каждых $i,j,p,s \in \{1,\ldots,n\}$ и $\tau\in\mathbb{R}$ обозначим

$$\gamma^0_{ijps}(\vartheta,\tau;L) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} e_i^*\widehat{D}_0(t,\tau)\widehat{D}_0^*(t,\tau)e_je_p^*\widehat{P}_0(t,\tau)\widehat{P}_0^*(t,\tau)e_s\,dt,$$

$$\Gamma^0_{ij}(\vartheta,\tau;L) = \{\gamma^0_{ijps}(\vartheta,\tau;L)\}_{p,s=1}^n, \quad \Gamma^0(\vartheta,\tau;L) = \{\Gamma^0_{ij}(\vartheta,\tau;L)\}_{i,j=1}^n,$$

здесь

$$\widehat{D}_0(t,\tau) = Z_0(\tau,t)D_0(t),\ \widehat{P}_0(t,\tau) = Z_0^*(t,\tau)P_0(t),$$

$Z_0(t,\tau)$ — матрица Коши однородной системы

$$\dot z = F_0(t)z.$$

Нетрудно проверить, что

$$\widehat{D}_0(t,\tau) = L^{-1}(\tau)\widehat{B}_0(t,\tau), \quad \widehat{P}_0(t,\tau) = L^*(\tau)\widehat{C}_0(t,\tau),$$

поэтому

$$\gamma^0_{ijps}(\vartheta,\tau;L) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} e_i^* L^{-1}(\tau)\widehat{B}_0(t,\tau)\widehat{B}_0^*(t,\tau)(L^{-1}(\tau))^* e_j e_p^* L^*(\tau)\widehat{C}_0(t,\tau)\widehat{C}_0^*(t,\tau)L(\tau)e_s\,dt.$$

Обозначим через $\mu^0(\vartheta,\tau;L)$ наименьшее собственное значение матрицы $\Gamma^0(\vartheta,\tau;L)$. Докажем, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\mu^0(\vartheta,\tau;L) \geqslant \varepsilon_0$$

для всех $\tau \in \mathbb{R}$, т.е. для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и каждого вектора $h \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\|h\| = 1$, выполнено неравенство

$$h^*\Gamma^0(\vartheta,\tau;L)h \geqslant \varepsilon_0.$$

Предположим противное, пусть для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N_1, что для каждого $k \geqslant N_1$ найдутся $\tau_k \in \mathbb{R}$ и $h_k \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\|h_k\| = 1$, для которых

$$h_k^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h_k < \varepsilon/2.$$

Так как множество

$$\{h \in \mathbb{R}^{n^2} : \|h\| = 1\}$$

— компакт в $\mathbb{R}^{n^2}$, то без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится, и

$$\lim_{k\to\infty} h_k = h = \mathrm{col}(h_{11},\ldots,h_{nn}),\ \ \|h\| = 1.$$

Из непрерывности отображения $h \mapsto h^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h$ следует существование такого натурального N_2, что

$$|h^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h - h_k^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h_k| < \varepsilon/2,$$

если только $k \geqslant N_2$. Поэтому для всех $k \geqslant N(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ выполнено неравенство

$$h^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h \leqslant |h^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h - h_k^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h_k| + h_k^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h_k < \varepsilon,$$

следовательно,

$$h^*\Gamma^0(\vartheta,\tau_k;L)h = \int\limits_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} \sum_{v=1}^{m}\sum_{q=1}^{r}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} e_v^*\widehat{D}_0^*(t,\tau_k)e_i e_j^*\widehat{P}_0^*(t,\tau_k)e_q\Big)^2 dt =$$

$$= \int\limits_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} \sum_{v=1}^{m}\sum_{q=1}^{r}(e_v^*\widehat{B}_0^*(t,\tau_k)(L^{-1}(\tau_k))^* H L^*(\tau_k)\widehat{C}_0^*(t,\tau_k)e_q)^2 dt < \varepsilon,$$

где $H := \{h_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{M}_n$, $H \neq 0$.

Обозначим

$$G^{(k)} = (L^{-1}(\tau_k))^* H L^*(\tau_k),\ G^{(k)} = \{g_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{n}, \quad k \geqslant N(\varepsilon).$$

Так как $L(\cdot)$ — матрица Ляпунова, то $G^{(k)} \neq 0$. Из ϑ-равномерной согласованности системы (3.1) следует существование $\varepsilon_1 > 0$ такого, что для всех $k \geqslant N(\varepsilon)$ и для вектора $g^{(k)} = \mathrm{col}(g_{11}^{(k)}, \ldots, g_{nn}^{(k)})$ выполнено неравенство $g^{(k)^*}\Gamma^0(\vartheta, \tau_k) g^{(k)} \geqslant \varepsilon_1 \|g^{(k)}\|^2$, т. е.

$$\int\limits_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} \sum_{v=1}^{m} \sum_{q=1}^{r} (e_v^* \widehat{B}_0^*(t,\tau_k) G^{(k)} \widehat{C}_0^*(t,\tau_k) e_q)^2 dt \geqslant \varepsilon_1 \|g^{(k)}\|^2.$$

Из равномерной ограниченности $\|L^*(t)\|$ и $\|(L^{-1}(t))^*\|$ на $\mathbb{R}$ следует существование такого $\alpha > 0$, что $\|g^{(k)}\| \geqslant \alpha$ для всех $k \geqslant N(\varepsilon)$. При $\varepsilon < \varepsilon_1 \alpha^2$ получаем противоречие.

С л е д с т в и е 3.3 [126]. *Если система* (3.1) *ϑ-равномерно согласованна, то найдется $\delta > 0$ такое, что всякая измеримая и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция $t \to \sigma(t) = (A(t), B(t), C(t)) \in \mathrm{M}_{n,n+m+r}$, удовлетворяющая условию $\rho_1(\sigma, \sigma_0) \leqslant \delta$, где*

$$\rho_1(\sigma, \sigma_0) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_{t}^{t+1} \|\sigma(s) - \sigma_0(s)\|\, ds,$$

порождает ϑ-равномерно согласованную систему вида (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Gamma(\vartheta, \sigma)$ — матрица согласования системы $\sigma(\cdot) = (A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot))$ на $[0, \vartheta]$. Систему $\sigma(\cdot)$ можно записать в виде $\varphi(f^t\sigma)$, где

$$\varphi(\sigma) = \sigma(t)\Big|_{t=0}, \quad f^t\sigma = \sigma_t(\cdot).$$

Поскольку система (3.1) ϑ-равномерно согласованна, то в силу следствия 3.1 существует такое $\varepsilon > 0$, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\mu^0(\vartheta, \tau) \geqslant \varepsilon.$$

Из равенства

$$\mu(\vartheta, f^\tau\sigma_0) = \mu^0(\vartheta, \tau),$$

следствия 3.1 и теоремы 2.2 получаем соотношение

$$\mu(\vartheta, \widehat{\sigma}) \geqslant \varepsilon \quad \text{для всех } \widehat{\sigma} \in \overline{\gamma(\sigma_0)}.$$

Из непрерывности функции $\sigma \mapsto X(t,s,\sigma)$ (где $X(t,s,\sigma)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$), равномерной по (t,s) на компактах в $\mathbb{R}^2$, следует непрерывность функции $\sigma \mapsto \Gamma(\vartheta,\sigma)$ в метрике ρ_0. Следовательно, найдется $\delta > 0$ такое, что $\mu(\vartheta,\sigma) \geqslant \varepsilon/2$ для всех σ, удовлетворяющих неравенству $\rho_0(\sigma,\sigma_0) \leqslant \delta$. Из неравенства $\rho_0(\sigma,\sigma_0) \leqslant \delta$ следует неравенство $\rho_1(f^\tau\sigma, f^\tau\sigma_0) \leqslant \delta$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Выберем $\delta > 0$ таким, что

$$|\mu(\vartheta, f^\tau\sigma_0) - \mu(\vartheta, f^\tau\sigma)| \leqslant \varepsilon/4$$

для всех σ, удовлетворяющих неравенству $\rho_1(\sigma,\sigma_0) \leqslant \delta$. Тогда

$$\mu(\vartheta, f^\tau\sigma) \geqslant \mu(\vartheta, f^\tau\sigma_0) - \varepsilon/4 \geqslant \varepsilon/4, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Ссылка на следствие 3.1 завершает доказательство.

Рассмотрим частный случай системы (3.1) при $r = n$, $C_0(t) \equiv E$. Тогда получим линейную управляемую систему без наблюдателя

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Система* (3.2) *ϑ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда система* (3.1) *при* $r = n$, $C_0(t) \equiv E$ *ϑ-равномерно согласованна.*

Доказательство. В силу [79] система (3.2) ϑ-равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда при некотором $l > 0$ для произвольных $\tau \in \mathbb{R}$ и $G \in \mathrm{M}_n$ существует измеримое управление $V_G : [\tau, \tau+\vartheta] \to \mathrm{M}_{mr}$, удовлетворяющее оценке

$$\|V_G\| \leqslant l\|G\|, \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau + \vartheta,$$

и обеспечивающее разрешимость относительно $Z(\cdot)$ матричной задачи управления

$$\begin{gathered} \dot{Z} = A_0(t)Z + B_0(t)V, \\ Z(\tau) = 0, \quad Z(\tau+\vartheta) = G. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Необходимость. Возьмем любые $\tau \in \mathbb{R}$ и $G \in \mathrm{M}_n$ и построим управление $V_G(\cdot)$, разрешающее задачу (3.3). Пусть $Z(\cdot)$ — решение этой задачи. На отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ определим матричное управление $U(\cdot) = U_G(\cdot)$ равенством

$$U_G(t) = V_G(t)X_0(\tau, t).$$

Тогда

$$\dot{Z} = A_0(t)Z + B_0(t)V_G(t) =$$

$$= A_0(t)Z + B_0(t)U_G(t)X_0(t,\tau) = A_0(t)Z + B_0(t)U_G(t)C_0^*(t)X_0(t,\tau)$$

и $Z(\tau) = 0$, $Z(\tau+\vartheta) = G$. Кроме того, имеет место равномерная по $\tau \in \mathbb{R}$ и $G \in \mathrm{M}_n$ оценка

$$\|U_G(t)\| \leqslant le^{a\vartheta}\|G\|, \quad t \in [\tau, \tau+\vartheta],$$

где $a := \sup\{\|A_0(t)\| : t \in \mathbb{R}\}$. Из определения 3.1 вытекает ϑ-равномерная согласованность системы (3.1) при $r = n$, $C_0(t) \equiv E$.

Достаточность доказывается аналогично.

Таким образом, *в случае линейной управляемой системы без наблюдателя введенное понятие согласованности эквивалентно понятию полной управляемости.*

В заключение этого параграфа выясним вопрос о согласованности и равномерной согласованности рекуррентных систем.

Свойство **рекуррентности** системы (3.1) означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ множество

$$\{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant N} \int_t^{t+1} \|\sigma_\tau(s) - \sigma_0(s)\|\, ds < \varepsilon\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$, где $\sigma_\tau(s) = \sigma_0(\tau+s)$, $s \in \mathbb{R}$. Если же для каждого $\varepsilon > 0$ относительно плотно на $\mathbb{R}$ множество

$$\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\sigma_\tau(s) - \sigma_0(s)\|\, ds < \varepsilon\},$$

то система $\sigma_0(\cdot)$ называется **почти периодической (в смысле В. В. Степанова)**. Очевидно, что всякая почти периодическая система $\sigma_0(\cdot)$ рекуррентна.

Непосредственно из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 3.4 [126]. *Пусть система* (3.1) *рекуррентна и согласованна. Тогда она равномерно согласованна.*

§ 4. Согласованность и управляемость

В этом параграфе по линейной управляемой системе с наблюдателем строится линейная управляемая система без наблюдателя бо́льшей размерности — так называемая "большая" система. Показано (теорема 4.1), что согласованность исходной системы эквивалентна полной управляемости большой системы.

Каждой системе (φ, σ) вида

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad y = C^*(f^t\sigma)x, \tag{4.1}$$

поставим в соответствие так называемую "большую" систему. Большая система — это система вида

$$\dot{z} = F(f^t\sigma)z + G(f^t\sigma)v, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2},\ v \in \mathbb{R}^{mr},\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

с $n^2 \times n^2$ матрицей $F(\sigma) = A(\sigma) \otimes E - E \otimes A^*(\sigma)$ и $n^2 \times mr$ матрицей $G(\sigma) = B(\sigma) \otimes C(\sigma)$, где символ $\otimes$ означает прямое (кронекерово) произведение матриц [80, с. 235]. Напомним, что согласно определению для матриц $P \in \mathrm{M}_{kl}$ и $Q \in \mathrm{M}_{rs}$ прямое (кронекерово) произведение $P \otimes Q$ определяется как блочная матрица

$$P \otimes Q = \begin{pmatrix} p_{11}Q & p_{12}Q & \dots & p_{1l}Q \\ p_{21}Q & p_{22}Q & \dots & p_{2l}Q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1}Q & p_{k2}Q & \dots & p_{kl}Q \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{kr,ls}.$$

Теорема 4.1 [132]. *Система (φ, σ) равномерно согласованна в том и только том случае, когда большая система равномерно вполне управляема.*

Доказательство. Пусть $\Gamma(\vartheta, \sigma)$ — матрица согласования системы (4.1), а

$$W(\vartheta, \sigma) := \int\limits_0^{\vartheta} Z(0, t, \sigma) G(f^t\sigma) G^*(f^t\sigma) Z^*(0, t, \sigma)\, dt$$

— матрица управляемости системы (4.2). Здесь $Z(t, s, \sigma)$ — матрица Коши однородной системы

$$\dot{z} = F(f^t\sigma)z. \tag{4.3}$$

Докажем, что $\Gamma(\vartheta,\sigma) = W(\vartheta,\sigma)$ для всех $\vartheta > 0$ и $\sigma \in \Sigma$.

Напомним, что $\Gamma = \{\Gamma_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $\Gamma_{ij} = \{\gamma_{ijps}\}_{p,s=1}^{n}$,

$$\gamma_{ijps} = \int\limits_0^{\vartheta} e_i^* \widehat{B}(t,\sigma)\widehat{B}^*(t,\sigma)e_j e_p^* \widehat{C}(t,\sigma)\widehat{C}^*(t,\sigma)e_s\,dt,$$

где $\widehat{B}(t,\sigma) = X(0,t,\sigma)B(f^t\sigma)$, $\widehat{C}(t,\sigma) = X^*(t,0,\sigma)C(f^t\sigma)$.

Найдем нормированную при $t = 0$ фундаментальную матрицу $\Psi(t,\sigma)$ сопряженной к (4.3) системы

$$\dot{\psi} = -\psi F(f^t\sigma).$$

Пусть

$$\psi^{ij}(t) = (\psi_{11}^{ij}(t),\ldots,\psi_{1n}^{ij}(t),\ldots,\psi_{n1}^{ij}(t),\ldots,\psi_{nn}^{ij}(t))$$

— решение этой системы с начальным условием

$$\psi^{ij}(0) = \nu^{ij},$$

где $\nu^{ij} \in \mathbb{R}^{n^2}$ — вектор, все координаты которого нулевые, за исключением $\nu_{ij}^{ij} = 1$. Тогда матричная функция

$$Y^{ij}(t) = \left\{y_{kl}^{ij}(t)\right\}_{k,l=1}^{n},$$

где

$$y_{kl}^{ij}(t) := \psi_{kl}^{ij}(t),$$

удовлетворяет задаче Коши

$$\dot{Y} = YA^*(f^t\sigma) - A^*(f^t\sigma)Y, \quad Y(0) = e_i e_j^*.$$

Нетрудно проверить, что

$$Y^{ij}(t) = X^*(0,t,\sigma)e_i e_j^* X^*(t,0,\sigma).$$

Таким образом,

$$\psi_{kl}^{ij}(t) = e_k^* X^*(0,t,\sigma)e_i e_j^* X^*(t,0,\sigma)e_l.$$

Запишем $\Psi(t,\sigma)$ в блочном виде

$$\Psi(t,\sigma) = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(t,\sigma) & \Psi_{12}(t,\sigma) & \ldots & \Psi_{1n}(t,\sigma) \\ \Psi_{21}(t,\sigma) & \Psi_{22}(t,\sigma) & \ldots & \Psi_{2n}(t,\sigma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{n1}(t,\sigma) & \Psi_{n2}(t,\sigma) & \ldots & \Psi_{nn}(t,\sigma) \end{pmatrix},$$

где

$$\Psi_{ij}(t,\sigma) = \{\psi_{ijps}(t,\sigma)\}_{p,s=1}^{n},$$

при этом

$$\psi_{ijps}(t,\sigma) = \psi_{js}^{ip}(t) = e_j^* X^*(0,t,\sigma) e_i e_p^* X^*(t,0,\sigma) e_s.$$

Следовательно,

$$Z(0,t,\sigma) = \Psi(t,\sigma) = \{Z_{ij}(0,t,\sigma)\}_{i,j=1}^{n},$$

$$Z_{ij}(0,t,\sigma) = \{z_{ijps}(0,t,\sigma)\}_{p,s=1}^{n},$$

$$z_{ijps}(0,t,\sigma) = \psi_{ijps}(t,\sigma) = e_j^* X^*(0,t,\sigma) e_i e_p^* X^*(t,0,\sigma) e_s =$$
$$= e_i^* X(0,t,\sigma) e_j e_s^* X(t,0,\sigma) e_p.$$

Представим матрицу $G = B \otimes C$ в блочном виде $G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$, где $G_{ij} = \{g_{ijps}\}_{p,s=1}^{n,r}$. Тогда, в силу определения прямого произведения, $g_{ijps} = b_{ij} c_{ps}$. Пусть

$$Q(t,\sigma) := Z(0,t,\sigma) G(f^t\sigma) = \{q_{ijps}(t,\sigma)\},$$

$$i,p = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m;\ s = 1,\ldots,r.$$

Тогда

$$q_{ijps}(t,\sigma) = \sum_{k,l=1}^{n} z_{ikpl}(0,t,\sigma) b_{kj}(f^t\sigma) c_{ls}(f^t\sigma) =$$
$$= e_i^* X(0,t,\sigma) \Big(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}(f^t\sigma) e_k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n} c_{ls}(f^t\sigma) e_l^*\Big) X(t,0,\sigma) e_p =$$
$$= e_i^* X(0,t,\sigma) B(f^t\sigma) e_j e_s^* C^*(f^t\sigma) X(t,0,\sigma) e_p = e_i^* \widehat{B}(t,\sigma) e_j e_s^* \widehat{C}^*(t,\sigma) e_p.$$

Поэтому $(ikpl)$-й элемент матрицы QQ^* равен

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{r} q_{ijps}(t,\sigma) q_{kjls}(t,\sigma) = e_i^* \widehat{B}(t,\sigma) \widehat{B}^*(t,\sigma) e_k e_p^* \widehat{C}(t,\sigma) \widehat{C}^*(t,\sigma) e_l.$$

Запишем $W(\vartheta,\sigma)$ в блочном виде $W = \{W_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Учитывая равенство

$$W(\vartheta,\sigma) = \int_0^{\vartheta} Q(t,\sigma) Q^*(t,\sigma)\, dt,$$

для (p,s)-го элемента матрицы W_{ij} получим соотношения

$$w_{ijps}(\vartheta,\sigma) = \int_0^{\vartheta} e_i^* \widehat{B}(t,\sigma) \widehat{B}^*(t,\sigma) e_j e_p^* \widehat{C}(t,\sigma) \widehat{C}^*(t,\sigma) e_s\, dt = \gamma_{ijps}(\vartheta,\sigma).$$

Следовательно, $W(\vartheta,\sigma)=\Gamma(\vartheta,\sigma)$, и равномерная полная управляемость большой системы (F,G,σ) эквивалентна равномерной согласованности системы (φ,σ). Теорема доказана.

Формулируемые ниже утверждения легко следуют из теоремы 4.1 с применением результатов работы А. Г. Иванова и Е. Л. Тонкова [54].

Следствие 4.1 [132]. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное инвариантное множество в Σ. Если в каждом минимальном множестве $\mathcal{E}_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{A}$, содержащемся в $\mathcal{E}$, найдется точка $\sigma_\alpha\in\mathcal{E}_\alpha$ такая, что система (φ,σ_α) согласованна, то всякая система (φ,σ), $\sigma\in\mathcal{E}$, равномерно согласованна. Более того, найдутся ϑ и l (см. определение 2.2), общие для всех $\sigma\in\mathcal{E}$.*

Следствие 4.2 [132]. *Пусть множество $\overline{\gamma_+(\sigma)}$ компактно и в каждом минимальном $\mathcal{E}_\alpha$ из омега-предельного множества точки σ существует $\sigma_\alpha\in\mathcal{E}_\alpha$ такое, что система (φ,σ_α) согласованна. Тогда свойства согласованности и равномерной согласованности системы (φ,σ) эквивалентны.*

Следствие 4.3 [132]. *Пусть $\mathcal{E}$ — объединение тех минимальных в Σ множеств, в каждом из которых найдется σ такое, что (φ,σ) согласованна. Тогда для любого σ, принадлежащего зоне притяжения $W^s(\mathcal{E})$ множества $\mathcal{E}$, система (φ,σ) равномерно согласованна.*

§ 5. Коэффициентные признаки согласованности

Здесь на основании результатов предыдущего параграфа получены коэффициентные признаки согласованности линейных управляемых систем с наблюдателем.

Рассмотрим систему

$$\dot{w}=F(t)w,\quad w\in\mathbb{R}^N,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{5.1}$$

и линейное пространство

$$L(t)=\{w\in\mathbb{R}^N:\ H(t)w=0\}, \tag{5.2}$$

где $H(t)\in\mathrm{M}_{kN}$, $k\leqslant N$. Будем говорить, что пространство (5.2) не содержит целых траекторий (системы (5.1) на $[t_0,t_0+\vartheta]$), если включение $w(t)\in L(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\vartheta$, где $w(\cdot)$ — решение системы (5.1), возможно только для $w(t)\equiv 0$.

Предполагая достаточную гладкость $F(\cdot)$ и $H(\cdot)$, построим матричные функции

$$H_0(t) = H(t), \quad H_{i+1}(t) = \dot{H}_i(t) + H_i(t)F(t), \ i = 0, \dots, l-2,$$

и

$$\mathcal{H}_l(t) = (H_0(t), \dots, H_{l-1}(t))^* \in \mathrm{M}_{kl,N}. \tag{5.3}$$

Лемма 5.1 [129]. *Если существуют* $\tau \in]t_0, t_0 + \vartheta[$ *и натуральное* l *такие, что*

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_l(\tau) = N, \tag{5.4}$$

то пространство (5.2) *не содержит целых траекторий.*

Доказательство. Пусть $w(\cdot)$ — решение системы (5.1) на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$, причем выполнено тождество $H_0(t)w(t) \equiv 0$ на $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Тогда

$$0 \equiv (H_0(t)w(t))^{\cdot} = \dot{H}_0(t)w(t) + H_0(t)\dot{w}(t) =$$
$$= \dot{H}_0(t)w(t) + H_0(t)F(t)w(t) = H_1(t)w(t).$$

Последовательно дифференцируя получающиеся тождества, получим

$$H_i(t)w(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_0 + \vartheta], \quad i = 0, \dots, l-1,$$

т. е.

$$\mathcal{H}_l(t)w(t) \equiv 0 \quad \text{на } [t_0, t_0 + \vartheta].$$

По условию, $\mathcal{H}_l(\tau)$ имеет N линейно независимых строк, поэтому $w(\tau) = 0$ и, следовательно, $w(t) \equiv 0$. Лемма доказана.

Следствие 5.1 [129]. *Пусть F и H постоянны. Тогда пространство* (5.2) *не содержит целых траекторий в том и только том случае, когда*

$$\operatorname{rank}(H, HF, \dots, HF^{N-1}) = N. \tag{5.5}$$

Доказательство. Достаточность. В рассматриваемом случае $H_i(t) \equiv HF^i$, $i = 0, 1, \dots$, поэтому

$$\mathcal{H}_N(t) \equiv (H, HF, \dots, HF^{N-1}),$$

и доказываемое утверждение следует из (5.4).

Необходимость. Предположим противное, пусть (5.5) не имеет места. Тогда существует ненулевой вектор $w_0 \in \mathbb{R}^N$ такой, что для всех $k = 0, 1, \dots, N-1$ справедливы равенства

$$HF^k w_0 = 0. \tag{5.6}$$

Из леммы Кели–Гамильтона [80, с. 126] следует, что (5.6) выполнено при всех целых $k\geqslant 0$. Умножая (5.6) на $t^k/k!$ и суммируя по k, получим равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{HF^k w_0 t^k}{k!}=H\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^k t^k}{k!}\Big)w_0=H(\exp Ft)w_0=0,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, пространство (5.2) содержит целую траекторию системы (5.1) на $\mathbb{R}$. Полученное противоречие доказывает следствие.

По линейной управляемой системе с наблюдателем

$$\dot x=A(t)x+B(t)u,\ y=C^*(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m,\ y\in\mathbb{R}^r, \tag{5.7}$$

которую будем отождествлять с тройкой $(A(\cdot),B(\cdot),C(\cdot))$, построим $n^2\times n^2$ матрицу

$$F(t)=-\{a_{ji}(t)E\}_{i,j=1}^n+\operatorname{diag}(A(t),\dots,A(t)) \tag{5.8}$$

и $mr\times n^2$ матрицу

$$H(t)=\begin{pmatrix} b_{11}(t)C^*(t) & \dots & b_{n1}(t)C^*(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1m}(t)C^*(t) & \dots & b_{nm}(t)C^*(t)\end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

являющуюся прямым произведением матриц $B^*(t)$ и $C^*(t)$.

Теорема 5.1 [129]. *Пусть* $F(\cdot)$ *и* $H(\cdot)$ *определены равенствами* (5.8) *и* (5.9). *Система* $(A(\cdot),B(\cdot),C(\cdot))$ *согласованна на* $[t_0,t_0+\vartheta]$ *в том и только том случае, когда пространство* (5.2) *не содержит целых траекторий системы* (5.1) *на* $[t_0,t_0+\vartheta]$.

Доказательство. Система (5.7) согласованна на $[t_0,t_0+\vartheta]$ тогда и только тогда, когда функции

$$B^*(t)X^*(t_0,t)e_ie_j^*X^*(t,t_0)C(t),\quad i,j=1,\dots,n, \tag{5.10}$$

линейно независимы на $[t_0,t_0+\vartheta]$ (теорема 2.1). Обозначим

$$Y_0(t)=X^*(t_0,t)Y_0X^*(t,t_0),$$

тогда $Y_0(\cdot)$ — решение матричной задачи

$$\dot Y=YA^*(t)-A^*(t)Y,\quad Y(t_0)=Y_0, \tag{5.11}$$

и функции (5.10) линейно независимы в том и только том случае, если из равенства

$$B^*(t)Y_0(t)C(t)=0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_0+\vartheta, \tag{5.12}$$

имеем $Y_0 = 0$.

Введем в рассмотрение вектор

$$w(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2},$$

составленный из столбцов $y_1(t), \dots, y_n(t)$ матрицы $Y_0^*(t)$. Тогда $w(\cdot)$ удовлетворяет системе уравнений (5.1), где $F(\cdot)$ определена равенством (5.8), а (5.12) эквивалентно соотношению $H(t)w = 0$, где $H(\cdot)$ определена (5.9). Таким образом, в силу леммы 2.2 и доказанной эквивалентности согласованность системы (5.7) равносильна отсутствию целых траекторий системы (5.1), содержащихся в (5.2). Теорема доказана.

Следствие 5.2 [129]. *Пусть матричные функции $F(\cdot)$ и $H(\cdot)$ определены равенствами* (5.8) *и* (5.9). *Предположим, что эти функции настолько гладкие, что по ним в соответствии с* (5.3) *можно построить матрицу $\mathcal{H}_{n^2}(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$. Если существует $\tau \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ такое, что $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{n^2}(\tau) = n^2$, то система $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot))$ согласованна на $[t_0, t_0 + \vartheta]$.*

Следствие 5.3 [129]. *Система*

$$\dot{x}_i = b_i(t)u, \;\; y = c_1(t)x_1 + \ldots + c_n(t)x_n,$$

где $x = \operatorname{col}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, согласованна на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ в том и только том случае, когда совокупность функций $b_i(\cdot)c_j(\cdot)$, $i, j = 1, \dots, n$, линейно независима на $[t_0, t_0 + \vartheta]$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $A(t) \equiv 0 \in \mathrm{M}_n$, поэтому $F(t) \equiv 0 \in \mathrm{M}_{n^2}$, а $C(t) = \operatorname{col}(c_1(t), \dots, c_n(t))$, следовательно,

$$H(t) = (b_1(t)C^*(t), \dots, b_n(t)C^*(t)) =$$

$$= (b_1(t)c_1(t), \dots, b_1(t)c_n(t), \dots, b_n(t)c_1(t), \dots, b_n(t)c_n(t)).$$

Равенство $H(t)w = 0$, $w = \text{const} \in \mathbb{R}^{n^2}$, $w \neq 0$, $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$, возможно только в случае линейной зависимости на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ элементов вектор-строки $H(t)$, а это равносильно доказываемому.

Следствие 5.4 [129]. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n$ — постоянная матрица, $b, c \in \mathbb{R}^n$ — постоянные векторы. Тогда система (A, b, c) не является согласованной.*

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что для каждого вектора

$$w = \operatorname{col}(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{n^2},$$

где $w_i \in \mathbb{R}^n$, справедливы равенства

$$HF^k w = c^* W_k b, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Здесь $W_k \in \mathrm{M}_n$, $W_{k+1} = W_k A^* - A^* W_k$, а столбцы матрицы W_0 образованы векторами $w_1, \dots, w_n$.

Следующие три случая исчерпывают всевозможные A, b, c.

I. Пусть $c^* b = 0$. Построим вектор $w = \operatorname{col}(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$, где e_i — i-й единичный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда $W_0 = E$ и $W_k = 0$ при всех натуральных k. Следовательно, $Hw = c^* W_0 b = c^* b = 0$ и $HF^k w = c^* W_k b = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

II. Пусть $c^* b \neq 0$ и $A \neq \beta E$ ни при каком $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда в качестве w_i возьмем столбцы матрицы $A^* - c^* A^* b E / c^* b$. Непосредственно проверяется, что и в этом случае справедливы равенства $HF^k w = 0$, $k = 0, 1, \dots$.

III. Наконец, пусть $A = \beta E$ при некотором $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда $W_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому в качестве w достаточно взять любой ненулевой вектор, такой, что построенная по нему матрица W_0 гарантирует выполнение равенства $W_0 b = 0$. Тогда $HF^k w = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots$.

Итак, в каждом из этих случаев имеет место неравенство

$$\operatorname{rank}(H, HF, \dots, HF^{n^2-1}) < n^2.$$

Из теоремы 5.1 и следствия 5.1 вытекает, что тройка (A, b, c) не является согласованной. Следствие доказано.

§ 6. Метод поворотов Миллионщикова для согласованных систем

В этом параграфе доказаны утверждения о возмущениях матрицы Коши (теорема 6.1, следствие 6.1), на основании которых становится возможным применять метод поворотов В. М. Миллионщикова к согласованным системам (см. замечание 6.1).

Рассмотрим линейную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \; y = C^*(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m, \; y \in \mathbb{R}^r. \tag{6.1}$$

Систему будем отождествлять с функцией $\sigma : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{n,n+m+r}$,

$$\sigma(\cdot) := (A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)).$$

Будем предполагать, что функция $\sigma(\cdot)$ удовлетворяет условиям:
а) функция $t \mapsto \|\sigma(t)\|$ измерима по Лебегу и ограничена на $\mathbb{R}$;
б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\sigma_\tau(s) - \sigma(s)\| \, ds < \varepsilon,$$

если $|\tau| < \delta$; здесь $\sigma_\tau(s) := \sigma(s + \tau)$ — сдвиг функции $\sigma(\cdot)$ на τ.

Обозначим через $X(t, s)$ матрицу Коши однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{6.2}$$

а через $X_V(t, s)$ — матрицу Коши системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)V(t)C^*(t))x. \tag{6.3}$$

Для положительного числа ε введем в рассмотрение множество $\mathcal{U}_\varepsilon$ измеримых функций $U : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{mr}$, удовлетворяющих неравенству $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\| < \varepsilon$. Сужение $\mathcal{U}_\varepsilon$ на промежуток $J \subset \mathbb{R}$ обозначим $\mathcal{U}_\varepsilon(J)$.

Лемма 6.1 [127]. *Если система $\sigma(\cdot)$ ϑ-равномерно согласованна, то существует $\varkappa_0 > 0$ такое, что всяким $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ и $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta = \delta(\varkappa, \varepsilon) > 0$, обеспечивающее следующее свойство: для любой функции $V(\cdot) \in \mathcal{U}_\varkappa$, такой, что система $(A + BVC^*, B, C)$ удовлетворяет условиям* а) *и* б), *любой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(0) \subset \mathrm{M}_n$ и любого $\tau \in \mathbb{R}$ существует управление $U(\cdot) \in \mathcal{U}_\varepsilon$, обеспечивающее разрешимость относительно $Z(\cdot)$ задачи*

$$\dot{Z} = (A(t) + B(t)V(t)C^*(t))Z + B(t)UC^*(t)X_V(t, \tau) + B(t)UC^*(t)Z, \tag{6.4}$$

$$Z(\tau) = 0, \quad Z(\tau + \vartheta) = H. \tag{6.5}$$

Доказательство. Из следствия 3.3 вытекает существование такого $\varkappa_0 > 0$, что для любого $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ существует $\alpha_1 = \alpha_1(\varkappa) > 0$, обеспечивающее свойство: каждому $\alpha \in [0, \alpha_1]$ отвечает $\beta = \beta(\alpha, \varkappa)$ такое, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$, любой матрицы $H \in \mathrm{M}_n$ и любых функций $V(\cdot) \in \mathcal{U}_\varkappa$ и $Z(\cdot) \in C([\tau, \tau + \vartheta], \mathrm{B}_\alpha(0))$ уравнение

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} X_V(\tau + \vartheta, t)B(t)U(t)C^*(t)(X_V(t, \tau) + Z(t)) \, dt = H \tag{6.6}$$

разрешимо относительно $U(\cdot) \in L_\infty([\tau,\tau+\vartheta],\mathrm{M}_{mr})$, причем при всех $\tau \leqslant t \leqslant \tau+\vartheta$ выполнено неравенство $\|U(t)\| \leqslant \beta\|H\|$.

Зафиксируем произвольные $\tau \in \mathbb{R}$, $\varkappa \in [0,\varkappa_0]$, $\alpha \in [0,\alpha_1(\varkappa)]$ и $V(\cdot) \in \mathcal{U}_\varkappa([\tau,\tau+\vartheta],\mathrm{M}_{mr})$, и для выбранных $\varkappa$ и α найдем $\beta=\beta(\alpha,\varkappa)$. Пусть $Z(\cdot) \in C([\tau,\tau+\vartheta],\mathrm{B}_\alpha(0))$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, $H \in \mathrm{B}_\delta(0) \subset \mathrm{M}_n$; выбор величины $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\alpha,\varkappa)$ уточним ниже, $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\beta(\alpha,\varkappa)}$. Построим управление

$$U_Z(t,s)=\begin{cases} U(s), & s \in [\tau,t],\\ 0, & s \in]t,\tau+\vartheta],\end{cases}$$

где $U(\cdot) \in L_\infty([\tau,\tau+\vartheta],\mathrm{M}_{mr})$ — функция, обеспечивающая выполнение равенства (6.6) для выбранной $Z(\cdot)$. Отметим, что

$$\|U(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau+\vartheta.$$

Рассмотрим оператор F, определенный равенством

$$(FZ)(t)=\int\limits_\tau^{\tau+\vartheta} X_V(t,s)B(s)U_Z(t,s)C^*(s)(X_V(s,\tau)+Z(s))\,ds, \quad t \in [\tau,\tau+\vartheta].$$

Выберем ε_0 таким, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon_0 < \frac{1}{\vartheta k(\varkappa)\alpha}, \quad \frac{\vartheta k^2(\varkappa)\varepsilon_0 d}{1-\vartheta k(\varkappa)\varepsilon_0 d} \leqslant \alpha_1,$$

где

$$\|X_V(t,s)\| \leqslant k(\varkappa), \quad \|B(t)\|\,\|C^*(t)\| \leqslant d, \quad t,s \in [\tau,\tau+\vartheta].$$

Тогда при каждом $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ оператор F переводит множество

$$C([\tau,\tau+\vartheta],\mathrm{B}_\alpha(0))$$

в себя при любом α, удовлетворяющем неравенствам

$$\frac{\vartheta k^2(\varkappa)\varepsilon d}{1-\vartheta k(\varkappa)\varepsilon d} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1.$$

Действительно,

$$\|(FZ)(t)\| \leqslant \vartheta k(\varkappa) d\varepsilon_0(k(\varkappa)+\alpha) \leqslant \alpha.$$

Так как оператор F вполне непрерывен как оператор, действующий из $C([\tau,\tau+\vartheta],\mathrm{M}_n)$ в себя [70, с. 43], то в силу принципа Шаудера F имеет неподвижную точку $\widehat{Z}(\cdot)$. Поскольку

$$\widehat{Z}(\cdot)=\int\limits_\tau^t X_V(t,s)B(s)\widehat{U}(s)C^*(s)(X_V(s,\tau)+\widehat{Z}(s))\,ds,$$

где функция $\widehat{U}(\cdot)$ — решение (6.6) при $Z = \widehat{Z}(\cdot)$, то $\widehat{Z}(\cdot)$ — решение задачи (6.4), (6.5) при $U = \widehat{U}(\cdot)$, и, кроме того,

$$\|\widehat{U}(t)\| \leqslant \beta\|H\| \leqslant \beta\delta \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 6.1 [127]. *Если система (A, B, C) равномерно согласованна, то существуют $\varkappa_0 > 0$ и $\vartheta_0 > 0$ такие, что всяким $\varkappa \in]0, \varkappa_0[$ и $\varepsilon > 0$ отвечает $\eta = \eta(\varkappa, \varepsilon) > 0$, обеспечивающее следующее свойство: для любой функции $V(\cdot) \in \mathcal{U}_{\varkappa}$ (такой, что система $(A + BVC^*, B, C)$ удовлетворяет условиям* а), б)), *любой матрицы $H \in \mathrm{B}_\eta(E) \subset \mathrm{M}_n$, любого $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ и любого $\tau \in \mathbb{R}$ найдется функция $U(\cdot) \in \mathcal{U}_\varepsilon$, обеспечивающая для матрицы Коши $X_{U+V}(t, s)$ системы*

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)(U(t) + V(t))C^*(t))x \tag{6.7}$$

равенство

$$X_{U+V}(\tau + \vartheta, \tau) = X(\tau + \vartheta, \tau)H.$$

Доказательство. Пусть ϑ_0 — число, обеспечивающее ϑ_0-равномерную согласованность системы (A, B, C). Возьмем любые $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\varkappa \in]0, \varkappa_0[$ ($\varkappa_0$ — из леммы 6.1). Пусть $V(\cdot) \in \mathcal{U}_{\varkappa}$. Из леммы 6.1 следует существование $\beta = \beta(\varkappa, \varepsilon)$ такого, что при всех $H \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющих условию

$$\|X_V(\tau + \vartheta_0, \tau)H - X_V(\tau + \vartheta_0, \tau)\| < \beta, \tag{6.8}$$

задача

$$\dot{Z}_0 = (A(t) + B(t)V(t)C^*(t))Z_0 + B(t)U(t)C^*(t)X_V(t, \tau) + B(t)UC^*(t)Z_0,$$

$$Z_0(\tau) = 0, \quad Z_0(\tau + \vartheta_0) = X_V(\tau + \vartheta_0, \tau)H - X_V(\tau + \vartheta_0, \tau) \tag{6.9}$$

разрешима относительно $Z_0(\cdot)$ при некоторой $U(\cdot) \in \mathcal{U}_\varepsilon([\tau, \tau + \vartheta_0])$.

Положим $\eta(\varkappa, \varepsilon) = \beta(\varkappa, \varepsilon)k^{-1}(\varkappa)$. Если $H \in \mathrm{B}_\eta(E) \subset \mathrm{M}_n$ — произвольная матрица, то

$$\|X_V(\tau + \vartheta_0, \tau)H - X_V(\tau + \vartheta_0, \tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|X_V(\tau + \vartheta_0, \tau) - X_V(\tau + \vartheta_0, \tau)\| \, \|H - E\| < k(\varkappa)\eta(\varkappa, \varepsilon) = \beta(\varkappa, \varepsilon),$$

т. е. неравенство (6.8) выполнено. Рассмотрим функцию $t \mapsto Z(t) \in \mathrm{M}_n$, определенную на $[\tau, \tau + \vartheta_0]$ равенством

$$Z(t) = X_V(t, \tau) + Z_0(t).$$

Тогда $Z(\cdot)$ удовлетворяет начальному условию

$$Z(\tau) = X_V(\tau,\tau) + Z_0(\tau) = E$$

и соотношениям

$$\dot Z = \dot X_V(t,\tau) + \dot Z_0(t) = (A(t) + B(t)V(t)C^*(t))X_V(t,\tau) +$$

$$+(A(t) + B(t)V(t)C^*(t))Z_0 + B(t)U(t)C^*(t)X_V(t,\tau) + B(t)U(t)C^*(t)Z_0 =$$
$$= (A(t) + B(t)V(t)C^*(t))Z + B(t)U(t)C^*(t)Z =$$
$$= (A(t) + B(t)(U(t) + V(t))C^*(t))Z.$$

В силу теоремы существования и единственности на $[\tau, \tau+\vartheta_0]$ выполнено равенство

$$Z(t) = X_{U+V}(t,\tau).$$

Из (6.9) следует справедливость соотношения

$$X_{U+V}(\tau+\vartheta_0,\tau) = X_V(\tau+\vartheta_0,\tau)H.$$

Возьмем теперь произвольное $\vartheta \geqslant \vartheta_0$. На отрезке $[\tau,\tau+\vartheta_0]$ построим $U(\cdot)$, как было описано выше, а на полуинтервале $]\tau+\vartheta_0,\tau+\vartheta]$ положим $U(t)\equiv 0$. Тогда

$$X_{U+V}(\tau+\vartheta,\tau) = X_{U+V}(\tau+\vartheta,\tau+\vartheta_0)X_{U+V}(\tau+\vartheta_0,\tau) =$$

$$= X_V(\tau+\vartheta,\tau+\vartheta_0)X_V(\tau+\vartheta_0,\tau)H = X_V(\tau+\vartheta,\tau)H.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 6.1 [127]. *Если система (A,B,C) равномерно согласованна, то существует ϑ_0 такое, что всякому $\varepsilon > 0$ отвечает $\eta > 0$, обеспечивающее свойство: для любой матрицы $H \in \mathrm{B}_\eta(E) \subset \mathrm{M}_n$, любого $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ и любого $\tau \in \mathbb{R}$ найдется функция $U(\cdot) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ такая, что для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы*

$$\dot x = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x \tag{6.10}$$

справедливо равенство

$$X_U(\tau+\vartheta,\tau) = X(\tau+\vartheta,\tau)H.$$

З а м е ч а н и е 6.1. Теорема 6.1 и следствие 6.1 позволяют перенести метод поворотов В. М. Миллионщикова [107, 110] (см. также обзор

Н. А. Изобова [57]) на равномерно согласованные системы. Отметим, что метод поворотов существенно опирается на следующее утверждение (В. М. Миллионщиков [110], Н. А. Изобов [57, с. 90–91, лемма 2]): *для любого нетривиального решения* $x(\cdot)$ *системы* (1.4) *и для любого вектора* $\eta \in \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющего условиям*

$$\|\eta\| = \|x(\tau+1)\|, \quad \sphericalangle(\eta, x(\tau+1)) = \delta < \frac{\pi}{2},$$

существует матрица поворота $U_\delta(\cdot)$ *такая, что вектор*

$$y(t) := U_\delta(t)x(t)$$

удовлетворяет условиям $y(\tau) = x(\tau)$, $y(\tau+1) = \eta$ *и является на* $[\tau, \tau+1]$ *решением системы*

$$\dot{y} = (A(t) + P(t))y, \tag{6.11}$$

где $P \in KC_n([t_0, t_0+1])$ *и* $\|P\|_C \leqslant (2a+1)\delta$.

Доказательство этого утверждения мы приведем в параграфе 7 (лемма 7.1). Систему (6.11) называют **возмущенной** по отношению к системе (6.2) и говорят, что к системе (6.2) **применен поворот** $U_\delta(t)$ **на отрезке** $[\tau, \tau+1]$. Здесь необходимо отметить, что метод поворотов используется для изучения асимптотических свойств решений системы (6.2), при этом важен результат поворота, а не то, как ведут себя решения возмущенной системы (6.11) на отрезке, на котором производится поворот. Поэтому можно считать, что к системе (6.2) применен поворот $U_\delta(\tau+1)$ в момент $\tau+1$. Итак, одно из свойств, на котором основан метод поворотов, состоит в следующем: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что любому* $\tau \in \mathbb{R}$ *и любой матрице* $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_n$ *отвечает функция* $P : [\tau, \tau+1] \to \mathrm{B}_\varepsilon(0) \subset \mathrm{M}_n$, *гарантирующая для матрицы Коши* $Z(t,s)$ *системы* (6.11) *выполнение равенства*

$$Z(\tau+1, \tau) = HX(\tau+1, \tau).$$

Следствие 6.1 обеспечивает для системы $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot))$ аналогичное свойство.

ГЛАВА II. ЛОКАЛЬНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В этой главе исследовано свойство локальной достижимости линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(t) + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \tag{II.1}$$

замкнутой линейной по наблюдателю

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^r, \tag{II.2}$$

обратной связью $u = U(t)y$, т. е. системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x. \tag{II.3}$$

Это свойство заключается в возможности построения такого матричного управления $U(\cdot)$, что для матрицы Коши $X_U(t,s)$ замкнутой системы (II.3) имеет место равенство

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H,$$

где $H \in \mathrm{M}_n$ — произвольная достаточно близкая к E матрица, $X(t,s)$ — матрица Коши свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{II.4}$$

Свойство локальной достижимости системы (II.3) позволяет перенести метод поворотов В. М. Миллионщикова на линейные управляемые системы с наблюдателем. Показано, что равномерная полная управляемость системы (II.1) необходима и достаточна для равномерной локальной достижимости системы (II.3) в случае $r = n$, $C(t) \equiv E$ (теорема 8.2). Равномерная согласованность системы (II.1), (II.2) достаточна, но не необходима для равномерной локальной достижимости системы (II.3) (теоремы 10.1 и 10.2). В § 11 показано, что если система (II.3) равномерно локально достижима, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что множество $\mathfrak{N}_\varepsilon(A)$ систем вида (II.3), где $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, и множество $\mathfrak{M}_\delta(A)$ возмущенных систем

$$\dot{x} = (A(t) + P(t))\,x, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\|P\|_C \leqslant \delta$, неотличимы с точки зрения асимптотического поведения решений систем, входящих в эти множества. На основании этого результата и классических теорем современной теории показателей Ляпунова (В. М. Миллионщиков, [108, 110]) установлено существование во множестве $\mathfrak{N}_\varepsilon(A)$ при каждом $\varepsilon > 0$ системы с интегральной разделенностью, доказана достижимость верхнего центрального показателя $\Omega(A)$ системы (II.4) на возмущениях из класса

$$\mathfrak{N}(A) := \bigcup_{\varepsilon>0} \mathfrak{N}_\varepsilon(A)$$

и исследовано свойство устойчивости показателей Ляпунова на возмущениях из этого класса.

§ 7. Метод поворотов и локальная достижимость линейных однородных систем

В этом параграфе приведено классическое доказательство второй леммы метода поворотов В. М. Миллионщикова (лемма 7.1) и изложены подходы (теорема 7.1), которые в дальнейшем позволят перенести эту лемму на управляемые системы.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

с кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$, $a := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\|$. Пусть $X(t,s)$ — матрица Коши системы (7.1).

Лемма 7.1 (В. М. Миллионщиков [110], Н. А. Изобов [57, с. 90–91, лемма 2]). *Для каждого* $\delta \in [0, \pi/2[$, *для любого нетривиального решения* $x(\cdot)$ *системы* (7.1) *и для любого вектора* $\eta \in \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющего условиям*

$$\|\eta\| = \|x(t_0+1)\|, \quad \sphericalangle(\eta, x(t_0+1)) = \delta,$$

существует матрица поворота $U_\delta(\cdot)$ *такая, что вектор*

$$y(t) := U_\delta(t)x(t)$$

удовлетворяет условиям $y(t_0) = x(t_0)$, $y(t_0+1) = \eta$ *и является на* $[t_0, t_0+1]$ *решением системы*

$$\dot{y} = (A(t) + P(t))y, \tag{7.2}$$

где $P \in KC_n([t_0, t_0+1])$ *и* $\|P\|_C \leqslant (2a+1)\delta$.

Доказательство. Для каждого $t \in [t_0, t_0+1]$ обозначим через $U_\delta(t)$ матрицу поворота на угол $(t-t_0)\delta$ в плоскости векторов $x(t_0+1), \eta$ в направлении от первого ко второму вектору. Тогда функция $t \mapsto U_\delta(t)$ дифференцируема на $[t_0, t_0+1]$ и $\|\dot U_\delta(t)\| \leqslant \delta$. При каждом $t \in [t_0, t_0+1]$ матрица $U_\delta(t)$ ортогональна, поэтому $\|U_\delta(t)\| = \|U_\delta^{-1}(t)\| = 1$. Кроме того, справедливы неравенства

$$\|U_\delta(t) - E\| \leqslant \delta, \quad \|U_\delta^{-1}(t) - E\| \leqslant \delta.$$

Применим преобразование $y = U_\delta(t)x$ к системе (7.1), тогда

$$\dot y = (\dot U_\delta(t) U_\delta^{-1}(t) + U_\delta(t) A(t) U_\delta^{-1}(t)) y.$$

Положим

$$P(t) = \dot U_\delta(t) U_\delta^{-1}(t) + U_\delta(t) A(t) U_\delta^{-1}(t) - A(t).$$

Функция $P(\cdot)$ кусочно непрерывна на $[t_0, t_0+1]$, а для $\|P\|_C$ имеем оценки

$$\|P\|_C \leqslant \|\dot U_\delta\|_C \|U_\delta^{-1}\|_C + \|U_\delta A U_\delta^{-1} - U_\delta A\|_C + \|U_\delta A - A\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \delta + \|U_\delta\|_C \|A\|_C \|U_\delta^{-1} - E\|_C + \|A\|_C \|U_\delta - E\|_C \leqslant \delta + a\delta + a\delta = (2a+1)\delta.$$

Для решения $y(\cdot)$ системы (7.2) с выбранной $P(\cdot)$ и с начальным условием $y(t_0) = x(t_0)$ справедливо равенство

$$y(t_0+1) = U_\delta(t_0+1) x(t_0+1) = \eta.$$

Лемма доказана.

Далее в этом параграфе мы применим иной подход к доказательству этого утверждения, который в последующих параграфах будет применен к линейным управляемым системам.

Лемма 7.2. *Для любого $\vartheta > 0$ существует $\alpha = \alpha(\vartheta) > 0$ такое, что при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ матрица*

$$W_0(t_0, t_0+\vartheta) := \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t) X^*(t_0, t)\, dt$$

удовлетворяет неравенству $W_0(t_0, t_0+\vartheta) \geqslant \alpha E$, понимаемому в смысле квадратичных форм.

Доказательство. Возьмем любые $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$. Тогда при каждом $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$

$$\|\xi^* X(t_0, t)\| \geqslant \min_{\|\eta\|=1} \|\eta^* X(t_0, t)\| = \|X^{-1}(t_0, t)\|^{-1} = \|X(t, t_0)\|^{-1} \geqslant e^{-a\vartheta}.$$

Следовательно,

$$\xi^* W_0(t_0, t_0+\vartheta)\xi = \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* X(t_0,t)\|^2\,dt \geqslant \vartheta e^{-2a\vartheta} =: \alpha$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, а это равносильно доказываемому неравенству $W_0(t_0, t_0+\vartheta) \geqslant \alpha E$.

Следствие 7.1. *Система $(A(\cdot), E)$ ϑ-равномерно вполне управляема для любой $A(\cdot)$ и любого $\vartheta > 0$.*

Доказательство. Матрица $W_0(t_0, t_0+\vartheta)$ является матрицей Калмана системы $(A(\cdot), E)$, и доказываемое свойство выполнено в силу определения 1.3.

Следствие 7.2. *При всех $\vartheta > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ матрица $W_0(t_0, t_0+\vartheta)$ обратима, при этом выполнено неравенство*

$$\|W_0^{-1}(t_0, t_0+\vartheta)\| \leqslant \beta,$$

где

$$\beta = \beta(\vartheta) := \frac{e^{2(2n-1)a\vartheta}}{\vartheta}.$$

Доказательство. Пусть $\vartheta > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ — любые. Матрица $W_0(t_0, t_0+\vartheta)$ эрмитова, поэтому все ее собственные значения вещественны [176, с. 53]. Пусть $\lambda_j(W_0(t_0, t_0+\vartheta)) \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, — произвольное собственное значение матрицы $W_0(t_0, t_0+\vartheta)$; $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, — соответствующий собственный вектор. Тогда из леммы 7.2 получим неравенство

$$\lambda_j = \xi^* \lambda_j \xi = \xi^* W_0(t_0, t_0+\vartheta)\xi \geqslant \alpha,$$

из которого

$$\det W_0(t_0, t_0+\vartheta) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j(W_0(t_0, t_0+\vartheta)) \geqslant \alpha^n > 0,$$

и матрица $W_0(t_0, t_0+\vartheta)$ — обратима. Для $\|W_0^{-1}(t_0, t_0+\vartheta)\|$ справедливы оценки [176, с. 493]

$$\|W_0^{-1}(t_0, t_0+\vartheta)\| \leqslant \frac{\|W_0(t_0, t_0+\vartheta)\|^{n-1}}{\det W_0(t_0, t_0+\vartheta)} \leqslant \frac{(\vartheta e^{2a\vartheta})^{n-1}}{\alpha^n} =$$

$$= \frac{(\vartheta e^{2a\vartheta})^{n-1}}{(\vartheta e^{-2a\vartheta})^n} = \frac{e^{2(2n-1)a\vartheta}}{\vartheta} =: \beta.$$

Теорема 7.1. *Для каждого* $\vartheta > 0$ *существуют такие положительные числа* $\delta = \delta(\vartheta)$ *и* $l = l(\vartheta)$, *что для любых* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_n$ *найдется* $P(\cdot) \in C_n([t_0, t_0 + \vartheta])$, $\|P\|_C \leqslant l\|H - E\|$, *такая, что матрица Коши* $Y(t, s)$ *системы* (7.2) *удовлетворяет равенству*

$$Y(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H. \tag{7.3}$$

Доказательство. Пусть $\vartheta > 0$ — произвольно. Положим

$$\delta = \frac{1}{2\vartheta e^{2a\vartheta}\beta(\vartheta)},$$

где $\beta(\vartheta)$ — из формулировки следствия 7.2, и возьмем любые $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_n$. На $[t_0, t_0 + \vartheta]$ определим матричную функцию $V(\cdot)$ равенством

$$V(t) = X^*(t_0, t)W_0^{-1}(t_0, t_0 + \vartheta)(H - E).$$

Тогда $\|V\|_C \leqslant e^{a\vartheta}\beta(\vartheta)\|H - E\|$. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{Z} = A(t)Z + V(t), \quad Z(t_0) = E.$$

Решение этой задачи представимо в виде

$$Z(t) = X(t, t_0)\Big(E + \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0, s)V(s)\, ds\Big), \tag{7.4}$$

следовательно,

$$\begin{gathered} Z(t_0 + \vartheta) = X(t_0 + \vartheta, t_0)\Big(E + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, s)X^*(t_0, s)\, ds \times \\ \times W_0^{-1}(t_0, t_0 + \vartheta)(H - E)\Big) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Для матрицы

$$G(t) := E + \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0, s)V(s)\, ds$$

справедлива оценка

$$\|G(t) - E\| \leqslant \vartheta e^{a\vartheta}\|V\|_C \leqslant \vartheta e^{2a\vartheta}\beta(\vartheta)\|H - E\| \leqslant \vartheta e^{2a\vartheta}\beta(\vartheta)\delta = \frac{1}{2},$$

поэтому $G(t)$ обратима на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ (см. [176, с. 363]), и

$$\|G^{-1}(t)\| \leqslant 1 + \|G^{-1}(t) - E\| \leqslant 1 + \|G^{-1}(t)\|\,\|G(t) - E\| \leqslant 1 + \|G^{-1}(t)\|/2,$$

следовательно, $\|G^{-1}(t)\| \leqslant 2$. Так как

$$Z(t) = X(t,t_0)G(t),$$

то и матрица $Z(t)$ обратима на этом отрезке. Положим

$$P(t) = V(t)Z^{-1}(t).$$

Тогда $P \in C_n([t_0, t_0 + \vartheta])$ и

$$\|P\|_C \leqslant \|Z^{-1}\|_C \|V\|_C \leqslant 2e^{a\vartheta}e^{a\vartheta}\beta(\vartheta)\|H - E\| =: l(\vartheta)\|H - E\|,$$

а из (7.4) следует равенство

$$Z(t) = X(t,t_0)\Big(E + \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0,s)P(s)Z(s)\,ds\Big),$$

поэтому

$$Z(t) \equiv Y(t,t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \vartheta],$$

где $Y(t,s)$ — матрица Коши системы (7.2) с выбранной $P(\cdot)$. Из (7.5) получаем

$$Y(t_0 + \vartheta, t_0) = Z(t_0 + \vartheta) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 7.3. *Для каждого $\vartheta > 0$ существуют такие положительные числа $\delta_0 = \delta_0(\vartheta)$ и $l_0 = l_0(\vartheta)$, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_{\delta_0}(E) \subset \mathrm{M}_n$ найдется $P(\cdot) \in C_n([t_0, t_0 + \vartheta])$, $\|P\|_C \leqslant l_0\|H - E\|$, такая, что*

$$Y(t_0 + \vartheta, t_0) = HX(t_0 + \vartheta, t_0). \tag{7.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольно выбранного $\vartheta > 0$ обозначим $\delta_0(\vartheta) = \delta(\vartheta)e^{-2a\vartheta}$, где $\delta(\vartheta)$ — из формулировки теоремы 7.1. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_{\delta_0}(E)$ — любые. Тогда $H = E + G$, где $\|G\| \leqslant \delta_0$. Положим

$$H_1 = X(t_0, t_0 + \vartheta)HX(t_0 + \vartheta, t_0) =$$

$$= X(t_0, t_0 + \vartheta)(E + G)X(t_0 + \vartheta, t_0) = E + X(t_0, t_0 + \vartheta)GX(t_0 + \vartheta, t_0).$$

Тогда

$$\|H_1 - E\| = \|X(t_0, t_0 + \vartheta)GX(t_0 + \vartheta, t_0)\| \leqslant e^{2a\vartheta}\|G\| \leqslant e^{2a\vartheta}\delta_0 = \delta$$

и

$$HX(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H_1.$$

Из теоремы 7.1 следует существование непрерывной на $[t_0, t_0+\vartheta]$ матричной функции $P(\cdot)$, удовлетворяющей оценке

$$\|P\|_C \leqslant l\,\|H_1 - E\| \leqslant l\,e^{2a\vartheta}\|G\| = l\,e^{2a\vartheta}\|H - E\| =: l_0\|H - E\|,$$

и такой, что

$$Y(t_0+\vartheta, t_0) = X(t_0+\vartheta, t_0)H_1 = HX(t_0+\vartheta, t_0).$$

Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 7.1. Величина $\delta_0(\vartheta)$ при каждом $\vartheta > 0$ удовлетворяет неравенству $\delta_0(\vartheta) < 1$, так как

$$\delta_0(\vartheta) = \delta(\vartheta)e^{-2a\vartheta} = \frac{1}{2\vartheta e^{4a\vartheta}\beta(\vartheta)} = \frac{\vartheta}{2\vartheta e^{4a\vartheta}e^{2(2n-1)a\vartheta}} = \frac{1}{2e^{2(2n+1)a\vartheta}}.$$

С л е д с т в и е 7.4. *Для каждого* $\vartheta > 0$ *существуют такие числа* $\delta_0 = \delta_0(\vartheta) \in]0,1[$ *и* $l = l(\vartheta) > 0$*, что для любого* $t_0 \in \mathbb{R}$*, любого нетривиального решения* $x(\cdot)$ *системы* (7.1) *и любого вектора* $\eta \in \mathbb{R}^n$*, удовлетворяющего условиям*

$$\|\eta\| = \|x(t_0+\vartheta)\|, \quad \sphericalangle(\eta, x(t_0+\vartheta)) = \delta \leqslant \delta_0,$$

существует матрица $P(\cdot) \in C_n([t_0, t_0+\vartheta])$*,* $\|P\|_C \leqslant l\delta$*, такая, что решение* $y(\cdot)$ *системы* (7.2) *с начальным условием* $y(t_0) = x(t_0)$ *удовлетворяет равенству* $y(t_0+\vartheta) = \eta$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем величину $\delta_0(\vartheta)$ в соответствии со следствием 7.3. Возьмем любое $\delta \in]0, \delta_0]$. Пусть $H \in \mathrm{M}_n$ — матрица, определяемая условиями:

1) $Hx = x$ для каждого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, лежащего в ортогональном дополнении к плоскости $\mathcal{L}(\eta; x(t_0+\vartheta))$ векторов $\eta, x(t_0+\vartheta)$;
2) в плоскости $\mathcal{L}(\eta; x(t_0+\vartheta))$ матрица H является матрицей поворота на угол δ в сторону от $x(t_0+\vartheta)$ к η.

Тогда $Hx(t_0+\vartheta) = \eta$ и

$$\|H - E\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|(H-E)\xi\| =$$

$$= \sup\{\|(H-E)\xi\| : \|\xi\| = 1,\, \xi \in \mathcal{L}(\eta; x(t_0+\vartheta))\} = 2\sin\frac{\delta}{2} \leqslant \delta \leqslant \delta_0.$$

В соответствии со следствием 7.3 построим матрицу $P \in C_n([t_0, t_0+\vartheta])$,

$$\|P\|_C \leqslant l\|H - E\| \leqslant l\delta,$$

такую, что выполнено равенство (7.6). Тогда для решения $y(\cdot)$ системы (7.2) с этой $P(\cdot)$ и с начальным условием $y(t_0) = x(t_0)$ имеем равенства

$$y(t_0+\vartheta) = Y(t_0+\vartheta, t_0)y(t_0) = Y(t_0+\vartheta, t_0)x(t_0) =$$
$$= HX(t_0+\vartheta, t_0)x(t_0) = Hx(t_0+\vartheta) = \eta.$$

Следствие доказано.

Таким образом, из теоремы 7.1 вытекает утверждение, практически эквивалентное второй лемме метода поворотов В. М. Миллионщикова (лемма 7.1). В следующем параграфе мы применим разработанный подход к равномерно вполне управляемым системам.

§ 8. Управляемость и достижимость

Здесь введено понятие локальной достижимости управляемой системы и доказана эквивалентность свойств равномерной полной управляемости и равномерной локальной достижимости (теорема 8.2).

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

с кусочно непрерывными ограниченными на $\mathbb{R}$ матричными коэффициентами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Как и прежде, через $X(t,s)$ обозначаем матрицу Коши соответствующей однородной системы (7.1). Пусть

$$Q(t,s) := X(t,s)B(s), \quad t,s \in \mathbb{R};$$

$$W(t_0, t_0+\vartheta) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0,s)Q^*(t_0,s)\,ds$$

— матрица Калмана системы (8.1).

Покажем, что для равномерно вполне управляемой системы (8.1) имеет место свойство, аналогичное тому, о котором идет речь в формулировке теоремы 7.1 для системы

$$\dot{x} = A(t)x + u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^n.$$

Сначала докажем один критерий равномерной полной управляемости.

Лемма 8.1 [95]. *Система* (8.1) ϑ*-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существует такое положительное число* γ, *что для произвольных* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $H \in \mathrm{M}_n$ *найдется функция* $V \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, $\|V\|_C \leqslant \gamma \|H - E\|$, *разрешающая матричную задачу управления*

$$\dot{Z} = Q(t_0, t)V(t), \tag{8.2}$$

$$Z(t_0) = E, \quad Z(t_0 + \vartheta) = H. \tag{8.3}$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система (8.1) ϑ-равномерно вполне управляема. Возьмем любые $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{M}_n$. В силу критерия равномерной полной управляемости Е. Л. Тонкова (теорема 1.1) для каждого из векторов

$$z_j = (H - E)e_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

существует управление $u_j \in KC_{m,1}([t_0, t_0 + \vartheta])$, удовлетворяющее оценке $\|u_j\|_C \leqslant \beta \|z_j\|$, такое, что решение задачи Коши для уравнения (8.1) с этим управлением и с начальным условием $x(t_0) = z_j$ попадает в начало координат в момент времени $t_0 + \vartheta$. Поскольку решение этой задачи Коши записывается в виде

$$x(t) = X(t, t_0)\Big(z_j + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0, s)u_j(s)\, ds\Big),$$

получаем равенство

$$(E - H)e_j + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, t)u_j(t)\, dt = 0.$$

Пусть $V(t) = [u_1(t), \ldots, u_n(t)]$. Тогда при каждом $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$(E - H)e_j + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, t)V(t)e_j\, dt = 0,$$

поэтому

$$E - H + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, t)V(t)\, dt = 0.$$

С другой стороны, решение уравнения (8.2) с начальным условием $Z(t_0) = E$ имеет вид

$$Z(t) = E + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0, s)V(s)\, ds, \tag{8.4}$$

следовательно, при выбранном управлении $V(\cdot)$ выполнено равенство

$$Z(t_0+\vartheta)=H.$$

Кроме того, для всех $t\in[t_0,t_0+\vartheta]$ и $x=\sum\limits_{j=1}^n x_je_j\in\mathbb{R}^n$ имеют место соотношения

$$\|V(t)x\|=\|V(t)(\sum_{j=1}^n x_je_j)\|=\|\sum_{j=1}^n x_j(V(t)e_j)\|=\|\sum_{j=1}^n x_ju_j(t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^n|x_j|\,\|u_j(t)\|\leqslant\|x\|\sum_{j=1}^n\|u_j(t)\|\leqslant\|x\|\sum_{j=1}^n\beta\|z_j\|\leqslant\|x\|n\beta\|H-E\|.$$

Возьмем $\gamma=n\beta$, тогда

$$\|V\|_C=\sup_t\sup_{x\neq0}\frac{\|V(t)x\|}{\|x\|}\leqslant\gamma\|H-E\|.$$

Достаточность. Пусть для любых $t_0\in\mathbb{R}$ и $H\in\mathrm{M}_n$ существует функция $V\in KC_{mn}([t_0,t_0+\vartheta])$, разрешающая задачу управления (8.2), (8.3), такая, что $\|V\|_C\leqslant\gamma\|H-E\|$.

Возьмем любые $x_0\in\mathbb{R}^n$ и $t_0\in\mathbb{R}$. Проинтегрируем (8.2) в пределах от t_0 до $t_0+\vartheta$, тогда из (8.3) получим

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta}Q(t_0,s)V(s)\,ds=H-E.$$

Пусть $H-E=[-x_0,0,\ldots,0]$. Выберем управление $u(t)=V(t)e_1$. Решение задачи Коши для уравнения (8.1) с $u=u(\cdot)$ и начальным условием $x(t_0)=x_0$ записывается в виде

$$x(t)=X(t,t_0)\Big(x_0+\int\limits_{t_0}^{t}Q(t_0,s)u(s)\,ds\Big),$$

поэтому

$$x(t_0+\vartheta)=X(t_0+\vartheta,t_0)\Big(-H+E+\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta}Q(t_0,s)V(s)\,ds\Big)e_1=0.$$

Для $\|u\|_C$ имеем оценку

$$\|u\|_C\leqslant\|V\|_C\leqslant\gamma\|H-E\|=\gamma\|(H-E)e_1\|=\gamma\|x_0\|.$$

Следовательно, система (8.1) ϑ-равномерно вполне управляема.

Т е о р е м а 8.1 [95]. *Если система* (8.1) *ϑ-равномерно вполне управляема, то найдутся такие $\alpha > 0$ и $r > 0$, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_r(E)$ существует управление $U(\cdot) \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_C \leqslant \alpha\|H - E\|$ и обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы*

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8.5}$$

с $U = U(\cdot)$ выполнение равенства

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H. \tag{8.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $H \in \mathrm{M}_n$ и $t_0 \in \mathbb{R}$. Пользуясь леммой 8.1, найдем функцию $V \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, удовлетворяющую оценке $\|V\|_C \leqslant \gamma\|H - E\|$ и разрешающую задачу управления (8.2), (8.3). Из (8.4) следует, что при всех $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ имеет место неравенство

$$\|Z(t) - E\| \leqslant \vartheta\|Q(t_0, \cdot)\|_C\|V\|_C \leqslant \vartheta\gamma b \exp(a\vartheta)\|H - E\|.$$

Возьмем $r = (2\vartheta\gamma b \exp(a\vartheta))^{-1}$, тогда для любой $H \in \mathrm{B}_r(E)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ выполнено неравенство $\|Z(t) - E\| \leqslant 1/2$, поэтому матрица $Z(t)$ обратима и $\|Z^{-1}(t)\| \leqslant 2$. Пусть

$$V_1(t) := V(t)Z^{-1}(t).$$

Тогда

$$\|V_1\|_C \leqslant \|V\|_C\|Z^{-1}\|_C \leqslant 2\gamma\|H - E\|,$$

а матричная функция $Z(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Z} = Q(t_0, t)V_1(t)Z$$

и условиям (8.3). Полагая

$$Y(t) = X(t, t_0)Z(t), \quad U(t) = V_1(t)X(t_0, t),$$

получим равенства

$$\dot{Y} = \dot{X}(t, t_0)Z(t) + X(t, t_0)\dot{Z}(t) =$$

$$= A(t)X(t, t_0)Z(t) + X(t, t_0)Q(t_0, t)V_1(t)Z(t) =$$

$$= A(t)Y(t) + B(t)V_1(t)X(t_0, t)Y(t) = (A(t) + B(t)U(t))Y,$$

т. е. независимо от t_0 функция $Y(\cdot)$ является фундаментальной матрицей системы (8.5) с выбранным управлением $U(\cdot)$. Кроме того, она удовлетворяет условиям

$$Y(t_0) = X(t_0, t_0)Z(t_0) = E,$$

$$Y(t_0 + \vartheta) = X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)Z(t_0 + \vartheta) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H,$$

а управление $U(\cdot)$ — оценке

$$\|U\|_C \leqslant \exp(a\vartheta)\|V_1\|_C \leqslant 2\gamma \exp(a\vartheta)\|H - E\|,$$

совпадающей с требуемой при $\alpha = 2\gamma \exp(a\vartheta)$. Теорема доказана.

Определение 8.1 (В. А. Зайцев, Е. Л. Тонков [48, 195]). Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — некоторое множество. Система (8.5) называется
а) **локально достижимой (относительно $\mathbb{U}$) на отрезке** $[t_0, t_0 + \vartheta]$, если существует $\delta > 0$ такое, что для любой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_n$ существует кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0 + \vartheta] \to \mathbb{U}$, гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (8.5) с $U = U(\cdot)$ выполнение равенства (8.6);
б) **ϑ-равномерно локально достижимой (относительно $\mathbb{U}$)**, если (8.5) локально достижима (относительно $\mathbb{U}$) на всяком отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$ длины ϑ, причем δ не зависит от t_0.

Замечание 8.1. Как правило, когда говорят о достижимости системы (8.5) относительно множества $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$, требуют, чтобы $0 \in \mathbb{U}$, или $0 \in \operatorname{conv} \mathbb{U}$, или $0 \in \operatorname{int} \operatorname{conv} \mathbb{U}$ (см. [48, 195]). Покажем на примере, что существуют системы вида (8.5), локально достижимые относительно множества $\mathbb{U}$, не содержащего нуль в своей выпуклой оболочке.

Пример 8.1. Рассмотрим скалярное линейное управляемое уравнение

$$\dot{x} = (\sin t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}, \tag{8.7}$$

в качестве множества $\mathbb{U}$ возьмем любой отрезок $[\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$. Замкнем (8.7) управлением $u = u(t)x$, получим уравнение

$$\dot{x} = (\sin t)u(t)x, \tag{8.8}$$

для которого

$$X_u(t, s) = \exp \int_s^t u(\tau) \sin \tau \, d\tau.$$

Поскольку уравнение (8.7) не содержит однородного слагаемого, имеем равенство $X(t,s)\equiv 1$. В роли матрицы H в данном случае выступает скаляр, близкий к единице, поэтому положим $H=1+h$, где h близко к 0. Таким образом, равенство (8.6) здесь приобретает вид

$$\exp\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} u(\tau)\sin\tau\,d\tau = 1+h.$$

Покажем, что для любого $t_0\in\mathbb{R}$ и любого $h\in\mathbb{R}$, $|h|\leqslant\dfrac{\beta-\alpha}{1+\beta-\alpha}$, найдется управление $u:\,[t_0,t_0+2\pi]\to\mathbb{U}$, гарантирующее выполнение равенства

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+2\pi} u(\tau)\sin\tau\,d\tau = \ln(1+h). \tag{8.9}$$

Этим будет установлена (2π)-равномерная локальная достижимость уравнения (8.8) относительно множества $\mathbb{U}$.

Возьмем произвольное $t_0\in\mathbb{R}$ и рассмотрим множества

$$\mathcal{A}_1 := \{t\in[t_0,t_0+2\pi]:\ \sin t\geqslant 0\},$$

$$\mathcal{A}_2 := \{t\in[t_0,t_0+2\pi]:\ \sin t< 0\}.$$

Каждое из множеств $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ измеримо по Лебегу и

$$\operatorname{mes}\mathcal{A}_1=\operatorname{mes}\mathcal{A}_2=\pi,$$

при этом

$$\int\limits_{\mathcal{A}_1}\sin t\,dt=\int\limits_0^{\pi}\sin t\,dt=2,\qquad \int\limits_{\mathcal{A}_2}\sin t\,dt=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin t\,dt=-2.$$

Возьмем сначала любое $h\in\left[0,\dfrac{\beta-\alpha}{1+\beta-\alpha}\right]$. Выберем в качестве управления $u(\cdot)$ кусочно постоянную функцию

$$u(t)=\begin{cases}\alpha+\ln(1+h) & \text{при } t\in\mathcal{A}_1,\\[2mm] \alpha+\dfrac{1}{2}\ln(1+h) & \text{при } t\in\mathcal{A}_2.\end{cases}$$

Поскольку

$$0\leqslant\ln(1+h)\leqslant h$$

при всех $h \geqslant 0$, имеем оценки

$$\alpha \leqslant u(t) \leqslant \alpha + \ln(1+h) \leqslant \alpha + h \leqslant \alpha + \frac{\beta-\alpha}{1+\beta-\alpha} \leqslant \alpha + \beta - \alpha = \beta,$$

т. е. $u(t) \in \mathbb{U}$ при всех $t \in [t_0, t_0 + 2\pi]$. Далее,

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+2\pi} u(t) \sin t\, dt = \int\limits_{\mathcal{A}_1} u(t) \sin t\, dt + \int\limits_{\mathcal{A}_2} u(t) \sin t\, dt =$$

$$= (\alpha + \ln(1+h)) \int\limits_{\mathcal{A}_1} \sin t\, dt + (\alpha + \frac{1}{2}\ln(1+h)) \int\limits_{\mathcal{A}_2} \sin t\, dt =$$

$$= 2(\alpha + \ln(1+h)) - 2(\alpha + \frac{1}{2}\ln(1+h)) = \ln(1+h),$$

т. е. (8.9) выполнено.

Возьмем теперь любое $h \in \Big[-\dfrac{\beta-\alpha}{1+\beta-\alpha}, 0\Big[$ и положим

$$u(t) = \begin{cases} \alpha - \dfrac{1}{2}\ln(1+h) & \text{при } t \in \mathcal{A}_1, \\ \alpha - \ln(1+h) & \text{при } t \in \mathcal{A}_2. \end{cases}$$

При выбранном h справедливы неравенства

$$0 > \ln(1+h) > \frac{h}{1+h},$$

поэтому

$$\alpha \leqslant u(t) \leqslant \alpha - \ln(1+h) \leqslant \alpha + \frac{-h}{1+h} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha + \frac{(\beta-\alpha)/(1+\beta-\alpha)}{1-(\beta-\alpha)/(1+\beta-\alpha)} = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{1+\beta-\alpha-(\beta-\alpha)} = \alpha + \beta - \alpha = \beta,$$

поэтому $u(t) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$. Кроме того,

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+2\pi} u(t) \sin t\, dt = (\alpha - \frac{1}{2}\ln(1+h)) \int\limits_{\mathcal{A}_1} \sin t\, dt + (\alpha - \ln(1+h)) \int\limits_{\mathcal{A}_2} \sin t\, dt =$$

$$= 2(\alpha - \frac{1}{2}\ln(1+h)) - 2(\alpha - \ln(1+h)) = \ln(1+h),$$

т. е. выбранное $u(\cdot)$ гарантирует выполнение равенства (8.9).

Таким образом, уравнение (8.8) (2π)-равномерно локально достижимо относительно любого отрезка $[\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$. В частности, если

$\alpha > 0$, получаем множество $\mathbb{U}$, не содержащее нуль в своей выпуклой оболочке.

Очевидно, что конструкция этого примера основана на том, что коэффициент $b(\cdot)$ при управлении "хорошо" и "часто" меняет знак. Ниже, в параграфе 10, будет рассмотрен пример 10.1, в котором коэффициенты при управлении неотрицательны, и в то же время построенная в этом примере система является равномерно локально достижимой относительно множества, не содержащего нуль во внутренности выпуклой оболочки.

Определение 8.2 [135]. Система (8.5) называется ϑ-**равномерно локально достижимой**, если эта система ϑ-равномерно локально достижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{B}_\varepsilon(0) \subset \mathrm{M}_{mn}$ при каждом $\varepsilon > 0$.

Из определения сразу следует, что ϑ-равномерная локальная достижимость системы (8.5) эквивалентна следующему свойству:
для каждого $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *позволяющее для всякой матрицы* $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_n$ *и любого* $t_0 \in \mathbb{R}$ *найти управляющую матрицу* $U(\cdot) \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, *которая обеспечивает выполнение равенства* (8.6).

Ниже будет доказана эквивалентность равномерной полной управляемости системы (8.1) и равномерной локальной достижимости соответствующей замкнутой системы (8.5) (теорема 8.2). Для доказательства этого утверждения нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 8.2 [135]. *Система* (8.1) ϑ-*равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существует такое положительное число* β, *что для произвольных* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $\eta \in \mathbb{R}^n$ *найдется управление* $u \in KC_{m,1}([t_0, t_0 + \vartheta])$, $\|u\|_C \leqslant \beta\|\eta\|$, *гарантирующее выполнение равенства*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s) u(s)\, ds = \eta.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием равномерной полной управляемости Е. Л. Тонкова (теорема 1.1). Возьмем любые $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдется управление $u(\cdot) \in KC_{m,1}([t_0, t_0 + \vartheta])$, удовлетворяющее условию $\|u\|_C \leqslant \beta\|x_0\|$ и такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (8.1) с управлением $u = u(\cdot)$ и начальным условием $x(t_0) = x_0$ в момент времени $t_0 + \vartheta$ попадает в начало координат.

Единственным решением этой задачи Коши является функция

$$x(t) = X(t,t_0)\Big(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0,s)u(s)\,ds\Big).$$

Для выполнения условия $x(t_0+\vartheta) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0,s)u(s)\,ds = -x_0.$$

Полагая $\eta = -x_0$, получим утверждение леммы.

Л е м м а 8.3 [135]. *Если система* (8.5) ϑ*-равномерно локально достижима, то для любого* $\alpha > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для всякого вектора* $\xi \in \mathrm{B}_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$ *и каждого* $t_0 \in \mathbb{R}$ *найдется управление* $v(\cdot) \in KC_{m,1}([t_0,t_0+\vartheta])$, $\|v\|_C \leqslant \alpha$, *гарантирующее выполнение равенства*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0,s)v(s)\,ds = \xi. \tag{8.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что система (8.5) ϑ-равномерно локально достижима. Зафиксируем какое-либо $\varepsilon_0 > 0$ и обозначим

$$l = \exp((a+b\varepsilon_0)\vartheta), \quad \alpha_0 = \varepsilon_0 l.$$

Возьмем любое $\alpha \in]0,\alpha_0]$, положим $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{l} \in]0,\varepsilon_0]$ и по величине ε в соответствии со свойством равномерной локальной достижимости найдем $\delta > 0$. Пусть $\xi \in \mathrm{B}_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ — произвольны. Поскольку матрица $H := E + [\xi,0,\ldots,0]$ удовлетворяет соотношению

$$\|H - E\| = \|(H-E)e_1\| = \|\xi\| \leqslant \delta,$$

найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}([t_0,t_0+\vartheta])$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, обеспечивающее выполнение равенства (8.6) с выбранной H. Обозначим

$$Z(t) = X_U(t,t_0), \quad V(t) = U(t)Z(t).$$

Тогда $V(\cdot) \in KC_{mn}([t_0,t_0+\vartheta])$,

$$\|V\|_C \leqslant \|U\|_C\|Z\|_C \leqslant \varepsilon\exp((a+b\varepsilon)\vartheta) \leqslant \varepsilon\exp((a+b\varepsilon_0)\vartheta) = \varepsilon l = \alpha,$$

а матричная функция $Z(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot Z = (A(t) + B(t)U(t))Z = A(t)Z + B(t)V(t)$$

и начальному условию

$$Z(t_0) = X_U(t_0, t_0) = E.$$

Из формулы Коши следует, что имеет место равенство

$$Z(t_0 + \vartheta) = X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)\Big(E + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)V(s)\,ds\Big),$$

которое в совокупности с (8.6) дает соотношение

$$E + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)V(s)\,ds = H,$$

т. е. $\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)V(s)\,ds = H - E$. Возьмем $v(t) = V(t)e_1$. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)v(s)\,ds = \Big(\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)V(s)\,ds\Big)e_1 = (H - E)e_1 = \xi,$$

поэтому равенство (8.10) выполнено. Для $\|v\|_C$ имеем требуемую оценку $\|v\|_C = \|Ve_1\|_C \leqslant \|V\|_C \leqslant \alpha$.

При $\alpha > \alpha_0$ берем $\delta = \delta(\varepsilon_0)$. Лемма доказана.

Теорема 8.2 [135]. *Система* (8.1) *ϑ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда система* (8.5) *ϑ-равномерно локально достижима.*

Доказательство. Достаточность. Пусть система (8.5) ϑ-равномерно локально достижима. Пользуясь леммой 8.2, докажем равномерную полную управляемость системы (8.1). Возьмем величину $\alpha = \alpha_0/2$ (α_0 — из доказательства леммы 8.3) и по ней найдем соответствующее $\delta > 0$. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^n$ — произвольный ненулевой вектор, $\xi \in \mathbb{R}^n$ — сонаправленный ему вектор длины $\delta/2$. Тогда имеем представление $\eta = \gamma\xi$, где $\gamma = 2\|\eta\|/\delta$. Так как $\xi \in \mathrm{B}_{\delta/2}(0) \subset \mathrm{B}_\delta(0)$, то в силу леммы 8.3 найдется управление $v(\cdot) \in KC_{m,1}([t_0, t_0 + \vartheta])$, $\|v\|_C \leqslant \alpha = \alpha_0/2$, обеспечивающее выполнение равенства (8.10) с выбранным вектором ξ. Полагая $u(t) = \gamma v(t)$, будем иметь соотношения

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)u(s)\,ds = \gamma \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)v(s)\,ds = \gamma\xi = \eta,$$

а для $\|u\|_C$ — оценки

$$\|u\|_C = \gamma\|v\|_C = 2\|\eta\|\,\|v\|_C/\delta \leqslant \|\eta\|\alpha_0/\delta =: \beta\|\eta\|.$$

Если $\eta = 0$, то выбираем $u(t) \equiv 0$. Таким образом, для произвольного вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$ существует управление $u(\cdot) \in KC_{m,1}([t_0, t_0+\vartheta])$, удовлетворяющее оценке $\|u\|_C \leqslant \beta\|\eta\|$ с не зависящей от η и от t_0 величиной β и обеспечивающее выполнение равенства

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)u(s)\,ds = \eta.$$

Из леммы 8.2 следует, что (8.1) ϑ-равномерно вполне управляема.

Достаточность следует непосредственно из теоремы 8.1.

Теорема 8.3 [135]. *Для ϑ-равномерной локальной достижимости системы* (8.5) *необходимо и достаточно существование таких $\gamma > 0$ и $\delta_0 > 0$, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_{\delta_0}(E)$ найдется управление $U \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_C \leqslant \gamma\|H - E\|$ и обеспечивающее выполнение равенства* (8.6).

Доказательство. Необходимость. Если система (8.5) является ϑ-равномерно локально достижимой, то в силу теоремы 8.2 соответствующая система (8.1) ϑ-равномерно вполне управляема, а из теоремы 8.1 вытекает требуемое свойство.

Достаточность. Положим $\varepsilon_0 = \gamma\delta_0$. Возьмем любое $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ и поставим ему в соответствие величину $\delta := \varepsilon/\gamma$. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_\delta(E)$ произвольны. Так как $\mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{B}_{\delta_0}(E)$, то для выбранной H найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, гарантирующее выполнение равенства (8.6), причем

$$\|U\|_C \leqslant \gamma\|H - E\| \leqslant \gamma\delta = \varepsilon.$$

Из определения 8.1 вытекает, что система (8.5) ϑ-равномерно локально достижима. Теорема доказана.

Итак, *равномерная локальная достижимость системы* (8.5) (*и равномерная полная управляемость системы* (8.1)) *эквивалентна существованию управления $U(\cdot)$, обеспечивающего равенство* (8.6) *и имеющего липшицеву оценку $\|U\|_C$ в зависимости от $\|H - E\|$.*

Пример 8.1 (продолжение). Вновь рассмотрим уравнение (8.7). Покажем, что для любого $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leqslant 1/2$, и любого $t_0 \in \mathbb{R}$ существует управление $u : [t_0, t_0 + 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\|u\|_C \leqslant |h|$, для которого

$$X_u(t_0 + 2\pi, t_0) = 1 + h,$$

т. е. в обозначениях формулировки теоремы 8.3 здесь $\gamma = 1$, $\delta_0 = 1/2$.

Действительно, при произвольных $t_0 \in \mathbb{R}$ и $|h| \leqslant 1/2$ выберем в качестве управления функцию

$$u(t) = \begin{cases} \ln(1+h)/2 & \text{при } t \in \mathcal{A}_1, \\ 0 & \text{при } t \in \mathcal{A}_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+2\pi} u(t) \sin t \, dt = \frac{1}{2} \ln(1+h) \int\limits_{\mathcal{A}_1} \sin t \, dt = \ln(1+h),$$

т. е. (8.9) выполнено, и

$$\|u(\cdot)\|_C \leqslant \frac{1}{2} \cdot |\ln(1+h)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{|h|}{1-|h|} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{|h|}{1-1/2} = |h|.$$

§ 9. Локальная достижимость относительно множества

Здесь получены необходимые условия локальной и равномерной локальной достижимости замкнутой системы (8.5) относительно ограниченного множества $\mathbb{U}$.

Зафиксируем на числовой прямой отрезок $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Пусть задана матричная функция $U(\cdot) \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$. Рассмотрим систему (8.5) при $U = U(\cdot)$ и применим к ней преобразование $x = X(t, t_0)z$ при $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$. Обозначим

$$V(t) = U(t)X(t, t_0),$$

тогда

$$\dot{z} = (X(t_0, t)x)^{\cdot} = -X(t_0, t)\dot{X}(t, t_0)X(t_0, t)x + X(t_0, t)\dot{x} =$$

$$= -X(t_0, t)A(t)x + X(t_0, t)A(t)x + X(t_0, t)B(t)U(t)x =$$

$$= Q(t_0, t)U(t)x = Q(t_0, t)V(t)z,$$

т. е. z удовлетворяет линейной однородной системе

$$\dot{z} = Q(t_0, t)V(t)z, \quad t \in [t_0, t_0 + \vartheta]. \tag{9.1}$$

Пусть $Z_V(t, t_0)$ — матрица Коши системы (9.1), $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$. Тогда

$$X_U(t, t_0) = X(t, t_0)Z_V(t, t_0). \tag{9.2}$$

Лемма 9.1 [136]. *Пусть* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ *— ограниченное множество. Если система* (8.5) *локально достижима относительно* $\mathbb{U}$ *на отрезке* $[t_0, t_0 + \vartheta]$, *то существуют такие величины* $\delta_1 > 0$ *и* $l > 0$, *что для любой матрицы* $H \in \mathrm{B}_{\delta_1}(E) \subset \mathrm{M}_n$ *найдется управление* $U \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, *удовлетворяющее оценке* $\|U\|_C \leqslant l\|H - E\|$ *и обеспечивающее равенство* (8.6).

Доказательство. Так как множество $\mathbb{U}$ ограничено, то существует $\nu > 0$ такое, что $\|P\| \leqslant \nu$ для всякой $P \in \mathbb{U}$. Пусть

$$\delta_1 := \frac{\delta}{2(1 + \exp(b\nu\vartheta e^{2a\vartheta}))},$$

где δ — величина из определения локальной достижимости. Возьмем произвольную матрицу $H \in \mathrm{B}_{\delta_1}(E)$ и обозначим $\varepsilon = \|H - E\|/\delta$, тогда

$$\varepsilon \leqslant \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{2(1 + \exp(b\nu\vartheta e^{2a\vartheta}))}.$$

По выбранной H построим матрицу

$$G = E + \frac{1}{\varepsilon}(H - E),$$

(если $H = E$, то получаем $\varepsilon = 0$, и в этом случае берем $G = E$). Тогда $H = E + \varepsilon(G - E)$. При $H \neq E$ имеем равенство

$$\|G - E\| = \frac{1}{\varepsilon}\|H - E\| = \delta,$$

а при $H = E$ — равенство $\|G - E\| = 0$, т. е. в любом случае $G \in \mathrm{B}_\delta(E)$. Из локальной достижимости системы (8.5) вытекает существование управления $U_1 : [t_0, t_0 + \vartheta] \to \mathbb{U}$ такого, что

$$X_{U_1}(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)G.$$

Положим

$$V_1(t) = U_1(t)X(t, t_0).$$

Из (9.2) следует, что матрица Коши $Z_{V_1}(t,t_0)$ системы

$$\dot z = Q(t_0,t)V_1(t)z$$

удовлетворяет равенству

$$Z_{V_1}(t,t_0) = X(t_0,t)X_{U_1}(t,t_0),$$

поэтому

$$Z_{V_1}(t_0+\vartheta,t_0) = X(t_0,t_0+\vartheta)X_{U_1}(t_0+\vartheta,t_0) = X(t_0,t_0+\vartheta)X(t_0+\vartheta,t_0)G = G.$$

Обозначим

$$W_1(t) = V_1(t)Z_{V_1}(t,t_0).$$

Отметим, что

$$\dot Z_{V_1}(t,t_0) = Q(t_0,t)V_1(t)Z_{V_1}(t,t_0) = Q(t_0,t)W_1(t),$$

следовательно,

$$Z_{V_1}(t,t_0) = E + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0,s)W_1(s)\,ds.$$

Пусть $W(t) := \varepsilon W_1(t)$, $Z(\cdot)$ — решение матричной задачи Коши

$$\dot Z = Q(t_0,t)W(t), \quad Z(t_0) = E,$$

т. е.

$$Z(t) = E + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0,s)W(s)\,ds.$$

Тогда

$$\begin{gathered} Z(t) - E = \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0,s)W(s)\,ds = \\ = \varepsilon\int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0,s)W_1(s)\,ds = \varepsilon(Z_{V_1}(t,t_0) - E). \end{gathered} \tag{9.3}$$

Из оценки сверху на ε, неравенств

$$\begin{gathered} \|Z_{V_1}(t,t_0) - E\| \leqslant 1 + \|Z_{V_1}(t,t_0)\| \leqslant 1 + \exp(\vartheta\|Q(\cdot,t_0)\|_C\,\|V_1\|_C) \leqslant \\ \leqslant 1 + \exp(\vartheta b\, e^{a\vartheta}\,\|U_1\|_C\, e^{a\vartheta}) \leqslant 1 + \exp(b\nu\vartheta e^{2a\vartheta}) \end{gathered}$$

и соотношения (9.3) получим $\|Z(t) - E\| \leqslant 1/2$, откуда следует обратимость матрицы $Z(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$ и оценка $\|Z^{-1}(t)\| \leqslant 2$.

Возьмем $V(t) = W(t)Z^{-1}(t)$. Тогда $W(t) = V(t)Z(t)$, поэтому $Z(\cdot)$ удовлетворяет однородному матричному уравнению

$$\dot{Z} = Q(t_0, t)V(t)Z$$

и начальному условию $Z(t_0) = E$. Следовательно, $Z(t) = Z_V(t, t_0)$ — матрица Коши системы (9.1) с выбранным $V(\cdot)$. Из (9.3) получаем

$$Z_V(t_0 + \vartheta, t_0) = E + \varepsilon(Z_{V_1}(t_0 + \vartheta, t_0) - E) = E + \varepsilon(G - E) = H.$$

Пусть $U(t) = V(t)X(t_0, t)$. Тогда

$$\begin{gathered}\|U\|_C \leqslant \|X(t_0, \cdot)\|_C \, \|V\|_C \leqslant e^{a\vartheta} \|W\|_C \, \|Z^{-1}\|_C \leqslant 2e^{a\vartheta} \|W\|_C = \\ = 2e^{a\vartheta} \|W_1\|_C \, \varepsilon \leqslant 2e^{a\vartheta} \|V_1\|_C \, \|Z_{V_1}(\cdot, t_0)\| \, \varepsilon \leqslant \\ \leqslant 2e^{a\vartheta} \|U_1\|_C \, \|X(\cdot, t_0)\|_C \exp(b\nu\vartheta e^{2a\vartheta}) \, \varepsilon \leqslant 2\nu \exp(2a\vartheta + b\nu\vartheta e^{2a\vartheta}) \, \varepsilon = \\ = 2\nu \exp(2a\vartheta + b\nu\vartheta e^{2a\vartheta})\delta^{-1} \, \|H - E\| =: l\|H - E\|.\end{gathered}$$

Наконец, из (9.2) вытекает, что для матрицы Коши $X_U(t, t_0)$ системы (8.5) с выбранным управлением $U(\cdot)$ справедливо равенство

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)Z_V(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H.$$

Лемма доказана.

Поскольку найденные при доказательстве леммы величины l и δ_1 не зависят от выбора $t_0 \in \mathbb{R}$, то имеет место

Теорема 9.1 [136]. *Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — ограниченное множество. Если система* (8.5) *ϑ-равномерно локально достижима относительно $\mathbb{U}$, то существуют такие $\delta_1 > 0$ и $l > 0$, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_{\delta_1}(E)$ найдется управление $U \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, $\|U\|_C \leqslant l\|H - E\|$, обеспечивающее равенство* (8.6).

Таким образом, из ϑ-равномерной локальной достижимости системы (8.5) относительно ограниченного множества $\mathbb{U}$ следует существование управляющей матрицы $U(\cdot)$ с липшицевой оценкой $\|U\|_C$ в зависимости от $\|H - E\|$, обеспечивающей выполнение равенства (8.6).

Теорема 9.2 [136]. *Для ϑ-равномерной локальной достижимости системы* (8.5) *относительно ограниченного множества $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ необходимо, чтобы соответствующая система* (8.1) *была ϑ-равномерно вполне управляема.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — ограниченное множество, и система (8.5) ϑ-равномерно локально достижима относительно $\mathbb{U}$. Из теоремы 9.1 вытекает существование таких $\delta_1 > 0$ и $l > 0$, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_{\delta_1}(E)$ найдется управление $U \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, $\|U\|_C \leqslant l\|H - E\|$, обеспечивающее равенство (8.6). В силу теоремы 8.3 из этого свойства следует ϑ-равномерная локальная достижимость системы (8.5), которая по теореме 8.2 эквивалентна ϑ-равномерной полной управляемости системы (8.1). Теорема доказана.

Отметим, что условие ограниченности множества $\mathbb{U}$ в теоремах 9.1 и 9.2 существенно.

П р и м е р 9.1. Рассмотрим систему (8.1) при $n = m = 1$, $A(t) \equiv 0$,

$$B(t) =: b(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leqslant 1, \\ 1/t & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

Тогда $X(t, s) \equiv 1$, а система (8.1) принимает вид

$$\dot{x} = b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}, \ u \in \mathbb{R}. \tag{9.4}$$

Пусть $\vartheta = 1$. Условие ϑ-равномерной полной управляемости системы (9.4) имеет вид

$$W(t_0, t_0 + 1) = \int\limits_{t_0}^{t_0+1} b^2(t)\, dt \geqslant \alpha,$$

где $\alpha > 0$ не зависит от t_0. Но при $t_0 > 1$ имеет место равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+1} b^2(t)\, dt = \frac{1}{t_0(t_0 + 1)},$$

т. е. $W(t_0, t_0 + 1) \to 0$ при $t_0 \to +\infty$, поэтому система (9.4) не является ϑ-равномерно вполне управляемой.

Пусть $\mathbb{U} = \mathbb{R}$. Система (8.5) для рассматриваемого случая имеет вид

$$\dot{x} = b(t)u(t)x, \tag{9.5}$$

ее матрица Коши

$$X_u(t, s) = \exp \int\limits_s^t b(\tau)u(\tau)\, d\tau.$$

Возьмем $\delta = 1/2$ и любую $H \in \mathrm{B}_\delta(1) \subset \mathbb{R}$, т. е. $H = 1 + h$, где $|h| \leqslant 1/2$. Выберем на произвольном отрезке $[t_0, t_0 + 1]$ в качестве управления функцию

$$u(t) = \frac{\ln(1 + h)}{b(t)},$$

тогда

$$\exp \int\limits_{t_0}^{t_0+1} b(\tau)u(\tau)\,d\tau = 1 + h, \tag{9.6}$$

т. е. (8.6) выполнено.

Итак, система (9.5) является ϑ-равномерно локально достижимой (относительно множества $\mathbb{U} = \mathbb{R}$). Следовательно, условие ограниченности $\mathbb{U}$ в теореме 9.2 существенно.

Этот же пример доказывает существенность ограниченности $\mathbb{U}$ и в теореме 9.1, так как если бы существовало управление $u(\cdot)$, гарантирующее выполнение (9.6) и удовлетворяющее оценке $\|u\|_C \leqslant l\,|h|$ с не зависящей от t_0 и от h величиной l, то из (9.6) при произвольном $t_0 \geqslant 1$ вытекало бы неравенство

$$|\ln(1+h)| = \Bigl|\int\limits_{t_0}^{t_0+1} b(\tau)u(\tau)\,d\tau\Bigr| \leqslant \|u\|_C \max_{t\in[t_0,t_0+1]} b(t) = \frac{\|u\|_C}{t_0} \leqslant \frac{l\,|h|}{t_0},$$

т. е.

$$l \geqslant \frac{t_0|\ln(1+h)|}{|h|},$$

что невозможно.

§ 10. Согласованность и достижимость

В этом параграфе введено понятие равномерной локальной достижимости для линейной управляемой системы с наблюдателем (определение 10.2) и установлено, что из равномерной согласованности вытекает равномерная локальная достижимость (теорема 10.1), но условие равномерной согласованности не является необходимым для равномерной локальной достижимости соответствующей замкнутой системы (теорема 10.2).

Здесь мы будем рассматривать линейную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C^*(t)x, \tag{10.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^r$, $t \in \mathbb{R}$. Замкнем систему (10.1) управлением $u = Uy$, линейным по наблюдаемой переменной y, получим систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x. \tag{10.2}$$

Определение 10.1 (В. А. Зайцев, Е. Л. Тонков [48, 195]). Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mr}$ — некоторое множество. Система (10.2) называется
а) **локально достижимой (относительно $\mathbb{U}$) на отрезке** $[t_0, t_0+\vartheta]$, если существует $\delta > 0$ такое, что для любой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_n$ найдется кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0+\vartheta] \to \mathbb{U}$, гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (10.2) с $U = U(\cdot)$ выполнение равенства (8.6);
б) **ϑ-равномерно локально достижимой (относительно $\mathbb{U}$)**, если (10.2) локально достижима (относительно $\mathbb{U}$) на всяком отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$ длины ϑ, причем δ не зависит от t_0.

Определение 10.2 [136]. Система (10.2) называется **ϑ-равномерно локально достижимой**, если эта система ϑ-равномерно локально достижима (относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{B}_\varepsilon(0) \subset \mathrm{M}_{mr}$) при каждом $\varepsilon > 0$.

Из следствия 6.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 10.1 [127]. *Если система* (10.1) *ϑ-равномерно согласованна, то соответствующая система* (10.2) *ϑ-равномерно локально достижима.*

Покажем, что в отличие от управляемых систем без наблюдателя в рассматриваемом случае свойство равномерной согласованности не является необходимым для свойства равномерной локальной достижимости.

Введем обозначения

$$Q(t,s) := X(t,s)B(s), \;\; R(t,s) := X^*(s,t)C(s), \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Для системы (10.1) на $[t_0, t_0+\vartheta]$ построим совокупность n^2 функций

$$U_{ij}(t) = Q^*(t_0,t)e_ie_j^*R(t_0,t), \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

В силу теоремы 2.1 система (10.1) согласованна на $[t_0, t_0+\vartheta]$ в том и только том случае, когда функции $\{U_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n$ линейно независимы на $[t_0, t_0+\vartheta]$.

Рассмотрим систему (10.1) при $n = 2$, $m = r = 1$, $A(t) \equiv 0$. Тогда

$$X(t,s) \equiv E;$$

$$B(t) =: b(t) = (b_1(t), b_2(t))^*, \quad C(t) =: c(t) = (c_1(t), c_2(t))^*$$

— вектор-столбцы; $Q(t_0,t) = b(t)$, $R(t_0,t) = c(t)$ и

$$U_{ij}(t) = b^*(t)e_ie_j^*c(t) = b_i(t)c_j(t), \quad i,j = 1,2.$$

Система (10.1) в данном случае приобретает вид

$$\dot{x} = b(t)u,\ y = c^*(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, \tag{10.3}$$

а ее согласованность на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ эквивалентна линейной независимости на этом отрезке совокупности функций $\{b_i(\cdot)c_j(\cdot)\}_{i,j=1}^2$.

Всюду далее будем предполагать, что $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ — периодические с периодом 3 вектор-функции, определенные на $[0, 3[$ равенствами

$$\begin{cases} b_1(t) = c_2(t) = 1,\ b_2(t) = c_1(t) = 0, & \text{при } t \in [0,1[, \\ b_1(t) = c_2(t) = b_2(t) = 1,\ c_1(t) = 0, & \text{при } t \in [1,2[, \\ b_1(t) = c_2(t) = 0,\ b_2(t) = c_1(t) = 1, & \text{при } t \in [2,3[. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} b_1(t)c_2(t) = 1,\ b_2(t)c_1(t) = 0,\ b_2(t)c_2(t) = 0, & \text{при } t \in [0,1[, \\ b_1(t)c_2(t) = 1,\ b_2(t)c_1(t) = 0,\ b_2(t)c_2(t) = 1, & \text{при } t \in [1,2[, \\ b_1(t)c_2(t) = 0,\ b_2(t)c_1(t) = 1,\ b_2(t)c_2(t) = 0, & \text{при } t \in [2,3[, \end{cases}$$

в то время как

$$b_1(t)c_1(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

поэтому совокупность функций $\{b_i(\cdot)c_j(\cdot)\}_{i,j=1}^2$ линейно зависима на всяком отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$, следовательно, система (10.3) не является согласованной ни на каком отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Ниже мы покажем, что (10.3) является равномерно локально достижимой относительно множества $\mathbb{U} = [-\varepsilon, \varepsilon]$ на отрезках длины 12, где $\varepsilon > 0$ — любое.

Построим для рассматриваемого случая систему (10.2). Поскольку $m = r = 1$, управляющая матрица $U(t) \in \mathrm{M}_{mr}$ здесь превращается в скаляр $u(t)$, поэтому (10.2) принимает вид

$$\dot{x} = b(t)c^*(t)u(t)x = \begin{pmatrix} b_1(t)c_1(t) & b_1(t)c_2(t) \\ b_2(t)c_1(t) & b_2(t)c_2(t) \end{pmatrix} u(t)x =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & b_1(t)c_2(t) \\ b_2(t)c_1(t) & b_2(t)c_2(t) \end{pmatrix} u(t)x. \tag{10.4}$$

Обозначим через $X_u(t,s)$ матрицу Коши этой системы.

Лемма 10.1 [136]. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_1 > 0$ такое, что для всяких α, β, $\gamma \in \mathrm{B}_{m_1}(0) \subset \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$ найдется управление $u : [3k, 3k+3[\to \mathbb{R}$, $\|u\|_C \leqslant \varepsilon$, для которого*

$$X_u(3k+3, 3k) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1+\gamma \end{pmatrix}. \tag{10.5}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in]0,1]$ — любое. Положим $m_1(\varepsilon) = \varepsilon/3$, выберем произвольные $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathrm{B}_{m_1}(0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Возьмем $u(t) \equiv u_j$ при $t \in [3k+j-1, 3k+j[$, $j = 1,2,3$ (выбор u_j уточним ниже) и обозначим $v_2 = \exp(u_2) - 1$. Тогда матрица коэффициентов системы (10.4) имеет вид

$$b(t)c^*(t)u(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k, 3k+1[, \\ \begin{pmatrix} 0 & u_2 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k+1, 3k+2[, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_3 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k+2, 3k+3[, \end{cases}$$

поэтому для ее матрицы Коши справедливы равенства

$$X_u(3k+3,3k) = X_{u_3}(3k+3,3k+2)X_{u_2}(3k+2,3k+1)X_{u_1}(3k+1,3k) =$$
$$= \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & u_2 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_2 \\ 0 & 1+v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 + v_2 \\ u_3 & 1 + v_2 + u_1u_3 + v_2u_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для нахождения величин u_j по заданным α, β, γ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha = u_1 + v_2, \\ \beta = u_3, \\ \gamma = v_2 + u_1u_3 + v_2u_3. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} u_1 = \alpha - \gamma + \alpha\beta, \\ u_3 = \beta, \\ v_2 = \gamma - \alpha\beta. \end{cases}$$

т. е.

$$u_2 = \ln(1 + \gamma - \alpha\beta).$$

Оценим $|u_j|$. Имеем

$$|u_1| \leqslant |\alpha| + |\gamma| + |\alpha|\,|\beta| \leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \cdot 1/3 < \varepsilon,$$
$$|u_3| = |\beta| \leqslant \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

Для оценки $|u_2|$ воспользуемся неравенствами $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ при $x \geqslant 0$ и $0 > \ln(1+x) > x/(1+x)$ при $x \in]-1,0[$. Следовательно,

$$|\ln(1+x)| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|} \text{ при } x \in]-1,1[,$$

поэтому

$$|u_2| \leqslant \frac{|\gamma - \alpha\beta|}{1 - |\gamma - \alpha\beta|} \leqslant \frac{|\gamma| + |\alpha|\,|\beta|}{1 - |\gamma| - |\alpha|\,|\beta|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon/3 + \varepsilon/3 \cdot 1/3}{1 - 1/3 - 1/9} < 2(\varepsilon/3 + \varepsilon/3 \cdot 1/3) = 8\varepsilon/9 < \varepsilon.$$

Итак, норма построенного управления $u(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $\|u\|_C < \varepsilon$.

При $\varepsilon > 1$ берем $m_1(\varepsilon) = 1/3$. Лемма доказана.

Лемма 10.2 [136]. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_2 > 0$ такое, что для всяких $\lambda \in \mathrm{B}_{m_2}(1) \subset \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$ найдется управление $u : [3k, 3k+6[\to \mathbb{R}$, $\|u\|_C \leqslant \varepsilon$, для которого $X_u(3k+6, 3k) = \lambda E$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in]0,1]$ — любое. Положим $m_2(\varepsilon) = \varepsilon^2/36$, выберем произвольные $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathrm{B}_{m_2}(1)$. Тогда имеет место включение $\lambda \in [1 - 1/36, 1 + 1/36]$, из которого $1/2 < \lambda < 2$. В соответствии с леммой 10.1 построим на $[3k, 3k+6[$ управление $u(\cdot)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$X_u(3k+3j, 3k+3(j-1)) = H_j, \tag{10.6}$$

где

$$H_j = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_j \\ \beta_j & 1+\gamma_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

выбор α_j, β_j, γ_j уточним ниже. Тогда

$$X_u(3k+6, 3k) = X_u(3k+6, 3k+3)X_u(3k+3, 3k) =$$
$$= H_2 H_1 = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2\beta_1 & \alpha_1 + \alpha_2(1+\gamma_1) \\ \beta_2 + \beta_1(1+\gamma_2) & 1 + \alpha_1\beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для нахождения величин α_j, β_j, γ_j по заданному λ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_2\beta_1 = \lambda - 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2(1+\gamma_1) = 0, \\ \beta_2 + \beta_1(1+\gamma_2) = 0, \\ \alpha_1\beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 = \lambda - 1. \end{cases}$$

Возьмем

$$\alpha_2 = \sqrt{|\lambda - 1|}, \quad \beta_1 = \sqrt{|\lambda - 1|}\,\operatorname{sign}(\lambda - 1),$$

тогда первое уравнение этой системы выполнено, а из второго и третьего уравнений получаем

$$\alpha_1 = -\alpha_2(1+\gamma_1) = -\sqrt{|\lambda-1|}(1+\gamma_1),$$
$$\beta_2 = -\beta_1(1+\gamma_2) = -\sqrt{|\lambda-1|}(1+\gamma_2)\ \mathrm{sign}(\lambda-1),$$

поэтому

$$\alpha_1\beta_2 = (\lambda-1)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2) = \lambda-1+(\lambda-1)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2).$$

Из последнего уравнения выписанной системы имеем

$$\lambda-1+(\lambda-1)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2)+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2) = \lambda-1,$$

т. е. $\lambda(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2)=0$. Так как $\lambda\neq 0$, то

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2=0.$$

Выберем

$$\gamma_1 = \lambda-1,$$

тогда

$$\gamma_2 = -\gamma_1/(1+\gamma_1) = (1-\lambda)/\lambda,$$
$$\alpha_1 = -\lambda\sqrt{|\lambda-1|},\quad \beta_2 = -\sqrt{|\lambda-1|}\,\mathrm{sign}(\lambda-1)/\lambda.$$

Оценим величины $|\alpha_j|$, $|\beta_j|$, $|\gamma_j|$. Поскольку $\sqrt{|\lambda-1|}\leqslant\varepsilon/6$, то

$$|\alpha_1| = \lambda\sqrt{|\lambda-1|} < 2\varepsilon/6 = \varepsilon/3,\quad |\alpha_2| = \sqrt{|\lambda-1|}\leqslant\varepsilon/6,$$
$$|\beta_1| = \sqrt{|\lambda-1|}\leqslant\varepsilon/6,\quad |\beta_2| = \sqrt{|\lambda-1|}/\lambda < 2\varepsilon/6 = \varepsilon/3,$$
$$|\gamma_1| = |\lambda-1|\leqslant\varepsilon^2/36\leqslant\varepsilon/36,\quad |\gamma_2| = |\lambda-1|/\lambda\leqslant 2\varepsilon^2/36 = \varepsilon^2/18\leqslant\varepsilon/18.$$

Из доказательства леммы 10.1 следует, что норма управления $u(\cdot)$, обеспечивающего равенства (10.6) с найденными α_j, β_j, γ_j, удовлетворяет неравенству $\|u\|_C < 3\max\{|\alpha_j|, |\beta_j|, |\gamma_j| \ :\ j=1,2\}$, поэтому $\|u\|_C < 3\varepsilon/3 = \varepsilon$.

При $\varepsilon>1$ берем $m_2(\varepsilon)=1/36$. Лемма доказана.

Теорема 10.2 [136]. *Свойство ϑ-равномерной согласованности системы* (10.1) *не является необходимым для ϑ-равномерной локальной достижимости системы* (10.2).

Доказательство. Выше было отмечено, что 3-периодическая система (10.3) не является ϑ-равномерно согласованной ни при каком

$\vartheta > 0$. Покажем, что (10.3) равномерно локально достижима относительно множества $\mathbb{U} = [-\varepsilon, \varepsilon]$ на отрезках длины 12 при любом $\varepsilon > 0$.

Надо доказать следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_2$ и всякого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется управление $u : [t_0, t_0 + 12] \to \mathbb{R}$, $\|u\|_C \leqslant \varepsilon$, гарантирующее выполнение равенства $X_u(t_0 + 12, t_0) = H$.

Пусть $\varepsilon \in]0, 1]$ — любое. Обозначим $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/(36\sqrt{2})$, возьмем произвольные $t_0 \in \mathbb{R}$ и

$$H = \begin{pmatrix} 1 + h_1 & h_2 \\ h_3 & 1 + h_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{B}_\delta(E).$$

Оценим величины $|h_j|$. Пусть

$$\|P\|_1 = \max\{|p_{11}| + |p_{21}|, |p_{12}| + |p_{22}|\}$$

— максимальная столбцовая норма [176, с. 356] матрицы $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^2$. Тогда [176, с. 366]

$$\max_{P \neq 0} \frac{\|P\|_1}{\|P\|} = \sqrt{2},$$

поэтому $\|P\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|P\|$ для любой $P \in \mathrm{M}_2$. Следовательно, для каждого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ выполнено неравенство

$$|h_j| \leqslant \max\{|h_1| + |h_3|, |h_2| + |h_4|\} = \|H - E\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|H - E\| \leqslant \sqrt{2}\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/36.$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}$ таково, что $3k \in [t_0, t_0 + 3[$. Тогда справедливы включения

$$[3k, 3k + 9[\subset [t_0, t_0 + 3 + 9[\subset [t_0, t_0 + 12].$$

Положим

$$u(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_0 + 12] \setminus [3k, 3k + 9[.$$

В соответствии с леммой 10.1 на $[3k, 3k + 3[$ построим управление $u(\cdot)$ так, чтобы было выполнено (10.5) с

$$\alpha = \frac{h_2}{1 + h_1}, \quad \beta = \frac{h_3}{1 + h_1}, \quad \gamma = \frac{h_4 - h_1}{1 + h_1}.$$

Отметим, что

$$|\alpha| \leqslant \frac{|h_2|}{1 - |h_1|} \leqslant \frac{2\varepsilon^2}{36} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|\beta| \leqslant \frac{|h_3|}{1 - |h_1|} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|\gamma| \leqslant \frac{|h_1| + |h_4|}{1 - |h_1|} \leqslant \frac{4\varepsilon^2}{36} < \frac{\varepsilon}{3},$$

поэтому на $[3k, 3k+3[$ имеет место неравенство

$$\|u\|_C < 3\max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\} < \varepsilon.$$

Пользуясь леммой 10.2, на $[3k+3, 3k+9[$ строим $u(\cdot)$ так, чтобы

$$X_u(3k+9, 3k+3) = (1+h_1)E.$$

Из доказательства этой леммы следует, что

$$\|u\|_C < 3 \cdot 2\sqrt{|h_1|} = 6\varepsilon/6 = \varepsilon.$$

Итак, построенное на $[t_0, t_0+12]$ управление $u(\cdot)$ удовлетворяет оценке $\|u\|_C < \varepsilon$ и гарантирует выполнение равенства

$$X_u(t_0+12, t_0) = X_u(3k+9, 3k) = X_u(3k+9, 3k+3)X_u(3k+3, 3k) =$$
$$= (1+h_1)\begin{pmatrix} 1 & h_2/(1+h_1) \\ h_3/(1+h_1) & 1 + (h_4 - h_1)/(1+h_1) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+h_1 & h_2 \\ h_3 & 1 + h_1 + h_4 - h_1 \end{pmatrix} = H.$$

Для $\varepsilon > 1$ полагаем $\delta(\varepsilon) = 1/(36\sqrt{2})$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 10.1. Таким образом, свойство равномерной согласованности системы (10.1) “с запасом” обеспечивает равномерную локальную достижимость замкнутой системы (10.2). Кажется довольно очевидным, что какие-либо достаточные легко проверяемые условия само́й достижимости получить весьма непросто. С другой стороны, с достаточными условиями согласованности таких проблем не возникает (можно, например, воспользоваться результатами параграфов 4, 5). Отсюда следует практическая ценность полученных в главе I результатов о равномерной согласованности линейных управляемых систем с наблюдателем.

Вернемся к рассмотрению линейных управляемых систем без наблюдателя. Приведем пример системы вида (8.5), ϑ-равномерно локально достижимой относительно множества $\mathbb{U}$, не содержащего нуль во внутренности выпуклой оболочки (см. замечание 8.1).

П р и м е р 10.1. Пусть $m = n = 2$, $A(t) \equiv 0$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = B(t)u \tag{10.7}$$

с 3-периодической матрицей $B(\cdot)$, определенной на $[0,3[$ равенствами

$$B(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \text{при } t\in[0,1[,\\ \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \text{при } t\in[1,2[,\\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \text{при } t\in[2,3[.\end{cases}$$

Здесь $X(t,s)\equiv E$, поэтому матрица Калмана для (10.7) имеет вид

$$W(t_0+3,t_0)=W(3,0)=\int\limits_0^3 B(t)B^*(t)\,dt=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},$$

поэтому для любого вектора $\xi=\operatorname{col}(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$ имеем соотношения

$$\xi^*W(t_0+3,t_0)\xi=2(\xi_1^2+\xi_1\xi_2+\xi_2^2)=(\xi_1+\xi_2)^2+\xi_1^2+\xi_2^2\geqslant\xi_1^2+\xi_2^2=\|\xi\|^2,$$

т. е. (10.7) ϑ-равномерно вполне управляема при $\vartheta=3$. Таким образом, выполнено необходимое условие ϑ-равномерной локальной достижимости замкнутой системы

$$\dot x=B(t)Ux \tag{10.8}$$

относительно произвольного ограниченного множества $\mathbb{U}\subset\mathrm{M}_2$.

Возьмем любое $\varepsilon>0$ и в качестве $\mathbb{U}=\mathbb{U}_\varepsilon$ рассмотрим множество 2×2 матриц вида

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&\beta\end{pmatrix},$$

где $|\alpha|\leqslant\varepsilon$, $|\beta|\leqslant\varepsilon$. Множество $\mathbb{U}_\varepsilon$ выпукло, так как для всяких

$$P_i=\begin{pmatrix}\alpha_i&\beta_i\\\alpha_i&\beta_i\end{pmatrix}\in\mathbb{U}_\varepsilon,\quad i=1,2,$$

и для любого $\gamma\in[0,1]$ имеет место включение

$$\gamma P_1+(1-\gamma)P_2=\begin{pmatrix}\gamma\alpha_1+(1-\gamma)\alpha_2&\gamma\beta_1+(1-\gamma)\beta_2\\\gamma\alpha_1+(1-\gamma)\alpha_2&\gamma\beta_1+(1-\gamma)\beta_2\end{pmatrix}\in\mathbb{U}_\varepsilon.$$

Нулевая матрица принадлежит множеству $\mathbb{U}_\varepsilon$, но $0\notin\operatorname{int}\mathbb{U}_\varepsilon$, так как $\operatorname{rank}P\leqslant1$ для каждой $P\in\mathbb{U}_\varepsilon$.

Покажем, что система (10.8) ϑ-равномерно локально достижима относительно множества $\mathbb{U}_\varepsilon$ при $\vartheta=12$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$ — произвольно. Выберем в качестве управления $U(\cdot)$ кусочно постоянную матричную функцию

$$U(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k, 3k+1[, \\ \begin{pmatrix} 0 & u_2 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k+1, 3k+2[, \\ \begin{pmatrix} u_3 & 0 \\ u_3 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k+2, 3k+3[, \end{cases}$$

где $|u_j| \leqslant \varepsilon$, $j = 1, 2, 3$. Тогда $U(t) \in \mathbb{U}_\varepsilon$ и

$$B(t)U(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k, 3k+1[, \\ \begin{pmatrix} 0 & u_2 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k+1, 3k+2[, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_3 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } t \in [3k+2, 3k+3[, \end{cases}$$

т. е. матрица коэффициентов системы (10.8) с выбранным управлением $U(\cdot)$ совпадает с матрицей коэффициентов системы (10.4) с управлением, построенным в лемме 10.1, поэтому матрица Коши $X_U(3k{+}3, 3k)$ системы (10.8) совпадает с матрицей Коши $X_u(3k+3, 3k)$ системы (10.4). Из леммы 10.1 следует, что для выбранного $\varepsilon > 0$ существует $m_1 > 0$ такое, что для всяких $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{B}_{m_1}(0) \subset \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$ найдется управление $U : [3k, 3k+3] \to \mathbb{U}_\varepsilon$, для которого

$$X_U(3k+3, 3k) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1+\gamma \end{pmatrix}.$$

Далее, из леммы 10.2 вытекает существование такого $m_2 > 0$, что для всяких $\lambda \in \mathrm{B}_{m_2}(1) \subset \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$ найдется $U : [3k, 3k+6] \to \mathbb{U}_\varepsilon$, при котором

$$X_U(3k+6, 3k) = \lambda E.$$

Наконец, из доказательства теоремы 10.2 вытекает следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для произвольной матрицы $H \in \mathrm{M}_2$, $\|H - E\| \leqslant \delta$, и любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется управление $U : [t_0, t_0+12] \to \mathbb{U}_\varepsilon$, гарантирующее выполнение равенства

$$X_U(t_0+12, t_0) = H.$$

Таким образом, система (10.8) ϑ-равномерно локально достижима относительно множества $\mathbb{U}_\varepsilon$ при $\vartheta = 12$.

§ 11. Некоторые следствия из свойства достижимости

В этом параграфе показано, что если система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

равномерно локально достижима, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что множество $\mathfrak{N}_\varepsilon(A)$ замкнутых систем вида (10.2), где $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, и множество $\mathfrak{M}_\delta(A)$ возмущенных систем

$$\dot{x} = (A(t) + P(t))\, x,$$

где $\|P\|_C \leqslant \delta$, неотличимы с точки зрения асимптотического поведения решений систем, входящих в эти множества (теоремы 11.1, 11.5, следствие 11.1). Близкие по смыслу утверждения были установлены Е. Л. Тонковым в [175, 195]. На основании этих результатов доказано несколько теорем о локальных свойствах асимптотических инвариантов свободной системы $\dot{x} = A(t)x$ относительно возмущений, принадлежащих множеству $\mathfrak{N}(A) := \bigcup\limits_{\varepsilon>0} \mathfrak{N}_\varepsilon(A)$.

Вновь рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{11.1}$$

с наблюдателем

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^r. \tag{11.2}$$

Будем предполагать, что матрицы $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ кусочно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$; $a := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\|$, $b := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|$, $c := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|C(t)\|$. Сформируем управление u в системе (11.1) линейным по наблюдаемому вектору y, т. е. в виде $u = U(t)y$, в итоге получим замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x. \tag{11.3}$$

Пусть матричное управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$ в системе (11.3) выбирается достаточно малым по норме, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$. Множество всех систем вида (11.3) с такими $U(\cdot)$ обозначим $\mathfrak{N}_\varepsilon(A)$. Всякую систему из этого множества можно рассматривать как возмущенную по отношению к свободной системе

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{11.4}$$

но возмущения здесь выбираются не произвольные, а имеющие вид $B(t)U(t)C^*(t)$, где $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$.

Пусть $\delta \geqslant bc\varepsilon$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{M}_\delta(A)$ произвольных возмущенных систем вида

$$\dot{z} = (A(t) + P(t))z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{11.5}$$

где $P \in KC_n(\mathbb{R})$, $\|P\|_C \leqslant \delta$. Очевидно, что имеет место включение $\mathfrak{N}_\varepsilon(A) \subset \mathfrak{M}_\delta(A)$, причем "чаще всего" оно строгое (исключение составляет, например, случай $n = m = r$, $B(t) = C(t) \equiv E$, $\varepsilon = \delta$). Но оказывается, что при условии равномерной локальной достижимости системы (11.3) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что эти два множества неотличимы с точки зрения асимптотического поведения решений систем, входящих в эти множества (следствие 11.1).

Напомним (см. определение 0.5), что две системы из множества $\mathcal{M}_n$ линейных однородных систем n-го порядка с кусочно непрерывными и ограничеными на $\mathbb{R}$ коэффициентами называются **асимптотически эквивалентными**, если существует связывающее эти системы преобразование Ляпунова.

Теорема 11.1 [140]. *Если система* (11.3) *равномерно локально достижима относительно множества* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mr}$, *то существует* $\delta > 0$ *такое, что для любой системы вида* (11.5) *из множества* $\mathfrak{M}_\delta(A)$ *найдется кусочно непрерывное управление* $U : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, *обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы* (11.5) *и системы* (11.3) *с* $U = U(\cdot)$.

Доказательство. Пусть система (11.3) ϑ-равномерно локально достижима относительно множества $\mathbb{U}$. Согласно определению 8.1, существует $\delta_0 > 0$ такое, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и любой $H \in \mathrm{B}_{\delta_0}(E) \subset \mathrm{M}_n$ найдется управление $U : [(k-1)\vartheta, k\vartheta] \to \mathbb{U}$, обеспечивающее для матриц Коши $X_U(t,s)$ и $X(t,s)$ систем (11.3) и (11.4) выполнение равенства

$$X_U(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = X(k\vartheta, (k-1)\vartheta)H.$$

Определим $\delta > 0$ из условия

$$\delta e^{\delta\vartheta} = \frac{\delta_0}{\vartheta e^{2a\vartheta}}.$$

Так как функция $\delta \mapsto \delta e^{\delta\vartheta}$ непрерывна и монотонно возрастает на $[0, +\infty[$ от 0 до $+\infty$, то такое значение δ существует. Возьмем любую кусочно непрерывную функцию $P : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n$, такую, что $\|P\|_C \leqslant \delta$, и рассмотрим систему (11.5) с функцией $P(\cdot)$. Для матрицы Коши этой системы имеем равенство

$$Z(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = X(k\vartheta, (k-1)\vartheta)\times$$

$$\times\Big(E + \int\limits_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} X((k-1)\vartheta, s)P(s)Z(s, (k-1)\vartheta)\, ds\Big) =: X(k\vartheta, (k-1)\vartheta)H_k,$$

при этом

$$\|H_k - E\| \leqslant \vartheta e^{a\vartheta}\|P\|_C e^{(a+\|P\|_C)\vartheta} \leqslant \vartheta e^{a\vartheta}\delta e^{(a+\delta)\vartheta} = \delta_0.$$

Следовательно, существует такое кусочно непрерывное управление $U : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, что при каждом $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$X_U(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = X(k\vartheta, (k-1)\vartheta)H_k = Z(k\vartheta, (k-1)\vartheta).$$

Отсюда вытекает (Е. К. Макаров, [90]) асимптотическая эквивалентность систем (7.2) и (8.5) при $U = U(\cdot)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 11.1. Утверждения, близкие по смыслу к теореме 11.1, были получены Е. Л. Тонковым в [175, 195].

С л е д с т в и е 11.1 [140]. *Если система* (11.3) *равномерно локально достижима, то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любой системы вида* (11.5) *из множества* $\mathfrak{M}_\delta(A)$ *найдется кусочно непрерывное управление* $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, *обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы* (11.5) *и системы* (11.3) *с* $U = U(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует непосредственно из теоремы 11.1 и определения 10.2 равномерной локальной достижимости.

Обозначим

$$\mathfrak{N}(A) = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathfrak{N}_\varepsilon(A).$$

Пользуясь следствием 11.1, докажем несколько утверждений о локальных свойствах асимптотических инвариантов системы (11.4) относительно возмущений, принадлежащих множеству $\mathfrak{N}(A)$.

Т е о р е м а 11.2 [128]. *Если система* (11.3) *равномерно локально достижима, то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое управление* $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, *что система* (11.3) *при* $U = U(\cdot)$ *является системой с интегральной разделенностью.*

Доказательство. В соответствии со следствием 11.1 для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем величину $\delta > 0$. Из теоремы В. М. Миллионщикова [108] о плотности множества систем с интегральной разделенностью во множестве всех систем $\mathcal{M}_n$ вытекает существование такого возмущения $P(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$, $\|P\|_C \leqslant \delta$, что система (11.5) является системой с интегральной разделенностью. Построим управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, гарантирующее асимптотическую эквивалентность системы (11.3) при $U = U(\cdot)$ и этой системы (11.5). Свойство интегральной разделенности является ляпуновским инвариантом, поэтому система (11.3) с построенным управлением $U(\cdot)$ является системой с интегральной разделенностью.

Теорема 11.3 [127]. *Если система* (11.3) *равномерно локально достижима, то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое управление* $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, *что старший показатель Ляпунова* $\lambda_n(A+BUC^*)$ *системы* (11.3) *при* $U = U(\cdot)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\lambda_n(A + BUC^*) \geqslant \Omega(A) - \varepsilon,$$

где $\Omega(A)$ *— верхний центральный показатель системы* (11.4).

Доказательство. Пользуясь следствием 11.1, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем величину δ. Пусть $\delta_1 := \min\{\varepsilon, \delta\}$. Из теоремы В. М. Миллионщикова [110] о достижимости верхнего центрального показателя следует существование $P(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$, $\|P\|_C \leqslant \delta_1$, такого, что для старшего показателя Ляпунова $\lambda_n(A + P)$ возмущенной системы (11.5) имеет место неравенство $\lambda_n(A + P) \geqslant \Omega(A) - \delta_1$. Так как $\|P\|_C \leqslant \delta_1 \leqslant \delta$, то найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, гарантирующее асимптотическую эквивалентность построенной системы (11.5) и системы (11.3) при $U = U(\cdot)$. Для старшего показателя Ляпунова этой системы справедливо неравенство

$$\lambda_n(A + BUC^*) = \lambda_n(A + P) \geqslant \Omega(A) - \delta_1 \geqslant \Omega(A) - \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Определение 11.1 (см., например, [57, с. 72]). Показатели Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ системы (11.4) называются **устойчивыми**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A + P) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + P)$ произвольной возмущенной системы вида (11.5) из множества $\mathfrak{M}_\delta(A)$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(A + P) - \lambda_i(A)| \leqslant \varepsilon.$$

Понятие устойчивости показателей Ляпунова появилось из работы О. Перрона [193], впервые установившего, что показатели могут быть неустойчивыми.

Определение 11.2 [128]. Показатели Ляпунова $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$ системы (11.4) называются **устойчивыми относительно возмущений из класса** $\mathfrak{N}(A)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A+BUC^*) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BUC^*)$ произвольной возмущенной системы вида (11.3) из множества $\mathfrak{N}_\delta(A)$ удовлетворяют неравенству $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(A+BUC^*) - \lambda_i(A)| \leqslant \varepsilon.$

Теорема 11.4 [127]. *Если система* (11.3) *равномерно локально достижима, то устойчивость показателей Ляпунова однородной системы* (11.4) *эквивалентна их устойчивости относительно возмущений из класса* $\mathfrak{N}(A)$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Возьмем любое $\alpha > 0$. В силу свойства устойчивости показателей системы (11.4) относительно возмущений из класса $\mathfrak{N}(A)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольной системы вида (11.3) из множества $\mathfrak{N}_\varepsilon(A)$ справедливо неравенство

$$\max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(A+BUC^*) - \lambda_i(A)| \leqslant \alpha.$$

По этому ε в соответствии со следствием 11.1 найдем величину $\delta > 0$. Возьмем произвольную возмущенную систему вида (11.5) из множества $\mathfrak{M}_\delta(A)$ (т. е. произвольную матрицу $P(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$, $\|P\|_C \leqslant \delta$). Для нее существует асимптотически эквивалентная ей система из класса $\mathfrak{N}_\varepsilon(A)$ (т. е. матрица $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$), такая, что все ляпуновские инварианты системы (11.5) и системы (11.3) при $U = U(\cdot)$ совпадают. В частности, $\lambda_i(A+P) = \lambda_i(A+BUC^*), \quad i = 1,\ldots,n.$ Следовательно, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(A+P) - \lambda_i(A)| \leqslant \alpha.$ Это означает устойчивость показателей Ляпунова системы (11.4). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь линейную управляемую систему (11.1) без наблюдателя. Управление u в этой системе выбираем линейным по фазовым координатам, $u = U(t)x$, где $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$. Матрицу Коши замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{11.6}$$

с выбранным управлением $U(\cdot)$ будем обозначать $X_U(t,s)$.

Ясно, что для системы (11.1) имеют место все утверждения этого параграфа, доказанные выше. Но оказывается, что следствие 11.1 для линейной управляемой системы без наблюдателя можно доказать в более сильной форме, с липшицевой оценкой нормы матричного управления $U(\cdot)$ относительно нормы возмущения $P(\cdot)$.

Теорема 11.5 [140]. *Если система* (11.1) *равномерно вполне управляема, то существуют такие* $\delta > 0$ *и* $l > 0$, *что для произвольной системы вида* (11.5) *из множества* $\mathfrak{M}_\delta(A)$ *найдется управление* $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant l\|P\|_C$, *гарантирующее асимптотическую эквивалентность системы* (11.5) *и системы* (11.6) *при* $U = U(\cdot)$.

Доказательство. Пусть ϑ — число, обеспечивающее ϑ-равномерную полную управляемость системы (11.1). В силу теоремы 8.1 существуют такие $\delta_0 > 0$ и $l_0 > 0$, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ и любой $n \times n$ матрицы H, удовлетворяющей оценке $\|H - E\| \leqslant \delta_0$, найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}([(k-1)\vartheta, k\vartheta])$, $\|U\|_C \leqslant l_0\|H - E\|$, гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (11.6) выполнение равенства

$$X_U(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = X(k\vartheta, (k-1)\vartheta)H.$$

Пусть положительное число δ таково, что $\delta\vartheta e^{\delta\vartheta} = \delta_0 e^{-2a\vartheta}$. Возьмем произвольную матрицу $P(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$, $\|P\|_C \leqslant \delta$, и обозначим через $Z(t,s)$ матрицу Коши возмущенной системы (11.5). Тогда так же, как в доказательстве теоремы 11.1, получим существование такого управления $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, что при каждом $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$X_U(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = X(k\vartheta, (k-1)\vartheta)H_k = Z(k\vartheta, (k-1)\vartheta),$$

причем

$$\|H_k - E\| \leqslant \int\limits_{(k-1)\sigma}^{k\sigma} \|X((k-1)\sigma, s)\| \, \|P(s)\| \, \|Z(s, (k-1)\sigma)\| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sigma e^{a\sigma} e^{(a+\delta)\sigma} \|P\|_C.$$

Отсюда вытекают два факта: во-первых, асимптотическая эквивалентность систем (11.5) и (11.6) с $U = U(\cdot)$, во-вторых, справедливость оценки нормы управления

$$\|U\|_C \leqslant l_0 \sup\{\|H_k - E\| : \, k \in \mathbb{Z}\} \leqslant l_0 \vartheta e^{(2a+\delta)\vartheta} \|P\|_C =: l\|P\|_C.$$

Теорема доказана.

ГЛАВА III. ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

В этой главе доказаны основные результаты диссертации, касающиеся локальной управляемости инвариантов ляпуновских преобразований. В первом параграфе главы введены ключевые понятия работы — локальной и глобальной управляемости асимптотических инвариантов замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{III.1}$$

и выяснена взаимосвязь между этими понятиями. В следующем параграфе установлено, что если система (III.1) равномерно локально достижима, то из пропорциональной глобальной управляемости произвольной конечной совокупности ляпуновских инвариантов системы

$$\dot{x} = (A(t) + U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

отвечающей случаю $n = m = r$, $B(t) = C(t) \equiv E$, вытекает их локальная управляемость для системы (III.1). На основании этого результата получены достаточные условия локальной и пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (III.1). В последующих параграфах главы введено и исследовано понятие расчлененности линейной однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{III.2}$$

которое играет ведущую роль в получении достаточных условий локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. В частности, в § 17 установлено, что решение со старшим показателем Ляпунова всякой двумерной системы (III.2) с некратными показателями отчленено от решения с младшим показателем, и как следствие этого результата доказана пропорциональная локальная управляемость показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

при условии некратности полного спектра соответствующей свободной системы. Все достаточные условия локальной управляемости ляпуновских инвариантов получены при условии равномерной локальной достижимости системы (III.1), либо, в случае $r = n$, $C(t) \equiv E$, при условии равномерной полной управляемости системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m.$$

В § 19 выясняется вопрос о необходимости этого условия для локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

§ 12. Локальная и глобальная управляемость асимптотических инвариантов

В этом параграфе введены понятия локальной и глобальной управляемости ляпуновских инвариантов линейных систем.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{12.1}$$

с наблюдателем

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^r,\ t \in \mathbb{R}, \tag{12.2}$$

где матричные функции $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ предполагаются кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$. Систему (12.1), (12.2), как и прежде, будем отождествлять с тройкой (A, B, C).

Предположим, что управление u в системе (12.1) (12.2) задано линейным по наблюдаемым параметрам, $u = Uy$, где в качестве матричного управления $U(\cdot)$ выбирается кусочно непрерывная и ограниченная функция $U : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{mr}$. Тогда система (12.1) (12.2) переходит в систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x, \tag{12.3}$$

которая при всяком $U = U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$ принадлежит множеству $\mathcal{M}_n$. Следовательно, для системы (12.4) при выборе произвольного управления $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$ определены всевозможные инварианты преобразований Ляпунова.

Пусть ι — некоторый ляпуновский инвариант, $\iota(\mathcal{M}_n)$ — множество значений инварианта ι, т. е.

$$\iota(\mathcal{M}_n) := \{\alpha |\ \exists D(\cdot) \in \mathcal{M}_n :\ \iota(D) = \alpha\}.$$

Определим отображение $\varphi_\iota :\ KC_{mr}(\mathbb{R}) \to \iota(\mathcal{M}_n)$, которое ставит в соответствие произвольной функции $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$ значение $\iota(A+BUC^*)$ инварианта ι системы (12.3) при $U = U(\cdot)$.

Определение 12.1 [138,139]. Ляпуновский инвариант ι называется глобально управляемым относительно тройки (A,B,C), если отображение $\varphi_\iota : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to \iota(\mathcal{M}_n)$ сюръективно.

Допуская некоторую вольность речи, будем говорить, что система (12.3) обладает свойством глобальной управляемости ляпуновского инварианта ι.

Предположим теперь, что $\iota(\mathcal{M}_n) \subset \mathfrak{X}$, где $(\mathfrak{X},\rho)$ — метрическое пространство.

Определение 12.2 [138,139]. Ляпуновский инвариант ι называется:
пропорционально глобально управляемым относительно тройки (A,B,C), если отображение $\varphi_\iota : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to \iota(\mathcal{M}_n)$ сюръективно, причем существует такое число $l > 0$, что для любого значения $\alpha \in \iota(\mathcal{M}_n)$ найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant l \cdot \rho(\iota(A),\alpha)$, гарантирующее выполнение равенства $\varphi_\iota(U) = \alpha$;
локально управляемым относительно тройки (A,B,C), если отображение $\varphi_\iota : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to \iota(\mathcal{M}_n)$ открыто при $U(t) \equiv 0$, т.е. для любого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $\alpha \in \iota(\mathcal{M}_n)$, удовлетворяющего неравенству $\rho(\iota(A),\alpha) \leqslant \delta$, существует управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, гарантирующее выполнение равенства $\varphi_\iota(U) = \alpha$;
пропорционально локально управляемым относительно тройки (A,B,C), если существуют такие $l > 0$ и $\delta > 0$, что для любого $\alpha \in \iota(\mathcal{M}_n)$, удовлетворяющего неравенству $\rho(\iota(A),\alpha) \leqslant \delta$, существует управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant l \cdot \rho(\iota(A),\alpha)$, гарантирующее выполнение равенства $\varphi_\iota(U) = \alpha$.

Допуская вольность речи, в этих случаях будем говорить, что система (12.3) обладает свойством пропорциональной глобальной (соответственно локальной и пропорциональной локальной) управляемости ляпуновского инварианта ι.

Рассмотрим теперь произвольный упорядоченный конечный набор $(\iota_1,\ldots,\iota_k)$ ляпуновских инвариантов. Пусть

$$(\iota_1,\ldots,\iota_k)(\mathcal{M}_n) := \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) |\ \exists\, D(\cdot) \in \mathcal{M}_n : \iota_j(D) = \alpha_j\ \forall j = 1,\ldots,k\}$$

— множество значений набора инвариантов $(\iota_1,\ldots,\iota_k)$, а отображение $\varphi_{\iota_1,\ldots,\iota_k} : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to (\iota_1,\ldots,\iota_k)(\mathcal{M}_n)$ определено равенством

$$\varphi_{\iota_1,\ldots,\iota_k}(U) = (\iota_1(A+BUC^*),\ldots,\iota_k(A+BUC^*)).$$

Определение 12.3 [138,139]. Совокупность ляпуновских инвариантов $(\iota_1, \ldots, \iota_k)$ называется глобально управляемой относительно тройки (A, B, C), если отображение $\varphi_{\iota_1,\ldots,\iota_k} : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to (\iota_1, \ldots, \iota_k)(\mathcal{M}_n)$ сюръективно.

Допустим теперь, что при каждом $j \in \{1, \ldots, k\}$ имеет место включение $\iota_j(\mathcal{M}_n) \subset \mathfrak{X}_j$, где $(\mathfrak{X}_j, \rho_j)$ — метрическое пространство.

Определение 12.4 [138,139]. Совокупность ляпуновских инвариантов $(\iota_1, \ldots, \iota_k)$ называется

пропорционально глобально управляемой относительно тройки (A, B, C), если отображение $\varphi_{\iota_1,\ldots,\iota_k} : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to (\iota_1, \ldots, \iota_k)(\mathcal{M}_n)$ сюръективно, причем существует такое число $l > 0$, что для любого значения $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in (\iota_1, \ldots, \iota_k)(\mathcal{M}_n)$ найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_C \leqslant l \cdot \max\limits_{j=1,\ldots,k} \rho_j(\iota_j(A) - \alpha_j)$ и гарантирующее выполнение равенства $\varphi_{\iota_1,\ldots,\iota_k}(U) = \alpha$;

локально управляемой относительно тройки (A, B, C), если отображение $\varphi_{\iota_1,\ldots,\iota_k} : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to (\iota_1, \ldots, \iota_k)(\mathcal{M}_n)$ открыто при $U(t) \equiv 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in (\iota_1, \ldots, \iota_k)(\mathcal{M}_n)$, удовлетворяющего неравенству

$$\max_{j=1,\ldots,k} \rho_j(\iota_j(A) - \alpha_j) \leqslant \delta,$$

существует управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, гарантирующее выполнение равенства $\varphi_{\iota_1,\ldots,\iota_k}(U) = \alpha$;

пропорционально локально управляемой относительно тройки (A, B, C), если существуют такие $l > 0$ и $\delta > 0$, что для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in (\iota_1, \ldots, \iota_k)(\mathcal{M}_n)$, удовлетворяющего неравенству

$$\max_{j=1,\ldots,k} \rho_j(\iota_j(A) - \alpha_j) \leqslant \delta,$$

существует управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant l \cdot \max\limits_{j=1,\ldots,k} \rho_j(\iota_j(A) - \alpha_j)$, гарантирующее выполнение равенства $\varphi_{\iota_1,\ldots,\iota_k}(U) = \alpha$.

В частности, если $k = n$, а $\iota_j = \lambda_j$ — j-й показатель Ляпунова, то совокупность инвариантов $(\iota_1, \ldots, \iota_n)$ представляет собой полный спектр показателей Ляпунова. Тогда

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(\mathcal{M}_n) =$$
$$= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n*} |\ \exists\, D(\cdot) \in \mathcal{M}_n :\ \lambda_j(D) = \alpha_j\ \forall j = 1, \ldots, n\} =$$
$$= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n*} |\ \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n\}.$$

Применяя к этой совокупности ляпуновских инвариантов определения 12.3 и 12.4, получим следующее определение.

Определение 12.5 [126, 138, 139]. Полный спектр показателей Ляпунова системы (12.3) называется:
глобально управляемым, если для любого набора чисел $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ существует управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$ такое, что $\lambda_j(A+BUC^*) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n$;
пропорционально глобально управляемым, если при некотором $l > 0$ для всякого набора чисел $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ существует кусочно непрерывное ограниченное управление $U : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{mr}$ такое, что $\|U\|_C \leqslant l \cdot \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \alpha_j|$ и $\lambda_j(A + BUC^*) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n$;
локально управляемым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого набора чисел $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$, удовлетворяющего неравенству $\max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \alpha_j| \leqslant \delta$, найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant \varepsilon$, для которого $\lambda_j(A + BUC^*) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n$;
пропорционально локально управляемым, если существуют $\delta > 0$ и $l > 0$ такие, что для любого набора чисел $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$, удовлетворяющего неравенству $\max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \alpha_j| \leqslant \delta$, найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mr}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant l \cdot \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \alpha_j|$, для которого $\lambda_j(A + BUC^*) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n$.

В случае отсутствия наблюдателя, т. е. в случае $r = n$, $C(t) \equiv E$, систему (12.1) отождествляем с парой (A, B), а управление формируем линейным по фазовым переменным, $u = U(t)x$, где матричная функция $U : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{mn}$ также предполагается кусочно непрерывной и ограниченной. В этом случае вместо системы (12.3) рассматривается замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \tag{12.4}$$

и все приведенные выше определения остаются в силе (только всюду вместо фразы "относительно тройки (A, B, C)" говорим "относительно пары (A, B)").

Непосредственно из определений следует, что если система (12.3) обладает свойством пропорциональной глобальной управляемости совокупности ляпуновских инвариантов, то для нее выполнено и свойство глобальной управляемости этих инвариантов. Неизвестно, верно ли обратное утверждение. В главе IV при определенных условиях установлена глобальная управляемость некоторых инвариантов преобразований Ляпунова системы (12.4) — полного спектра показателей Ляпунова (теорема 27.4), коэффициентов неправильности (теорема 26.2), особых показателей П. Боля (теорема 27.1), центральных показателей Р. Э. Винограда и В. М. Миллионщикова (теорема 27.2) и экспоненциальных показателей Н. А. Изобова (теорема 27.3), а также глобальная управляемость любого конечного набора инвариантов двумерных (теорема 25.1) и периодических (теорема 24.1) систем. Но во всех этих утверждениях сколь угодно малому изменению инварианта может отвечать достаточно большое по норме управление $U(\cdot)$. Поэтому из глобальной управляемости ляпуновских инвариантов системы (12.3) их локальная управляемость непосредственно не следует. В случае же пропорциональной управляемости, очевидно, имеет место

Лемма 12.1. *Если совокупность инвариантов* $(\iota_1,\ldots,\iota_k)$ *пропорционально глобально управляема относительно тройки* (A,B,C), *то эта совокупность пропорционально локально управляема относительно тройки* (A,B,C).

В следующем параграфе установлено, что в случае равномерной полной управляемости системы (12.1) вопрос о пропорциональной локальной управляемости совокупности ляпуновских инвариантов относительно пары (A,B) может быть сведен к вопросу о пропорциональной глобальной управляемости этой совокупности относительно пары (A,E) (E — единичная $n\times n$ матрица).

§ 13. Пропорциональная управляемость полного спектра показателей Ляпунова

Основные результаты этого параграфа — теоремы 13.4 и 13.5, в которых установлены достаточные условия локальной и пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Наряду с линейной управляемой системой (12.1) рассмотрим систему

$$\dot{x}=A(t)x+u,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^n, \tag{13.1}$$

имеющую вид (12.1) при $m=n$, $B(t)\equiv E\in \mathrm{M}_n$. Отождествляем систему (13.1) с парой $(A(\cdot),E)$. Напомним (см. следствие 7.1), что система (13.1) ϑ-равномерно вполне управляема при каждом $\vartheta>0$.

Лемма 13.1 [138]. *Пусть система* (12.1) *равномерно вполне управляема. Если совокупность ляпуновских инвариантов* $(\iota_1,\ldots,\iota_k)$ *пропорционально глобально управляема относительно пары* (A,E), *то эта совокупность пропорционально локально управляема относительно пары* (A,B).

Доказательство. Так как совокупность ляпуновских инвариантов $(\iota_1,\ldots,\iota_k)$ пропорционально глобально управляема относительно пары (A,E), то существует такое число $l>0$, что для любого набора $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in(\iota_1,\ldots,\iota_k)(\mathcal{M}_n)$ найдется управление $V(\cdot)\in KC_{nn}(\mathbb{R})$, $\|V\|_C\leqslant l\cdot\max\limits_{j=1,\ldots,k}\rho_j(\iota_j(A),\alpha_j)$, обеспечивающее выполнение равенств

$$\iota_j(A+V)=\alpha_j,\quad j=1,\ldots,k. \tag{13.2}$$

Система (12.1) равномерно вполне управляема, следовательно (теорема 11.5) найдутся такие $l_1>0$ и $\delta_1>0$, что для любой матричной функции $V(\cdot)\in KC_n(\mathbb{R})$, норма которой удовлетворяет оценке $\|V\|_C\leqslant\delta_1$, существует управление $U(\cdot)\in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C\leqslant l_1\|V\|_C$, такое, что системы

$$\dot{x}=(A(t)+V(t))x \tag{13.3}$$

и (12.4) с этим $U(\cdot)$ асимптотически эквивалентны.

Возьмем произвольный набор чисел

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in(\iota_1,\ldots,\iota_k)(\mathcal{M}_n),$$

такой, что

$$\max_{j=1,\ldots,n}\rho_j(\iota_j(A),\alpha_j)\leqslant\frac{\delta_1}{l}.$$

В соответствии со свойством пропорциональной глобальной управляемости совокупности $(\iota_1,\ldots,\iota_k)$ относительно пары (A,E) найдем управление $V(\cdot)$,

$$\|V\|_C\leqslant l\cdot\max_{j=1,\ldots,k}\rho_j(\iota_j(A),\alpha_j)\leqslant\delta_1,$$

такое, что выполнены равенства (13.2). Для этого $V(\cdot)$ в силу равномерной полной управляемости системы (12.1) найдется $U(\cdot)$,

$$\|U\|_C\leqslant l_1\|V\|_C\leqslant l\cdot l_1\cdot\max_{j=1,\ldots,k}\rho_j(\iota_j(A),\alpha_j),$$

обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы (13.3) и системы (12.4) с найденным $U(\cdot)$. Ляпуновские инварианты этих систем совпадают, поэтому

$$\iota_j(A+BU)=\alpha_j,\quad j=1,\ldots,n.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 13.2 [138]. *Если система* (12.1), (12.2) *равномерно локально достижима, а совокупность ляпуновских инвариантов* $(\iota_1, \ldots, \iota_k)$ *пропорционально глобально управляема относительно тройки* (A, E, E) , *то эта совокупность локально управляема относительно тройки* (A, B, C) .

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 13.1, нужно только заменить ссылку на теорему 11.5 ссылкой на следствие 11.1.

Выясним условия, при которых полный спектр показателей Ляпунова системы (13.3) глобально управляем. Докажем предварительно одну лемму, касающуюся систем с устойчивыми показателями Ляпунова.

Л е м м а 13.3 [138]. *Пусть*

$$\dot{z} = F(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^k, \tag{13.4}$$

— система с нижней треугольной матрицей $F(\cdot)$, *такая, что*

$$\overline{\omega}(F) = \Omega(F) =: \lambda.$$

Тогда для любых $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_k$ *полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы*

$$\dot{z} = (F(t) + \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k))z \tag{13.5}$$

состоит из чисел $\lambda + \mu_k, \ldots, \lambda + \mu_1$.

З а м е ч а н и е 13.1. Из критерия устойчивости показателей Ляпунова (В. М. Миллионщиков [109]; Б. Ф. Былов, Н. А. Изобов [19]) вытекает, что полный спектр показателей Ляпунова системы (13.4) состоит из k чисел λ, причем показатели этой системы устойчивы.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 13.3. Поскольку центральные показатели произвольной треугольной системы полностью определяются ее диагональными элементами и совпадают с центральными показателями системы диагонального приближения [18, с. 120 – 121], для системы (13.4) справедливы равенства

$$\overline{\omega}(\operatorname{diag}(f_{11}, \ldots, f_{kk})) = \Omega(\operatorname{diag}(f_{11}, \ldots, f_{kk})) = \lambda.$$

Верхние средние значения каждой из функций $f_{ii}(\cdot)$ заключены между $\overline{\omega}(\operatorname{diag}(f_{11}, \ldots, f_{kk}))$ и $\Omega(\operatorname{diag}(f_{11}, \ldots, f_{kk}))$, поэтому

$$\overline{f_{ii}} = \lambda, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Наряду с системой (13.4) рассмотрим систему

$$\dot{\varphi} = \widetilde{F}(t)\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}^k, \tag{13.6}$$

где

$$\widetilde{F}(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f_{22}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & f_{kk}(t) \end{pmatrix}.$$

Из совпадения диагональных элементов матриц $F(\cdot)$ и $\widetilde{F}(\cdot)$ вытекает равенство

$$\overline{\omega}(\widetilde{F}) = \Omega(\widetilde{F}) = \lambda.$$

Зафиксируем какое-либо $j \in \{1, \dots, k\}$ и рассмотрим решение

$$\varphi(\cdot) = \operatorname{col}(\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_k(\cdot))$$

системы (13.6) с начальным условием $\varphi(0) = e_j \in \mathbb{R}^k$. Так как показатель Ляпунова всякого нетривиального решения системы (13.6) заключен между $\overline{\omega}(\widetilde{F})$ и $\Omega(\widetilde{F})$ (В. М. Миллионщиков, [110]), имеем равенство $\lambda[\varphi] = \lambda$. Координаты решения $\varphi(\cdot)$ удовлетворяют скалярным уравнениям

$$\dot{\varphi}_1(t) = f_{11}(t)\varphi_1(t),$$
$$\dot{\varphi}_i(t) = f_{ii}(t)\varphi_i(t) + \sum_{m=1}^{i-1} \varphi_m(t), \quad i = 2, \dots, k,$$

и начальным условиям $\varphi_i(0) = \delta_{ij}$, поэтому

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \in \{1, \dots, j-1\}, \\ h_j(t) & \text{при } i = j, \\ h_i(t) \int\limits_0^t h_i^{-1}(s) \sum\limits_{m=j}^{i-1} \varphi_m(s)\, ds & \text{при } i \in \{j+1, \dots, k\}, \end{cases} \tag{13.7}$$

где $h_i(t) := \exp \int\limits_0^t f_{ii}(\tau)\, d\tau$.

Пусть

$$\alpha := \max\{1; \|f_{il}(\cdot)\|_C :\, i, l = 1, \dots, k\}.$$

Покажем, что для решения $z(\cdot) = \operatorname{col}(z_1(\cdot), \dots, z_k(\cdot))$ системы (13.5) с начальным условием $z(0) = e_j$ при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ справедливы оценки

$$|z_i(t)| \leqslant \alpha^{i-j} e^{\mu_j t} \varphi_i(t), \quad t \geqslant 0. \tag{13.8}$$

Действительно, при $i \in \{1,\dots,j-1\}$ имеем тождества $z_i(t) \equiv 0$, т. е. (13.8) выполнено. Функция $z_j(\cdot)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению

$$\dot z_j(t) = (f_{jj}(t) + \mu_j) z_j(t)$$

и начальному условию $z_j(0) = 1$, поэтому

$$z_j(t) = e^{\mu_j t} h_j(t) = e^{\mu_j t} \varphi_j(t),$$

т. е. при $i = j$ неравенство (13.8) обращается в строгое равенство. Предположим, что (13.8) доказано для всех $i = j,\dots,l-1$, где $l \in \in \{j+1,\dots,k\}$. Тогда

$$\varphi_i(t) \geqslant \alpha^{j-i} e^{-\mu_j t} |z_i(t)| \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \quad i = j,\dots,l-1.$$

Докажем (13.8) для $i = l$. Координата $z_l(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$\dot z_l(t) = (f_{ll}(t) + \mu_l) z_l(t) + \sum_{m=j}^{l-1} f_{lm}(t) z_m(t), \quad z_l(0) = 0,$$

поэтому

$$z_l(t) = h_l(t) e^{\mu_l t} \int\limits_0^t h_l^{-1}(s) e^{-\mu_l s} \sum_{m=j}^{l-1} f_{lm}(s) z_m(s)\, ds,$$

следовательно, при $t \geqslant 0$

$$|z_l(t)| \leqslant h_l(t) e^{\mu_l t} \int\limits_0^t h_l^{-1}(s) e^{-\mu_l s} \sum_{m=j}^{l-1} |f_{lm}(s)|\, |z_m(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant h_l(t) e^{\mu_l t} \int\limits_0^t h_l^{-1}(s) e^{-\mu_l s} \sum_{m=j}^{l-1} \alpha \cdot \alpha^{m-j} e^{\mu_j s} \varphi_m(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant h_l(t) e^{\mu_l t} \int\limits_0^t h_l^{-1}(s) e^{(\mu_j - \mu_l)s} \alpha^{l-j} \sum_{m=j}^{l-1} \varphi_m(s)\, ds.$$

Так как $\mu_j \geqslant \mu_l$, а подынтегральная функция здесь неотрицательна, с учетом (13.7) имеем оценку

$$|z_l(t)| \leqslant h_l(t) e^{\mu_l t} \int\limits_0^t e^{(\mu_j - \mu_l)t} h_l^{-1}(s) \alpha^{l-j} \sum_{m=j}^{l-1} \varphi_m(s)\, ds =$$

$$= \alpha^{l-j} e^{\mu_j t} h_l(t) \int\limits_0^t h_l^{-1}(s) \sum_{m=j}^{l-1} \varphi_m(s)\, ds = \alpha^{l-j} e^{\mu_j t} \varphi_l(t).$$

Таким образом, неравенства (13.8) доказаны. Из них следует, что при всех $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\lambda[z_i] \leqslant \lambda[\alpha^{l-j} e^{\mu_j t} \varphi_i(t)] \leqslant \mu_j + \lambda[\varphi_i] \leqslant \mu_j + \lambda[\varphi] = \mu_j + \lambda,$$

причем для $i = j$ имеет место равенство

$$\lambda[z_j] = \lambda[e^{\mu_j t} h_j(t)] = \mu_j + \lambda[h_j] = \mu_j + \overline{f_{jj}(\cdot)} = \mu_j + \lambda.$$

Следовательно,

$$\lambda[z] = \max_{i=j,\ldots,k} \lambda[z_i] = \lambda[z_j] = \lambda + \mu_j.$$

Рассмотрим нормированную в нуле фундаментальную матрицу $Z(\cdot) = [z^{(1)}(\cdot), \ldots, z^{(k)}(\cdot)]$ системы (13.5). Для показателей Ляпунова столбцов $Z(\cdot)$ справедливы равенства

$$\lambda[z^{(i)}] = \lambda[z_i^{(i)}] = \lambda + \mu_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

при этом

$$\lambda[z^{(i)}] \geqslant \lambda[z^{(i-1)}], \quad i = 2, \ldots, k.$$

Докажем, что ФСР $\{z^{(1)}, \ldots, z^{(k)}\}$ нормальна. С этой целью возьмем произвольный вектор $\gamma \in \mathbb{R}^k$, $\gamma \neq 0$, и вычислим показатель Ляпунова решения $z(\cdot) = Z(\cdot)\gamma$. Обозначим $j := \min\{i : \gamma_i \neq 0\}$. Тогда $z(t) = \sum\limits_{i=j}^{k} \gamma_i z^{(i)}(t)$, поэтому

$$\lambda[z] \leqslant \max\{\lambda[z^{(i)}] : i = j, \ldots, k\} = \lambda[z^{(j)}] = \lambda + \mu_j.$$

С другой стороны, из нижней треугольности матрицы коэффициентов системы (13.5) вытекает, что фундаментальная матрица $Z(t)$ нижняя треугольная, т. е. $z_j^{(i)}(t) \equiv 0$ при $i > j$, поэтому

$$z_j(t) = \sum_{i=j}^{k} \gamma_i z_j^{(i)}(t) = \gamma_j z_j^{(j)}(t).$$

Отсюда следует неравенство

$$\lambda[z] \geqslant \lambda[z_j] = \lambda[z_j^{(j)}] = \lambda + \mu_j.$$

Таким образом,

$$\lambda[z] = \lambda + \mu_j = \max\{\lambda[z^{(i)}] : i = 1, \ldots, k, \gamma_i \neq 0\}.$$

Это означает, что ФСР $\{z^{(1)},\ldots,z^{(k)}\}$ несжимаема [39, с. 142] и, в силу теоремы Ляпунова [39, с. 142 – 144], нормальна. Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова системы (13.5) состоит из чисел $\lambda+\mu_k,\ldots,\lambda+\mu_1$. Лемма доказана.

Теорема 13.1 [138]. *Если характеристические показатели Ляпунова однородной системы*

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{13.9}$$

устойчивы, то полный спектр показателей Ляпунова пропорционально глобально управляем относительно пары $(A(\cdot),E)$.

Доказательство. Пусть $\Lambda_1(A)<\ldots<\Lambda_q(A)$ — показатели Ляпунова системы (13.9) кратностей $n_1,\ldots,n_q$ соответственно,

$$n_1+\ldots+n_q=n.$$

Полный спектр системы (13.9) обозначим $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$. Применим к (13.9) перроновское преобразование $y=L(t)x$, приводящее (13.9) к блочно-диагональному виду

$$\dot{y}=\operatorname{diag}(\widetilde{A}_1(t),\ldots,\widetilde{A}_q(t))y,\quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{13.10}$$

такому, что

1) $\widetilde{A}_j(t)\in\mathrm{M}_{n_j}$ — нижняя треугольная матрица;

2) блоки $\widetilde{A}_{j-1}(\cdot)$, $\widetilde{A}_j(\cdot)$ при каждом $j\in\{2,\ldots,q\}$ интегрально отделены;

3) $\overline{\omega}(\widetilde{A}_j)=\Omega(\widetilde{A}_j)=\Lambda_j(A)$, $j=1,\ldots,q$.

Указанное перроновское преобразование существует в силу устойчивости показателей Ляпунова системы (13.9) (В. М. Миллионщиков [109]; Б. Ф. Былов, Н. А. Изобов [19]). Преобразование $y=L(t)x$ приводит систему (13.1) к системе

$$\dot{y}=\widetilde{A}(t)y+L(t)u. \tag{13.11}$$

Возьмем произвольный набор чисел $\nu_1\leqslant\ldots\leqslant\nu_n$ и обозначим $\mu_j=\nu_j-\lambda_j(A)$, $j=1,\ldots,n$. Зафиксируем любое $i\in\{1,\ldots,q\}$. Для каждого $j\in n_i$ справедливо равенство $\mu_j=\nu_j-\Lambda_i(A)$, поэтому числа μ_j, $j\in n_i$, упорядочены по возрастанию. Упорядочим их по убыванию и полученный набор чисел обозначим η_j, $j\in n_i$. Пусть H_i — диагональная $n_i\times n_i$ матрица, диагональные элементы которой совпадают с η_j, $j\in n_i$.

Положим $U(t) = L^{-1}(t)\,\mathrm{diag}(H_1,\dots,H_q)$ и рассмотрим (13.11) с управлением $u = U(t)y$, получим замкнутую систему

$$\dot y = (\widetilde{A}(t) + L(t)U(t))y \tag{13.12}$$

с блочно-диагональной матрицей, диагональные блоки которой — это нижние треугольные матрицы $\widetilde{A}_i(t) + H_i$, $i = 1,\dots,q$. Из леммы 13.1 следует, что показатели Ляпунова i-го блока системы (13.12) совпадают с числами $\Lambda_i(A) + \mu_j = \nu_j$, $j \in n_i$. Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова системы (13.12) состоит из чисел $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$. Применим к (13.12) обратное преобразование $y = L(t)x$, получим систему (13.3), где

$$V(t) = U(t)L(t) = L^{-1}(t)\,\mathrm{diag}(H_1,\dots,H_q)L(t).$$

Для $\|V\|_C$ имеем оценку

$$\|V\|_C \leqslant \|L\|_C\|L^{-1}\|_C \max_{i=1,\dots,q}\|H_i\| \leqslant \|L\|_C\|L^{-1}\|_C \max_{j=1,\dots,n}|\mu_j| =$$

$$= \|L\|_C\|L^{-1}\|_C \max_{j=1,\dots,n}|\lambda_j(A) - \nu_j|,$$

а числа $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$ образуют полный спектр показателей Ляпунова системы (13.3) с построенным управлением $V(\cdot)$. Теорема доказана.

Теорема 13.2 [138]. *Если однородная система* (13.9) *правильна, то система* (13.3) *обладает свойством пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

Доказательство. Перроновским преобразованием $y = L(t)x$ приведем правильную систему (13.9) к системе

$$\dot y = F(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{13.13}$$

с верхней треугольной матрицей $F(\cdot)$, диагональные элементы которой $f_{ii}(\cdot)$, $i = 1,\dots,n$, имеют точные средние значения, реализующие полный спектр системы (13.13) и совпадающие с показателями Ляпунова исходной системы (13.9):

$$\breve{f}_{ii} = \lambda_i(F) = \lambda_i(A), \quad i = 1,\dots,n.$$

Это преобразование приводит систему (13.1) к системе

$$\dot y = F(t)y + L(t)u. \tag{13.14}$$

Пусть $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$ — произвольный набор чисел. Выберем

$$U(t) = L^{-1}(t)\,\mathrm{diag}(\nu_1 - \lambda_1(A), \ldots, \nu_n - \lambda_n(A)). \tag{13.15}$$

Замкнутая система

$$\dot{y} = (F(t) + L(t)U(t))y \tag{13.16}$$

с выбранным управлением $U(\cdot)$ имеет верхнюю треугольную матрицу коэффициентов, для диагональных элементов которой существуют точные средние значения, равные

$$\breve{f}_{ii} + \nu_i - \lambda_i(A) = \nu_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Из критерия Ляпунова правильности треугольной системы [18, с. 141] следует, что система (13.16) правильна, и ее полный спектр совпадает с числами $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$. Преобразование $y = L(t)x$ приводит систему (13.16) к системе (13.3), где

$$V(t) = U(t)L(t) = L^{-1}(t)\,\mathrm{diag}(\nu_1 - \lambda_1(A), \ldots, \nu_n - \lambda_n(A))L(t).$$

Полный спектр (13.3) состоит из чисел $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$, а норма управления $V(\cdot)$ удовлетворяет оценке

$$\|V\|_C \leqslant \|L\|_C \|L^{-1}\|_C \max_{i=1,\ldots,n} |\nu_i - \lambda_i(A)|.$$

Теорема доказана.

Теорема 13.3 [138]. *Если однородная система* (13.9) *диагонализируема, то система* (13.3) *обладает свойством пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

Доказательство. Пусть $y = L(t)x$ — перроновское преобразование, приводящее (13.9) к системе (13.13), матрица которой

$$F(t) = \mathrm{diag}(f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

диагональна и такова, что

$$\overline{f}_i = \lambda_i(F) = \lambda_i(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это преобразование приводит систему (13.1) к (13.14). Возьмем любой набор чисел $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$ и выберем матричное управление в виде (13.15). Тогда замкнутая система (13.16) имеет диагональную матрицу коэффициентов

$$F(t) + L(t)U(t) = \mathrm{diag}(f_1(t) + \nu_1 - \lambda_1(A), \ldots, f_n(t) + \nu_n - \lambda_n(A)),$$

причем

$$\overline{f_i + \nu_i - \lambda_i(A)} = \overline{f}_i + \nu_i - \lambda_i(A) = \nu_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова системы (13.16) состоит из чисел $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, приведенным в конце доказательства теоремы 13.2. Теорема доказана.

Непосредственно из теорем 13.1 – 13.3 и лемм 13.1, 13.2 вытекают следующие достаточные условия локальной и пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова.

Теорема 13.4 [138]. *Если система* (12.1) *равномерно вполне управляема и выполнено хотя бы одно из трех условий:*
а) *система* (13.9) *имеет устойчивые показатели Ляпунова,*
б) *система* (13.9) *правильна,*
в) *система* (13.9) *диагонализируема,*
то полный спектр показателей Ляпунова системы (12.4) *пропорционально локально управляем.*

Теорема 13.5 [138]. *Если система* (12.3) *равномерно локально достижима и выполнено хотя бы одно из трех условий:*
а) *система* (13.9) *имеет устойчивые показатели Ляпунова,*
б) *система* (13.9) *правильна,*
в) *система* (13.9) *диагонализируема,*
то полный спектр показателей Ляпунова системы (12.3) *локально управляем.*

§ 14. Одновременная локальная управляемость спектра и коэффициента неправильности Ляпунова правильных систем

Здесь установлена одновременная пропорциональная локальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова и коэффициента неправильности Ляпунова системы (12.4) при условии равномерной полной управляемости системы (12.1) и правильности однородной системы (13.9).

Покажем, что в случае правильности однородной системы (13.9) в действительности можно локально управлять не только полным спектром показателей Ляпунова, но одновременно с ним и коэффициентом неправильности Ляпунова.

Т е о р е м а 14.1 [141]. *Если система* (12.1) *равномерно вполне управляема, а однородная система* (13.9) *правильна, то* (12.4) *обладает свойством одновременной пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова и коэффициента неправильности Ляпунова, т. е. найдутся такие* $\beta > 0$ *и* $l_0 > 0$, *что для любого набора чисел* $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, *удовлетворяющего неравенству*

$$\max_{i=1,\ldots,n} |\mu_i - \lambda_i(A)| \leqslant \beta,$$

и любого числа $\sigma \in [0, \beta]$ *существует управление* $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$,

$$\|U\|_C \leqslant l_0 \max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : i = 1, \ldots, n\},$$

такое, что

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \ i = 1, \ldots, n, \quad \sigma_{\text{Л}}(A + BU) = \sigma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем правильную однородную систему (12.1) перроновским преобразованием $y = L(t)x$ к системе

$$\dot{y} = F(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{14.1}$$

с верхней треугольной матрицей $F(\cdot) = \{f_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n$. Система (14.1) правильна, поэтому в силу критерия Ляпунова правильности треугольной системы [18, с. 141] диагональные элементы матрицы $F(\cdot)$ имеют точные средние значения $\breve{f}_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$, реализующие полный спектр показателей Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ системы (14.1). Выберем матрицу перроновского преобразования $L(\cdot)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\lambda_i(A) = \breve{f}_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Преобразование $y = L(t)x$ приводит систему (12.1) к системе

$$\dot{y} = F(t)y + L(t)B(t)u,$$

которая равномерно вполне управляема согласно теореме 1.3. Применяя к этой системе теорему 11.5, найдем величины $\delta > 0$, $l > 0$ и положим $\beta = \delta/2$. Возьмем любой набор чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, такой, что

$$|\mu_i - \lambda_i(A)| \leqslant \beta, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и произвольное число $\sigma \in [0, \beta]$. Положим

$$P(t) = \operatorname{diag}(\mu_1 - \lambda_1(A), \ldots, \mu_{n-1} - \lambda_{n-1}(A), p(t) - \lambda_n(A)),$$

где

$$p(t) = \mu_n - \sigma + \frac{\sigma}{2}(\sin\ln(|t|+1) + \cos\ln(|t|+1) + 1).$$

Тогда [18, с. 77–78] $\underline{p} = \mu_n - \sigma$, $\overline{p} = \mu_n$ и $\mu_n - \sigma \leqslant p(t) \leqslant \mu_n$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\|p - \lambda_n(A)\|_C \leqslant |\mu_n - \lambda_n(A)| + \sigma \leqslant 2\max\{\sigma, |\mu_n - \lambda_n(A)|\},$$

поэтому

$$\|P\|_C = \max\{\|p - \lambda_n(A)\|_C, |\mu_i - \lambda_i(A)| : \, i = 1, \ldots, n-1\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : \, i = 1, \ldots, n\} \leqslant 2\beta = \delta.$$

Из теоремы 11.5 следует, что найдется управление $V(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|V\|_C \leqslant l\|P\|_C$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность замкнутой системы

$$\dot{y} = (F(t) + L(t)B(t)V(t))y \tag{14.2}$$

и возмущенной системы

$$\dot{z} = G(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{14.3}$$

где $G(\cdot) := F(\cdot) + P(\cdot)$, $G(\cdot) = \{g_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n$. К системе (14.2) применим обратное преобразование $y = L(t)x$, получим систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)V(t)L(t))x.$$

Положим $U(t) = V(t)L(t)$. Тогда

$$\|U\|_C \leqslant \|V\|_C\|L\|_C = \|V\|_C \leqslant l\|P\|_C \leqslant$$

$$\leqslant 2l\max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : \, i = 1, \ldots, n\} =$$

$$=: l_0\max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : \, i = 1, \ldots, n\},$$

а для показателей Ляпунова и коэффициента неправильности Ляпунова системы (12.4) с $U = U(\cdot)$ справедливы равенства

$$\lambda_i(A + BU) = \lambda_i(G), \; i = 1, \ldots, n, \quad \sigma_{\text{Л}}(A + BU) = \sigma_{\text{Л}}(G).$$

Докажем, что

$$\lambda_i(G) = \mu_i, \; i = 1, \ldots, n, \quad \sigma_{\text{Л}}(G) = \sigma.$$

С этой целью рассмотрим усеченную систему

$$\dot{\eta} = \widetilde{G}(t)\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{14.4}$$

матрица $\widetilde{G}(t) = \{g_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n-1}$ которой получается из $G(t)$ вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Поскольку $\widetilde{G}(\cdot)$ верхняя треугольная, а ее диагональные элементы имеют точные средние значения

$$\breve{g_{ii}} = \breve{f_{ii}} + \mu_i - \lambda_i(A) = \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

в силу вышеупомянутого критерия правильности система (14.4) правильна, а ее полный спектр состоит из чисел

$$\lambda_i(\widetilde{G}) = \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть $\eta^{(1)}(\cdot), \ldots, \eta^{(n-1)}(\cdot)$ — нормальная фундаментальная система решений системы (14.4), такая, что

$$\lambda[\eta^{(i)}] = \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Для каждых $t \in \mathbb{R}$ и $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ через $z^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n$ обозначим вектор, первые $(n-1)$ координат которого совпадают с соответствующими координатами вектора $\eta^{(i)}(t)$, а последняя координата равна нулю. Тогда $z^{(1)}(\cdot), \ldots, z^{(n-1)}(\cdot)$ — линейно независимые решения системы (14.3), такие, что $\lambda[z^{(i)}] = \mu_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Найдем показатель Ляпунова решения $z^{(n)}(\cdot)$ системы (14.3), удовлетворяющего начальному условию $z^{(n)}(0) = e_n$. Для его координат справедливы равенства

$$z_n^{(n)}(t) = h_n(t),$$

$$z_k^{(n)}(t) = \sum_{j=k+1}^{n} h_k(t) \int_0^t h_k^{-1}(s) f_{kj}(s) z_j^{(n)}(s)\, ds, \ k = n-1, \ldots, 1,$$

где $h_i(t) := \exp \int\limits_0^t g_{ii}(s)\, ds$, $i = 1, \ldots, n$. Докажем, что при каждом $l \in$ $\in \{1, \ldots, n\}$ имеет место неравенство

$$\lambda[z_l^{(n)}] \leqslant \mu_n. \tag{14.5}$$

Действительно, при $l = n$ выполнено строгое равенство

$$\lambda[z_n^{(n)}] = \lambda[h_n] = \overline{g_{nn}} = \overline{(f_{nn} + p - \lambda_n(A))} = \bar{p} + \breve{f_{nn}} - \lambda_n(A) = \bar{p} = \mu_n.$$

Предположим, что (14.5) установлено при всех $l \in \{n, \dots, k+1\}$, где $k \in \{n-1, \dots, 1\}$. Проверим неравенство (14.5) для $l = k$. Для каждого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ имеем соотношения

$$\lambda[f_{kl}(t)h_k^{-1}(t)z_l^{(n)}(t)] \leqslant \lambda[h_k^{-1}] + \lambda[z_l^{(n)}] \leqslant \overline{(-g_{kk})} + \mu_n = \mu_n - \breve{g}_{kk} = \mu_n - \mu_k,$$

причем разность $\mu_n - \mu_k$ неотрицательна. Следовательно [39, с. 132],

$$\lambda[\int_0^t f_{kl}(s)h_k^{-1}(s)z_l^{(n)}(s)\,ds] \leqslant \mu_n - \mu_k,$$

поэтому

$$\lambda[z_k^{(n)}] \leqslant \max_{l=k+1,\dots,n} \lambda[h_k(t)\int_0^t f_{kl}(s)h_k^{-1}(s)z_l^{(n)}(s)\,ds] \leqslant \lambda[h_k] + \mu_n - \mu_k = \mu_n.$$

Таким образом, неравенство (14.5) доказано. Из него вытекает, что

$$\lambda[z^{(n)}] = \max_{k=1,\dots,n}\{\lambda[z_k^{(n)}]\} = \lambda[z_n^{(n)}] = \mu_n.$$

Совокупность функций $z^{(1)}(\cdot), \dots, z^{(n)}(\cdot)$ линейно независима на $\mathbb{R}$, так как $z_n^{(n)}(t) \neq 0$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, а

$$z_n^{(1)}(t) = \ldots = z_n^{(n-1)}(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, совокупность функций $z^{(1)}(\cdot), \dots, z^{(n)}(\cdot)$ образует ФСР системы (14.3). Докажем ее нормальность. С этой целью возьмем произвольный ненулевой вектор $\xi = \mathrm{col}(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и вычислим показатель Ляпунова решения

$$z(\cdot) = \sum_{i=1}^n \xi_i z^{(i)}(\cdot).$$

Пусть $j := \max\{i : \xi_i \neq 0\}$. Если $j = n$, то

$$z_n(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i z_n^{(i)}(t) = \xi_n z_n^{(n)}(t),$$

поэтому

$$\lambda[z] \geqslant \lambda[z_n] = \lambda[z_n^{(n)}] = \mu_n.$$

С другой стороны,

$$\lambda[z] = \lambda[\sum_{i=1}^n \xi_i z^{(i)}] \leqslant \max\{\lambda[z^{(i)}] : i = 1, \dots, n\} = \mu_n.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\lambda[z] = \mu_n = \max\{\lambda[z^{(i)}] : \xi_i \neq 0\}.$$

Если же $j < n$, то последняя координата вектора $z(t)$ тождественно равна нулю на $\mathbb{R}$, поэтому в силу нормальности ФСР $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n-1)}$ системы (14.4) имеем равенства

$$\lambda[z] = \lambda[\sum_{i=1}^{j} \xi_i \eta^{(i)}] = \lambda[\eta^{(j)}] = \mu_j = \max\{\lambda[z^{(i)}] : \xi_i \neq 0\}.$$

Это означает, что ФСР $z^{(1)}(\cdot), \ldots, z^{(n)}(\cdot)$ несжимаема [39, с. 142] и в силу теоремы Ляпунова [39, с. 142–144] нормальна. Итак, полный спектр показателей Ляпунова системы (14.3) состоит из чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$. Для коэффициента неправильности Ляпунова этой системы имеем равенства [57, с. 77]

$$\sigma_{\text{Л}}(G) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G) - \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^t \mathrm{Sp} G(s)\, ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i - \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^t (\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ii}(s) + \mu_i - \lambda_i(A)) + f_{nn}(s) + p(s) - \lambda_n(A))\, ds =$$

$$= \mu_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) - \sum_{i=1}^{n} \breve{f}_{ii} - \underline{p} = \mu_n - \underline{p} = \mu_n - (\mu_n - \sigma) = \sigma.$$

Теорема доказана.

§ 15. Расчлененные линейные однородные системы

В этом параграфе введено и изучено понятие расчлененности линейной однородной системы. Это понятие в дальнейшем будет играть ведущую роль в формулировках достаточных условий локальной управляемости показателей Ляпунова. В терминах расчлененности в параграфе 18 будет сформулировано также необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова линейной однородной системы.

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15.1}$$

с ограниченными кусочно непрерывными на $\mathbb{R}$ коэффициентами и матрицей Коши $X(t,s)$; $a := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\|$.

Пусть $x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot)$ — фундаментальная система решений (ФСР) системы (15.1). Для каждых $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $V_i(t)$ линейную оболочку векторов $x_j(t)$, $j = 1,\ldots,n$, $j \neq i$, а через $\varphi_i(t) := \sphericalangle(x_i(t), V_i(t))$ — угол между вектором $x_i(t)$ и подпространством $V_i(t)$.

Зафиксируем произвольное $\vartheta > 0$. Для всяких $\gamma \in]0, \pi/2]$, $k \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1,\ldots,n\}$ положим

$$\Gamma_i^\gamma(\vartheta) := \{j \in \mathbb{N} : \varphi_i(j\vartheta) \geqslant \gamma\}, \quad \Gamma_i^\gamma(k;\vartheta) := \Gamma_i^\gamma(\vartheta) \cap \{1,\ldots,k\}.$$

Пусть $N_i^\gamma(k;\vartheta)$ — число элементов множества $\Gamma_i^\gamma(k;\vartheta)$, т. е.

$$N_i^\gamma(k;\vartheta) := \sum_{j\in\Gamma_i^\gamma(k;\vartheta)} 1.$$

Введем также обозначения

$$g_i^\gamma(k;\vartheta) := \frac{N_i^\gamma(k;\vartheta)}{k}, \quad f_i(k;\vartheta) := \frac{\ln\|x_i(k\vartheta)\|}{k\vartheta}.$$

В тех случаях, когда числа γ и ϑ заранее фиксированы, соответствующие символы во введенных обозначениях будем опускать.

Определение 15.1 [101]. Пусть $x(\cdot)$ — нетривиальное решение линейной однородной системы (13.9). Строго возрастающую к $+\infty$ последовательность $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ назовем **реализующей последовательностью решения** $x(\cdot)$, если

$$\lambda[x] = \lim_{k\to\infty} t_k^{-1} \ln\|x(t_k)\|.$$

Определение 15.2 [101]. Будем говорить, что решение $x_i(\cdot)$, входящее в ФСР $x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot)$, ϑ-**отчленено (от остальных решений ФСР)**, если при заданном $\vartheta > 0$ найдутся такое $\gamma \in]0,\pi/2]$ и такая реализующая последовательность $\{k_j\vartheta\}_{j=1}^\infty$ решения $x_i(\cdot)$, где $k_j \in \mathbb{N}$, что

$$\lim_{j\to\infty} g_i^\gamma(k_j;\vartheta) > 0.$$

ФСР $x_1,\ldots,x_n$ назовем ϑ-**расчлененной**, если каждое входящее в нее решение ϑ-отчленено.

Изучим основные свойства введенных понятий.

Л е м м а 15.1 [101]. *Пусть* V *— векторное подпространство* $\mathbb{R}^n$*,* $\dim V = n-1$ *и* $p \in \mathbb{R}^n \setminus V$ *— произвольный ненулевой вектор. Если* $S \in \mathrm{M}_n$ *— невырожденная матрица, то*

$$\sphericalangle(Sp, SV) \geqslant \frac{2\sphericalangle(p,V)(\varkappa(S))^{1-n}}{\pi},$$

где $\varkappa(S) = \|S\|\,\|S^{-1}\|$ *— спектральное число обусловленности матрицы* S*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в подпространстве V произвольный ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Тогда объем n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $p, v_1, \ldots, v_{n-1}$, равен $\|p\| \sin\varphi$, где φ — угол между p и V. Поэтому [177, с. 280] объем n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $Sp, Sv_1, \ldots, Sv_{n-1}$, равен $|\det S|\,\|p\|\sin\varphi$. С другой стороны, этот объем оценивается сверху величиной

$$\|Sp\|\,\|Sv_1\| \ldots \|Sv_{n-1}\| \sin\psi \leqslant \|S\|^n \|p\| \sin\psi,$$

где $\psi = \sphericalangle(Sp, SV)$. Отсюда

$$\sin\psi \geqslant \frac{|\det S| \sin\varphi}{\|S\|^n}.$$

Так как углы φ и ψ лежат в пределах $]0, \pi/2]$, получаем оценки

$$\psi \geqslant \sin\psi \geqslant \frac{|\det S|\sin\varphi}{\|S\|^n} \geqslant \frac{2\varphi|\det S|}{\pi\|S\|^n}.$$

Пусть $0 < s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n$ — сингулярные числа [176, с. 493] матрицы S. Тогда [176, с. 519 – 525] имеют место равенства $\|S^{-1}\| = s_1^{-1}$, $\|S\| = s_n$, $|\det S| = s_1 s_2 \ldots s_n$, поэтому $\varkappa(S) = s_n s_1^{-1}$ и

$$\frac{|\det S|}{\|S\|^n} = s_1 s_2 \ldots s_n^{1-n} \geqslant (s_1 s_n^{-1})^{n-1} = (\varkappa(S))^{1-n},$$

откуда получаем требуемое.

Т е о р е м а 15.1 [101]. *Если входящее в ФСР* $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ *решение* $x_i(\cdot)$ ϑ_0*-отчленено при некотором* $\vartheta_0 > 0$*, то оно является* ϑ*-отчлененным при всяком* $\vartheta > 0$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть число $\gamma \in]0, \pi/2]$ и строго возрастающая последовательность $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ выбраны так, что обеспечивается выполнение условий

$$\lim_{j\to\infty} f_i(k_j; \vartheta_0) = \lambda[x_i], \quad \lim_{j\to\infty} g_i^{\gamma}(k_j; \vartheta_0) > 0.$$

Каждому $j \in \mathbb{N}$ поставим в соответствие целое неотрицательное число l_j такое, что
$$k_j\vartheta_0 \in [l_j\vartheta, (l_j+1)\vartheta[. \tag{15.2}$$
Так как последовательность $\{k_j\}$ строго возрастает, то $\{l_j\}$ является неубывающей, при этом $\lim\limits_{j\to\infty} l_j = \infty$. Из неравенства
$$0 \leqslant k_j\vartheta_0 - l_j\vartheta < \vartheta$$
следует
$$\lim_{j\to\infty} \frac{k_j\vartheta_0}{l_j\vartheta} = \lim_{j\to\infty}\Big(1 + \frac{k_j\vartheta_0 - l_j\vartheta}{l_j\vartheta}\Big) = 1$$
и
$$\|X^{\pm 1}(l_j\vartheta, k_j\vartheta_0)\| \leqslant \exp(a\vartheta).$$
Отсюда получаем
$$f_i(l_j;\vartheta) = \frac{1}{l_j\vartheta}\ln\|X(l_j\vartheta, k_j\vartheta_0)x_i(k_j\vartheta_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{l_j\vartheta}\ln(\|X(l_j\vartheta, k_j\vartheta_0)\|\,\|x_i(k_j\vartheta_0)\|) \leqslant \frac{1}{l_j\vartheta}(a\vartheta + \ln\|x_i(k_j\vartheta_0)\|),$$
и, с другой стороны,
$$f_i(l_j;\vartheta) \geqslant \frac{1}{l_j\vartheta}\ln(\|X(k_j\vartheta_0, l_j\vartheta)\|^{-1}\|x_i(k_j\vartheta_0)\|) \geqslant \frac{1}{l_j\vartheta}(-a\vartheta + \ln\|x_i(k_j\vartheta_0)\|).$$
Теперь, учитывая равенства
$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{l_j\vartheta}(\pm a\vartheta + \ln\|x_i(k_j\vartheta_0)\|) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{l_j\vartheta}\ln\|x_i(k_j\vartheta_0)\| =$$
$$= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{k_j\vartheta_0}\ln\|x_i(k_j\vartheta_0)\| \cdot \lim_{j\to\infty}\frac{k_j\vartheta_0}{l_j\vartheta} = \lambda[x_i],$$
будем иметь соотношение $\lim\limits_{j\to\infty} f_i(l_j;\vartheta) = \lambda[x_i]$.

Пусть $\vartheta_1 = \max\{\vartheta_0, \vartheta\}/2$. При любых $t, \tau \in \mathbb{R}$ линейное подпространство $V_i(t)$ решений $x_j(t)$, $j \neq i$, можно представить в виде
$$V_i(t) = X(t,\tau)V_i(\tau),$$
поэтому в силу леммы 15.1 при любых $|t-\tau| \leqslant \vartheta_1$ имеем оценки
$$\varphi_i(t) = \sphericalangle(x_i(t), V_i(t)) = \sphericalangle(X(t,\tau)x_i(\tau), X(t,\tau)V_i(\tau)) \geqslant$$
$$\geqslant 2\varkappa^{1-n}(X(t,\tau))\varphi_i(\tau)/\pi \geqslant 2\exp(-2a(n-1)\vartheta_1)\varphi_i(\tau)/\pi =: c\varphi_i(\tau).$$

Возможны 2 случая.

1) $\vartheta < \vartheta_0$. Пусть $p := [\vartheta_0/\vartheta]$ — целая часть числа ϑ_0/ϑ. Возьмем $j \in \mathbb{N}$ такое, что $k_j > 2$. Из (15.2) получаем

$$l_j \leqslant k_j\vartheta_0/\vartheta < k_j([\vartheta_0/\vartheta] + 1) = k_j(p+1),$$

т. е. $k_j/l_j > 1/(p+1)$.

Пусть m пробегает множество точек $\Gamma_i^\gamma(k_j - 2; \vartheta_0)$. Полуинтервал $[(m-1/2)\vartheta_0, (m+1/2)\vartheta_0[$ при каждом таком m содержит не менее p точек, кратных ϑ. Во всех этих точках угол φ_i не меньше $c\gamma$. Кроме того, все эти точки на числовой прямой находятся левее

$$(k_j - 2 + 1/2)\vartheta_0 < k_j\vartheta_0 - \vartheta_0 < l_j\vartheta + \vartheta - \vartheta_0 < l_j\vartheta,$$

т. е. левее $l_j\vartheta$. Значит, все они принадлежат множеству $\Gamma_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta)$. Поэтому общее количество элементов множества $\Gamma_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta)$ не меньше

$$pN_i^\gamma(k_j - 2; \vartheta_0) \geqslant p(N_i^\gamma(k_j;\vartheta_0) - 2).$$

Таким образом,

$$N_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta) \geqslant p(N_i^\gamma(k_j;\vartheta_0) - 2)$$

и

$$g_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta) = \frac{N_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta)}{l_j} \geqslant \frac{p(N_i^\gamma(k_j;\vartheta_0) - 2)}{l_j} = \\ = \frac{pN_i^\gamma(k_j;\vartheta_0)}{k_j} \cdot \frac{k_j}{l_j} - \frac{2p}{l_j} > \frac{pg_i^\gamma(k_j;\vartheta_0)}{p+1} - \frac{2p}{l_j}.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{j\to\infty} g_i^{c\gamma}(l_j,\vartheta) \geqslant \lim_{j\to\infty}\Big(\frac{pg_i^\gamma(k_j,\vartheta_0)}{p+1} - \frac{2p}{l_j}\Big) = \frac{p}{p+1}\cdot \lim_{j\to\infty} g_i^\gamma(k_j,\vartheta_0) > 0.$$

2) $\vartheta \geqslant \vartheta_0$. Обозначим $q = [\vartheta/\vartheta_0]$. Пусть $j \in \mathbb{N}$ таково, что $l_j > 1$. Из (15.2) имеем неравенства

$$k_j/l_j \geqslant \vartheta/\vartheta_0 \geqslant [\vartheta/\vartheta_0] = q.$$

Возьмем какое-либо натуральное $l < l_j$. Тогда

$$(l + 1/2)\vartheta < (l+1)\vartheta \leqslant l_j\vartheta \leqslant k_j\vartheta_0.$$

В полуинтервале $[(l-1/2)\vartheta, (l+1/2)\vartheta[$ содержится не более $q+1$ точек, кратных ϑ_0. Если хотя бы одна из этих точек принадлежит $\Gamma_i^\gamma(k_j;\vartheta_0)$, то $l \in \Gamma_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta)$. Следовательно,

$$N_i^\gamma(k_j;\vartheta_0) \leqslant (q+1)N_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta)$$

и

$$g_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta) = \frac{N_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta)}{l_j} \geqslant \frac{N_i^{\gamma}(k_j;\vartheta_0)}{(q+1)l_j} = \frac{N_i^{\gamma}(k_j;\vartheta_0)}{k_j} \cdot \frac{k_j}{(q+1)l_j} \geqslant \frac{g_i^{\gamma}(k_j;\vartheta_0)q}{q+1}.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, g_i^{c\gamma}(l_j,\vartheta) \geqslant q \cdot \lim_{j\to\infty} \frac{g_i^{\gamma}(k_j,\vartheta_0)}{q+1} > 0.$$

Выберем теперь из последовательности $\{l_j\}$ строго возрастающую подпоследовательность $\{l_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$, на которой реализуется $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\, g_i^{c\gamma}(l_j;\vartheta)$. Для этой подпоследовательности справедливы соотношения

$$\lim_{m\to\infty} f_i(l_{j_m};\vartheta) = \lambda[x_i], \quad \lim_{m\to\infty} g_i^{c\gamma}(l_{j_m};\vartheta) > 0,$$

т. е. решение $x_i(\cdot)$ ϑ-отчленено. Теорема доказана.

Следствие 15.1 [101]. *Если ФСР* $x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot)$ *системы* (15.1) ϑ_0*-расчленена при некотором* $\vartheta_0 > 0$*, то она является* ϑ*-расчлененной при всяком* $\vartheta > 0$*.*

Основываясь на теореме 15.1 и следствии 15.1, будем называть входящее в ФСР $x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot)$ решение $x_i(\cdot)$ **отчлененным**, если оно ϑ-отчленено при некотором $\vartheta > 0$. Соответственно, ФСР системы (15.1) называем **расчлененной**, если все ее решения отчленены.

Определение 15.3 [101]. Систему (15.1), обладающую расчлененной нормальной ФСР, будем называть **расчлененной**.

Замечание 15.1. Существуют нерасчлененные системы, в том числе и такие, у которых нет ни одной расчлененной ФСР. Например, любая ФСР стационарной системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

не является расчлененной, поскольку угол $\varphi(t)$ между любыми двумя решениями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ этой системы при $t \to +\infty$ монотонно стремится либо к 0, либо к π.

Для произвольных $T \geqslant 1$, $\alpha \in]0,\pi/2]$ и $i \in \{1,\ldots,n\}$ обозначим

$$G_i^{\alpha}(T) = \{t \in [0,T] : \varphi_i(t) \geqslant \alpha\}.$$

Так как функция $t \mapsto \varphi_i(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$, то множество $G_i^{\alpha}(T)$ измеримо по Лебегу.

Теорема 15.2 [100]. *Решение* $x_i(\cdot)$ *отчлененено в том и только том случае, когда существуют такое* $\alpha \in]0, \pi/2]$ *и такая реализующая последовательность* $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ *этого решения, что*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\operatorname{mes} G_i^{\alpha}(t_j)}{t_j} > 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть решение $x_i(\cdot)$ отчленено от остальных решений ФСР $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$. Возьмем $\vartheta = 1$ и такую реализующую последовательность $\{k_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ решения x_i, что $\lim\limits_{j\to\infty} g_i^{\gamma}(k_j; 1) > 0$ при некотором $\gamma \in]0, \pi/2]$.

Если $t \in [l-1, l[$, где $l \in \mathbb{N}$, то в силу леммы 15.1

$$\varphi_i(t) \geqslant 2\exp(-2a(n-1))\varphi_i(l)/\pi =: c\varphi_i(l),$$

следовательно, если $l \in \Gamma_i^{\gamma}(k_j; 1)$, то $[l-1, l[\subset G_i^{c\gamma}(k_j)$. Отсюда вытекают неравенство

$$\operatorname{mes} G_i^{c\gamma}(k_j) \geqslant N_i^{\gamma}(k_j; 1)$$

и оценки

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{\operatorname{mes} G_i^{c\gamma}(k_j)}{k_j} \geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{N_i^{\gamma}(k_j; 1)}{k_j} = \lim_{j\to\infty} g_i^{\gamma}(k_j; 1) > 0.$$

Положив $\alpha = c\gamma$ и выбрав в качестве $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ строго возрастающую подпоследовательность последовательности $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, на которой реализуется $\varlimsup\limits_{j\to\infty} \dfrac{\operatorname{mes} G_i^{c\gamma}(k_j)}{k_j}$, получим доказываемое утверждение.

Достаточность. Пусть при некотором $\alpha \in]0, \pi/2]$ существует реализующая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ решения $x_i(\cdot)$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\operatorname{mes} G_i^{\alpha}(t_j)}{t_j} > 0.$$

Положим $k_j = [t_j]$, $j \in \mathbb{N}$, и выберем из последовательности $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ строго возрастающую подпоследовательность, которую снова будем обозначать $\{k_j\}$. Она является реализующей для решения x_i, так как

$$\|x_i(k_j)\| = \|X(k_j, t_j)x_i(t_j)\| \leqslant e^a \|x_i(t_j)\|,$$
$$\|x_i(k_j)\| \geqslant e^{-a} \|x_i(t_j)\|$$

и

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{\ln \|x_i(k_j)\|}{k_j} \leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \Big(\frac{a + \ln \|x_i(t_j)\|}{t_j} \cdot \frac{t_j}{k_j} \Big) = \lim_{j\to\infty} \frac{\ln \|x_i(t_j)\|}{t_j} = \lambda[x_i],$$

$$\varliminf_{j\to\infty}\frac{\ln\|x_i(k_j)\|}{k_j}\geqslant\varliminf_{j\to\infty}\Big(\frac{-a+\ln\|x_i(t_j)\|}{t_j}\cdot\frac{t_j}{k_j}\Big)=\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\|x_i(t_j)\|}{t_j}=\lambda[x_i],$$

т. е. существует точный

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\|x_i(k_j)\|}{k_j}=\lambda[x_i].$$

Пусть $t\in G_i^\alpha(t_j)$. Тогда для $l=[t]$ имеют место неравенства

$$\varphi_i(l)\geqslant 2\exp(-2a(n-1))\varphi_i(t)/\pi=c\varphi_i(t)\geqslant c\alpha=:\gamma$$

и $l\leqslant[t_j]=k_j$, поэтому $l\in\Gamma_i^\gamma(k_j;1)\cup\{0\}$. Следовательно,

$$N_i^\gamma(k_j;1)+1\geqslant\operatorname{mes}G_i^\alpha(t_j)$$

и

$$\varlimsup_{j\to\infty}g_i^\gamma(k_j;1)=\varlimsup_{j\to\infty}\frac{N_i^\gamma(k_j;1)}{k_j}\geqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\operatorname{mes}G_i^\alpha(t_j)-1}{k_j}=\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\operatorname{mes}G_i^\alpha(t_j)}{t_j}>0.$$

Выбирая из последовательности $\{k_j\}$ подпоследовательность, на которой реализуется $\varlimsup\limits_{j\to\infty}g_i^\gamma(k_j;1)$, получим утверждение теоремы.

Теорема 15.3 [101]. *Ляпуновское преобразование сохраняет свойство отчлененности решения.*

Доказательство. Пусть входящее в ФСР $x_1(\cdot),\dots,x_n(\cdot)$ системы (15.1) решение $x_i(\cdot)$ отчленено. Применим к (15.1) преобразование Ляпунова $y=L(t)x$ и покажем, что в ФСР $y_j(t)=L(t)x_j(t)$, $j=1,\dots,n$, преобразованной системы решение $y_i(\cdot)$ является отчлененным.

Зафиксируем любое $\vartheta>0$. Обозначим через $\psi_i(t)$ угол между $y_i(t)$ и линейной оболочкой $L(t)V_i(t)$ векторов $y_k(t)$, $k\neq i$. Из леммы 15.1 имеем неравенство

$$\psi_i(t)\geqslant 2\varphi_i(t)\varkappa^{1-n}(L(t))/\pi=2\varphi_i(t)\|L(t)\|^{1-n}\|L^{-1}(t)\|^{1-n}/\pi.$$

Так как $L(t)$ — матрица Ляпунова, существует $c>0$ такое, что

$$2\|L(t)\|^{1-n}\|L^{-1}(t)\|^{1-n}/\pi\geqslant c$$

при всех $t\in\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\psi_i(t)\geqslant c\varphi_i(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Для $\alpha \in]0, \pi/2]$ обозначим

$$L\Gamma_i^\alpha := \{j \in \mathbb{N} :\ \psi_i(j\vartheta) \geqslant \alpha\},\ L\Gamma_i^\alpha(k) := L\Gamma_i^\alpha \cap \{1, \ldots, k\},\ Lg_i^\alpha(k) := \frac{1}{k} \sum_{j \in L\Gamma_i^\alpha(k)} 1.$$

Если $j \in \Gamma_i^\alpha$, то $\psi_i(j\vartheta) \geqslant c\varphi_i(j\vartheta) \geqslant c\alpha$, т. е. $j \in L\Gamma_i^{c\alpha}$. Следовательно, $\Gamma_i^\alpha(k) \subset L\Gamma_i^{c\alpha}(k)$ и $g_i^\alpha(k) \leqslant Lg_i^{c\alpha}(k)$ при всяком $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\gamma \in]0, \pi/2]$ и $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ таковы, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln \|x_i(k_j\vartheta)\|}{k_j\vartheta} = \lambda[x_i], \quad \lim_{j\to\infty} g_i^\gamma(k_j) > 0.$$

Тогда

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln \|y_i(k_j\vartheta)\|}{k_j\vartheta} = \lambda[y_i], \quad \overline{\lim_{j\to\infty}}\, Lg_i^{c\gamma}(k_j) \geqslant \lim_{j\to\infty} g_i^\gamma(k_j) > 0.$$

Возьмем подпоследовательность $\{k_{j_m}\}_{m=1}^\infty$ последовательности $\{k_j\}_{j=1}^\infty$, на которой реализуется $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\, Lg_i^{c\gamma}(k_j)$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln \|y_i(k_{j_m}\vartheta)\|}{k_{j_m}\vartheta} = \lambda[y_i], \quad \lim_{m\to\infty} Lg_i^{c\gamma}(k_{j_m}) > 0.$$

Эти соотношения означают ϑ-отчлененность решения $y_i(\cdot)$. Теорема доказана.

Следствие 15.2 [101]. *Свойство расчлененности системы сохраняется при всяком ляпуновском преобразовании, при этом расчлененная ФСР переходит в расчлененную.*

Доказательство. Предположим, что система (15.1) расчленена, и $x_1, \ldots, x_n$ — расчлененная нормальная ФСР этой системы. Применим к (15.1) ляпуновское преобразование $y = L(t)x$. Тогда ФСР $y_j(t) = L(t)x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, преобразованной системы нормальна, а ее расчлененность следует непосредственно из теоремы 15.3.

Пример 15.1 [101]. Всякая диагонализируемая линейная однородная система является расчлененной, поскольку нормированная при каком-либо $t_0 \in \mathbb{R}$ ФСР диагональной системы нормальна, а входящие в эту ФСР решения сохраняют между собой постоянные углы (равные $\pi/2$).

§ 16. Локальная управляемость показателей Ляпунова расчлененных систем

В этом параграфе доказана локальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова системы (12.4) при условии равномерной полной управляемости системы (12.1) и расчлененности свободной системы (15.1) (теорема 16.1, следствия 16.2 и 16.3).

Для доказательства основных утверждений этого параграфа нам понадобятся две леммы.

Лемма 16.1 [101]. *Пусть* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *и* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *— произвольные ограниченные отображения и* $\psi(\mu) := \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,(a(k) + \mu b(k))$ *. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Функция* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *выпукла и липшицева на* $\mathbb{R}$ *.*

2) *Если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\lim_{j\to\infty} a(k_j) = \psi(0), \quad \rho := \lim_{j\to\infty} b(k_j) > 0,$$

то функция ψ (*строго*) монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty[$, и при всех $\mu \geqslant 0$ выполнена оценка $\psi(\mu) - \psi(0) \geqslant \rho\mu$.

Доказательство. 1) Имеем равенство

$$\psi(\mu) = \lim_{k\to\infty} \sup_{m>k}(a(m) + \mu b(m)).$$

При любом $k \in \mathbb{N}$ функция

$$\psi_k(\mu) := \sup_{m>k}(a(m) + \mu b(m))$$

выпукла как поточечная верхняя грань семейства выпуклых (аффинных) функций согласно теореме 5.5 из [152, с. 52] и удовлетворяет двусторонней оценке

$$-\infty < \inf_{k\in\mathbb{N}} a(k) - |\mu| \sup_{k\in\mathbb{N}} b(k) \leqslant \psi_k(\mu) \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} a(k) + |\mu| \sup_{k\in\mathbb{N}} b(k) < +\infty. \quad (16.1)$$

В силу ограниченности функций $a(k)$ и $b(k)$ предел монотонно убывающей по k последовательности выпуклых функций $\psi_k(\mu)$ существует и конечен, поэтому согласно теореме 10.8 из [152, с. 107] функция $\psi(\mu) = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(\mu)$ является выпуклой на $\mathbb{R}$. Так как оценки (16.1) сохраняются при предельном переходе, отсюда в силу следствия 10.5.2 из

[152, с. 104] получаем, что функция ψ липшицева с константой Липшица $L \leqslant \sup\{b(k) : k \in \mathbb{N}\}$.

2) Для любого $\mu \geqslant 0$ имеем оценку

$$\psi(\mu) \geqslant \overline{\lim_{j\to\infty}}(a(k_j) + \mu b(k_j)) = \psi(0) + \mu \lim_{j\to\infty} b(k_j) = \psi(0) + \rho\mu.$$

Возьмем произвольные $\mu_2 > \mu_1 > 0$. Тогда

$$\psi(\mu_2) \geqslant \psi(0) + \rho\mu_2 > \psi(0)$$

и поэтому из определения выпуклости получаем неравенство

$$\psi(\mu_1) \leqslant (1 - \mu_1/\mu_2)\psi(0) + (\mu_1/\mu_2)\psi(\mu_2) <$$

$$< (1 - \mu_1/\mu_2)\psi(\mu_2) + (\mu_1/\mu_2)\psi(\mu_2) = \psi(\mu_2).$$

Лемма доказана.

Следствие 16.1 [101]. *В условиях пункта* 2 *леммы* 16.1 *для любого* $s \geqslant 0$ *существует* μ_s, $0 \leqslant \mu_s \leqslant \rho^{-1}s$, *такое, что* $\psi(\mu_s) = \psi(0) + s$.

Доказательство. В силу леммы имеем неравенство

$$\psi(\rho^{-1}s) \geqslant \psi(0) + s.$$

Так как функция ψ липшицева, она непрерывна, поэтому найдется $\mu_s \in [0,\, \rho^{-1}s]$ такое, что $\psi(\mu_s) = \psi(0) + s$.

Лемма 16.2 [101]. *Пусть* V — *некоторое векторное подпространство* $\mathbb{R}^n$, $\dim V = n-1$ *и* $p \in \mathbb{R}^n \setminus V$ — *произвольный ненулевой вектор. Если линейный оператор* $H \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям* $Hp = p$ *и* $Hx = 0$ *при* $x \in V$, *то его норма может быть вычислена по формуле* $\|H\| = 1/\sin\alpha$, *где* α — *угол между подпространством* V *и вектором* p.

Доказательство. Так как $\dim V = n-1$, каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $x = y + tp$, где $y \in V$, $t \in \mathbb{R}$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор H, получим соотношение $Hx = Hy + tHp = tp$. Возьмем произвольный вектор q, $\|q\| = 1$, ортогональный подпространству V. Учитывая равенства $(q,x) = t(q,p)$ и $(q,p) = \|p\|\sin\alpha$, справедливые по построению, будем иметь представление

$$Hx = (\|p\|\sin\alpha)^{-1}(q,x)p.$$

Отсюда следуют оценка $\|H\| \leqslant (\sin\alpha)^{-1}$ для нормы H и равенство $\|Hq\| = 1/\sin\alpha$, означающее ее достижимость.

Т е о р е м а 16.1 [101]. *Пусть система* (12.1) *ϑ-равномерно вполне управляема, $x_1(\cdot),\dots,x_n(\cdot)$ — произвольная ФСР соответствующей свободной системы* (15.1). *Пусть $I\subset\{1,\dots,n\}$ — совокупность индексов i, для каждого из которых решение $x_i(\cdot)$ является отчлененным. Тогда существуют такие $\beta>0$ и $\delta>0$, что для любых $\xi_i\in[0,\delta]$, $i\in I$, и любого $\eta\in[-\delta,\delta]$ найдется управление $U\in KC_{mn}(\mathbb{R}_+)$, $\|U\|_C\leqslant\beta\max\{|\eta|;\,|\eta+\xi_i|\,:\,i\in I\}$, обеспечивающее для решений $\bar x_1(\cdot),\dots,\bar x_n(\cdot)$ возмущенной системы* (12.4) *с начальными условиями $\bar x_j(0)=x_j(0)$, $j=1,\dots,n$, равенства*

$$\lambda[\bar x_i]=\lambda[x_i]+\eta+\xi_i \quad \text{при } i\in I,$$

$$\lambda[\bar x_i]=\lambda[x_i]+\eta \quad \text{при } i\notin I.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из отчлененности решений x_i, $i\in I$, следует существование такого числа $\gamma\in]0,\pi/2]$ и таких реализующих последовательностей $\{k_j(i)\vartheta\}_{j=1}^{\infty}$, $k_j(i)\in\mathbb{N}$, решений x_i, $i\in I$, что

$$\rho_i:=\lim_{j\to\infty}g_i^{\gamma}(k_j(i))>0$$

для всякого $i\in I$. Заметим, что при этом всегда выполнено неравенство $\rho_i\leqslant 1$, $i\in I$, поскольку

$$\sup\{g_i(k)\,:\,k\in\mathbb{N},\,i\in I\}\leqslant 1.$$

Отсюда в силу леммы 16.1 и следствия 16.1 вытекает, что каждая из функций

$$\Lambda_i^{\gamma}(\mu):=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(f_i(k)+\mu g_i^{\gamma}(k))$$

удовлетворяет оценке

$$\lambda[x_i]+\mu\geqslant\Lambda_i^{\gamma}(\mu)\geqslant\lambda[x_i]+\rho\mu,$$

где $\rho:=\min\{\rho_i\,:\,i\in I\}$, и для любого $s\geqslant 0$ существует $\mu_s^i\in[0,\rho^{-1}s]$ такое, что

$$\Lambda_i^{\gamma}(\mu_s^i)=\lambda[x_i]+s.$$

Так как до конца доказательства число γ будет предполагаться фиксированным, верхний индекс γ далее будем опускать.

Поскольку система (12.1) является ϑ-равномерно вполне управляемой, в силу теоремы 8.1 найдутся такие $\alpha>0$ и $r>0$, что для любых $t_0\in\mathbb{R}$ и $H\in\mathrm{B}_r(E)$ существует кусочно непрерывное управление $U(\cdot)$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_C\leqslant\alpha\|H-E\|$ и обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ замкнутой системы (8.5) при $U=U(\cdot)$ выполнение равенства

$$X_U(t_0+\vartheta,t_0)=X(t_0+\vartheta,t_0)H.$$

Определим положительную величину δ_1 из условия

$$|e^{\pm\vartheta\delta_1}-1|<L_1:=\frac{r\sin\gamma}{n}$$

и положим $L:=\max\{\vartheta,\, L_1/\delta_1\}$. Тогда для всех $s\in\,]-\infty,\delta_1]$ справедливо неравенство $|e^{\vartheta s}-1|\leqslant L|s|$. Действительно, в силу выпуклости экспоненциальной функции при $s\leqslant 0$ выполнено соотношение

$$|e^{\vartheta s}-1|=1-e^{\vartheta s}\leqslant-\vartheta s=\vartheta|s|,$$

а при $0<s\leqslant\delta_1$ — соотношение

$$|e^{\vartheta s}-1|\leqslant|e^{\vartheta\delta_1}-1|s/\delta_1<L_1s/\delta_1.$$

Положим $\delta=\delta_1\rho/6$. Возьмем произвольные величины $\eta\in[-\delta,\delta]$ и $\xi_i\in[0,\delta]$, $i\in I$. Пусть

$$\varepsilon:=\max\{|\eta|;\ |\eta+\xi_i|:\ i\in I\}.$$

Тогда

$$\varepsilon\leqslant 2\delta,\quad |\eta|\leqslant\varepsilon,\quad 0\leqslant\xi_i=\xi_i+\eta-\eta\leqslant|\xi_i+\eta|+|\eta|\leqslant 2\varepsilon$$

при всех $i\in I$. Пусть величины μ_i, $i\in I$, определяются из условий $\Lambda_i(\mu_i)=\lambda[x_i]+\xi_i$. Поскольку $\xi_i\geqslant 0$, числа μ_i определены корректно и при всех $i\in I$ имеем оценки

$$\mu_i\geqslant\Lambda(\mu_i)-\lambda[x_i]=\xi_i\geqslant\rho\mu_i\geqslant 0.$$

При каждом $k\in\mathbb{N}$ определим линейный оператор $H_k\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ равенствами

$$H_kx_i(k\vartheta)=x_i(k\vartheta)\exp s_i(k)\vartheta,\quad i=1,\ldots,n,\tag{16.2}$$

где $s_i(k)=\eta+\mu_i$ при $i\in I$, $k\in\Gamma_i$ и $s_i(k)=\eta$ во всех остальных случаях. Тогда имеем оценки

$$|s_i(k)|=|\eta|\leqslant\varepsilon\leqslant 2\delta<\delta_1$$

при $i\notin I$, $k\in\mathbb{N}$, и

$$|s_i(k)|\leqslant|\eta|+\mu_i\leqslant|\eta|+\rho^{-1}\xi_i\leqslant(1+2\rho^{-1})\varepsilon\leqslant 2(1+2\rho^{-1})\delta=2(\rho+2)\delta_1/6\leqslant\delta_1$$

при $i \in I$, $k \in \mathbb{N}$. По выбору δ_1 отсюда следует, что

$$|e^{\vartheta s_i(k)} - 1| \leqslant L_1,$$

$$|e^{\vartheta s_i(k)} - 1| \leqslant L|s_i(k)| \leqslant (2\rho^{-1} + 1)L\varepsilon.$$

Векторы $x_1(k\vartheta), \ldots, x_n(k\vartheta)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ линейно независимы по определению ФСР и в силу (16.2) являются собственными векторами оператора H_k. Это означает, что H_k — оператор простой структуры, и поэтому согласно теореме 2.5.1 из [80, с. 64] он может быть представлен в виде суммы

$$H_k = \sum_{i=1}^{n} P_k^i \exp \vartheta s_i(k),$$

в которой корневые проекторы P_k^i определяются условиями

$$P_k^i x_j(k\vartheta) = \begin{cases} x_i(k\vartheta) & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq i, \end{cases}$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{n} P_k^i = E$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 16.2 имеем оценку $\|P_k^i\| \leqslant 1/\sin\gamma$ и, следовательно, неравенства

$$\|H_k - E\| = \|\sum_{i=1}^{n} (\exp \vartheta s_i(k) - 1) P_k^i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\exp \vartheta s_i(k) - 1| \, \|P_k^i\| \leqslant$$

$$\leqslant n|\exp \vartheta\delta_1 - 1|/\sin\gamma < nL_1/\sin\gamma = r$$

и, кроме того,

$$\|H_k - E\| \leqslant n|\exp \vartheta\delta_1 - 1|/\sin\gamma \leqslant (n/\sin\gamma)(2\rho^{-1} + 1)L\varepsilon.$$

Из теоремы 8.1 теперь получаем существование такого управления $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R}_+)$, что имеет место оценка

$$\|U\|_C < \alpha \sup_{k \in \mathbb{N}} \|H_k - E\| \leqslant \beta\varepsilon,$$

где

$$\beta = \frac{n\alpha(2\rho^{-1} + 1)L}{\sin\gamma},$$

и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$X_U(k\vartheta + \vartheta, k\vartheta) = X(k\vartheta + \vartheta, k\vartheta)H_k.$$

Для системы (12.4) с таким управлением рассмотрим ФСР $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, состоящую из решений с начальными данными $\bar{x}_j(0) = x_j(0)$. Для показателей этой ФСР справедливы соотношения

$$\lambda[\bar{x}_i] = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k\vartheta} \ln\|\bar{x}_i(k\vartheta)\| = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k\vartheta}\Big(\ln\|x_i(k\vartheta)\| + \vartheta\sum_{j=1}^{k} s_i(j)\Big) =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty}(f_i(k) + \mu_i N_i(k)/k + \eta) = \varlimsup_{k\to\infty}(f_i(k) + \mu_i g_i(k)) + \eta =$$

$$= \Lambda_i(\mu_i) + \eta = \lambda[x_i] + \eta + \xi_i$$

при $i \in I$ и

$$\lambda[\bar{x}_i] = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k\vartheta}\Big(\ln\|x_i(k\vartheta)\| + \vartheta\sum_{j=1}^{k} s_i(j)\Big) = \varlimsup_{k\to\infty}(f_i(k) + \eta) = \lambda[x_i] + \eta$$

при $i \notin I$. Теорема доказана.

Определение 16.1 [101]. Будем говорить, что показатели системы (12.4) **некратно пропорционально локально управляемы**, если при некоторых $\beta > 0$ и $\delta > 0$ для любого набора чисел $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^{n*}$, такого, что $\nu_1 < \ldots < \nu_n$ и $|\nu_i - \lambda_i| \leqslant \delta$, $i = 1, \ldots, n$, найдется управление $U \in KC_{mn}(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_C \leqslant \beta \max_i |\nu_i - \lambda_i|$ и обеспечивающее равенство $\lambda(U) = \nu$.

Следствие 16.2 [101]. *Пусть система* (12.1) *ϑ-равномерно вполне управляема. Если свободная система* (15.1) *расчленена, то показатели системы* (12.4) *некратно пропорционально локально управляемы.*

Доказательство. Пусть $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ — нормальная расчлененная ФСР системы (15.1), $\lambda[x_i] = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$. Для этой ФСР справедливо утверждение теоремы 16.1 при $I = \{1, \ldots, n\}$. Возьмем произвольный набор чисел $\nu_1 < \ldots < \nu_n$, такой что $|\nu_i - \lambda_i| \leqslant \delta/2$, где δ — из формулировки теоремы 16.1. Положим

$$\eta = \min\{\nu_i - \lambda_i :\, i = 1, \ldots, n\}, \quad \xi_i = \nu_i - \lambda_i - \eta, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда $\eta + \xi_i = \nu_i - \lambda_i$; $|\eta| \leqslant \delta/2 < \delta$; $0 \leqslant \xi_i \leqslant |\nu_i - \lambda_i| + |\eta| \leqslant 2\delta/2 = \delta$. Из теоремы 16.1 следует существование управления $U \in KC_{mn}(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющего оценке

$$\|U\|_C \leqslant \beta \max\{|\eta|;\, |\eta + \xi_i| :\, i = 1, \ldots, n\} = \beta \max\{|\nu_i - \lambda_i| :\, i = 1, \ldots, n\}$$

и обеспечивающего для ФСР $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ системы (12.4) с этим $U(\cdot)$ равенства

$$\lambda[\bar{x}_i] = \lambda[x_i] + \eta + \xi_i = \lambda_i + \nu_i - \lambda_i = \nu_i.$$

Поскольку все ν_i различны, ФСР $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ является нормальной, а числа $\nu_1 < \ldots < \nu_n$ представляют собой показатели системы (12.4). Следствие доказано.

П р е д л о ж е н и е 16.1 [101]. *Если все показатели* λ_i, $i = 1, \ldots, n$, *системы* (15.1) *различны, то некратная пропорциональная локальная управляемость показателей системы* (12.4) *эквивалентна их пропорциональной локальной управляемости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_0 := \min\{\lambda_{i+1} - \lambda_i : i = 1, \ldots, n-1\}$. Тогда для любого $\nu \in \mathbb{R}^n$, такого что $|\nu_i - \lambda_i| \leqslant \delta_0/3$, имеем неравенства

$$\nu_{i+1} - \nu_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i + (\nu_{i+1} - \lambda_{i+1}) - (\nu_i - \lambda_i) \geqslant \lambda_{i+1} - \lambda_i - 2\delta_0/3 > 0,$$

справедливые при всех $i = 1, \ldots, n-1$. Полагая в определении пропорциональной локальной управляемости показателей $\delta < \delta_0/3$, получим требуемое.

С л е д с т в и е 16.3 [101]. *Пусть система* (12.1) *ϑ-равномерно вполне управляема. Если система* (15.1) *расчленена и все ее показатели* λ_i, $i = 1, \ldots, n$, *различны, то показатели системы* (12.4) *пропорционально локально управляемы.*

§ 17. Пропорциональная локальная управляемость показателей Ляпунова двумерных систем

Основной результат этого параграфа — теорема 17.2, в которой установлена пропорциональная локальная управляемость показателей Ляпунова двумерной системы при условии некратности показателей свободной системы.

Л е м м а 17.1 [101]. *Пусть* $S \in \mathrm{M}_n$ — *невырожденная матрица. Тогда для любых* $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\|Sx\|}{\|x\|} \leqslant \varkappa(S) \frac{\|Sy\|}{\|y\|}.$$

Если же угол между прямыми, на которых лежат векторы x *и* y, *не превосходит некоторого* $\gamma \in [0, \pi/2]$, *то выполнено неравенство*

$$\frac{\|Sx\|}{\|x\|} \leqslant (1 + \gamma \varkappa(S)) \frac{\|Sy\|}{\|y\|}.$$

Доказательство. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ имеем оценки

$$\|Sx\| \leqslant \|S\|\,\|x\|, \quad \|y\| \leqslant \|S^{-1}\|\,\|Sy\|,$$

из которых при $x \neq 0$, $y \neq 0$ следует первое неравенство. Если же угол между векторами x и y не превосходит $\gamma \in [0,\, \pi/2]$, то, полагая

$$z = \|x\|^{-1}x - \|y\|^{-1}y,$$

будем иметь соотношения

$$x = \|x\|z + \|x\|\,\|y\|^{-1}y$$

и

$$\|z\|^2 \leqslant 2(1 - \cos\gamma) \leqslant \gamma^2.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\frac{\|Sx\|}{\|x\|} \leqslant \|Sz\| + \|y\|^{-1}\|Sy\| \leqslant \frac{\|Sy\|}{\|y\|}\Big(1 + \gamma\frac{\|Sz\|\,\|y\|}{\|Sy\|\,\|z\|}\Big) \leqslant \frac{\|Sy\|}{\|y\|}(1 + \gamma\varkappa(S)),$$

дающие требуемое. Наконец, если угол между x и y находится в пределах $[\pi/2 + \gamma,\, \pi]$, где $\gamma \in [0,\, \pi/2]$, то, поскольку величина $\|Sx\|/\|x\|$ не меняется при замене x на $-x$, требуемая оценка получается из рассмотрения пары векторов $-x$ и y, угол между которыми не превосходит $\gamma \in [0,\, \pi/2]$. Лемма доказана.

Определение 17.1 (И. Н. Сергеев, [156]). Пусть $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ — произвольный отрезок, $x(\cdot)$ — любое нетривиальное решение произвольной линейной однородной системы вида (15.1) с ограниченной кусочно непрерывной на $\mathbb{R}$ матрицей коэффициентов. **Ростом решения** $x(\cdot)$ **на отрезке** $[\alpha, \beta]$ будем называть величину

$$h(x; [\alpha, \beta]) = \frac{\ln(\|x(\beta)\|/\|x(\alpha)\|)}{\beta - \alpha}.$$

Отметим, что для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$h(x; [\alpha, \beta])(\beta - \alpha) = h(x; [\alpha, \gamma])(\gamma - \alpha) + h(x; [\gamma, \beta])(\beta - \gamma).$$

Следовательно, для любых числовых последовательностей $\{\tau_k\}$, $\{\xi_k\}$ справедливы соотношения

$$h(x; [0, \tau_k]) = h(x; [0, \xi_k])\xi_k/\tau_k + h(x; [\xi_k, \tau_k])(1 - \xi_k/\tau_k).$$

В частности, если $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k/\tau_k = 0$, то есть отрезки $[\xi_k, \tau_k]$ — "длинные", то

$$\varlimsup_{k\to\infty} h(x;[0,\tau_k]) = \varlimsup_{k\to\infty} h(x;[\xi_k,\tau_k]).$$

Если, кроме того, последовательность $\{\tau_k\}$ — реализующая для решения x, то существует точный предел

$$\lim_{k\to\infty} h(x;[\xi_k,\tau_k]) = \lim_{k\to\infty} h(x;[0,\tau_k]) = \lambda[x].$$

Следствие 17.1 [101]. *Пусть x_1, x_2 — любые нетривиальные решения системы* (15.1), $\vartheta > 0$ — *некоторое число. Если множество $\Delta \subset \mathbb{N}\cup\{0\}$ таково, что при всяком $i \notin \Delta$ угол между прямыми, на которых лежат векторы $x_1(i\vartheta)$ и $x_2(i\vartheta)$, не превосходит $\gamma \in [0,\, \pi/2]$, то при любых $m, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ имеет место оценка*

$$h(x_2;[m\vartheta,k\vartheta]) \leqslant h(x_1;[m\vartheta,k\vartheta]) + \frac{2a\Delta(m,k) + \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1}(k-m-\Delta(m,k))}{k-m},$$

где $\Delta(m,k)$ — число элементов множества $\Delta \cap [m,k[$.

Доказательство. По определению матрицы Коши имеем равенства $x_j(i\vartheta+\vartheta) = X(i\vartheta+\vartheta, i\vartheta)x_j(i\vartheta)$, $j = 1,2$, из которых в силу леммы 17.1 следуют неравенства

$$\frac{\|x_2(i\vartheta+\vartheta)\|}{\|x_2(i\vartheta)\|} \leqslant d_i \frac{\|x_1(i\vartheta+\vartheta)\|}{\|x_1(i\vartheta)\|}$$

при всех $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и

$$\frac{\|x_2(i\vartheta+\vartheta)\|}{\|x_2(i\vartheta)\|} \leqslant (1+\gamma d_i) \frac{\|x_1(i\vartheta+\vartheta)\|}{\|x_1(i\vartheta)\|}$$

при $i \notin \Delta$, где

$$d_i := \varkappa(X(i\vartheta, i\vartheta+\vartheta)) \leqslant e^{2a\vartheta}.$$

Перемножая эти неравенства, при всех $i \in \mathbb{N}\cap[m,k[$ будем иметь оценку

$$\frac{\|x_2(k\vartheta)\|}{\|x_2(m\vartheta)\|} \leqslant \frac{\|x_1(k\vartheta)\|}{\|x_1(m\vartheta)\|} e^{2a\vartheta\Delta(m,k)}(1+\gamma e^{2a\vartheta})^{k-m-\Delta(m,k)}.$$

Переходя здесь к $h(x_j;[m\vartheta,k\vartheta])$, $j = 1,2$, и учитывая соотношение

$$\ln(1+\gamma e^{2a\vartheta}) \leqslant \gamma e^{2a\vartheta},$$

получим требуемое.

Т е о р е м а 17.1 [101]. *Пусть* $n = 2$. *Если* $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ — *произвольная упорядоченная нормальная ФСР системы* (15.1), *и показатели этой системы* $\lambda[x_1] = \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda[x_2]$ *различны, то решение* $x_2(\cdot)$ *отчленено от решения* $x_1(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольные числа $\gamma \in]0, \pi/2]$ и $\vartheta > 0$, удовлетворяющие условию

$$\gamma < \vartheta(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-2a\vartheta},$$

и возьмем множество $\Delta = \Gamma_2^\gamma \cup \{0\}$. Предположим, что решение $x_2(\cdot)$ не является ϑ-отчлененным от решения $x_1(\cdot)$. Тогда для любой реализующей последовательности $\{k_j\vartheta\}_{j=1}^\infty$, $k_j \in \mathbb{N}$, решения $x_2(\cdot)$ будет справедливо равенство

$$\lim_{j\to\infty} g_2(k_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{N_2(k_j)}{k_j} = 0.$$

Поскольку

$$\Delta(1, k_j) = N_2(k_j - 1) \leqslant N_2(k_j),$$

это означает, что в силу следствия 17.1 имеют место соотношения

$$\lambda_2 = \lim_{j\to\infty} h(x_2; [1, k_j\vartheta]) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \Big(h(x_1; [1, k_j\vartheta]) + \frac{2aN_2(k_j - 1) + \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1}(k_j - N_2(k_j - 1))}{k_j} \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{j\to\infty} h(x_1; [1, k_j\vartheta]) + \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1} \leqslant \lambda_1 + \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1} < \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) < \lambda_2.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Т е о р е м а 17.2 [94, 101]. *Пусть* $n = 2$. *Если система* (12.1) ϑ-*равномерно вполне управляема, а показатели системы* (15.1) $\lambda_1 < \lambda_2$ *различны, то показатели системы* (12.4) *пропорционально локально управляемы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ — произвольная нормальная упорядоченная ФСР системы (15.1). Если решение $x_1(\cdot)$ отчленено от решения $x_2(\cdot)$, то согласно теореме 16.1 ФСР x_1, x_2 является расчлененной, и в силу следствия 16.3 доказываемое свойство выполнено.

Рассмотрим случай, когда решение $x_1(\cdot)$ не отчленено от решения $x_2(\cdot)$. Возьмем любые числа $\nu_1 < \nu_2$, такие, что $|\nu_j - \lambda_j| \leqslant \delta_0$, $j = 1, 2$, где выбор положительной величины $\delta_0 < (\lambda_2 - \lambda_1)/2$ будет уточнен в ходе доказательства теоремы.

Если

$$\nu_1 - \lambda_1 \leqslant \nu_2 - \lambda_2,$$

то доказываемое свойство вытекает из теоремы 16.1 при

$$I = \{2\}, \quad \eta = \nu_1 - \lambda_1, \quad \xi_2 = \nu_2 - \lambda_2 - \eta.$$

Поскольку

$$|\eta| = |\nu_1 - \lambda_1| \leqslant \delta_0, \quad |\eta + \xi_2| = |\nu_2 - \lambda_2| \leqslant \delta_0,$$

применимость теоремы 16.1 обеспечивается неравенством $\delta_0 \leqslant \delta$.

Пусть теперь выполнено противоположное неравенство

$$\nu_1 - \lambda_1 \geqslant \nu_2 - \lambda_2.$$

Возьмем

$$\gamma = \vartheta e^{-2a\vartheta}(\lambda_2 - \lambda_1)/2.$$

Так как решение $x_1(\cdot)$ не отчленено от решения $x_2(\cdot)$, то для любой реализующей последовательности $\{s_i\vartheta\}_{i=1}^{\infty}$ решения $x_1(\cdot)$ имеет место равенство $\lim\limits_{i\to\infty} g_2(s_i) = 0$. С другой стороны, в силу теоремы 17.1 решение $x_2(\cdot)$ имеет реализующую последовательность $\{t_i\vartheta\}_{i=1}^{\infty}$, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} g_2(t_i) > 0$. Поэтому всегда можно указать такие реализующие последовательности $\{s_i\vartheta\}$ и $\{t_i\vartheta\}$ решений $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ соответственно, что при всех $i \in \mathbb{N}$ будут выполнены условия $t_i < s_i < t_{i+1}$ и $g_2(t_i) \geqslant \rho$ с некоторым $\rho > 0$. Тогда справедливы соотношения

$$N_2(t_i) \leqslant N_2(s_i) \leqslant N_2(t_{i+1})$$

и

$$\rho \leqslant g_2(t_i) = \frac{N_2(t_i)}{t_i} \leqslant \frac{N_2(s_i)}{t_i} = \frac{g_2(s_i)s_i}{t_i}.$$

Поэтому имеет место стремление

$$0 \leqslant \frac{t_i}{s_i} \leqslant \frac{g_2(s_i)}{\rho} \to 0$$

и

$$0 \leqslant \frac{t_i}{s_i\tau_i} \leqslant \frac{g_2(s_i)}{\rho\tau_i} \leqslant \frac{\tau_i}{\rho} \to 0$$

при $i \to \infty$, где $\tau_i := \sqrt{g_2(s_i)}$. Отсюда, в частности, следует, что при всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $t_i < \tau_i s_i < s_i$.

Без ограничения общности можно считать, что они выполнены при всех $i \in \mathbb{N}$.

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ определим индекс $i = i(k) \in \mathbb{N}$ таким образом, что $k \in [\tau_i s_i, \tau_{i+1} s_{i+1}[$. Оценим вспомогательную величину

$$R(t_i, k) := h(x_2; [t_i\vartheta, k\vartheta]) - h(x_1; [t_i\vartheta, k\vartheta]),$$

используя следствие 17.1. При $k \leqslant s_i$, полагая $\Delta = \Gamma_2 \cup \{0\}$, будем иметь соотношения

$$\Delta(t_i, k) = N_2(k-1) - N_2(t_i - 1) \leqslant N_2(k)$$

и оценку

$$R(t_i, k) \leqslant \frac{2a\Delta(t_i, k) + \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1}(k - t_i - \Delta(t_i, k))}{k - t_i} \leqslant \frac{2aN_2(k) + \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1}k}{k - t_i}.$$

Если же $k > s_i$, то, полагая $\Delta = \Gamma_2 \cup [s_i, k] \cup \{0\}$, получим неравенство

$$R(t_i, k) \leqslant \frac{R(t_i, s_i)(s_i - t_i) + 2a(k - s_i)}{k - t_i},$$

которое при дополнительном условии $k < cs_i$, где

$$1 < c < \frac{\tau_{i+1} s_{i+1}}{s_i},$$

дает оценку

$$R(t_i, k) \leqslant \frac{2aN_2(s_i) + \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1}k + 2a(c-1)s_i}{s_i - t_i}.$$

Так как $t_i/s_i \to 0$ и $g_2(s_i) \to 0$ при $i \to \infty$, то существуют точные пределы

$$\lim_{i\to\infty} \frac{s_i}{s_i - t_i} = 1$$

и

$$\lim_{i\to\infty} \frac{N_2(s_i)}{s_i - t_i} = \lim_{i\to\infty} g_2(s_i) = 0.$$

Кроме того, поскольку $k \geqslant \tau_i s_i$ и $i(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, то имеют место соотношения

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{t_i}{k} \leqslant \lim_{i\to\infty} \frac{t_i}{\tau_i s_i} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k - t_i}{k} = 1,$$

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{N_2(s_i)}{k - t_i} = \lim_{k\to\infty} \frac{N_2(s_i)}{k} \leqslant \lim_{i\to\infty} \frac{N_2(s_i)}{\tau_i s_i} = \lim_{i\to\infty} \tau_i = 0,$$

где всюду $i = i(k)$.

Это означает, что для любой последовательности $\{k_j\}$, удовлетворяющей условию $k_j \leqslant cs_i$, где $i = i(k_j)$ и

$$1 < c < \lim_{i\to\infty} \frac{\tau_{i+1}s_{i+1}}{s_i} = +\infty,$$

выполнено неравенство

$$\varlimsup_{j\to\infty} R(t_i, k_j) \leqslant \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1} + 2a(c-1).$$

Пусть $\mathcal{N}$ — совокупность всех натуральных чисел, принадлежащих $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}[\tau_j s_j, s_j - 1]$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{N}(k)$ количество элементов множества $\mathcal{N}$, не превосходящих k, и положим

$$b(k) := \frac{\mathcal{N}(k)}{k}.$$

Тогда, очевидно, $0 \leqslant b(k) \leqslant 1$.

Пусть

$$\psi(\mu) := \varlimsup_{k\to\infty}(f_2(k) + \mu b(k)).$$

Тогда

$$\psi(\mu) \geqslant \psi(0) = \varlimsup_{k\to\infty} f_2(k) = \lambda_2,$$

$$\psi(\mu) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty}(f_2(k) + \mu) \leqslant \lambda_2 + \mu.$$

Оценим функцию ψ сверху более точно. Для этого возьмем произвольную реализующую последовательность $\{k_j\vartheta\}_{j=1}^{\infty}$ решения $x_2(\cdot)$. Тогда при всех $\mu \geqslant 0$ имеем неравенство

$$\psi(\mu) \geqslant \lim_{j\to\infty} f_2(k_j) + \mu \varlimsup_{j\to\infty} b(k_j).$$

Если $\varlimsup\limits_{j\to\infty} b(k_j) = 1$, то в силу предыдущих оценок $\psi(\mu) \equiv \lambda_2 + \mu$. Покажем, что в наших предположениях этот случай невозможен. Без ограничения общности будем считать, что существует точный предел $\lim\limits_{j\to\infty} b(k_j) = 1$ и, следовательно, для любого $\varepsilon \in]0,1[$ существует номер $m(\varepsilon)$ такой, что при всех $j > m(\varepsilon)$ выполнены неравенства $1 \geqslant b(k) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Для всякого натурального k имеем оценку $\mathcal{N}(k) \leqslant \mathcal{N}(s_{i(k)})$, поэтому при $\varepsilon \in]0,1[$ из неравенства $b(k) \geqslant 1 - \varepsilon$ вытекает соотношение

$$k = \frac{\mathcal{N}(k)}{b(k)} \leqslant \frac{\mathcal{N}(s_{i(k)})}{1-\varepsilon} \leqslant \frac{s_{i(k)}}{1-\varepsilon}.$$

Таким образом, при каждом $\varepsilon \in]0,1[$ последовательность $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $k_j \leqslant cs_i$ (где $i = i(k_j)$) при всех $j > m(\varepsilon)$ с величиной $c = (1-\varepsilon)^{-1}$. Отсюда по доказанному выше имеем

$$\lambda_2 = \lim_{j\to\infty} f_2(k_j) = \lim_{j\to\infty} h(x_2;[0,k_j\vartheta]) = \lim_{j\to\infty} h(x_2;[t_i\vartheta,k_j\vartheta]) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}}\, h(x_1;[t_i\vartheta,k\vartheta]) + \overline{\lim_{j\to\infty}}\, R(t_i,k_j) \leqslant \lambda_1 + \gamma e^{2a\vartheta}\vartheta^{-1} + 2a((1-\varepsilon)^{-1}-1),$$

где всюду $i = i(k_j)$. По выбору γ и в силу произвольности ε имеем противоречие

$$\lambda_2 \leqslant \lambda_1 + (\lambda_2-\lambda_1)/2 = (\lambda_1+\lambda_2)/2 < \lambda_2,$$

означающее, что $\psi(\mu) \not\equiv \lambda_2 + \mu$, т.е. существует $\mu_0 > 0$ такое, что

$$\psi(\mu_0) < \lambda_2 + \mu_0.$$

Положим $\psi(\mu_0) = \lambda_2 + q\mu_0$, где $0 < q < 1$. Согласно лемме 16.1 функция ψ выпукла, поэтому на отрезке $[0,\mu_0]$ справедлива оценка

$$\psi(\mu) \leqslant \psi(0) + (\psi(\mu_0)-\psi(0))\mu/\mu_0 = \lambda_2 + q\mu.$$

На $[0,\mu_0]$ рассмотрим функцию

$$\zeta(\mu) := \mu + \lambda_2 - \psi(\mu).$$

Из леммы 16.1 следует, что функция $\zeta(\mu)$ непрерывна на $[0,\mu_0]$, причем $\zeta(0) = 0$, и по доказанному выше $\zeta(\mu) \geqslant (1-q)\mu$ при всех $\mu \in [0,\mu_0]$. Следовательно, для каждого $\xi \in [0,(1-q)\mu_0]$ существует $\mu \in [0,\mu_0]$ такое, что $\zeta(\mu) = \xi$.

Положим $\eta = \nu_2 - \lambda_2$, $\xi = \nu_1 - \lambda_1 - \eta$. Пусть $\varepsilon := \max\limits_{j=1,2} |\nu_j - \lambda_j|$. Тогда

$$\varepsilon \leqslant \delta_0, \quad |\eta| = |\nu_2-\lambda_2| \leqslant \varepsilon \leqslant \delta_0, \quad |\xi+\eta| = |\nu_1-\lambda_1| \leqslant \varepsilon \leqslant \delta_0,$$

$$0 \leqslant \xi \leqslant |\nu_1-\lambda_1| + |\eta| \leqslant 2\varepsilon \leqslant 2\delta_0.$$

Потребуем $\delta_0 < (1-q)\mu_0/2$, тогда $\xi \in [0,(1-q)\mu_0]$, поэтому найдется $\mu \in [0,\mu_0]$ такое, что $\zeta(\mu) = \xi$, причем $\xi = \zeta(\mu) \geqslant (1-q)\mu$, т.е.

$$0 \leqslant \mu \leqslant (1-q)^{-1}\xi \leqslant 2(1-q)^{-1}\varepsilon.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим $n\times n$ матрицы H_k равенствами

$$H_k = \begin{cases} e^{(\xi+\eta)\vartheta}E & \text{при } k \in \mathcal{N}, \\ e^{(\xi+\eta-\mu)\vartheta}E & \text{при } k \notin \mathcal{N}. \end{cases}$$

При любых $v > 0$, $u \in]-\infty, v]$ имеет место неравенство

$$|e^u - 1| \leqslant (e^v - 1)|u|/v.$$

Поскольку

$$|\xi + \eta - \mu| \leqslant |\xi + \eta| + \mu \leqslant \varepsilon(1 + 2(1-q)^{-1}) =: \varepsilon L \leqslant L\delta_0,$$

при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем оценку

$$\|H_k - E\| \leqslant |e^{|\xi+\eta|+\mu} - 1| \leqslant (e^{L\delta_0} - 1)\delta_0^{-1}\varepsilon \leqslant e^{L\delta_0} - 1.$$

Определив r в соответствии с теоремой 8.1 и потребовав

$$\delta_0 \leqslant L^{-1}\ln(1 + r),$$

получим

$$\|H_k - E\| \leqslant r\delta_0^{-1}\varepsilon \leqslant r$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, откуда в силу той же теоремы следует существование управления $U \in KC_{m2}(\mathbb{R}_+)$, обеспечивающего равенства

$$X_U((k+1)\vartheta, k\vartheta) = X((k+1)\vartheta, k\vartheta)H_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

и удовлетворяющего оценке

$$\|U\|_C \leqslant \alpha \max\{\|H_k - E\| : k \in \mathbb{N}\} \leqslant \alpha r\delta_0^{-1}\varepsilon =$$

$$= \beta_0 \max\{|\nu_j - \lambda_j| : j = 1, 2\},$$

где $\beta_0 := \alpha r\delta_0^{-1}$.

Вычислим показатели Ляпунова решений $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ системы (12.4) с построенным $U(\cdot)$ и с начальными условиями $\bar{x}_j(0) = x_j(0)$, $j = 1, 2$.

Для решения $\bar{x}_1(\cdot)$ имеем равенство

$$h(\bar{x}_1; [\tau_k s_k\vartheta, s_k\vartheta]) = h(x_1; [\tau_k s_k\vartheta, s_k\vartheta]) + \xi + \eta.$$

Так как $\{s_k\vartheta\}_{k=1}^{\infty}$ — реализующая последовательность решения $x_1(\cdot)$, а $\lim\limits_{k\to\infty}(\tau_k s_k\vartheta)/(s_k\vartheta) = 0$, существует

$$\lim_{k\to\infty} h(x_1; [\tau_k s_k\vartheta, s_k\vartheta]) = \lim_{k\to\infty} h(x_1; [0, s_k\vartheta]) = \lambda_1,$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty} h(\bar{x}_1; [\tau_k s_k\vartheta, s_k\vartheta]) = \lim_{k\to\infty} h(\bar{x}_1; [0, s_k\vartheta]) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} h(\bar{x}_1; [\tau_k s_k\vartheta, s_k\vartheta]) = \lambda_1 + \xi + \eta = \nu_1,$$

т. е. $\lambda[\bar{x}_1] \geqslant \nu_1$. С другой стороны, при всяком $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\|\bar{x}_1(k\vartheta)\| \leqslant e^{k(\xi+\nu)\vartheta}\|x_1(k\vartheta)\|,$$

поэтому

$$\lambda[\bar{x}_1] \leqslant \xi + \eta + \lambda[x_1] = \nu_1.$$

Итак, $\lambda[\bar{x}_1] = \nu_1$.

Для решения $\bar{x}_2(\cdot)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем равенство

$$\bar{x}_2(k\vartheta) = e^{k(\xi+\eta-\mu)\vartheta} e^{\mu\mathcal{N}(k)\vartheta} x_2(k\vartheta),$$

следовательно,

$$\lambda[\bar{x}_2] = \varlimsup_{k\to\infty} h(\bar{x}_2; [0, k\vartheta]) =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} (h(x_2; [0, k\vartheta]) + \mu b(k)) + \xi + \eta - \mu = \psi(\mu) + \zeta(\mu) + \eta - \mu = \lambda_2 + \eta = \nu_2.$$

Поскольку $\nu_1 < \nu_2$, ФСР $\bar{x}_1(\cdot), \bar{x}_2(\cdot)$ системы (12.4) нормальна, и поэтому $\lambda_i(A + BU) = \nu_i$, $i = 1, 2$. Теорема доказана.

§ 18. Необходимое условие устойчивости показателей линейной однородной системы

Здесь получено новое необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова линейной однородной системы (теорема 18.1, следствие 18.1), выраженное в терминах расчлененности фундаментальных систем решений.

Покажем на примере, что существуют системы, обладающие расчлененной не нормальной ФСР.

Пример 18.1 [100]. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 1, \tag{18.1}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} -(\sin\ln t + \cos\ln t) & 0 \\ 0 & 2(\sin\ln t + \cos\ln t) \end{pmatrix}.$$

Нормальная фундаментальная матрица системы (18.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \exp(-t\sin\ln t) & 0 \\ 0 & \exp(2t\sin\ln t) \end{pmatrix},$$

а полный спектр показателей Ляпунова состоит из чисел 1 и 2.

Рассмотрим ФСР системы (18.1), состоящую из решений

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \exp(-t\sin\ln t) \\ \exp(2t\sin\ln t) \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(2t\sin\ln t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda[x_1] = \lambda[x_2] = 2$, выбранная ФСР не является нормальной. Покажем, что эта ФСР расчленена.

Обозначим через $\varphi(t)$ угол между $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Так как векторы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ не покидают первой четверти, $\varphi(t)$ одновременно является и углом между линейными подпространствами решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Имеем равенства

$$\cos\varphi(t) = \frac{(x_1(t), x_2(t))}{\|x_1(t)\|\,\|x_2(t)\|} =$$

$$= \frac{\exp(4t\sin\ln t)}{\exp(2t\sin\ln t)(\exp(4t\sin\ln t) + \exp(-2t\sin\ln t))^{1/2}} =$$

$$= (1 + \exp(-6t\sin\ln t))^{-1/2}.$$

Зафиксируем произвольное число

$$c \in \left]\sqrt{2}/2, 1\right[. \tag{18.2}$$

Пусть $\gamma := \arccos c$, тогда $\gamma \in]0, \pi/4[$. Обозначим

$$G^\gamma(T) = \{t \in [1, T] :\ \varphi(t) \geqslant \gamma\}.$$

Отметим, что $t \in G^\gamma(T)$ в том и только том случае, когда $t \in [1, T]$ и $\cos^2\varphi(t) \leqslant c^2$, т. е.

$$1 + \exp(-6t\sin\ln t) \geqslant \frac{1}{c^2}.$$

Последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$6t\sin\ln t \leqslant \ln\Big(\frac{c^2}{1 - c^2}\Big). \tag{18.3}$$

Из (18.2) вытекает, что $c^2/(1 - c^2) > 1$, поэтому

$$\ln\Big(\frac{c^2}{1 - c^2}\Big) > 0.$$

Следовательно, все те значения t, для которых $\sin\ln t \leqslant 0$, заведомо удовлетворяют неравенству (18.3). Это означает, что

$$G^\gamma(T) \supset \{t \in [1, T] :\ \sin\ln t \leqslant 0\}$$

и

$$\operatorname{mes} G^\gamma(T) \geqslant \operatorname{mes}\{t \in [1,T] :\ \sin\ln t \leqslant 0\}.$$

Возьмем $t_k = \exp(\pi/2+2k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ — реализующая последовательность решений $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$. Покажем, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} t_k^{-1} \operatorname{mes} G^\gamma(t_k) > 0.$$

В силу теоремы 15.2 это будет означать расчлененность ФСР x_1, x_2.

Действительно, пусть $k > 1$ — произвольно. Тогда при каждом $t \in [e^{(2k-1)\pi}, e^{2k\pi}] =: J_k$ имеем неравенства $\sin\ln t \leqslant 0$ и $1 < t < t_k$, поэтому $J_k \subset G^\gamma(t_k)$ и

$$\varlimsup_{k\to\infty} t_k^{-1} \operatorname{mes} G^\gamma(t_k) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} t_k^{-1} \operatorname{mes} J_k =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\exp 2k\pi - \exp(2k-1)\pi}{\exp(\pi/2+2k\pi)} = \frac{1-\exp(-\pi)}{\exp(\pi/2)} > 0,$$

что и требовалось.

Т е о р е м а 18.1 [100]. *Если система* (15.1) *имеет не нормальную расчлененную ФСР, то ее показатели Ляпунова неустойчивы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ — расчлененная не нормальная ФСР системы (15.1), $\lambda[x_i] = \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ полный спектр показателей Ляпунова системы (12.4). Тогда хотя бы один из этих показателей не входит в набор чисел $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Пусть это показатель λ_{i_0}. Обозначим $\alpha = \min\{|\lambda_{i_0} - \mu_i| :\ i = 1, \ldots, n\}$, $\alpha > 0$.

Применив теорему 16.1 к равномерно вполне управляемой системе

$$\dot x = A(t)x + u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^n,$$

к ФСР $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ системы (15.1) и к совокупности индексов $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, найдем величины β и δ. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и произвольный набор чисел $\nu_1 < \ldots < \nu_n$, такой, что

$$\eta := \max\{|\nu_i - \mu_i| :\ i = 1, \ldots, n\} \leqslant \frac{1}{2} \min\Big\{\alpha, \frac{\varepsilon}{\beta}, \delta\Big\}.$$

Тогда в силу теоремы 16.1 существует управление $U(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R}_+)$, $\|U\|_C \leqslant \beta\eta < \varepsilon$, обеспечивающее при каждом $j \in \{1, \ldots, n\}$ для решения $\bar x_j$ возмущенной системы

$$\dot x = (A(t) + U(t))x \tag{18.4}$$

с начальным условием $\bar{x}_j(0) = x_j(0)$ равенство $\lambda[\bar{x}_j] = \nu_j$. Все числа ν_j различны, поэтому полный спектр показателей Ляпунова системы (18.4) состоит из чисел $\nu_1, \ldots, \nu_n$, при этом

$$|\lambda_{i_0}-\nu_i| = |\lambda_{i_0}-\mu_i+\mu_i-\nu_i| \geqslant |\lambda_{i_0}-\mu_i|-|\mu_i-\nu_i| \geqslant \alpha-\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Следовательно, показатель λ_{i_0} системы (15.1) неустойчив. Теорема доказана.

Следствие 18.1 [100]. *Если показатели Ляпунова системы* (15.1) *устойчивы, то всякая ее расчлененная ФСР нормальна.*

Пример 18.1 (продолжение). Поскольку система (18.1) имеет расчлененную не нормальную ФСР, ее показатели Ляпунова неустойчивы.

§ 19. Необходимость условия равномерной полной управляемости для локальной управляемости показателей Ляпунова

Здесь введено понятие равномерной (относительно $\sigma \in \overline{\gamma_+(\sigma_0)}$) локальной управляемости показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = (A(f^t\sigma_0) + B(f^t\sigma_0)UC^*(f^t\sigma_0))x$$

и получены достаточные условия такой управляемости (теоремы 19.1 и 19.2). В случае $C(\sigma) \equiv E$ изучен вопрос о необходимости условия равномерной полной управляемости для равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова (теорема 19.3).

Вернемся к рассмотрению семейства линейных управляемых систем с наблюдателем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad y = C^*(f^t\sigma)x, \tag{19.1}$$

заданных динамической системой (Σ, f^t) и функцией $\varphi := (A, B, C) : \Sigma \to \mathrm{M}_{n,n+m+r}$. Будем предполагать, что для каждого $\sigma_0 \in \Sigma$ функция $t \mapsto \|\varphi(f^t\sigma_0)\|$ измерима по Лебегу, ограничена на $\mathbb{R}$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что выполнено неравенство

$$\max_{|t|\leqslant N} \int\limits_t^{t+1} \|\varphi(f^s\sigma) - \varphi(f^s\sigma_0)\|\, ds < \varepsilon, \tag{19.2}$$

как только $\rho(\sigma, \sigma_0) < \delta$ (ρ — метрика в Σ). Систему (19.1) будем отождествлять с парой (φ, σ).

Пусть $U : \mathbb{R}_+ \times \Sigma \to \mathrm{M}_{mr}$ — ограниченная измеримая функция. Обозначим через $\lambda_1(\sigma, U) \leqslant \lambda_2(\sigma, U) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\sigma, U)$ полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(f^t\sigma) + B(f^t\sigma)UC^*(f^t\sigma))x. \tag{19.3}$$

Полный спектр свободной системы

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{19.4}$$

отвечающей $U(t, \sigma) \equiv 0$, будем обозначать $\lambda_1(\sigma) \leqslant \lambda_2(\sigma) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\sigma)$.

Определение 19.1 [132]. Система (φ, σ_0) обладает свойством **равномерной (относительно σ) локальной управляемости показателей Ляпунова**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждой точки $\sigma \in \overline{\gamma_+(\sigma_0)}$ и каждого вектора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathrm{B}_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условиям

$$\lambda_{i+1}(\sigma) + \mu_{i+1} \geqslant \lambda_i(\sigma) + \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

найдется управление $U : \mathbb{R}_+ \times \overline{\gamma_+(\sigma_0)} \to \mathrm{B}_\varepsilon(0) \subset \mathrm{M}_{mr}$, обеспечивающее равенства

$$\lambda_i(\sigma, U) = \lambda_i(\sigma) + \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для формулировки и доказательства достаточных условий равномерной (относительно σ) локальной управляемости показателей Ляпунова нам понадобится ряд утверждений о семействе однородных систем (19.4). При каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ всякая система вида (19.4) — это обычная линейная однородная дифференциальная система, поэтому для нее можно сформулировать обычные определения теории линейных систем.

Определение 19.2 (Б. Ф. Былов, [16]). Система (19.4), отождествляемая с $\sigma \in \Sigma$, называется **системой с интегральной разделенностью**, если она имеет ФСР $x_1(\cdot, \sigma)$, $x_2(\cdot, \sigma), \ldots, x_n(\cdot, \sigma)$, обладающую свойством: существуют такие $c > 0$ и $d > 0$, что для всех $0 \leqslant s \leqslant t$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справедливы неравенства

$$\frac{\|x_{j+1}(t, \sigma)\|}{\|x_{j+1}(s, \sigma)\|} \geqslant de^{c(t-s)} \frac{\|x_j(t, \sigma)\|}{\|x_j(s, \sigma)\|}. \tag{19.5}$$

З а м е ч а н и е 19.1. Б. Ф. Былов и Н. А. Изобов в [19] доказали, что (19.4) — система с интегральной разделенностью в том и только том случае, когда существует ляпуновское преобразование $x = L(t,\sigma)y$, приводящее (19.4) к диагональному виду

$$\dot{y} = P(t,\sigma)y, \quad P(t,\sigma) = \operatorname{diag}(p_1(t,\sigma),\dots,p_n(t,\sigma)), \tag{19.6}$$

где функции $p_i(\cdot,\sigma)$, $p_{i+1}(\cdot,\sigma)$, $i = 1,2,\dots,n-1$, интегрально отделены, т. е. существуют $\alpha > 0$ и β такие, что при всех $0 \leqslant s \leqslant t$ выполнено неравенство

$$\int\limits_s^t (p_{i+1}(\tau,\sigma) - p_i(\tau,\sigma))\,d\tau \geqslant \alpha(t-s) + \beta.$$

П р е д л о ж е н и е 19.1 [132]. *Если (19.4) — система с интегральной разделенностью, то сопряженная к (19.4) система*

$$\dot{\xi} = -\xi A(f^t\sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n^*}, \tag{19.7}$$

также является системой с интегральной разделенностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = L(t,\sigma)y$ — ляпуновское преобразование, приводящее (19.4) к диагональному виду (19.6) с интегрально отделенными функциями $p_i(\cdot,\sigma)$, $p_{i+1}(\cdot,\sigma)$, $i = 1,\dots,n-1$. Тогда

$$A(f^t\sigma) = \dot{L}(t,\sigma)L^{-1}(t,\sigma) + L(t,\sigma)P(t,\sigma)L^{-1}(t,\sigma),$$

где $\dot{L}(t,\sigma) := \dfrac{d}{dt}L(t,\sigma)$, поэтому

$$\dot{L}(t,\sigma) = A(f^t\sigma)L(t,\sigma) - L(t,\sigma)P(t,\sigma).$$

Применим преобразование $\eta = \xi L(t,\sigma)$ к системе (19.7), получим

$$\dot{\eta} = \dot{\xi}L(t,\sigma) + \xi\dot{L}(t,\sigma) = -\xi A(f^t\sigma)L(t,\sigma) +$$

$$+\xi(A(f^t\sigma)L(t,\sigma) - L(t,\sigma)P(t,\sigma)) = -\xi L(t,\sigma)P(t,\sigma) = -\eta P(t,\sigma).$$

Таким образом, преобразование $\eta = \xi L(t,\sigma)$ приводит систему (19.7) к диагональной системе

$$\dot{\eta} = \eta H(t,\sigma), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n^*},$$

где

$$H(t,\sigma) = \operatorname{diag}(h_1(t,\sigma),\dots,h_n(t,\sigma)) = -P(t,\sigma),$$

следовательно,

$$h_i(t,\sigma) = -p_i(t,\sigma), \quad i = 1,\ldots,n.$$

При всех $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ и $0 \leqslant s \leqslant t$ справедливы неравенства

$$\int\limits_s^t (h_i(\tau,\sigma) - h_{i+1}(\tau,\sigma))\,d\tau \geqslant \alpha(t-s) + \beta,$$

т. е. функции $h_{i+1}(\cdot,\sigma)$, $h_i(\cdot,\sigma)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, интегрально отделены. Предложение доказано.

Л е м м а 19.1 [132]. *Если $\sigma_0 \in \Sigma$ — система с интегральной разделенностью, то всякая $\sigma \in \overline{\gamma(\sigma_0)}$ также является системой с интегральной разделенностью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим фактор-отображение Λ, которое каждой системе $\sigma \in \Sigma$ ставит в соответствие функцию $t \mapsto F(t) = A(f^t\sigma)$, отождествляемую с системой

$$\dot{x} = F(t)x. \tag{19.8}$$

Обозначим

$$\mathfrak{R} = \{F : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n |\ \exists \sigma \in \Sigma : F(\cdot) = \Lambda\sigma\}.$$

Отметим, что в силу условия (19.2) отображение $\Lambda : \Sigma \to \mathfrak{R}$ непрерывно в метрике

$$\rho_0(F,\widehat{F}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\Big\{\int\limits_t^{t+1} |F(s) - \widehat{F}(s)|\,ds, \frac{1}{|t|}\Big\}.$$

Очевидно, что если $\sigma \in \Sigma$ — система с интегральной разделенностью, то и $\Lambda\sigma \in \mathfrak{R}$ обладает тем же свойством; обратно, если для $\sigma \in \Sigma$ не выполнено (19.5), то $\Lambda\sigma \in \mathfrak{R}$ не является системой с интегральной разделенностью.

На $\mathfrak{R}$ введем динамическую систему сдвигов: для каждой $F \in \mathfrak{R}$ положим $g^\tau F(\cdot) = F(\cdot + \tau)$.

Пусть $\sigma_0 \in \Sigma$ — система с интегральной разделенностью. Обозначим $F_0 = \Lambda\sigma_0$ и $\mathfrak{R}_0 = \mathrm{cl}\,\{g^\tau F_0 |\ \tau \in \mathbb{R}\}$, где $\mathrm{cl}\,\mathfrak{M}$ — замыкание множества $\mathfrak{M}$ в метрике ρ_0. Докажем, что всякая система $F \in \mathfrak{R}_0$ является системой с интегральной разделенностью.

Пусть $L_0 : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n$ — матрица Ляпунова, такая, что преобразование $y = L_0(t)x$ приводит систему

$$\dot{x} = F_0(t)x$$

к диагональному виду

$$\dot{y} = D_0(t)y, \quad D_0(t) = \mathrm{diag}(d_1^0(t), \dots, d_n^0(t)),$$

причем функции $d_i^0(\cdot), d_{i+1}^0(\cdot)$, $i = 1, \dots, n-1$, интегрально отделены, т. е. существуют такие $\alpha > 0$ и β, что при всех $0 \leqslant s \leqslant t$ выполнено неравенство

$$\int\limits_s^t (d_{i+1}^0(\tau) - d_i^0(\tau))\, d\tau \geqslant \alpha(t-s) + \beta. \tag{19.9}$$

Возьмем произвольную функцию $F \in \mathfrak{R}_0$. Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ — такая последовательность, что $g^{\tau_i} F_0 := F_{\tau_i} \to F$ при $i \to \infty$ в метрике ρ_0. Тогда [172] существуют ляпуновское преобразование $L \in \mathfrak{R}(L_0)$ и подпоследовательность $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$, такие, что $L_{\tau_i} \to L$, $L_{\tau_i}^{-1} \to L^{-1}$ (в метрике ρ_0), $\dot{L}_{\tau_i}$ сходится слабо к $\dot{L}$, последовательность

$$D_{\tau_i} := \dot{L}_{\tau_i} L_{\tau_i}^{-1} + L_{\tau_i} F_{\tau_i} L_{\tau_i}^{-1}$$

сходится слабо к некоторой измеримой и ограниченной функции $D : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и любой локально интегрируемой функции $t \mapsto Q(t) \in \mathrm{M}_n$ существует $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\Big\| \int\limits_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} Q(t)(D_{\tau_i}(t) - D(t))\, dt \Big\| < \varepsilon, \quad i \geqslant i_0. \tag{19.10}$$

Докажем, что $D(t) = \{d_{kl}(t)\}_{k,l=1}^n$ — диагональная матрица. Отметим, что $D_{\tau_i}(t) = \{d_{kl}^i(t)\}_{k,l=1}^n$ — диагональна. В (19.10) положим

$$Q(t) = q(t)E,$$

где $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная локально интегрируемая функция. Тогда из (19.10) вытекают неравенства

$$\Big| \int\limits_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} q(t)(d_{kl}^i - d_{kl})\, dt \Big| < \varepsilon$$

для всех $k, l \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon > 0$ и $i \geqslant i_0(\varepsilon, q(\cdot))$. В частности, при всех $k \neq l$ выполнено неравенство

$$\Big| \int\limits_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} q(t) d_{kl}(t)\, dt \Big| < \varepsilon.$$

Возьмем $q(t) = d_{kl}(t)$, получим соотношение

$$\int\limits_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} d_{kl}^2(t)\, dt < \varepsilon.$$

Так как для любого отрезка $[t_0,t_1]$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ имеет место включение $[t_0,t_1]\subset[-\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}]$, то

$$\int\limits_{t\in[t_0,t_1]} d_{kl}^2(t)\,dt<\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon^{-1}} d_{kl}^2(t)\,dt<\varepsilon.$$

Устремляя здесь ε к нулю, получим $d_{kl}(t)\equiv 0$ на $[t_0,t_1]$, и, следовательно, $d_{kl}(t)\equiv 0$ на $\mathbb{R}$ при всех $k\neq l$, т.е. $D(t)$ — диагональная матрица.

Покажем теперь, что для матрицы $D(t)=\operatorname{diag}(d_1(t),\ldots,d_n(t))$ справедливы соотношения (19.9). Действительно, для всех матриц

$$D_{\tau_i}(t):=\operatorname{diag}(d_1^i(t),\ldots,d_n^i(t))$$

они выполнены. Зафиксируем произвольные $0\leqslant s\leqslant t$ и возьмем любое $\varepsilon>0$, такое, что $[s,t]\subset[-\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}]$. Тогда

$$\alpha(t-s)+\beta\leqslant\int\limits_s^t(d_{k+1}^i(\tau)-d_k^i(\tau))\,d\tau\leqslant\int\limits_s^t|d_{k+1}^i(\tau)-d_{k+1}(\tau)|\,d\tau+$$

$$+\int\limits_s^t|d_k(\tau)-d_k^i(\tau)|\,d\tau+\int\limits_s^t(d_{k+1}(\tau)-d_k(\tau))\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon^{-1}}|d_{k+1}^i(t)-d_{k+1}(t)|\,dt+\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon^{-1}}|d_k(t)-d_k^i(t)|\,dt+$$

$$+\int\limits_s^t(d_{k+1}(\tau)-d_k(\tau))\,d\tau\leqslant 2\varepsilon+\int\limits_s^t(d_{k+1}(\tau)-d_k(\tau))\,d\tau.$$

Устремляя ε к нулю в доказанном неравенстве

$$\alpha(t-s)+\beta\leqslant 2\varepsilon+\int\limits_s^t(d_{k+1}(\tau)-d_k(\tau))\,d\tau,$$

получим, что диагональная матрица $D(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям (19.9), поэтому (19.8) — система с интегральной разделенностью.

Покажем, что если $\sigma\in\overline{\gamma(\sigma_0)}$, то $\Lambda\sigma\in\mathfrak{R}_0$. Действительно, из включения $\sigma\in\overline{\gamma(\sigma_0)}$ следует существование последовательности $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ такой, что

$$\lim_{i\to\infty}\rho(\sigma,f^{\tau_i}\sigma_0)=0.$$

С другой стороны, отображение $\Lambda:\Sigma\to\mathfrak{R}$ непрерывно, поэтому

$$\lim_{i\to\infty}\rho_0(\Lambda\sigma,\Lambda(f^{\tau_i}\sigma_0))=0,$$

следовательно,

$$\lim_{i\to\infty}\rho_0(\Lambda\sigma, g^{\tau_i}(\Lambda\sigma_0)) = \lim_{i\to\infty}\rho_0(\Lambda\sigma, g^{\tau_i}F_0) = 0,$$

а это означает, что $\Lambda\sigma \in \mathfrak{R}_0$.

В силу доказанного, всякая система σ из $\overline{\gamma(\sigma_0)}$ есть система с интегральной разделенностью. Это следует из включения

$$\Lambda(\overline{\gamma(\sigma_0)}) \subset \mathfrak{R}_0$$

и интегральной разделенности всех систем, расположенных в $\mathfrak{R}_0$. Лемма доказана.

Л е м м а 19.2 [132]. *Если* (19.8) — *система с интегральной разделенностью, то для всякой нормальной ФСР* $x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot)$ *системы* (19.8), *упорядоченной по возрастанию показателей Ляпунова, выполнено свойство: существуют* $T>0$, $c>0$, $d>0$, *такие, что для всех* $t\geqslant T$, $s\in[0,t]$ *и* $j\in\{1,\ldots,n-1\}$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\|x_{j+1}(t)\|}{\|x_{j+1}(s)\|} \geqslant de^{c(t-s)}\frac{\|x_j(t)\|}{\|x_j(s)\|}. \tag{19.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как (19.8) — система с интегральной разделенностью, то она имеет ФСР $y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot)$, такую, что найдутся $c>0$ и $d>0$, обеспечивающие при всех $0\leqslant s\leqslant t$ и $j\in\{1,\ldots,n-1\}$ неравенства

$$\frac{\|y_{j+1}(t)\|}{\|y_{j+1}(s)\|} \geqslant de^{c(t-s)}\frac{\|y_j(t)\|}{\|y_j(s)\|}.$$

Зафиксируем $k\in\{1,\ldots,n\}$ и рассмотрим разложение решения $x_k(\cdot)$ по базису $y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot)$:

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j y_j(t), \quad \alpha_k \neq 0.$$

То, что суммирование здесь производится только до k, следует из нормальности фундаментальных систем $x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot)$ и $y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot)$ и из упорядоченности этих ФСР по возрастанию показателей. Из [16] вытекает существование такого $B_k>0$, что для всех $0\leqslant s\leqslant t$ выполнено неравенство

$$\frac{\|x_k(t)\|}{\|x_k(s)\|} \leqslant B_k\frac{\|y_k(t)\|}{\|y_k(s)\|},$$

поэтому

$$\frac{\|y_{k+1}(t)\|}{\|y_{k+1}(s)\|} : \frac{\|x_k(t)\|}{\|x_k(s)\|} \geqslant \frac{\|y_{k+1}(t)\|}{\|y_{k+1}(s)\|} : B_k \frac{\|y_k(t)\|}{\|y_k(s)\|} \geqslant e^{c(t-s)} \frac{d}{B_k}.$$

Далее,

$$\|x_k(t)\| \leqslant B_k \frac{\|x_k(0)\|}{\|y_k(0)\|} \|y_k(t)\| =: C_k \|y_k(t)\|,$$

следовательно,

$$\frac{\|x_k(t)\|}{\|x_k(s)\|} \geqslant \frac{\left\|\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j y_j(t)\right\|}{C_k \|y_k(s)\|} \geqslant \frac{\|y_k(t)\|}{C_k \|y_k(s)\|} \Big| |\alpha_k| - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|\alpha_j| \, \|y_j(t)\|}{\|y_k(t)\|} \Big| \geqslant d_k \frac{\|y_k(t)\|}{\|y_k(s)\|},$$

здесь $d_k > 0$ не зависит от t и s, а последнее неравенство выполнено при достаточно больших t. Это следует из соотношения $\lambda[y_j] < \lambda[y_k]$ при $j = 1, \ldots, k-1$, которое влечет равенство

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|\alpha_j| \, \|y_j(t)\|}{\|y_k(t)\|} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\|x_k(t)\|}{\|x_k(s)\|} : \frac{\|y_{k-1}(t)\|}{\|y_{k-1}(s)\|} \geqslant d_k \frac{\|y_k(t)\|}{\|y_k(s)\|} : \frac{\|y_{k-1}(t)\|}{\|y_{k-1}(s)\|} \geqslant d_k d e^{c(t-s)}$$

для всех достаточно больших t и всех $s \in [0, t]$.

Повторяя доказательство для $j \neq k$, где вместо $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$ рассматривается базис $y_1(\cdot), \ldots, y_{k-1}(\cdot), x_k(\cdot), y_{k+1}(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$, и продолжая этот процесс преобразования базиса, можно убедиться в справедливости соотношений (19.11). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 19.2 [132]. Используя метод доказательства диагонализируемости систем с интегральной разделенностью (Б. Ф. Былов, [16]), можно проверить, что для всякого нормальной ФСР $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ системы (19.8) выполнены неравенства

$$\beta_{ij}(t) := \sphericalangle(x_i(t), x_j(t)) \geqslant \beta$$

с некоторой константой $\beta > 0$ при всех $i \neq j$ и $t \in \mathbb{R}_+$.

Т е о р е м а 19.1 [132]. *Если система (φ, σ) равномерно согласованна, свободная система (19.4) диагонализируема и $\overline{\gamma_+(\sigma)}$ — компакт, то система (φ, σ) обладает свойством равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова.*

Доказательство. Так как (19.4) диагонализируема, то каждая из систем $\sigma_0 \in \overline{\gamma_+(\sigma)}$ также некоторым ляпуновским преобразованием приводится к диагональному виду (это можно проверить, используя метод доказательства леммы 19.2).

Зафиксируем произвольное $\sigma_0 \in \overline{\gamma_+(\sigma)}$. Из теоремы 13.5 вытекает, что система (φ, σ_0) обладает свойством локальной управляемости показателей Ляпунова, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, \sigma_0) > 0$, что для каждого вектора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathrm{B}_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условиям

$$\lambda_{i+1}(\sigma) + \mu_{i+1} \geqslant \lambda_i(\sigma) + \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

найдется управление $U : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{B}_\varepsilon(0) \subset \mathrm{M}_{mr}$, обеспечивающее выполнение равенств

$$\lambda_i(\sigma_0, U) = \lambda_i(\sigma_0) + \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Но все системы (φ, σ_0), $\sigma_0 \in \overline{\gamma_+(\sigma)}$ равномерно согласованны с одними и теми же константами ϑ и l (см. определение 2.2), поэтому величина $\delta(\varepsilon, \sigma_0)$ в действительности от σ_0 не зависит и может быть выбрана одной и той же для всех $\sigma_0 \in \overline{\gamma_+(\sigma)}$. Следовательно, система (φ, σ) обладает свойством равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова. Теорема доказана.

Из теоремы 13.5 вытекает также следующее утверждение.

Теорема 19.2 [132]. *Пусть множество $\overline{\gamma_+(\sigma)}$ компактно, система (φ, σ) равномерно согласованна и для каждого $\sigma_0 \in \overline{\gamma_+(\sigma)}$ показатели Ляпунова системы $\dot{x} = A(f^t\sigma_0)x$ устойчивы. Тогда система (φ, σ) обладает свойством равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова.*

Перейдем теперь к изучению семейства (19.1), где $r = n$ и

$$C(f^t\sigma) \equiv E \in \mathrm{M}_n.$$

Положим $\varphi(\sigma) = (A(\sigma), B(\sigma))$ и каждую из систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u \tag{19.12}$$

будем отождествлять с парой (φ, σ). Будем предполагать, что $\varphi(f^t\sigma)$ удовлетворяет соотношению (19.2). Из теоремы 3.1 вытекает, что (φ, σ) равномерно согласованна в том и только том случае, когда (φ, σ) равномерно вполне управляема.

Пусть $\mathcal{E}$ — компактное инвариантное множество в Σ. Будем называть функцию $L:\mathbb{R}\times\mathcal{E}\to\mathrm{M}_n$ перроновским преобразованием системы (19.4), если при каждом фиксированном $\sigma\in\mathcal{E}$ функция $t\mapsto L(t,\sigma)$ суть перроновское преобразование [18, с. 263] системы (19.4). Это означает, что матрица

$$-P(t,\sigma)=\dot{L}(t,\sigma)L^*(t,\sigma)+L(t,\sigma)A(f^t\sigma)L^*(t,\sigma), \tag{19.13}$$

— нижняя треугольная, и $L(t,\sigma)$ ортогональна при всех $(t,\sigma)\in\mathbb{R}\times\mathcal{E}$. В работе В. М. Миллионщикова [105] показано, что если $\mathcal{E}$ минимально, то перроновское преобразование рекуррентно по t (равномерно относительно $\sigma\in\mathcal{E}$), т. е. для любого $\varepsilon>0$ множество тех $\tau\in\mathbb{R}$, для которых выполнено неравенство

$$\max\{\|L(t+\tau,\sigma)-L(t,\sigma)\|:\,|t|\leqslant\varepsilon^{-1},\,\sigma\in\mathcal{E}\}<\varepsilon,$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$. Отметим, кроме того, что

$$L(t+\tau,\sigma)=L(t,f^\tau\sigma),\quad (t,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Лемма 19.3 [132]. *Пусть $\mathcal{E}$ — компактное инвариантное множество и система (19.12) не является равномерно вполне управляемой при некотором $\sigma\in\mathcal{E}$. Тогда найдутся минимальное множество $\mathcal{E}_\alpha\subset\mathcal{E}$, натуральное p и перроновское преобразование $L:\mathbb{R}\times\mathcal{E}_\alpha\to\mathrm{M}_n$, такие, что для любого $\sigma\in\mathcal{E}_\alpha$ преобразование $x=L(t,\sigma)w$ приводит систему (19.12) к виду*

$$\dot{w}=\widehat{F}(t,\sigma)w+\widehat{G}(t,\sigma)v,\quad w\in\mathbb{R}^n,\ v\in\mathbb{R}^m, \tag{19.14}$$

где

$$\widehat{F}=\begin{pmatrix}\widehat{F}_{11} & 0\\ \widehat{F}_{21} & \widehat{F}_{22}\end{pmatrix},\qquad \widehat{G}=\begin{pmatrix}0\\ \widehat{G}_2\end{pmatrix},$$

матрицы $\widehat{F}_{11}(t,\sigma)\in\mathrm{M}_{pp}$ и $\widehat{F}_{22}(t,\sigma)\in\mathrm{M}_{n-p,n-p}$ — нижние треугольные при каждых $(t,\sigma)\in\mathbb{R}\times\mathcal{E}_\alpha$, а $\widehat{G}_2(t,\sigma)$ имеет размеры $(n-p)\times m$.

Доказательство. В силу теоремы 1 работы А. Г. Иванова и Е. Л. Тонкова [54] найдется минимальное множество $\mathcal{E}_\alpha$ в $\mathcal{E}$ такое, что для каждой точки $\sigma\in\mathcal{E}_\alpha$ система (19.4) не является вполне управляемой на $[0,\vartheta]$ при каждом $\vartheta>0$. Поэтому [76, с. 138] существует нетривиальное решение $\psi(t,\sigma)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi}=-\psi A(f^t\sigma),\quad \psi\in\mathbb{R}^{n*}, \tag{19.15}$$

удовлетворяющее равенству

$$\psi(t,\sigma)B(f^t\sigma) \equiv 0 \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Пусть $\psi_i(t,\sigma)$, $i = 1,\ldots,n$, — ФСР системы (19.15), первые p векторов которой удовлетворяют этому равенству, а $\psi_{p+1}(t,\sigma)$ — не удовлетворяет. Применим процесс ортогонализации Шмидта:

$$\xi_1 = \psi_1, \quad \nu_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|},$$

$$\xi_k = \psi_k - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_k \nu_j^* \nu_j, \quad \nu_k = \frac{\xi_k}{\|\xi_k\|}, \quad k = 2,\ldots,n.$$

Тогда

$$\nu_j(t,\sigma)B(f^t\sigma) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad j = 1,\ldots,p. \qquad (19.16)$$

Построим матрицу $L(t,\sigma)$, строками которой служат векторы $\nu_1(t,\sigma)$, $\nu_2(t,\sigma),\ldots,\nu_n(t,\sigma)$. Тогда L — ортогональная матрица, а преобразование $\psi = \eta L(t,\sigma)$ приводит систему (19.15) к системе

$$\dot\eta = \eta P(t,\sigma)$$

с нижней треугольной матрицей. Поэтому преобразование

$$x = L^{-1}(t,\sigma)w$$

приводит (19.4) к нижнему треугольному виду

$$\dot w = -P(t,\sigma)w.$$

Таким образом, функция $L : \mathbb{R} \times \mathcal{E}_\alpha \to \mathrm{M}_n$ является перроновским преобразованием системы (19.15), а из (19.13) следует справедливость соотношения $-P(t,\sigma) = \widehat{F}(t,\sigma)$. Строки матрицы $L(t,\sigma)$ образованы векторами $\nu_j(t,\sigma)$, причем выполнено (19.16), поэтому первые p строк матрицы

$$\widehat{G}(t,\sigma) := L(t,\sigma)B(f^t\sigma)$$

нулевые. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 19.3. Из работы В. М. Миллионщикова [105] следует, что функция $t \mapsto L(t,\sigma)$ рекуррентна (и, в силу минимальности $\mathcal{E}_\alpha$, равномерно рекуррентна по $\sigma \in \mathcal{E}_\alpha$).

Теорема 19.3 [130, 132]. *Предположим, что множество* $\overline{\gamma_+(\sigma)}$ *компактно и* (19.4) — *система с интегральной разделенностью. Система* (φ, σ) *обладает свойством равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова в том и только том случае, когда* (φ, σ) *равномерно вполне управляема.*

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из теоремы 19.1 (всякая система с интегральной разделенностью диагонализируема).

Необходимость. Предположим противное, пусть система (φ, σ) не является равномерно вполне управляемой. Из леммы 19.3 следует существование такой точки $\sigma_0 \in \overline{\gamma_+(\sigma)}$, что система

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u, \tag{19.17}$$

где $A_0(t) := A(f^t\sigma_0)$, $B_0(t) := B(f^t\sigma_0)$, обладает свойством: сопряженная система

$$\dot{\xi} = -\xi A_0(t) \tag{19.18}$$

имеет решение $\xi_1(\cdot)$, такое, что

$$\xi_1(t)B_0(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{19.19}$$

Так как (19.4) — система с интегральной разделенностью, то из предложения 19.1 и леммы 19.1 следует, что системы

$$\dot{x} = A_0(t)x$$

и (19.18) также являются системами с интегральной разделенностью. Зафиксируем произвольную ФСР $\xi_1(\cdot), \ldots, \xi_n(\cdot)$ системы (19.18), где функция $\xi_1(\cdot)$ удовлетворяет тождеству (19.19). Положим

$$\nu_j(t) = \frac{\xi_j(t)}{\|\xi_j(t)\|}, \quad L(t) = \mathrm{col}(\nu_1(t), \ldots, \nu_n(t)) \in \mathrm{M}_n.$$

Из замечания 19.2 следует, что углы между векторами $\xi_i(t)$ и $\xi_j(t)$ при всех $i \neq j$ строго отделены от нуля на $\mathbb{R}_+$. Б. Ф. Былов в [17] показал, что преобразование $\xi = \eta L(t)$ является ляпуновским и приводит систему (19.18) к диагональному виду. К (19.17) применим преобразование $y = L(t)x$, в результате получим систему

$$\dot{y} = P_0(t)y + G_0(t)u,$$

аналогичную (19.14), но с диагональной матрицей

$$P_0(t) \doteq \mathrm{diag}(p_1(t), \ldots, p_n(t)),$$

элементы которой интегрально отделены, и матрицей

$$G_0(t) := L(t)B(t),$$

первая строка которой нулевая. Обозначим через $\lambda_1(P_0) < \ldots < \lambda_n(P_0)$ полный спектр показателей Ляпунова однородной системы

$$\dot{y} = P_0(t)y. \tag{19.20}$$

Поскольку (19.20) — система с интегральной разделенностью, ее показатели Ляпунова устойчивы, следовательно, найдется такое $\delta_1 > 0$, что всякое измеримое управление $U : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{B}_{\delta_1}(0) \subset \mathrm{M}_{mn}$ порождает систему

$$\dot{y} = (P_0(t) + G_0(t)U(t))y, \tag{19.21}$$

показатели Ляпунова которой удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_j(P_0) - \lambda_j(P_0 + G_0U)| < \varepsilon_0,$$

где

$$\varepsilon_0 = \min_{i=1,\ldots,n-1}(\lambda_{i+1}(P_0) - \lambda_i(P_0))/4.$$

Это означает, что полный спектр системы (19.21) состоит из попарно различных чисел.

Наряду с (19.21) рассмотрим усеченную систему

$$\dot{z} = (P_1(t) + G_1(t)U_1(t))z, \quad z \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{19.22}$$

матрица $P_1 + G_1U_1$ которой получается из $P_0 + G_0U$ вычеркиванием первой строки и первого столбца,

$$P_1(t) = \mathrm{diag}(p_2(t), \ldots, p_n(t)),$$

$G_1(t)$ — это $(n-1) \times m$ матрица, образованная из $G_0(t)$ отбрасыванием первой строки, а $U_1(t)$ — это $m \times (n-1)$ матрица, образованная из $U(t)$ отбрасыванием первого столбца. Система (19.22) является возмущенной по отношению к диагональной системе

$$\dot{z} = P_1(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{19.23}$$

диагональ которой интегрально разделена. Так как полные спектры показателей Ляпунова систем (19.20) и (19.23) состоят из наборов верхних средних значений функций $p_1(\cdot), p_2(\cdot) \ldots, p_n(\cdot)$ и $p_2(\cdot), \ldots, p_n(\cdot)$ соответственно, то для каждого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ существует единственное

$i \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\lambda_j(P_1) = \lambda_i(P_0)$, причем разным значениям j отвечают разные значения i. Через $k \in \{1, \ldots, n\}$ обозначим такой индекс, что $\lambda_k(P_0) = \overline{p_1}$. Из интегральной разделенности диагонали матрицы $P_1(\cdot)$ вытекает устойчивость показателей системы (19.23), поэтому существует $\delta_2 > 0$ такое, что из условия $\sup\limits_t \|U_1(t)\| < \delta_2$ следуют неравенства

$$|\lambda_j(P_1) - \lambda_j(P_1 + G_1U_1)| < \varepsilon_0, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Возьмем $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и зафиксируем произвольную измеримую функцию $U : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{B}_{\delta_0}(0) \subset \mathrm{M}_{mn}$. Обозначим

$$\widehat{\lambda}_i = \lambda_i(P_0 + G_0U), \quad i = 1 \ldots, n.$$

Пусть $U_1(t)$ — $m \times (n-1)$-матрица, полученная из $U(t)$ вычеркиванием первого столбца. Тогда $U_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{B}_{\delta_0}(0) \subset \mathrm{M}_{m,n-1}$ — измерима.

Рассмотрим нормальную ФСР $z^{(1)}(\cdot), \ldots, z^{(n-1)}(\cdot)$ системы (19.22), такую, что $\lambda[z^{(i)}] = \lambda_i(P_1 + G_1U)$;

$$z^{(i)}(t) = \mathrm{col}(z_1^{(i)}(t), \ldots, z_{n-1}^{(i)}(t)), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Положим $y^{(i)}(t) = \mathrm{col}(0, z_1^{(i)}(t), \ldots, z_{n-1}^{(i)}(t))$. Функции $y^{(1)}(\cdot), \ldots, y^{(n-1)}(\cdot)$ являются линейно независимыми решениями системы (19.21), их показатели попарно различны и лежат в ε_0-окрестностях чисел $\lambda_j(P_0)$ при $j \neq k$. Следовательно, набор показателей этих решений совпадает с набором чисел $\widehat{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq k$.

Пусть $y^{(n)}(\cdot)$ — произвольное решение системы (19.21), показатель которого равен $\widehat{\lambda}_k$. Так как числа $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n$ попарно различны, то функции $y^{(1)}(\cdot), \ldots, y^{(n)}(\cdot)$ линейно независимы, а это означает, что первая координата $y_1^{(n)}(\cdot)$ решения $y^{(n)}(\cdot)$ не равна тождественно нулю (в противном случае функция $z^{(n)}(t) = \mathrm{col}(y_2^{(n)}(t), \ldots, y_n^{(n)}(t))$ — решение системы $(n-1)$-го порядка (19.22), линейно зависимое с решениями $z^{(1)}(\cdot), \ldots, z^{(n-1)}(\cdot)$, что влечет линейную зависимость $y^{(1)}(\cdot), \ldots, y^{(n)}(\cdot)$). Но

$$\dot{y}_1^{(n)}(t) = p_1(t) y_1^{(n)}(t),$$

поэтому

$$y_1^{(n)}(t) = c \cdot \exp \int\limits_0^t p_1(\tau)\, d\tau,$$

где $c \neq 0$. Следовательно,

$$\widehat{\lambda}_k = \lambda[y^{(n)}] \geqslant \lambda[y_1^{(n)}] = \overline{p_1} = \lambda_k(P_0).$$

Итак, функции $y^{(1)}(\cdot), \ldots, y^{(n)}(\cdot)$ образуют нормальную ФСР системы (19.21), при этом ни один показатель $\lambda_i(P_0 + G_0U)$ не попадает в левую ε_0-полуокрестность величины $\lambda_k(P_0)$, и это верно для любой измеримой функции $U : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{B}_{\delta_0}(0) \subset \mathrm{M}_{nm}$. Поэтому возмущениями $G_0(t)U(t)$, $\sup\limits_t \|U(t)\| < \delta_0$, невозможно добиться выполнения равенства

$$\lambda_k(P_0 + G_0U) = \lambda_k(P_0) + \mu_k$$

при малых отрицательных μ_k. Это означает, что показателем $\lambda_k(\sigma_0)$ системы $\dot{x} = A(f^t\sigma_0)x$ управлять нельзя. Теорема доказана.

§ 20. Управление показателями Ляпунова почти периодического уравнения

В этом параграфе для скалярного уравнения n-го порядка

$$z^{(n)} + u\sigma_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + u\sigma_n(t)z = 0$$

с почти периодическими по Бору и линейно независимыми на $\mathbb{R}$ коэффициентами $\sigma_1(\cdot), \ldots, \sigma_n(\cdot)$ установлена равномерная локальная управляемость показателей Ляпунова.

Рассмотрим уравнение

$$z^{(n)} + u\sigma_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + u\sigma_n(t)z = 0, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{20.1}$$

где $u = u(t)$ — всевозможные измеримые и ограниченные на $\mathbb{R}$ скалярные управления, а коэффициенты $t \to \sigma_i(t)$ почти периодичны в смысле Бора (определение почти периодичности по Бору см., например, в [39, с. 368]). Обозначим

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t))$$

и по уравнению (20.1) построим динамическую систему сдвигов (Σ, f^t), где Σ — замыкание (в топологии равномерной сходимости на $\mathbb{R}$) множества сдвигов функции $\sigma(\cdot)$, а $f^\tau\sigma = \sigma_\tau(\cdot)$. Таким образом, всякой функции $\widehat{\sigma}(\cdot) \in \Sigma$ отвечает уравнение вида (20.1), которое мы отождествляем с $\widehat{\sigma}(\cdot)$.

Возьмем какое-либо уравнение $\widehat{\sigma}(\cdot) \in \Sigma$ и зафиксируем произвольное измеримое и ограниченное на $\mathbb{R}$ управление $u(\cdot)$. Отождествим полученное уравнение с системой

$$\dot{x} = (A + b\widehat{c}^*(t)u(t))x, \tag{20.2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{c}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_n(t) \\ \widehat{\sigma}_{n-1}(t) \\ \dots\dots \\ \widehat{\sigma}_3(t) \\ \widehat{\sigma}_2(t) \\ \widehat{\sigma}_1(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_1(A + b\widehat{c}^*u) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + b\widehat{c}^*u)$ — полный спектр показателей Ляпунова системы (20.2). Будем говорить, что набор этих чисел образует полный спектр показателей уравнения (20.1), и будем обозначать его $\lambda_1(\widehat{\sigma}, u) \leqslant \lambda_2(\widehat{\sigma}, u) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\widehat{\sigma}, u)$. Отметим, что для любой системы $\widehat{\sigma} \in \Sigma$ управлению $u(t) \equiv 0$ отвечает полный спектр $\lambda_1(\widehat{\sigma}, 0) = \ldots = \lambda_n(\widehat{\sigma}, 0) = 0$.

Т е о р е м а 20.1 [132]. *Пусть функции $\sigma_1(\cdot), \ldots, \sigma_n(\cdot)$ почти периодичны в смысле Бора и линейно независимы на $\mathbb{R}$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого вектора $\mu = \mathrm{col}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ с координатами, удовлетворяющими неравенствам $-\delta < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < \delta$, и любого уравнения $\widehat{\sigma}(\cdot) \in \Sigma$ найдется допустимое управление $\widehat{u}(t) = u(t, \widehat{\sigma}(\cdot), \mu)$, $|\widehat{u}(t)| < \varepsilon$, обеспечивающее для показателей Ляпунова $\lambda_1(\widehat{\sigma}, \widehat{u}), \lambda_2(\widehat{\sigma}, \widehat{u}), \ldots, \lambda_n(\widehat{\sigma}, \widehat{u})$ уравнения $\widehat{\sigma}(\cdot)$ при управлении $\widehat{u}(\cdot)$ равенства*

$$\lambda_i(\widehat{\sigma}, \widehat{u}) = \mu_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линейную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^*(t)x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, постоянные матрица A и вектор b определены выше, а

$$c(t) = \mathrm{col}(\sigma_n(t), \sigma_{n-1}(t), \ldots, \sigma_1(t)).$$

Будем отождествлять эту систему с тройкой $(A, b, c(\cdot))$. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой 19.2. Отметим, что у системы $\dot{x} = Ax$ показатели устойчивы, а в силу почти периодичности $c(\cdot)$ множество $\overline{\gamma_+(\sigma)}$ минимально, компактно и совпадает с Σ. Поэтому, в силу теоремы 2.3, из согласованности тройки $(A, b, c(\cdot))$ следует ее равномерная согласованность.

Покажем, что тройка $(A, b, c(\cdot))$ согласованна. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Построим функции

$$U_{ij}(t) = b^* X^*(0, t) e_i e_j^* X^*(t, 0) c(t), \quad i, j = 1, 2,$$

где

$$X(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица Коши системы $\dot{x} = Ax$. Справедливы равенства

$$U_{11}(t) = -t\sigma_1(t),\ U_{12}(t) = -t^2\sigma_1(t) - t\sigma_2(t),$$

$$U_{21}(t) = \sigma_1(t),\ U_{22}(t) = t\sigma_1(t) + \sigma_2(t).$$

В силу теоремы 2.1 тройка $(A, b, c(\cdot))$ согласованна в том и только том случае, когда существует $\vartheta > 0$ такое, что функции $U_{ij}(\cdot)$ линейно независимы на $[0, \vartheta]$. Предположим противное, пусть функции $U_{ij}(\cdot)$ линейно зависимы на $\mathbb{R}_+$. Тогда существуют α, β, γ, δ, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha\sigma_1(t)t + \beta\sigma_1(t)t^2 + \beta\sigma_2(t)t + \gamma\sigma_1(t) + \delta\sigma_1(t)t + \delta\sigma_2(t) \equiv 0, \quad t \geqslant 0. \quad (20.3)$$

Следовательно,

$$\frac{\alpha\sigma_1(t)}{t} + \beta\sigma_1(t) + \frac{\beta\sigma_2(t)}{t} + \frac{\gamma\sigma_1(t)}{t^2} + \frac{\delta\sigma_1(t)}{t} + \frac{\delta\sigma_2(t)}{t^2} \equiv 0, \quad t > 0.$$

Перейдем в этом тождестве к пределу при $t \to +\infty$, получим равенство

$$\lim_{t\to\infty} \beta\sigma_1(t) = 0.$$

Так как $\sigma_1(\cdot)$ — нетривиальная почти периодическая функция, то

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_1(t) \neq 0,$$

поэтому $\beta = 0$. Следовательно, (20.3) можно представить в виде

$$(\alpha + \delta)\sigma_1(t) + \frac{\gamma\sigma_1(t) + \delta\sigma_2(t)}{t} \equiv 0, \quad t > 0.$$

Отсюда $\alpha + \delta = 0$, поэтому (20.3) приобретает вид

$$\gamma\sigma_1(t) + \delta\sigma_2(t) \equiv 0,$$

и из линейной независимости $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ следует, что $\gamma = \delta = 0$, а потому и $\alpha = 0$. Это противоречит предположению $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 > 0$.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеем равенства

$$U_{ij}(t) = (-1)^{n-i} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} \sum_{k=1}^{j} \frac{t^{j-k}}{(j-k)!} \sigma_k(t), \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

и тождество (20.3) принимает вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} \sum_{k=1}^{j} \frac{t^{j-k}}{(j-k)!} \sigma_k(t) \equiv 0.$$

Поделив это тождество на t в максимальной степени (т. е. на t^{2n-2}), приходим к равенству $\alpha_{1n} = 0$. Продолжая этот процесс деления на t^{r_k}, где r_k — максимальная степень на k-м шаге, приходим к системе

$$\sum_{k=l}^{m} \alpha_{k,n-m+k} = 0, \quad l = 1,\ldots,n, \ m = 1,\ldots,n.$$

Эта система имеет только тривиальное решение, что доказывает согласованность тройки $(A, b, c(\cdot))$, а вместе с тем и теорему 20.1.

ГЛАВА IV. ГЛОБАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

В этой главе рассмотрены вопросы о глобальной достижимости, глобальной ляпуновской приводимости и глобальной управляемости некоторых асимптотических инвариантов замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Основные результаты получены в предположении равномерной полной управляемости соответствующей системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m.$$

Доказана глобальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова (теорема 27.4), коэффициентов неправильности (теорема 26.2), особых показателей П. Боля (теорема 27.1), центральных показателей Р. Э. Винограда и В. М. Миллионщикова (теорема 27.2) и экспоненциальных показателей Н. А. Изобова (теорема 27.3), свойства правильности (следствие 26.2), приводимости (следствие 26.3) и устойчивости показателей Ляпунова (теорема 26.3). Установлена глобальная достижимость двумерных систем (теорема 25.1) и глобальная ляпуновская приводимость периодических систем (теорема 24.1).

§ 21. Глобальная достижимость, глобальная ляпуновская приводимость и глобальная управляемость асимптотических инвариантов

В этом параграфе введены понятия глобальной достижимости и глобальной ляпуновской приводимости замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x.$$

Выяснена взаимосвязь между этими понятиями и их связь с определением глобальной управляемости ляпуновских инвариантов.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ t \in \mathbb{R}, \tag{21.1}$$

с кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ матричными коэффициентами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$. Как и прежде, будем предполагать, что управление $u(\cdot)$ в системе (21.1) выбирается линейным по фазовым координатам, $u = U(t)x$, где функция $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ играет роль матричного управления в замкнутой системе

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x. \tag{21.2}$$

Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{21.3}$$

$Q(t,s) := X(t,s)B(s)$, $a := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\|$.

Пусть задана некоторая $n \times n$ матрица H. Поставим задачу построения на произвольном отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$ такого управления $U(\cdot)$, что для матрицы Коши $X_U(t,s)$ замкнутой системы (21.2) при $U = U(\cdot)$ выполнено равенство

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)H. \tag{21.4}$$

В отличие от рассмотренного в главе II вопроса о локальной достижимости системы (21.1), здесь мы будем предполагать, что $H \in \mathrm{M}_n$ — не обязательно близкая к единичной матрица.

Предположим, что требуемое управление $U(\cdot)$ уже построено. Так как

$$H = X(t_0, t_0 + \vartheta)X_U(t_0 + \vartheta, t_0),$$

и в силу формулы Остроградского–Лиувилля [39, с. 73] для матрицы Коши $Z(t,s)$ произвольной линейной однородной системы $\dot z = C(t)z$ справедливо равенство

$$\det Z(t,s) = \exp\int\limits_s^t \operatorname{Sp} C(\tau)\,d\tau,$$

то

$$\det H = \exp\int\limits_{t_0+\vartheta}^{t_0} \operatorname{Sp} A(t)\,dt \cdot \exp\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \operatorname{Sp}(A(t)+B(t)U(t))\,dt =$$

$$= \exp\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \operatorname{Sp}(B(t)U(t))\,dt > 0.$$

Таким образом, *необходимым условием существования управления* $U(\cdot)$*, для которого выполнено* (21.4)*, является неравенство* $\det H > 0$.

Определение 21.1. Пусть $\mathbb{U}\subset \mathrm{M}_{mn}$ — неограниченное множество. Будем говорить, что система (21.2) обладает свойством
глобальной достижимости на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$ **относительно множества** $\mathbb{U}$, если для любой матрицы $H\in \mathrm{M}_n$, $\det H > 0$, существует ограниченное кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0+\vartheta] \to \mathbb{U}$, такое, что выполнено равенство (21.4);
равномерной глобальной достижимости относительно множества $\mathbb{U}$, если при некотором $\vartheta > 0$ для произвольных $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ найдется такое положительное число l, что для любой матрицы $H\in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|H\|\leqslant\alpha$ и $\det H\geqslant\beta$, и для любого $t_0\in\mathbb{R}$ существует кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0+\vartheta]\to\mathbb{U}$, $\|U\|_C\leqslant l$, гарантирующее выполнение равенства (21.4);
ϑ**-равномерной глобальной достижимости относительно множества** $\mathbb{U}$, если (21.2) равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U}$ на отрезках длины ϑ.

Определение 21.2. Система (21.2) называется
глобально достижимой на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$, если эта система глобально достижима на $[t_0, t_0+\vartheta]$ относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$;
равномерно глобально достижимой, если (21.2) равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$;
ϑ**-равномерно глобально достижимой**, если (21.2) равномерно глобально достижима на отрезках длины ϑ.

Теорема 21.1. *Пусть* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — *неограниченное множество. Если система* (21.2) *глобально достижима на отрезке* $[t_0, t_0+\vartheta]$ *относительно множества* $\mathbb{U}$, *то соответствующая система* (21.1) *вполне управляема на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим, что система (21.1) не является вполне управляемой на $[t_0, t_0+\vartheta]$. Тогда (см. с. 31) строки матрицы $Q(t_0, t)$ линейно зависимы на $[t_0, t_0+\vartheta]$, т. е. существует вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, такой, что $\xi^* Q(t_0, t) \equiv 0$ на $[t_0, t_0+\vartheta]$.

Возьмем произвольную матрицу $H \in \mathrm{M}_n$ с положительным определителем и в соответствии со свойством глобальной достижимости построим управление $U : [t_0, t_0+\vartheta] \to \mathbb{U}$, гарантирующее выполнение равенства (21.4). По формуле Коши

$$X_U(t_0+\vartheta, t_0) = X(t_0+\vartheta, t_0)\Big(E + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)U(s)X_U(s, t_0)\, ds\Big),$$

поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)U(s)X_U(s, t_0)\, ds = H - E.$$

Умножим это равенство слева на ξ^*, получим

$$\xi^*(H - E) = \xi^*\Big(\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)U(s)X_U(s, t_0)\, ds\Big) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\xi^* Q(t_0, s))U(s)X_U(s, t_0)\, ds = 0.$$

Следовательно, $\xi^* H = \xi^*$, т. е. H имеет собственное значение, равное 1. Это противоречит произвольности H. Теорема доказана.

Замечание 21.1. Из полной управляемости системы (21.1) на $[t_0, t_0+\vartheta]$ не следует глобальная достижимость системы (21.2) на этом отрезке.

Пример 21.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} u, \quad x = \mathrm{col}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{21.5}$$

где

$$b_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [2k, 2k+1[, \\ 0 & \text{при } t \in [2k+1, 2(k+1)[, \end{cases}$$

$$b_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [2k, 2k+1[, \\ 1 & \text{при } t \in [2k+1, 2(k+1)[, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$. Тогда $X(t,s) \equiv E$, а матрица Калмана системы (21.5) имеет вид

$$W(t_0, t_0+\vartheta) = \operatorname{diag}\Big(\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} b_1^2(t)\,dt,\ \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} b_2^2(t)\,dt\Big).$$

Поскольку при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+1+\varepsilon} b_i^2(t)\,dt \geqslant \min\{\varepsilon, 1\} =: \varepsilon_0, \quad i = 1, 2,$$

то для любого вектора $\xi = \operatorname{col}(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|\xi\| = 1$, получаем оценку

$$\xi^* W(t_0, t_0+1+\varepsilon)\xi = \xi_1^2 \int\limits_{t_0}^{t_0+1+\varepsilon} b_1^2(t)\,dt + \xi_2^2 \int\limits_{t_0}^{t_0+1+\varepsilon} b_2^2(t)\,dt \geqslant \varepsilon_0(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \varepsilon_0.$$

Это означает, что система (21.5) является $(1+\varepsilon)$-равномерно вполне управляемой при любом $\varepsilon > 0$. Возьмем $\varepsilon = 1$, т. е. $\vartheta = 2$, и рассмотрим систему (21.5) на $[0, 2]$. Из вышеприведенных рассуждений вытекает, что (21.5) вполне управляема на $[0, 2]$. Покажем, что система (21.5) не является глобально достижимой на $[0, 2]$.

Пусть $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — произвольные кусочно непрерывные и ограниченные на $[0, 2]$ скалярные функции. Замкнем систему (21.5) обратной связью $u = U(t)x$, где $U(t) = (u_1(t), u_2(t))$, получим систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} b_1(t)u_1(t) & b_1(t)u_2(t) \\ b_2(t)u_1(t) & b_2(t)u_2(t) \end{pmatrix} x. \tag{21.6}$$

Обозначим

$$\varphi_i(t,s) = \exp\int\limits_s^t u_i(\tau)\,d\tau, \quad t, s \in [0, 2], \quad i = 1, 2.$$

При $t \in [0, 1[$ система (21.6) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1(t)x_1 + u_2(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = 0, \end{cases}$$

поэтому для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (21.6) имеет место равенство

$$X_U(1, 0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(1,0) & \int\limits_0^1 u_2(t)\varphi_1(1,t)\,dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а при $t \in [1,2[$ из (21.6) получаем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = u_1(t)x_1 + u_2(t)x_2, \end{cases}$$

следовательно,

$$X_U(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \int\limits_1^2 u_1(t)\varphi_2(2,t)\,dt & \varphi_2(2,1) \end{pmatrix}.$$

Перемножая найденные матрицы Коши, получим

$$X_U(2,0) = X_U(2,1)X_U(1,0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(1,0) & \int\limits_0^1 u_2(t)\varphi_1(1,t)dt \\ \varphi_1(1,0)\int\limits_1^2 u_1(t)\varphi_2(2,t)dt & \varphi_2(2,1) + \int\limits_0^1 u_2(t)\varphi_1(1,t)dt \cdot \int\limits_1^2 u_1(t)\varphi_2(2,t)dt \end{pmatrix}.$$

Возьмем произвольную матрицу $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in \mathrm{M}_2$, определитель которой больше нуля, такую, что $h_{11} \leqslant 0$. Поскольку для любой функции $u_1(\cdot)$ величина

$$\varphi_1(1,0) = \exp\int\limits_0^1 u_1(t)\,dt$$

положительна, невозможно добиться выполнения равенства

$$X_U(2,0) = X(2,0)H = H,$$

т. е. система (21.5) не является глобально достижимой на $[0,2]$.

Выясним теперь, как соотносятся понятия равномерной глобальной достижимости системы (21.2) и равномерной полной управляемости системы (21.1).

Т е о р е м а 21.2. *Пусть* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ *— неограниченное множество. Если система* (21.2) ϑ*-равномерно глобально достижима относительно множества* $\mathbb{U}$*, то соответствующая система* (21.1) ϑ*-равномерно вполне управляема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что система (21.1) не является ϑ-равномерно вполне управляемой. Тогда (см. определение 1.3) для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся момент времени t_k и вектор $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi_k\| = 1$, такие, что

$$\int\limits_{t_k}^{t_k+\vartheta} \|\xi_k^* Q(t_k, s)\|^2 \, ds \leqslant \frac{1}{k}.$$

Пусть $\widehat{\xi}$ — предельная точка последовательности $\{\xi_k\}$. Без ограничения общности будем считать, что последовательность $\{\xi_k\}$ имеет предел $\widehat{\xi}$. В силу непрерывности функции $\xi \mapsto \int\limits_t^{t+\vartheta} \|\xi^* Q(t, s)\|^2 \, ds$, равномерной по $t \in \mathbb{R}$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $K = K(\varepsilon)$, начиная с которого будет выполнено неравенство

$$\int\limits_{t_k}^{t_k+\vartheta} \|\widehat{\xi}^* Q(t_k, s)\|^2 \, ds \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем $H_k = H = 2E$. В силу свойства ϑ-равномерной глобальной достижимости найдется такое $l > 0$, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ существует кусочно непрерывное управление $U : [t_k, t_k + \vartheta] \to \mathbb{U}$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_C \leqslant l$ и обеспечивающее выполнение равенства

$$X_U(t_k + \vartheta, t_k) = X(t_k + \vartheta, t_k) H.$$

Как в доказательстве теоремы 21.1, отсюда получаем равенство

$$\int\limits_{t_k}^{t_k+\vartheta} Q(t_k, s) U(s) X_U(s, t_k) \, ds = H - E = E.$$

Умножая его слева на $\widehat{\xi}^*$ и переходя к нормам, при всех $k \geqslant K(\varepsilon)$ получим

$$1 = \|\widehat{\xi}^* E\| = \Big\| \int\limits_{t_k}^{t_k+\vartheta} \widehat{\xi}^* Q(t_k, s) U(s) X_U(s, t_k) \, ds \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_k}^{t_k+\vartheta} \|\widehat{\xi}^* Q(t_k, s)\| \, \|U(s)\| \, \|X_U(s, t_k)\| \, ds \leqslant e^{(a+l)\vartheta} l \int\limits_{t_k}^{t_k+\vartheta} \|\widehat{\xi}^* Q(t_k, s)\| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{(a+l)\vartheta} l \sqrt{\vartheta} \Big(\int\limits_{t_k}^{t_k+\vartheta} \|\widehat{\xi}^* Q(t_k, s)\|^2 \, ds \Big)^{1/2} \leqslant e^{(a+l)\vartheta} l \sqrt{\vartheta} \sqrt{\varepsilon}.$$

При $\varepsilon < \dfrac{1}{e^{2(a+l)\vartheta} l^2 \vartheta}$ получаем противоречие. Теорема доказана.

Пример 21.1 показывает, что свойство ϑ-равномерной полной управляемости системы (21.1) не является достаточным для ϑ-равномерной глобальной достижимости соответствующей замкнутой системы (21.2). Но оказывается (см. теорему 25.1), что *для любой двумерной ϑ-равномерно вполне управляемой системы вида* (21.1) *с кусочно равномерно непрерывной $B(\cdot)$ соответствующая замкнутая система* (21.2) *обладает свойством 4ϑ-равномерной глобальной достижимости.*

Определение 21.3. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — неограниченное множество. Будем говорить, что система (21.2) обладает свойством **глобальной ляпуновской приводимости относительно множества** $\mathbb{U}$, если для любой матрицы $C(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$ найдется кусочно непрерывное ограниченное управление $U : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{21.7}$$

и системы (21.2) при $U = U(\cdot)$, т. е. существует преобразование Ляпунова, связывающее эти системы.

Определение 21.4 [97]. Будем говорить, что система (21.2) обладает свойством **глобальной ляпуновской приводимости**, если она обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$.

Выясним связь между свойствами глобальной достижимости и глобальной ляпуновской приводимости системы (21.2).

Теорема 21.3. *Если система* (21.2) *равномерно глобально достижима относительно множества* $\mathbb{U}$, *то* (21.2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости относительно* $\mathbb{U}$.

Доказательство. Возьмем произвольную систему (21.7) с кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ матрицей коэффициентов $C(\cdot)$ и матрицей Коши $Z(t,s)$; $c := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|C(t)\|$. Пусть $\vartheta > 0$ — число, обеспечивающее ϑ-равномерную глобальную достижимость системы (21.2) относительно множества $\mathbb{U}$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$H_k = X(k\vartheta, (k+1)\vartheta)Z((k+1)\vartheta, k\vartheta).$$

Тогда имеют место равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ оценки

$$\|H_k\| \leqslant e^{(a+c)\vartheta},$$

$$\det H_k = \exp \int\limits_{k\vartheta}^{(k+1)\vartheta} \mathrm{Sp}(C(t) - A(t))\, dt \geqslant e^{-n(a+c)\vartheta}.$$

В силу свойства ϑ-равномерной глобальной достижимости системы (21.2) относительно множества $\mathbb{U}$ существует $l > 0$ такое, что при каждом $k \in \mathbb{Z}$ можно построить управление $U_k : [k\vartheta, (k+1)\vartheta] \to \mathbb{U}$, $\|U_k\|_C \leqslant l$, обеспечивающее для матрицы Коши системы (21.2) при $U = U_k(\cdot)$ равенство

$$X_{U_k}((k+1)\vartheta, k\vartheta) = X((k+1)\vartheta, k\vartheta)H_k = Z((k+1)\vartheta, k\vartheta).$$

Положим

$$U(t) \equiv U_k(t) \quad \text{при } t \in [k\vartheta, (k+1)\vartheta[.$$

Тогда $U(t) \in \mathbb{U}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, $\|U\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant l$ и

$$X_U((k+1)\vartheta, k\vartheta) = X_{U_k}((k+1)\vartheta, k\vartheta) = Z((k+1)\vartheta, k\vartheta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда вытекает (Е. К. Макаров, [90]) асимптотическая эквивалентность системы (21.7) и системы (21.2) с построенным $U(\cdot)$. Следовательно, система (21.2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости относительно множества $\mathbb{U}$.

З а м е ч а н и е 21.2. Из свойства глобальной ляпуновской приводимости системы (21.1) относительно множества $\mathbb{U}$ в общем случае не следует ее равномерная глобальная достижимость относительно $\mathbb{U}$.

П р и м е р 21.2. Рассмотрим линейную управляемую систему (21.1) при $m = n = 2$, $A(t) \equiv 0$, $B(t) \equiv E$. В этом случае замкнутая система (21.2) имеет вид

$$\dot{x} = U(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{21.8}$$

Предположим, что управление $U(t)$ в системе (21.8) при каждом $t \in \mathbb{R}$ принимает значение во множестве $\mathbb{U}$ верхних треугольных 2×2 матриц. Тогда при всех $t, s \in \mathbb{R}$ матрица Коши $X_U(t,s)$ системы (21.8) — верхняя треугольная с положительными диагональными элементами

$$\exp \int\limits_s^t u_{ii}(\tau)\, d\tau, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, равенство (21.4), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = H,$$

не может быть выполнено ни при каких $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta > 0$, если H не является верхней треугольной матрицей с положительными диагональными элементами. Таким образом, система (21.8) не является глобально достижимой относительно множества $\mathbb{U}$ ни на каком отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$.

В то же время система (21.8) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости относительно множества $\mathbb{U}$. Действительно, рассмотрим произвольную двумерную систему (21.7) с кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами. Перроновским преобразованием приведем ее к верхнему треугольному виду

$$\dot{y} = \widehat{C}(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \tag{21.9}$$

где $\widehat{C}(t) = \{\hat{c}_{ij}(t)\}_{i,j=1}^2$, $\|\widehat{C}\|_C \leqslant \hat{c}$. При всяких $t, s \in \mathbb{R}$ матрица Коши $Y(t,s)$ системы (21.9) — верхняя треугольная с положительной диагональю. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$H_k = Y(k+1,k); \quad H_k = \{h_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^2.$$

Тогда

$$\|H_k\| \leqslant e^{\hat{c}}, \quad \|H_k^{-1}\| \leqslant e^{\hat{c}},$$

следовательно, для $|h_{ij}^{(k)}|$ имеют место неравенства

$$|h_{ij}^{(k)}| \leqslant \|H_k\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|H_k\| \leqslant \sqrt{2}e^{\hat{c}}, \tag{21.10}$$

где $\|H_k\|_1$ — максимальная столбцовая норма [176, с. 356] матрицы H_k. Для диагональных элементов матрицы H_k, кроме того, справедливы оценки

$$\frac{1}{h_{ii}^{(k)}} \leqslant \|H_k^{-1}\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|H_k^{-1}\| \leqslant \sqrt{2}e^{\hat{c}},$$

т. е.

$$|h_{ii}^{(k)}| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}e^{\hat{c}}}, \quad i = 1, 2. \tag{21.11}$$

Выберем матричное управление $U(\cdot)$ в системе (21.8) кусочно постоянным,

$$U(t) \equiv U_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & \gamma_k \end{pmatrix}, \quad t \in [k, k+1[,$$

значения α_k, β_k, γ_k уточним ниже. Тогда при каждом $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$X_U(k+1,k) = \exp U_k.$$

Если $\alpha_k \neq \gamma_k$, то при каждом $j \in \mathbb{N}$ для j-й степени матрицы U_k имеем равенство

$$U_k^j = \begin{pmatrix} \alpha_k^j & \dfrac{\beta_k(\alpha_k^j - \gamma_k^j)}{\alpha_k - \gamma_k} \\ 0 & \gamma_k^j \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\exp U_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_k^j}{j!} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_k} & \dfrac{\beta_k(e^{\alpha_k} - e^{\gamma_k})}{\alpha_k - \gamma_k} \\ 0 & e^{\gamma_k} \end{pmatrix}. \tag{21.12}$$

Если же $\alpha_k = \gamma_k$, то

$$U_k^j = \begin{pmatrix} \alpha_k^j & j\beta_k\alpha_k^{j-1} \\ 0 & \alpha_k^j \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\exp U_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_k^j}{j!} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_k} & \beta_k e^{\alpha_k} \\ 0 & e^{\alpha_k} \end{pmatrix}. \tag{21.13}$$

Пусть $h_{11}^{(k)} \neq h_{22}^{(k)}$. В этом случае положим

$$\alpha_k = \ln h_{11}^{(k)}, \quad \gamma_k = \ln h_{22}^{(k)},$$

$$\beta_k = \frac{h_{12}^{(k)}(\alpha_k - \gamma_k)}{e^{\alpha_k} - e^{\gamma_k}} = \frac{h_{12}^{(k)} \ln(h_{11}^{(k)}/h_{22}^{(k)})}{h_{11}^{(k)} - h_{22}^{(k)}}.$$

Тогда из (21.12) следует, что

$$\exp U_k = H_k.$$

Оценим $\|U_k\|$. Для $|\alpha_k|$ и $|\gamma_k|$ из (21.10) имеем неравенства

$$|\alpha_k| \leqslant \ln(\sqrt{2}e^{\widehat{c}}) \leqslant 1 + \widehat{c}, \quad |\gamma_k| \leqslant 1 + \widehat{c}.$$

Оценим теперь $|\beta_k|$. Так как при произвольных $\alpha < \gamma$ справедливо неравенство

$$\gamma - \alpha \leqslant e^{\gamma - \alpha} - 1 = e^{-\alpha}(e^{\gamma} - e^{\alpha}),$$

то

$$\frac{\gamma - \alpha}{e^{\gamma} - e^{\alpha}} \leqslant e^{-\alpha},$$

поэтому из (21.11)

$$\left| \frac{\alpha_k - \gamma_k}{e^{\alpha_k} - e^{\gamma_k}} \right| \leqslant \max\{e^{-\alpha_k}, e^{-\gamma_k}\} = \frac{1}{\min\{h_{11}^{(k)}, h_{22}^{(k)}\}} \leqslant \sqrt{2}e^{\widehat{c}}.$$

Отсюда и из (21.10) для $|\beta_k|$ получаем оценку

$$|\beta_k| \leqslant |h_{12}^{(k)}| \cdot \left| \frac{\alpha_k - \gamma_k}{e^{\alpha_k} - e^{\gamma_k}} \right| \leqslant 2e^{2\widehat{c}}.$$

Следовательно,

$$\|U_k\| \leqslant \sqrt{2}\|U_k\|_1 = \sqrt{2}\max\{|\alpha_k|; |\beta_k| + |\gamma_k|\} \leqslant \sqrt{2}(1 + \widehat{c} + 2e^{2\widehat{c}}).$$

Пусть теперь $h_{11}^{(k)} = h_{22}^{(k)}$. В этом случае положим

$$\alpha_k = \gamma_k = \ln h_{11}^{(k)}, \quad \beta_k = \frac{h_{12}^{(k)}}{e^{\alpha_k}} = \frac{h_{12}^{(k)}}{h_{11}^{(k)}}.$$

Из (21.13) следует равенство

$$\exp U_k = H_k,$$

а из (21.10) и из (21.11) — оценка

$$\|U_k\| \leqslant \sqrt{2}\|U_k\|_1 = \sqrt{2}(|\alpha_k| + |\beta_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}(\widehat{c} + |h_{12}^{(k)}|/|h_{11}^{(k)}|) \leqslant \sqrt{2}(1 + \widehat{c} + 2e^{2\widehat{c}}).$$

Итак, построенное кусочно постоянное управление $U(\cdot)$ принимает значения во множестве $\mathbb{U}$, удовлетворяет оценке

$$\|U\|_C \leqslant \sqrt{2}(1 + \widehat{c} + 2e^{2\widehat{c}})$$

и при каждом $k \in \mathbb{Z}$ обеспечивает выполнение равенств

$$X_U(k+1, k) = \exp U_k = H_k = Y(k+1, k),$$

следовательно, система (21.9) и система (21.8) с выбранным $U(\cdot)$ асимптотически эквивалентны. Но (21.7) и (21.9) связаны перроновским преобразованием, поэтому (21.7) и (21.8) при $U = U(\cdot)$ асимптотически эквивалентны. Таким образом, система (21.8) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости относительно множества $\mathbb{U}$.

В заключение этого параграфа выясним связь между свойствами глобальной ляпуновской приводимости и глобальной управляемости ляпуновских инвариантов.

Т е о р е м а 21.4. *Если система* (21.2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости, то всякая совокупность ляпуновских инвариантов* $(\iota_1, \ldots, \iota_k)$ *при любом* $k \in \mathbb{N}$ *глобально управляема относительно пары* (A, B).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое $k \in \mathbb{N}$ и зафиксируем произвольную совокупность ляпуновских инвариантов $(\iota_1, \ldots, \iota_k)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ принадлежит множеству $(\iota_1, \ldots, \iota_k)(\mathcal{M}_n)$. Тогда, в силу определения этого множества, найдется система $C(\cdot) \in \mathcal{M}_n$, для которой выполнены равенства $\iota_j(C) = \alpha_j$ при всех $j \in \{1, \ldots, k\}$. В соответствии со свойством глобальной ляпуновской приводимости системы (21.2) построим управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, гарантирующее асимптотическую эквивалентность системы $C(\cdot)$ и системы (21.2) при $U = U(\cdot)$. Преобразования Ляпунова не изменяют ляпуновские инварианты, поэтому

$$\iota_j(A+BU) = \iota_j(C) = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Теорема доказана.

§ 22. Критерии равномерной полной управляемости

Здесь получены критерии равномерной полной управляемости системы (21.1) в предположении кусочной равномерной непрерывности матрицы $B(\cdot)$. Основную роль в построениях этой главы играет теорема 22.2. На основании этой теоремы в конце параграфа вводится и обсуждается понятие базиса чистых движений системы (21.1).

Определение 22.1 [139]. Будем говорить, что матричная функция $B : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{nm}$ кусочно равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, если $B \in KC_{nm}(\mathbb{R})$; существует такое $\Delta_0 > 0$, что длина каждого интервала непрерывности I_i, $i \in \mathbb{I}$, функции $B(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $|I_i| \geqslant \Delta_0$; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого $i \in \mathbb{I}$ и всех $t, s \in I_i$, удовлетворяющих неравенству $|t-s| \leqslant \Delta$, выполнено соотношение $\|B(t) - B(s)\| \leqslant \varepsilon$.

Рассмотрим линейную управляемую систему (21.1) с ограниченными и кусочно непрерывными коэффициентами. При каждых $t, s \in \mathbb{R}$ определим матрицу $Q(t,s) \in \mathrm{M}_{nm}$ равенством

$$Q(t,s) = X(t,s)B(s),$$

где $X(t,s)$ — матрица Коши однородной системы (21.3).

Предложение 22.1. *Если матрица $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, T)$, что при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ и всех $t, s \in [t_0, t_0 + T]$, принадлежащих одному и тому же интервалу непрерывности I_i, $i \in \mathbb{I}$, функции $B(\cdot)$ и удовлетворяющих неравенству*

$|t-s| \leqslant \delta$, *выполнено соотношение*

$$\|Q(t_0,t)-Q(t_0,s)\| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $T > 0$ — произвольны. Матричная функция $X(t_0,\cdot)$ является нормированной при $t = t_0$ фундаментальной матрицей системы

$$\dot{\xi} = -\xi A(t), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n*},$$

поэтому по формуле Коши

$$X(t_0,t) = E - \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0,s)A(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из леммы Гронуолла–Беллмана [39, с. 108] вытекает, что $\|X(t_0,t)\| \leqslant e^{aT}$ при всех $t \in [t_0, t_0+T]$, а для $\|X(t_0,t_2)-X(t_0,t_1)\|$ при произвольных $t_1,t_2 \in [t_0,t_0+T]$ справедлива оценка

$$\|X(t_0,t_2)-X(t_0,t_1)\| = \|E - \int\limits_{t_0}^{t_2} X(t_0,s)A(s)\,ds -$$

$$-E + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_0,s)A(s)\,ds\| = \|\int\limits_{t_1}^{t_2} X(t_0,s)A(s)\,ds\| \leqslant$$

$$\leqslant |t_2-t_1| \sup_{s\in[t_0,t_0+T]} \|X(t_0,s)\| \sup_{s\in[t_0,t_0+T]} \|A(s)\| \leqslant ae^{aT}|t_2-t_1|.$$

Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ положим

$$\delta(\varepsilon,T) = \min\{\Delta(e^{-aT}\varepsilon/2); e^{-aT}\varepsilon/(2ab)\},$$

где $\Delta(\cdot)$ — из определения 22.1. Пусть $s,t \in [t_0,t_0+T] \cap I_i$ при некотором фиксированном $i \in \mathbb{I}$, и $|s-t| \leqslant \delta(\varepsilon,T)$. Тогда $|t-s| \leqslant \Delta(e^{-aT}\varepsilon/2)$, поэтому $\|B(t)-B(s)\| \leqslant e^{-aT}\varepsilon/2$. Следовательно,

$$\|Q(t_0,t)-Q(t_0,s)\| = \|X(t_0,t)B(t)-X(t_0,s)B(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|X(t_0,t)\|\,\|B(t)-B(s)\| + \|B(s)\|\,\|X(t_0,t)-X(t_0,s)\| \leqslant$$
$$\leqslant e^{aT}e^{-aT}\varepsilon/2 + bae^{aT}|t-s| \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Предложение доказано.

Лемма 22.1 [97]. *Система* (21.1) *ϑ-равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha > 0$, что для* *каждого* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и каждого* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, *найдется* $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, *обеспечивающее выполнение неравенства*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\xi^* Q(t_0, s)\nu)^2 ds \geqslant \alpha. \tag{22.1}$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема. Тогда, согласно определению, найдется такое $\beta > 0$, что при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ для матрицы Калмана

$$W(t_0, t_0 + \vartheta) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)Q^*(t_0, s)\, ds$$

системы (21.1) при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, справедливо соотношение $\xi^* W(t_0, t_0 + \vartheta)\xi \geqslant \beta$, которое эквивалентно неравенству

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* Q(t_0, s)\|^2 ds \geqslant \beta. \tag{22.2}$$

Зафиксируем произвольное $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, и возьмем в качестве ν тот из векторов $e_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, m$, на котором достигается

$$\max_{i=1,\ldots,m} \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\xi^* Q(t_0, s)e_i)^2 ds.$$

Тогда имеем оценки

$$m \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\xi^* Q(t_0, s)\nu)^2 ds \geqslant \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\xi^* Q(t_0, s)e_i)^2 ds = \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* Q(t_0, s)\|^2 ds \geqslant \beta,$$

т. е. при выбранном $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, неравенство (22.1) выполнено с $\alpha = \beta/m$.

Достаточность. Пусть при некотором $\alpha > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, и $t_0 \in \mathbb{R}$ существует $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, такое, что выполнено неравенство (22.1). Тогда, поскольку

$$(\xi^* Q(t_0, s)\nu)^2 \leqslant \|\xi^* Q(t_0, s)\|^2 \|\nu\|^2 = \|\xi^* Q(t_0, s)\|^2,$$

будет справедливо и соотношение (22.2) при $\beta = \alpha$. Лемма доказана.

Следствие 22.1 [97]. *Если система* (21.1) *ϑ-равномерно вполне управляема, то существует* $\beta > 0$, *позволяющее при всяком* $t_0 \in \mathbb{R}$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, *отыскать такие* $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, *и* $t_\nu \in [t_0, t_0+\vartheta]$, *что выполнено неравенство*

$$|\xi^* Q(t_0, t_\nu)\nu| \geqslant \beta. \tag{22.3}$$

Доказательство. Пользуясь леммой 22.1, найдем величину α. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, — произвольны. Построим вектор единичной длины $\nu \in \mathbb{R}^n$, гарантирующий выполнение неравенства (22.1). Функция $t \mapsto Q(t_0, t)$ ограничена на $[t_0, t_0+\vartheta]$, поэтому существует $t_\nu \in [t_0, t_0+\vartheta]$ такое, что

$$2(\xi^* Q(t_0, t_\nu)\nu)^2 \geqslant \sup\{(\xi^* Q(t_0, t)\nu)^2 \colon t \in [t_0, t_0+\vartheta]\}.$$

Следовательно,

$$2\vartheta(\xi^* Q(t_0, t_\nu)\nu)^2 \geqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\xi^* Q(t_0, t)\nu)^2\, dt \geqslant \alpha,$$

т. е. $|\xi^* Q(t_0, t_\nu)\nu| \geqslant \sqrt{\alpha/(2\vartheta)} =: \beta$.

Теорема 22.1 [97]. *Пусть* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна. Тогда система* (21.1) ϑ*-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существуют* $\beta > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что для любых* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, *найдутся векторы* $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, *и моменты времени* $t_\nu \in]t_0+\delta, t_0+\vartheta-\delta[$, *для которых функция* $Q(t_0, \cdot)$ *непрерывна на* $[t_\nu - \delta, t_\nu + \delta]$ *и выполнено неравенство* (22.3).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема. Возьмем произвольные $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, и в соответствии с леммой 22.1 найдем $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, обеспечивающее выполнение неравенства (22.1) с подходящим $\alpha > 0$.

Обозначим через $\mathbb{I}_0 \subset \mathbb{N}$ совокупность индексов $i \in \mathbb{I}$, для которых множество $J_i := I_i \cap]t_0, t_0+\vartheta[$ непусто. Поскольку $|I_i| \geqslant \Delta_0$ при каждом $i \in \mathbb{I}$, количество элементов множества $\mathbb{I}_0$ не превосходит $[\vartheta/\Delta_0]+2 =: k$. Из (22.1) следует, что

$$\alpha \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\xi^* Q(t_0, t)\nu)^2\, dt = \sum_{i \in \mathbb{I}_0} \int\limits_{\overline{J}_i} (\xi^* Q(t_0, t)\nu)^2\, dt \leqslant k \max_{i \in \mathbb{I}_0} \int\limits_{\overline{J}_i} (\xi^* Q(t_0, t)\nu)^2\, dt,$$

поэтому при некотором $i_0 \in \mathbb{I}_0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\overline{J}_{i_0}} (\xi^* Q(t_0, t)\nu)^2\, dt \geqslant \frac{\alpha}{k}.$$

Так как

$$\int\limits_{J_{i_0}} (\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2\,dt \leqslant |J_{i_0}| \max_{t\in[t_0,t_0+\vartheta]} (\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2 \leqslant$$

$$\leqslant |J_{i_0}| \max_{t\in[t_0,t_0+\vartheta]} \|Q(t_0,t)\|^2 \leqslant |J_{i_0}| b^2 e^{2a\vartheta},$$

то длина интервала J_{i_0} удовлетворяет оценке

$$|J_{i_0}| \geqslant \frac{\alpha}{kb^2 e^{2a\vartheta}}.$$

Из ограниченности на J_{i_0} функции $t \mapsto Q(t_0,t)$ вытекает существование $s \in J_{i_0}$ такого, что

$$2(\xi^* Q(t_0,s)\nu)^2 \geqslant \sup_{t\in J_{i_0}} (\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2,$$

поэтому имеем соотношения

$$2\vartheta(\xi^* Q(t_0,s)\nu)^2 \geqslant 2|J_{i_0}|\,(\xi^* Q(t_0,s)\nu)^2 \geqslant$$

$$\geqslant |J_{i_0}| \sup_{t\in J_{i_0}} (\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2 \geqslant \int\limits_{J_{i_0}} (\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2\,dt \geqslant \frac{\alpha}{k},$$

из которых $(\xi^* Q(t_0,s)\nu)^2 \geqslant \dfrac{\alpha}{2k\vartheta}$.

Так как при всех $t,\tau \in [t_0,t_0+\vartheta]$; $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$; $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} &|(\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2 - (\xi^* Q(t_0,\tau)\nu)^2| = \\ &= |\xi^*(Q(t_0,t)+Q(t_0,\tau))\nu|\,|\xi^*(Q(t_0,t)-Q(t_0,\tau))\nu| \leqslant \\ &\leqslant \|Q(t_0,t)+Q(t_0,s)\|\,\|Q(t_0,t)-Q(t_0,\tau)\| \leqslant \\ &\leqslant 2be^{a\vartheta}\|Q(t_0,t)-Q(t_0,\tau)\|. \end{aligned} \tag{22.4}$$

то из предложения 22.1 следует существование такого положительного числа

$$\delta < \frac{\alpha}{2kb^2e^{2a\vartheta}} \leqslant \frac{|J_{i_0}|}{2},$$

что при всех $\tau \in J_{i_0}$, удовлетворяющих неравенству $|s-\tau| \leqslant 2\delta$, имеют место соотношения

$$(\xi^* Q(t_0,\tau)\nu)^2 = (\xi^* Q(t_0,s)\nu)^2 + ((\xi^* Q(t_0,\tau)\nu)^2 - (\xi^* Q(t_0,\tau)\nu)^2) \geqslant$$

$$\geqslant (\xi^* Q(t_0,s)\nu)^2 - |(\xi^* Q(t_0,\tau)\nu)^2 - (\xi^* Q(t_0,\tau)\nu)^2| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{2k\vartheta} - 2be^{a\vartheta}\frac{\alpha}{8k\vartheta be^{a\vartheta}} = \frac{\alpha}{4k\vartheta}.$$

Возьмем произвольный отрезок длины 2δ, принадлежащий J_{i_0} и содержащий в себе точку s. Пусть t_ν — середина этого отрезка. Тогда $[t_\nu-\delta, t_\nu+\delta] \subset J_{i_0} \subset]t_0, t_0+\vartheta[$, поэтому $t_\nu \in]t_0+\delta, t_0+\vartheta-\delta[$, а функция $t \mapsto Q(t_0,t)$ непрерывна на $[t_\nu-\delta, t_\nu+\delta]$. Поскольку $|s-t_\nu| \leqslant 2\delta$, то выполнено неравенство

$$(\xi^* Q(t_0,t_\nu)\nu)^2 \geqslant \frac{\alpha}{4k\vartheta}.$$

Полагая $\beta = \sqrt{\dfrac{\alpha}{4k\vartheta}}$, получим требуемую оценку (22.3).

Достаточность. Возьмем любые $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, и найдем такие $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, и $t_\nu \in [t_0+\delta, t_0+\vartheta-\delta]$, что функция $t \mapsto Q(t_0,t)$ непрерывна на $[t_\nu-\delta, t_\nu+\delta]$ и выполнено (22.3). Выберем в соответствии с предложением 22.1 величину $\delta_1 \in]0,\delta]$ настолько малой, чтобы при всех $t \in [t_\nu-\delta_1, t_\nu+\delta_1]$ выполнялось неравенство

$$\|Q(t_0,t_\nu) - Q(t_0,t)\| \leqslant \frac{\beta^2}{4be^{a\vartheta}}.$$

Тогда для каждого $t \in [t_\nu-\delta_1, t_\nu+\delta_1]$ из (22.4) следует

$$|(\xi^* Q(t_0,t_\nu)\nu)^2 - (\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2| \leqslant \frac{\beta^2}{2}. \tag{22.5}$$

Возьмем произвольный отрезок $[p,q]$, удовлетворяющий условиям $q-p=\delta_1$ и $t_\nu \in [p,q]$. Тогда

$$[p,q] \subset [t_\nu-\delta_1, t_\nu+\delta_1] \subset [t_\nu-\delta, t_\nu+\delta] \subset [t_0, t_0+\vartheta],$$

и для всех $t \in [p,q]$ справедливо неравенство (22.5). Имеем оценку

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2\,dt \geqslant \int\limits_p^q (\xi^* Q(t_0,t)\nu)^2\,dt \geqslant$$

$$\geqslant (q-p)((\xi^* Q(t_0,t_\nu)\nu)^2 - \beta^2/2) \geqslant (q-p)\beta^2/2 = \delta_1\beta^2/2.$$

Согласно лемме 22.1 отсюда вытекает ϑ-равномерная полная управляемость системы (21.1). Теорема доказана.

Лемма 22.2 (см., например, [97]). *Если система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема, то существует такое $\alpha > 0$, что для любого*

$t_0 \in \mathbb{R}$ найдутся моменты времени $t_i \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ и векторы $\nu_i \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что матрица

$$F(t_0) := [Q(t_0, t_1)\nu_1, \ldots, Q(t_0, t_n)\nu_n]$$

обратима и выполнено неравенство $\|F^{-1}(t_0)\| \leqslant \alpha$.

Доказательство. Пусть система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема, тогда в силу следствия 22.1 при некотором $\beta > 0$ и всяком $t_0 \in \mathbb{R}$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, найдутся $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, и $t_\nu \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ такие, что выполнено неравенство (22.3). Зафиксируем это β и возьмем любое $t_0 \in \mathbb{R}$. Дальнейшие построения проведем индуктивно. На первом шаге выберем произвольное $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi_1\| = 1$, и по нему найдем $\nu_1 \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_1\| = 1$, и $t_1 \in [t_0, t_0 + \vartheta]$, такие, что $|\xi_1^* Q(t_0, t_1)\nu_1| \geqslant \beta$. Пусть после k-го шага построены векторы $\xi_i \in \mathbb{R}^n$, $\nu_i \in \mathbb{R}^m$, $\|\xi_i\| = \|\nu_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, k$, и моменты времени $t_i \in [t_0, t_0 + \vartheta]$, $i = 1, \ldots, k$. Обозначим через M_k ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^n$ к линейной оболочке векторов $Q(t_0, t_i)\nu_i$, $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, что $M_k \neq \varnothing$ при $k < n$, поскольку $\dim M_k \geqslant n - k$. На шаге с номером $k+1$ возьмем произвольное $\xi_{k+1} \in M_k$, $\|\xi_{k+1}\| = 1$ и по нему определим $\nu_{k+1} \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_{k+1}\| = 1$ и $t_{k+1} \in [t_0, t_0 + \vartheta]$, такие, что выполнено неравенство $|\xi_{k+1}^* Q(t_0, t_{k+1})\nu_{k+1}| \geqslant \beta$.

Таким образом, после выполнения n-го шага будем иметь векторы $\xi_i \in \mathbb{R}^n$, $\nu_i \in \mathbb{R}^m$, $\|\xi_i\| = \|\nu_i\| = 1$, и моменты времени $t_i \in [t_0, t_0 + \vartheta]$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $|\xi_i^* Q(t_0, t_i)\nu_i| \geqslant \beta$ при всех $i = 1, \ldots, n$ и $\xi_i^* Q(t_0, t_j)\nu_j = 0$ при $i > j$. Обозначим $S := [\xi_1, \ldots, \xi_n]$, тогда из указанных свойств построенных векторов вытекает, что матрица $P := S^* F(t_0)$ верхняя треугольная, а для ее диагональных элементов справедливы неравенства $|p_{ii}| \geqslant \beta$, т. е. $|\det P| \geqslant \beta^n > 0$ и, следовательно, $\det S \neq 0$. Кроме того, для определителя матрицы S неравенство Адамара [176, с. 565] дает оценку

$$|\det S| \leqslant \|\xi_1\|\,\|\xi_2\| \ldots \|\xi_n\| = 1,$$

поэтому имеем неравенство

$$|\det F(t_0)| = |\det P| / |\det S| \geqslant \beta^n$$

и оценку

$$\|F^{-1}(t_0)\| \leqslant \frac{\|F(t_0)\|^{n-1}}{|\det F(t_0)|} \leqslant \frac{(\sqrt{n} b e^{a\vartheta})^{n-1}}{\beta^n} =: \alpha,$$

завершающую доказательство леммы.

Т е о р е м а 22.2 [97]. *Если матрица $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существуют такие $\alpha > 0$ и $\delta_0 > 0$, что для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдутся векторы единичной длины $\nu_i \in \mathbb{R}^m$ и моменты времени $t_i \in [t_0+\delta_0, t_0+\vartheta-\delta_0]$, $t_i - t_{i-1} \geqslant \delta_0$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $Q(t_0, \cdot)$ непрерывна на каждом из интервалов $]t_i - \delta_0/2, t_i + \delta_0/2[$, а матрица $F(t_0) = [Q(t_0, t_1)\nu_1, \ldots, Q(t_0, t_n)\nu_n]$ обратима и $\|F^{-1}(t_0)\| \leqslant \alpha$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнено неравенство $\|F^{-1}(t_0)\| \leqslant \alpha$. Возьмем произвольный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, положим $w = \xi^* F(t_0)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, и выберем $l \in \{1, \ldots, n\}$ из условия $|w_l| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |w_i|$. Тогда имеем соотношения

$$1 = \|\xi\| = \|\xi^*\| = \|wF^{-1}(t_0)\| \leqslant \alpha\|w\| \leqslant \sqrt{n}\alpha|w_l|,$$

поэтому

$$|\xi^* Q(t_0, t_l)\nu_l| = |\xi^* F(t_0)e_l| = |w_l| \geqslant (\sqrt{n}\alpha)^{-1}.$$

Так как $t_l \in [t_0 + \delta_0, t_0 + \vartheta - \delta_0] \subset]t_0 + \delta_0/2, t_0 + \vartheta - \delta_0/2[$, а функция $t \mapsto Q(t_0, t)$ непрерывна на $[t_l - \delta_0/2, t_l + \delta_0/2]$, то, полагая $\delta = \delta_0/2$, $\beta = (\sqrt{n}\alpha)^{-1}$, из теоремы 22.1 получим требуемое.

Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема. Зафиксируем какое-либо $t_0 \in \mathbb{R}$. Используя доказательство леммы 22.2 (заменив в нем ссылку на следствие 22.1 ссылкой на теорему 22.1), получим, что существуют моменты времени $t_i \in]t_0 + \delta, t_0 + \vartheta - \delta[$ и векторы $\nu_i \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что функция $Q(t_0, \cdot)$ непрерывна на каждом $[t_i - \delta, t_i + \delta]$, матрица $F(t_0)$ обратима, $\|F^{-1}(t_0)\| \leqslant \alpha$, причем величины $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ от t_0 не зависят. Будем считать, что моменты времени t_i занумерованы по возрастанию, т. е. $t_0 + \delta < t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n < t_0 + \vartheta - \delta$.

Выберем такое $\delta_1 > 0$, что согласно предложению 22.1 при всех $t_0 \in \mathbb{R}$ для любых $t, s \in [t_0, t_0 + \vartheta]$, принадлежащих одному и тому же интервалу непрерывности I_i, $i \in \mathbb{I}$, функции $B(\cdot)$ и удовлетворяющих неравенству $|t - s| \leqslant \delta_1$, выполнено соотношение

$$\|Q(t_0, t) - Q(t_0, s)\| \leqslant (2\alpha\sqrt{n})^{-1}.$$

Положим $\delta_0 := \min\{\delta/n,\ \delta_1/n\}$. Если $\min\limits_{i=1,\ldots,n-1}\{t_{i+1} - t_i\} \geqslant \delta_0$, то доказываемое свойство выполнено. Если же $\min\limits_{i=1,\ldots,n-1}\{t_{i+1} - t_i\} < \delta_0$, то путем малого возмущения имеющегося набора t_i, $i=1,\ldots,n$, перейдем к новому набору t'_i, $i=1,\ldots,n$, обладающему необходимыми свойствами при прежних $\nu_i\in\mathbb{R}^m$, $i=1,\ldots,n$.

Пусть
$$t'_i := t_i+(i-1)\delta_0,\quad i=1,\ldots,n.$$
Тогда при каждом $i\in\{1,\ldots,n\}$ имеем неравенства
$$t_i\leqslant t'_i\leqslant t_i+(n-1)\delta_0,$$
из которых
$$t'_i-\delta_0\geqslant t_i-\delta_0\geqslant t_i-\delta,$$
$$t'_i+\delta_0\leqslant t_i+(n-1)\delta_0+\delta_0=t_i+n\delta_0\leqslant t_i+\delta,$$
т. е. справедливо включение
$$[t'_i-\delta_0,t'_i+\delta_0]\subset[t_i-\delta,t_i+\delta].$$
Отсюда следует непрерывность функции $t\mapsto Q(t_0,t)$ на каждом из интервалов $]t_i-\delta_0/2,t_i+\delta_0/2[$. Кроме того, при всех $i=1,\ldots,n$ имеем оценку $|t'_i-t_i|\leqslant n\delta_0\leqslant\delta_1$, влекущую за собой неравенство
$$\|Q(t_0,t_i)-Q(t_0,t'_i)\|\leqslant(2\alpha\sqrt{n})^{-1}.$$
Пусть $\widehat{F}(t_0):=[Q(t_0,t'_1)\nu_1,\ldots,Q(t_0,t'_n)\nu_n]$, тогда
$$\|\widehat{F}(t_0)-F(t_0)\|=\Big\|[(Q(t_0,t'_1)-Q(t_0,t_1))\nu_1,\ldots(Q(t_0,t'_n)-Q(t_0,t_n))\nu_n]\Big\|\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{n}\max_{i=1,\ldots,n}\|(Q(t_0,t_i)-Q(t_0,t'_i))\nu_i\|\leqslant\sqrt{n}\max_{i=1,\ldots,n}\|Q(t_0,t_i)-Q(t_0,t'_i)\|\leqslant(2\alpha)^{-1}.$$
Отсюда согласно [176, с. 365] следует, что матрица $\widehat{F}(t_0)$ обратима и имеет место оценка [176, с. 403]
$$\|\widehat{F}^{-1}(t_0)\|\leqslant\|F^{-1}(t_0)\|+\|\widehat{F}^{-1}(t_0)-F^{-1}(t_0)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|F^{-1}(t_0)\|+\frac{\|F^{-1}(t_0)\|^2\|\widehat{F}(t_0)-F(t_0)\|}{1-\|F^{-1}(t_0)\|\,\|\widehat{F}(t_0)-F(t_0)\|}\leqslant 2\alpha.$$
Теорема доказана.

Предположим, что выполнены условия теоремы 22.2. Зафиксируем какое-либо $t_0\in\mathbb{R}$ и в соответствии с теоремой 22.2 построим матрицу $F=F(t_0)=[\xi_1,\ldots,\xi_n]$. Будем говорить, что $\mathcal{F}:=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ является **базисом чистых движений** для системы (21.1) на отрезке $[t_0,t_0+\vartheta]$ (или, допуская некоторую вольность речи, что матрица F образует базис чистых движений для системы (21.1) на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$).

Поясним смысл введенного понятия.

Рассмотрим задачу управления для системы (21.1) с условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0+\vartheta) = 0, \tag{22.6}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$ произвольно. Пусть $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_0 + \vartheta$ — моменты времени, $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}^m$ — векторы единичной длины, участвующие в определении матрицы $F(t_0)$, т. е. $F(t_0) = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$, где $\xi_i = Q(t_0, t_i)\nu_i$, $i = 1, \ldots, n$. Возьмем любое положительное число $\varepsilon < 1/(\alpha\sqrt{n})$ (α — из формулировки теоремы 22.2) и выберем $\Delta > 0$ настолько малым, чтобы произвольные отрезки Δ_i длины Δ, содержащие t_i, $i = 1, \ldots, n$, попарно не пересекались и лежали в $]t_0, t_0+\vartheta[$, причем выполнялось бы неравенство

$$\|Q(t_0, t) - Q(t_0, t_i)\| < \varepsilon$$

при всех $t \in \Delta_i$. Обозначим начало и конец отрезка Δ_i через τ_i и ϑ_i соответственно.

Определим управление $u(\cdot)$ на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$ равенствами

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k, \\ \dfrac{\nu_i \gamma_i}{\Delta}, & \text{если } t \in \Delta_i, \end{cases} \tag{22.7}$$

значения $\gamma_i \in \mathbb{R}$ уточним ниже. Решение системы (21.1), удовлетворяющее первому условию (22.6), записывается в виде

$$x(t) = X(t, t_0)\Big(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0, s)B(s)u(s)\,ds\Big),$$

поэтому

$$x(t_0+\vartheta) = X(t_0+\vartheta, t_0)\Big(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, t)u(t)\,dt\Big) =$$

$$= X(t_0+\vartheta, t_0)\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta_i} Q(t_0, t)u(t)\,dt\Big).$$

Предположим сначала, что функция $t \mapsto Q(t_0, t)$ на каждом из отрезков Δ_i стационарна, $Q(t_0, t) \equiv Q(t_0, t_i)$. Тогда при $t \in \Delta_i$ имеем строгое равенство

$$
\begin{aligned}
x(t) = X(t,t_0)\Big(x_0 + \sum_{k=1}^{i-1}\int\limits_{\Delta_k} Q(t_0,s)u(s)\,ds + \int\limits_{\tau_i}^{t} Q(t_0,s)u(s)\,ds\Big) = \\
= X(t,t_0)\Big(x_0 + \sum_{k=1}^{i-1}\int\limits_{\Delta_k} Q(t_0,t_k)\cdot\frac{\nu_k\gamma_k}{\Delta}\,ds + \int\limits_{\tau_i}^{t} Q(t_0,t_i)\cdot\frac{\nu_i\gamma_i}{\Delta}\,ds\Big) = \\
= X(t,t_0)\Big(x_0 + \sum_{k=1}^{i-1}\xi_k\gamma_k + \xi_i\gamma_i\cdot\frac{t-\tau_i}{\Delta}\Big).
\end{aligned}
\tag{22.8}
$$

В частности,

$$
x(t_0+\vartheta) = x(\vartheta_n) = X(t_0+\vartheta,t_0)\Big(x_0 + \sum_{k=1}^{n}\xi_k\gamma_k\Big) =
$$

$$
= X(t_0+\vartheta,t_0)\Big(x_0 + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k F e_k\Big) = X(t_0+\vartheta,t_0)(x_0+F\gamma),
$$

где $\gamma := \mathrm{col}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Из второго условия (22.6) получаем соотношение $x_0 + F\gamma = 0$. Матрица F обратима, следовательно, если положить $\gamma = -F^{-1}x_0$, то $x(t_0+\vartheta) = 0$, т.е. второе условие (22.6) будет выполнено.

Обозначим

$$
\widehat{z}(t) = X(t_0,t)x(t), \quad t \in [t_0, t_0+\vartheta],
$$

где функция $x(\cdot)$ определена равенством (22.8). Тогда $\widehat{z}(\cdot)$ является решением системы

$$
\begin{aligned}
\dot z = \dot X(t_0,t)x(t) + X(t_0,t)\dot x(t) = \\
= -X(t_0,t)A(t)x(t) + X(t_0,t)(A(t)x(t) + B(t)u(t)) = \\
= X(t_0,t)B(t)u(t) = Q(t_0,t)u(t), \quad t \in [t_0,t_0+\vartheta],
\end{aligned}
$$

и удовлетворяет условиям

$$
\widehat{z}(t_0) = x(t_0) = x_0, \quad \widehat{z}(t_0+\vartheta) = 0.
$$

Из (22.8) вытекает, что при каждом $i \in \{1,\ldots,n\}$ и всех $t \in \Delta_i$ имеет место равенство

$$
\widehat{z}(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{i-1}\xi_k\gamma_k + \xi_i\gamma_i\cdot\frac{t-\tau_i}{\Delta},
$$

следовательно, в рассматриваемом случае (когда $Q(t_0,\cdot)$ стационарна на каждом Δ_i) движение из произвольной начальной точки x_0 в начало координат, задаваемое функцией $t \mapsto \widehat{z}(t)$, происходит строго вдоль векторов базиса чистых движений $\mathcal{F} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, причем эти векторы неперестановочны, поскольку каждому вектору ξ_i отвечает свой момент времени t_i, и эти моменты упорядочены по возрастанию.

Если же функция $t \mapsto Q(t_0, t)$ на отрезках Δ_i нестационарна, то можем считать, что $Q(t_0, t) \approx Q(t_0, t_i)$ на Δ_i. Тогда для γ имеем лишь приближенное равенство $\gamma \approx -F^{-1}x_0$. Предположим, что уже найдено истинное значение $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, гарантирующее выполнение условия $x(t_0 + \vartheta) = 0$ для решения $x(\cdot)$ системы (21.1) с управлением $u(\cdot)$, определенным равенством (22.7), и с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Обозначим

$$z(t) = X(t_0, t)x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0, s)u(s)\, ds.$$

В этом случае движение из точки x_0 в начало координат, задаваемое функцией $t \mapsto z(t)$, происходит “приблизительно” вдоль векторов базиса $\mathcal{F}$.

Более точно, определим матрицу $R = [\eta_1, \ldots, \eta_n] \in \mathrm{M}_n$ соотношениями

$$\eta_i = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Delta_i} \Big(Q(t_0, t) - Q(t_0, t_i) \Big) \nu_i\, dt, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{22.9}$$

Тогда

$$\|\eta_i\| \leqslant \sup\{\|Q(t_0, t) - Q(t_0, t_i)\| : t \in \Delta_i\} < \varepsilon,$$

поэтому

$$\|R\| \leqslant \sqrt{n} \max_i \|\eta_i\| < \sqrt{n}\varepsilon.$$

Имеем точное равенство

$$x(t_0 + \vartheta) = X(t_0 + \vartheta, t_0)\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta_i} (Q(t_0, t) - Q(t_0, t_i))u(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta_i} Q(t_0, t_i)u(t)\, dt \Big) = X(t_0 + \vartheta, t_0)\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\eta_i + \xi_i) \Big) =$$

$$= X(t_0 + \vartheta, t_0)(x_0 + (F + R)\gamma).$$

Поскольку

$$F + R = F(E + F^{-1}R),$$

$$\|F^{-1}R\| \leqslant \|F^{-1}\|\, \|R\| < \alpha\sqrt{n}\varepsilon < 1,$$

то матрица $F+R$ обратима [176, с. 364–365], причем [176, с. 403]

$$\|(F+R)^{-1}\| \leqslant \|F^{-1}\| + \|F^{-1}-(F+R)^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha + \frac{\|F^{-1}R\|}{1-\|F^{-1}R\|}\|F^{-1}\| \leqslant \alpha\Big(1+\frac{\alpha\sqrt{n}\varepsilon}{1-\alpha\sqrt{n}\varepsilon}\Big).$$

Отсюда следует, что для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задача управления (21.1), (22.6) разрешима, при этом вектор γ определяется равенством

$$\gamma = -(F+R)^{-1}x_0$$

и удовлетворяет оценке

$$\|\gamma\| \leqslant \alpha\Big(1+\frac{\alpha\sqrt{n}\varepsilon}{1-\alpha\sqrt{n}\varepsilon}\Big)\|x_0\|.$$

Поэтому

$$\|u\|_C \leqslant \max_{i=1,\dots,n}\frac{|\gamma_i|\,\|\nu_i\|}{\Delta} \leqslant \frac{\|\gamma\|}{\Delta} \leqslant \frac{\alpha}{\Delta}\Big(1+\frac{\alpha\sqrt{n}\varepsilon}{1-\alpha\sqrt{n}\varepsilon}\Big)\|x_0\|.$$

Оценим отклонение “реального” движения $z(t)$ от “идеального” движения $\widehat{z}(t)$.

Пусть $t \in \Delta_i$. Тогда

$$z(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{i-1}\int\limits_{\Delta_k} Q(t_0,s)u(s)\,ds + \int\limits_{\tau_i}^{t} Q(t_0,s)u(s)\,ds =$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{i-1}\Big(\int\limits_{\Delta_k} Q(t_0,t_k)u(s)\,ds + \int\limits_{\Delta_k}(Q(t_0,s)-Q(t_0,t_k))u(s)\,ds\Big) +$$

$$+ \int\limits_{\tau_i}^{t} Q(t_0,t_i)u(s)\,ds + \int\limits_{\tau_i}^{t}(Q(t_0,s)-Q(t_0,t_i))u(s)\,ds =$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{i-1}\xi_k\gamma_k + \sum_{k=1}^{i-1}\eta_k\gamma_k + \xi_i\gamma_i\cdot\frac{t-\tau_i}{\Delta} + \int\limits_{\tau_i}^{t}(Q(t_0,s)-Q(t_0,t_i))\frac{\nu_i\gamma_i}{\Delta}\,ds =$$

$$= z(t) + \sum_{k=1}^{i-1}\eta_k\gamma_k + \int\limits_{\tau_i}^{t}(Q(t_0,s)-Q(t_0,t_i))\frac{\nu_i\gamma_i}{\Delta}\,ds.$$

Следовательно,

$$\|z(t)-\widehat{z}(t)\|_{C[t_0,t_0+\vartheta]} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\|\eta_k\|\,|\gamma_k| < \varepsilon n\|\gamma\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot n\alpha\Big(1 + \frac{\alpha\sqrt{n}\varepsilon}{1-\alpha\sqrt{n}\varepsilon}\Big)\|x_0\|$$

— мало́ при малых ε.

Из приведенных рассуждений, кроме всего прочего, вытекает следующий критерий равномерной полной управляемости системы (21.1).

Теорема 22.3 [97, 139]. *Пусть $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна. Система* (21.1) *ϑ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существует такое $\Delta_0 > 0$, что для любого $\Delta \in]0, \Delta_0]$ найдутся $l > 0$ и попарно не пересекающиеся отрезки $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ длины Δ, лежащие в $]t_0, t_0 + \vartheta[$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ произвольно, такие, что для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует кусочно постоянное управление $u(\cdot)$, равное нулю вне отрезков Δ_i, $i = 1, \dots, n$, обеспечивающее разрешимость задачи* (21.1), (22.6) *и удовлетворяющее оценке $\|u\|_C \leqslant l\|x_0\|$.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем любое $t_0 \in \mathbb{R}$ и построим матрицу

$$F = [Q(t_0, t_1)\nu_1, \dots, Q(t_0, t_n)\nu_n],$$

образующую базис чистых движений для системы (21.1) на $[t_0, t_0 + \vartheta]$, $\|F^{-1}\| \leqslant \alpha$. Выберем величину Δ_0 из условий

$$\varepsilon := \sup\{\|Q(t_0, t) - Q(t_0, t_i)\| : \, |t - t_i| \leqslant \Delta_0, \, i = 1, \dots, n\} \leqslant (2\alpha\sqrt{n})^{-1}.$$

Из теоремы 22.2 следует, что число Δ_0 может быть взято положительным и не зависящим от t_0. Для произвольного $\Delta \in]0, \Delta_0]$ положим

$$l = \frac{\alpha}{\Delta}\Big(1 + \frac{\alpha\sqrt{n}\varepsilon}{1-\alpha\sqrt{n}\varepsilon}\Big).$$

При каждом $i \in \{1, \dots, n\}$ построим отрезок Δ_i длины Δ, содержащий точку t_i. Возьмем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Определим управление $u(\cdot)$ равенством (22.7), где

$$\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = -(F + R)^{-1}x_0,$$

а матрица R задана соотношением (22.9). Тогда решение задачи Коши для системы (21.1) с выбранным $u(\cdot)$ и с начальным условием $x(t_0) = x_0$ попадает в начало координат в момент $t_0 + \vartheta$, а для нормы управления имеет место оценка $\|u\|_C \leqslant l\|x_0\|$.

Д о с т а т о ч н о с т ь следует непосредственно из критерия равномерной полной управляемости Е. Л. Тонкова (теорема 1.1).

§ 23. Теорема о глобальной достижимости

Здесь доказан ряд утверждений о глобальной достижимости системы (21.2) (теорема 23.3, следствия 23.1 и 23.2).

В этом параграфе выясняется, для каких матриц $H \in \mathrm{M}_n$ с положительным определителем выбором кусочно непрерывного ограниченного управления $U(\cdot)$ можно добиться выполнения равенства

$$X_U(t_0+\vartheta, t_0) = X(t_0+\vartheta, t_0)H,$$

если свободная система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема. Напомним (см. замечание 21.1), что для произвольной матрицы H с положительным определителем такое управление в общем случае не существует.

Построение матричного управления $U(\cdot)$ в основном утверждении параграфа (теорема 23.3) осуществлено на основе базиса чистых движений системы (21.1). Для доказательства теоремы 23.3 нам понадобятся некоторые предварительные построения.

Пусть $P, R \in \mathrm{M}_n$, $\mathcal{F} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$, $F = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — матрица базиса $\mathcal{F}$. Построим векторы $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы выполнялось равенство

$$P + \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i^* = R. \tag{23.1}$$

Поскольку $\xi_i = Fe_i$, получаем соотношение

$$R - P = \sum_{i=1}^{n} Fe_i u_i^* = F\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i u_i^*\Big).$$

Так как $\det F \neq 0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} e_i u_i^* = F^{-1}R - F^{-1}P,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} e_i u_i^* F = F^{-1}RF - F^{-1}PF =: R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}},$$

где $R_{\mathcal{F}}$ и $P_{\mathcal{F}}$ — это матрицы R и P, записанные в новом базисе $\mathcal{F}$. Умножим последнее равенство слева на вектор-строку e_k^*, получим

$$e_k^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}}) = e_k^*(\sum_{i=1}^{n} e_i u_i^* F) = \sum_{i=1}^{n}(e_k^* e_i) u_i^* F = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} u_i^* F = u_k^* F.$$

Отсюда получаем равенства

$$u_k^* = e_k^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}})F^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

из которых

$$u_k = (F^{-1})^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}})^* e_k, \ k = 1, \ldots, n. \tag{23.2}$$

Итак, если выполнено равенство (23.1), то векторы $u_1, \ldots, u_n$ определяются соотношениями (23.2).

Обратно, определим векторы $u_1, \ldots, u_n$ в соответствии с (23.2). Тогда

$$P + \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i^* = P + \sum_{i=1}^{n}(F e_i)(e_i^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}})F^{-1}) =$$

$$= P + F(\sum_{i=1}^{n} e_i e_i^*)(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}})F^{-1} = P + FE(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}})F^{-1} = P + R - P = R,$$

т. е. (23.1) выполнено.

Подставим найденные значения u_k в (23.1), получим тождество

$$P + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}})F^{-1} = R.$$

Умножим его слева на F^{-1}, а справа на F:

$$P_{\mathcal{F}} + \sum_{i=1}^{n} e_i e_i^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}}) = R_{\mathcal{F}}.$$

Обозначим

$$S_j = P_{\mathcal{F}} + \sum_{i=1}^{j} e_i e_i^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}}), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{23.3}$$

S_j — это матрица $P_{\mathcal{F}}$, первые j строк которой заменены соответствующими строками матрицы $R_{\mathcal{F}}$. Будем говорить, что матрицы S_j представляют собой промежуточные шаги на пути от P к R в базисе $\mathcal{F}$.

Определение 23.1 [139]. Пусть ρ — некоторое положительное число. Упорядоченную пару (P, R) матриц из M_n назовем ρ-законопослушной относительно базиса $\mathcal{F} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, если

$\det P \geqslant \rho$ и при всех $j \in \{1, \ldots, n\}$ для матриц S_j, являющихся промежуточными шагами на пути от P к R в базисе $\mathcal{F}$, выполнены неравенства $\det S_j \geqslant \rho$.

Лемма 23.1. *Пусть $P, R \in \mathrm{M}_n$, $\det P > 0$, $\mathcal{F}$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$. Пара (P, R) ρ-законопослушна относительно базиса $\mathcal{F}$ в том и только том случае, когда пара $(E, R_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{-1})$ ρ_1-законопослушна относительно базиса $\mathcal{E} := \{e_1, \ldots, e_n\}$, где числа ρ и ρ_1 связаны равенством $\rho = \rho_1 \det P$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть пара (P, R) ρ-законопослушна относительно $\mathcal{F}$. Согласно определению 23.1, $\det P \geqslant \rho$ и $\det S_j \geqslant \rho$, $j = 1, \ldots, n$, где S_j заданы равенствами (23.3). Рассмотрим матрицы

$$\widetilde{S}_j := E + \sum_{i=1}^{j} e_i e_i^* (R_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{-1} - E), \quad j = 1, \ldots, n,$$

представляющие собой промежуточные шаги на пути от E к $R_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{-1}$ в базисе $\mathcal{E}$. Тогда

$$\widetilde{S}_j P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}} + \sum_{i=1}^{j} e_i e_i^* (R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}}) = S_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, при всех $j \in \{1, \ldots, n\}$ выполнены неравенства

$$\det \widetilde{S}_j = \frac{\det S_j}{\det P_{\mathcal{F}}} = \frac{\det S_j}{\det P} \geqslant \frac{\rho}{\det P} =: \rho_1.$$

Кроме того,

$$\det E = 1 \geqslant \frac{\rho}{\det P} = \rho_1.$$

Это означает ρ_1-законопослушность пары $(E, R_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{-1})$ относительно $\mathcal{E}$.

Достаточность. Пусть пара $(E, R_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{-1})$ ρ_1-законопослушна относительно $\mathcal{E}$. Тогда $\det E = 1 \geqslant \rho_1$ и $\det \widetilde{S}_j \geqslant \rho_1$, $j = 1, \ldots, n$. Поскольку

$$\det S_j = \det \widetilde{S}_j \det P_{\mathcal{F}} \geqslant \rho_1 \det P =: \rho, \quad j = 1, \ldots, n,$$

и $\det P \geqslant \rho_1 \det P = \rho$, пара (P, R) ρ-законопослушна относительно $\mathcal{F}$. Лемма доказана.

Для произвольной матрицы $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{M}_n$ через $(H)_k \in \mathrm{M}_k$ обозначим ее ведущую главную подматрицу [176, с. 479] порядка k, т. е.

$$(H)_1 = h_{11}, \quad (H)_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; (H)_n = H.$$

Ведущими главными минорами матрицы H называем определители ведущих главных подматриц матрицы H. Для произвольного числа $\rho > 0$ определим множество матриц

$$\mathcal{H}(\rho) := \{H \in \mathrm{M}_n : \det(H)_k \geqslant \rho,\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Лемма 23.2. *Пусть $\rho \in]0, 1]$. Пара (E, H) ρ-законопослушна относительно базиса $\mathcal{E}$ в том и только том случае, когда $H \in \mathcal{H}(\rho)$.*

Доказательство. Промежуточными шагами на пути от E к H в базисе $\mathcal{E}$ являются матрицы

$$S_j = E + \sum_{i=1}^{j} e_i e_i^* (H - E), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Каждая из S_j — это матрица, первые j строк которой совпадают с соответствующими строками матрицы H, а остальные — с соответствующими строками E. Поэтому S_j — блочно-верхнетреугольная матрица, диагональными блоками которой являются $(H)_j$ и $(E)_{n-j}$. Тогда [176, с. 39]

$$\det S_j = \det(H)_j \det(E)_{n-j} = \det(H)_j,$$

и неравенства $\det S_j \geqslant \rho$ эквивалентны неравенствам $\det(H)_j \geqslant \rho$. Соотношение $\det E \geqslant \rho$ выполнено, так как по условию $\rho \leqslant 1$.

Непосредственно из лемм 23.1, 23.2 получаем следующие критерии законопослушности пар матриц.

Теорема 23.1. *Пусть $P, R \in \mathrm{M}_n$, $\det P > 0$, $\mathcal{F}$ — базис $\mathbb{R}^n$. Пара (P, R) ρ-законопослушна относительно $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $R_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{-1} \in \mathcal{H}(\rho_1)$, где $\rho_1 = \rho / \det P$.*

Теорема 23.2. *Пусть $P, R \in \mathrm{M}_n$, $\det P > 0$, $\mathcal{F}$ — базис $\mathbb{R}^n$. Пара (P, R) ρ-законопослушна относительно $\mathcal{F}$ в том и только том случае, когда существует $H \in \mathcal{H}(\rho / \det P)$ такая, что $R = FHF^{-1}P$, где F — матрица базиса $\mathcal{F}$.*

Доказательство. В силу теоремы 23.1 ρ-законопослушность пары (P, R) относительно $\mathcal{F}$ эквивалентна существованию матрицы $H \in \mathcal{H}(\rho / \det P)$ такой, что $R_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{-1} = H$, т. е.

$$H = (F^{-1}RF)(F^{-1}PF)^{-1} = F^{-1}RP^{-1}F,$$

что равносильно требуемому.

Рассмотрим частный случай, когда $P=E$. Из теоремы 23.2 вытекает, что ρ-законопослушными относительно базиса $\mathcal{F}$ являются пары вида (E, FHF^{-1}) с $H\in\mathcal{H}(\rho)$, и только они, при этом здесь необходимо должно выполняться условие $\rho\leqslant 1$. Из (23.3) получаем общий вид промежуточных шагов на пути от E к FHF^{-1} в базисе $\mathcal{F}$:

$$S_j=E+\sum_{i=1}^{j}e_ie_i^*(H-E),\quad j=1,\ldots,n,$$

а из (23.2) — общий вид векторов u_j:

$$u_j=(F^{-1})^*(H^*-E)e_j,\ j=1,\ldots,n. \tag{23.4}$$

Возьмем произвольные числа $0<\rho\leqslant 1$ и $r>0$ и рассмотрим множество матриц

$$\mathcal{H}(r,\rho):=\{H\in\mathrm{M}_n:\ \|H-E\|\leqslant r,\ \det(H)_j\geqslant\rho,\ j=1,\ldots,n\}.$$

Пусть $H\in\mathcal{H}(r,\rho)$. Так как имеет место включение $\mathcal{H}(r,\rho)\subset\mathcal{H}(\rho)$, пара (E,FHF^{-1}) ρ-законопослушна относительно $\mathcal{F}$. Из (23.4) и из равенств $\xi_j=Fe_j$ получаем $\xi_ju_j^*=Fe_je_j^*(H-E)F^{-1}$ и

$$P_k:=E+\sum_{j=1}^{k}\xi_ju_j^*=E+F\Big(\sum_{j=1}^{k}e_je_j^*(H-E)\Big)F^{-1}=$$

$$=F\Big(E+\sum_{j=1}^{k}e_je_j^*(H-E)\Big)F^{-1}=FS_kF^{-1},\quad k=1,\ldots,n,$$

в частности, $P_n=FS_nF^{-1}=FHF^{-1}$. Отметим, что

$$\det P_k=\det S_k=\det(H)_k\geqslant\rho,\quad \|u_k\|\leqslant\|F^{-1}\|\,\|H-E\|,$$

$$\|\xi_ku_k^*\|\leqslant\|\xi_k\|\,\|u_k\|\leqslant\|F\|\,\|u_k\|\leqslant\varkappa(F)\|H-E\|\leqslant\varkappa(F)r. \tag{23.5}$$

Положим $\xi_0=u_0=0\in\mathbb{R}^n$ и рассмотрим множество

$$\Gamma=\bigcup_{j=1}^{n}\{t(E+\sum_{i=0}^{j}\xi_iu_i^*)+(1-t)(E+\sum_{i=0}^{j-1}\xi_iu_i^*)|\,t\in[0,1]\},$$

представляющее собой ломаную в пространстве матриц M_n, вершины которой совпадают с матрицами $E=:P_0$, $P_1,\ldots,P_n=FHF^{-1}$. Пусть

$$O_\varepsilon(\Gamma):=\{L\in\mathrm{M}_n|\,\exists G\in\Gamma:\ \|L-G\|<\varepsilon\}$$

— ε-трубка ломаной Γ.

Лемма 23.3 [139]. *Для любой матрицы* $H \in \mathcal{H}(r,\rho)$ *и для любого* $\varepsilon \in]0, \rho(1+n\gamma)^{1-n}[$, *где* $\gamma = \varkappa(F)r$, *всякая матрица* $L \in O_\varepsilon(\Gamma)$ *обратима, при этом* $\|L^{-1}\| \leqslant (1+n\gamma)^{n-1}(\rho - (1+n\gamma)^{n-1}\varepsilon)^{-1}$.

Доказательство. Возьмем любую матрицу $L \in O_\varepsilon(\Gamma)$ и найдем такую $G \in \Gamma$, что $\|L - G\| < \varepsilon$. Тогда при некоторых $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $t \in [0,1]$ выполнены равенства

$$G = t\Big(E + \sum_{i=0}^{j} \xi_i u_i^*\Big) + (1-t)\Big(E + \sum_{i=0}^{j-1} \xi_i u_i^*\Big) =$$

$$= E + \sum_{i=0}^{j-1} \xi_i u_i^* + t\xi_j u_j^* = P_{j-1} + t\xi_j u_j^*,$$

где $P_0 := E$. Для матриц P_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, справедливы неравенства $\det P_i \geqslant \rho$, поэтому P_{j-1} обратима и

$$\det G = \det(P_{j-1} + t\xi_j u_j^*) =$$

$$= \det\Big(P_{j-1}(E + tP_{j-1}^{-1}\xi_j u_j^*)\Big) = \det P_{j-1} \det(E + ta_j u_j^*),$$

где $a_j := P_{j-1}^{-1}\xi_j$. При $t = 0$ имеем равенство

$$\det(E + ta_j u_j^*) = 1,$$

а при $t \neq 0$

$$\det(E + ta_j u_j^*) = \det\Big(t\Big(\frac{1}{t}E + a_j u_j^*\Big)\Big) = t^n \det\Big(\frac{1}{t}E - (-a_j u_j^*)\Big).$$

Обозначим $D_j = -a_j u_j^* \in \mathrm{M}_n$. Тогда
1) $\operatorname{rank} D_j = 1$ [176, с. 81];
2) матрица D_j имеет, самое большее, одно ненулевое собственное значение кратности 1, равное $-u_j^* a_j$ [176, с. 81];
3) след матрицы D_j совпадает с суммой собственных значений D_j с учетом их кратностей [176, с. 58], поэтому $\mathrm{Sp} D_j = -u_j^* a_j$.

Пусть $E_i(D_j)$ — сумма главных миноров порядка i [176, с. 58] матрицы D_j, $i = 1, \ldots, n$, тогда характеристический многочлен матрицы D_j имеет вид [176, с. 58]

$$p_{D_j}(t) = t^n - E_1(D_j)t^{n-1} + E_2(D_j)t^{n-2} + \ldots + (-1)^n E_n(D_j).$$

Поскольку $\operatorname{rank} D_j = 1$, определитель всякой подматрицы матрицы D_j порядка $k \times k$ при $k > 1$ равен 0, поэтому $E_k(D_j) = 0$ при всех $k \in \{2, \ldots, n\}$, а $E_1(D_j) = \mathrm{Sp} D_j = -u_j^* a_j$. Следовательно,

$$p_{D_j}(t) = t^n + t^{n-1} u_j^* a_j.$$

Отсюда вытекает, что при $t \neq 0$

$$\det(E + ta_j u_j^*) = t^n p_{D_j}\Big(\frac{1}{t}\Big) = t^n(t^{-n} + t^{1-n}u_j^* a_j) = 1 + tu_j^* a_j.$$

Итак, $\det(E + ta_j u_j^*) = 1 + tu_j^* a_j$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и

$$\det G = (1 + tu_j^* P_{j-1}^{-1}\xi_j) \det P_{j-1}$$

— линейно зависит от t, поэтому для всякой $G \in \Gamma$ получаем оценку

$$\det G \geqslant \min_{j=0,\ldots,n} \det P_j \geqslant \rho.$$

С другой стороны, из (23.5) вытекает неравенство

$$\|G\| = \Big\|E + \sum_{i=0}^{j-1} \xi_i u_i^* + t\xi_j u_j^*\Big\| \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i u_i^*\| \leqslant 1 + n\varkappa(F)r = 1 + n\gamma.$$

Поэтому

$$\|G^{-1}\| \leqslant \frac{\|G\|^{n-1}}{|\det G|} \leqslant \frac{(1+n\gamma)^{n-1}}{\rho} < \varepsilon^{-1},$$

т. е. $\|L - G\| < \varepsilon < \|G^{-1}\|^{-1}$. Согласно [176, с. 403] отсюда следует, что матрица L обратима и справедлива оценка

$$\|L^{-1}\| \leqslant \|G^{-1} - L^{-1}\| + \|G^{-1}\| \leqslant \frac{\|G^{-1}\|\,\|G^{-1}(L-G)\|}{1 - \|G^{-1}(L-G)\|} + \|G^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|G^{-1}\|}{1 - \|G^{-1}(L-G)\|} \leqslant \frac{(1+n\gamma)^{n-1}}{\rho} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(1+n\gamma)^{n-1}}{\rho}\varepsilon} = \frac{(1+n\gamma)^{n-1}}{\rho - (1+n\gamma)^{n-1}\varepsilon}.$$

Лемма доказана.

Теорема 23.3 [139]. *Если система* (21.1) *ϑ-равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется обратимая матрица $F \in \mathrm{M}_n$, обеспечивающая выполнение следующего свойства: для любых $r > 0$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует не зависящая от t_0 величина $\beta = \beta(r,\rho) > 0$ такая, что для всякой матрицы $H \in \mathcal{H}(r,\rho)$ найдется кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0 + \vartheta] \to \mathrm{M}_{mn}$, $\|U\|_C \leqslant \beta\|H - E\|$, при котором матрица Коши $X_U(t,s)$ системы* (21.2) *удовлетворяет равенству*

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0) F H F^{-1}. \tag{23.6}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}$. Пользуясь теоремой 22.2, построим обратимую матрицу $F = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$, $\|F^{-1}\| \leqslant \alpha$, образующую базис чистых движений для системы (21.1) на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Столбцами матрицы F являются векторы $\xi_k = Q(t_0, t_k)\nu_k$, где $\nu_k \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_k\| = 1$, а моменты времени $t_k \in [t_0 + \delta_0, t_0 + \vartheta - \delta_0]$, $k = 1, \ldots, n$, таковы, что $t_k - t_{k-1} \geqslant \delta_0$ и $B(\cdot) \in C(]t_k - \delta_0/2, t_k + \delta_0/2[)$. Из теоремы 22.2 следует, что положительные величины α и δ_0 можно выбрать не зависящими от $t_0 \in \mathbb{R}$. Кроме того, для $\|F\|$ имеет место равномерная по t_0 оценка

$$\|F\| \leqslant \sqrt{n} \max\{\|\xi_k\| : k = 1, \ldots, n\} \leqslant \sqrt{n} b \exp(a\vartheta),$$

поэтому

$$\varkappa(F) = \|F\| \, \|F^{-1}\| \leqslant \sqrt{n} \alpha b \exp(a\vartheta) := \varkappa.$$

Возьмем любые $\rho \in]0, 1]$, $r > 0$ и $H \in \mathcal{H}(r, \rho)$. На отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$ рассмотрим матричную задачу управления

$$\dot{Y} = A(t)Y + B(t)V, \tag{23.7}$$

$$Y(t_0) = E, \quad Y(t_0 + \vartheta) = X(t_0 + \vartheta, t_0) F H F^{-1}. \tag{23.8}$$

Тогда из (23.7) и первого условия (23.8) следует

$$Y(t) = X(t, t_0)\Big(E + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0, s)V(s)\, ds\Big),$$

а второе условие (23.8) выполнено тогда и только тогда, когда

$$E + \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} Q(t_0, s)V(s)\, ds = F H F^{-1}.$$

Построим управление $V \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, гарантирующее выполнение этого равенства, такое, что матрица

$$G(t) := E + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0, s)V(s)\, ds$$

обратима на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ и для некоторых не зависящих от $t_0 \in \mathbb{R}$ (но зависящих от r и ρ) положительных чисел γ_1, γ_2 и всех $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ справедливы неравенства

$$\|V(t)\| \leqslant \gamma_1 \|H - E\|, \quad \|G^{-1}(t)\| \leqslant \gamma_2.$$

Если управление $V(\cdot)$ с этими свойствами построено, то матрица $Y(\cdot)$, определенная на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ равенством $Y(t) = X(t, t_0)G(t)$, обратима, при этом

$$\|Y^{-1}(t)\| = \|G^{-1}(t) X(t_0, t)\| \leqslant \gamma_2 \exp(a\vartheta).$$

Возьмем $U(t) = V(t)Y^{-1}(t)$. Тогда, независимо от $t_0 \in \mathbb{R}$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ справедлива оценка

$$\|U(t)\| \leqslant \|V(t)\| \, \|Y^{-1}(t)\| \leqslant \gamma_1\gamma_2 \exp(a\vartheta)\|H - E\| =: \beta\|H - E\|,$$

причем $U(\cdot)$ кусочно непрерывна на $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Из (23.7) вытекает, что функция $Y(\cdot)$ на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ является решением уравнения

$$\dot{Y} = A(t)Y + B(t)V(t) = (A(t)Y + B(t)U(t))Y,$$

поэтому из первого условия (23.8) получаем $Y(t) \equiv X_U(t, t_0)$ при $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$. Тогда из второго условия (23.8) следует доказываемое равенство (23.6).

Будем искать $V(\cdot)$ в виде $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$, где $V_1(\cdot)$ кусочно постоянно, а $V_2(\cdot)$ достаточно мало по норме. Положим

$$G_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Q(t_0, s)V_i(s)\, ds, \;\; i = 1, 2.$$

Тогда $G(t) = E + G_1(t) + G_2(t)$, поэтому требуемое равенство

$$G(t_0 + \vartheta) = FHF^{-1}$$

выполнено в том и только том случае, когда

$$E + G_1(t_0 + \vartheta) + G_2(t_0 + \vartheta) = FHF^{-1}. \tag{23.9}$$

С целью формирования управления $V_1(\cdot)$ для выбранной матрицы H и найденной матрицы F построим по формулам (23.4) векторы $u_1, \ldots, u_n$ и ломаную Γ.

Возьмем некоторое $\Delta \in]0, \delta_0/3]$, выбор которого уточним ниже. Пусть $\Delta_i = [\tau_i, \vartheta_i]$, $i = 1, \ldots, n$ — произвольные отрезки длины Δ, такие, что $t_i \in \Delta_i$. Тогда $B(\cdot)$ непрерывна на каждом Δ_i, а отрезки Δ_i попарно не пересекаются и содержатся в $]t_0, t_0 + \vartheta[$. Обозначим $\tau_{n+1} = t_0 + \vartheta$; $\Phi_j = \nu_j u_j^*/\Delta$, $j = 1, \ldots, n$.

Искомое управление $V_1(\cdot)$ определим равенством $V_1(t) \equiv \Phi_j$ при $t \in \Delta_j$, $j = 1, \ldots, n$, и $V_1(t) \equiv 0$ при всех остальных $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$. Тогда для $\|V_1\|_C$ имеем оценку

$$\|V_1\|_C \leqslant \max\{\|\Phi_j\| : j = 1, \ldots, n\} \leqslant \max\{\|u_j\| : j = 1, \ldots, n\}/\Delta \leqslant$$
$$\leqslant \|F^{-1}\| \, \|H - E\|/\Delta \leqslant \alpha\|H - E\|/\Delta =: \alpha_1(\Delta)\|H - E\|.$$

Зададим параметризацию ломаной Γ с помощью функции

$$P(t)=\begin{cases} E & \text{при } t\in[t_0,\tau_1],\\ E+\sum\limits_{i=1}^{j-1}\xi_i u_i^*+(t-\tau_j)\xi_j u_j^*/\Delta & \text{при } t\in\Delta_j,\\ P(\vartheta_j) & \text{при } t\in]\vartheta_j,\tau_{j+1}]. \end{cases}$$

Поскольку при $t\in\Delta_i$

$$\xi_i u_i^*=Q(t_0,t_i)\nu_i u_i^*=Q(t_0,t_i)\Phi_i\Delta\equiv Q(t_0,t_i)V_i(t)\Delta,$$

то справедливо тождество

$$P(t)\equiv E+\sum_{i=1}^{j-1}\int\limits_{\Delta_i}Q(t_0,t_i)V_i(s)\,ds+\int\limits_{\tau_j}^{t}Q(t_0,t_j)V_j(s)\,ds,\quad t\in\Delta_j.$$

При каждом $t\in[t_0,t_0+\vartheta]$ обозначим

$$R(t)=E+G_1(t)-P(t)$$

— отклонение $E+G_1(t)$ от ломаной Γ. Тогда

$$R(t)=\sum_{i=1}^{j-1}\int\limits_{\Delta_i}(Q(t_0,s)-Q(t_0,t_i))\Phi_i\,ds+\int\limits_{\tau_i}^{t}(Q(t_0,s)-Q(t_0,t_j))\Phi_j\,ds$$

при $t\in\Delta_j$ и $R(t)\equiv R(\vartheta_j)$ при $t\in]\vartheta_j,\tau_{j+1}]$, причем $R(t_0)=0$. Обозначим $R=R(t_0+\vartheta)$ — "финальное" отклонение $E+G_1(t)$ от Γ.

Пусть

$$q(\Delta):=\sup\{\|Q(t_0,s)-Q(t_0,t)\|:\,t_0\in\mathbb{R},\,s,t\in[t_0,t_0+\vartheta],$$
$$|s-t|\leqslant\Delta,\ \exists i\in\mathbb{I}:\,s,t\in I_i\}.$$

Тогда при всех $t\in[t_0,t_0+\vartheta]$ выполнено неравенство

$$\|R(t)\|\leqslant nq(\Delta)\max\{\|\Phi_i\|:\,i=1,\dots,n\}\Delta\leqslant$$
$$\leqslant nq(\Delta)\max\{\|u_i\|:\,i=1,\dots,n\}\leqslant nq(\Delta)\alpha\|H-E\|,$$

в частности, $\|R\|\leqslant nq(\Delta)\alpha\|H-E\|$.

Управление $V_2(\cdot)$ построим в виде

$$V_2(t)=-Q^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta)R,$$

где $W(t_0,t_0+\vartheta)$ — матрица Калмана. Тогда

$$G_2(t_0+\vartheta)=-\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta}Q(t_0,s)Q^*(t_0,s)ds\,W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta)R=-R,$$

поэтому

$$E + G_1(t_0+\vartheta) + G_2(t_0+\vartheta) = P(t_0+\vartheta) + R(t_0+\vartheta) + G_2(t_0+\vartheta) =$$
$$= FHF^{-1} + R - R = FHF^{-1},$$

т. е. (23.9) выполнено.

Из ϑ-равномерной полной управляемости системы (21.1) следует, что найдется такое не зависящее от t_0 положительное число β_1, что $\|W^{-1}(t_0, t_0+\vartheta)\| \leqslant \beta_1$. Тогда

$$\|V_2\|_C \leqslant \|Q(t_0,\cdot)\|_{C([t_0,t_0+\vartheta])}\|W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta)\|\,\|R\| \leqslant$$
$$\leqslant b\exp(a\vartheta)\beta_1 nq(\Delta)\alpha\|H-E\| =: \alpha_2(\Delta)\|H-E\|;$$

$$\|G_2(t)\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|Q(t_0,\cdot)\|_{C([t_0,t_0+\vartheta])}\|V_2\|_C ds \leqslant \vartheta b\exp(a\vartheta)\alpha_2(\Delta)\|H-E\|.$$

Поскольку

$$G(t) = E + G_1(t) + G_2(t) = P(t) + R(t) + G_2(t),$$

имеем оценку

$$\|G(t)-P(t)\| \leqslant \|R(t)\| + \|G_2(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant nq(\Delta)\alpha\|H-E\| + \vartheta b\exp(a\vartheta)\alpha_2(\Delta)\|H-E\| =: \alpha_3(\Delta)\|H-E\| \leqslant \alpha_3(\Delta)r,$$

т. е. при всех $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$ выполнено включение $G(t) \in O_\varepsilon(\Gamma)$, где $\varepsilon = \alpha_3(\Delta)r$. Так как $\alpha_3(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$, величину Δ можно выбрать настолько малой, что $\varepsilon < \rho(1+n\gamma)^{1-n}/2$, где $\gamma := \varkappa r$. Тогда из леммы 23.3 вытекает, что матрица $G(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$ обратима, и справедливы оценки

$$\|G^{-1}(t)\| \leqslant (1+n\gamma)^{n-1}(\rho - \varepsilon(1+n\gamma)^{n-1})^{-1} < 2(1+n\gamma)^{n-1}/\rho =: \gamma_2.$$

В свою очередь,

$$\|V\|_C \leqslant \|V_1\|_C + \|V_2\|_C \leqslant (\alpha_1(\Delta)+\alpha_2(\Delta))\|H-E\| =: \gamma_1\|H-E\|.$$

Величины γ_1 и γ_2 зависят от r и ρ, но не зависят от t_0. Теорема доказана.

Пусть

$$\mathcal{H} := \bigcup_{\rho>0} \mathcal{H}(\rho)$$

— совокупность $n\times n$ матриц, имеющих положительные ведущие главные миноры.

Лемма 23.4 [139]. *Матрица $H \in \mathrm{M}_n$ принадлежит множеству $\mathcal{H}$ в том и только том случае, когда $H = LG$, где L и G — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы с положительными диагональными элементами.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $H = LG$, где L и G — нижняя и верхняя треугольные матрицы с положительными диагональными элементами. Тогда $(H)_k = (L)_k(G)_k$, поэтому

$$\det(H)_k = \det(L)_k \det(G)_k > 0$$

при всех $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Необходимость. Покажем, что всякая матрица $H \in \mathcal{H}$ однозначно представима в виде $H = LG$, где L — нижняя треугольная матрица с единичной диагональю, G — верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами g_{ii}, $i = 1, \ldots, n$. Так как все ведущие главные миноры H отличны от нуля, для H существует единственное LDU-разложение [9, с. 140], т.е. H однозначно представима в виде $H = LDU$, где L и U — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы с единичными диагоналями, D — диагональна. Положим $G = DU$ — верхняя треугольная, тогда $H = LG$ и $(H)_k = (L)_k(G)_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Отсюда

$$\det(H)_k = \det(L)_k \det(G)_k = \prod_{i=1}^{k} g_{ii},$$

поэтому

$$g_{11} = \det(H)_1 > 0,$$
$$g_{kk} = \det(H)_k / \det(H)_{k-1} > 0, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Лемма доказана.

Следствие 23.1 [139]. *Если система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется обратимая матрица $F \in \mathrm{M}_n$ такая, что для произвольных матриц с положительными диагональными элементами, нижней треугольной L и верхней треугольной G, найдется управление $U \in KC_{mn}([t_0, t_0 + \vartheta])$, обеспечивающее выполнение равенства $X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0)FLGF^{-1}$.*

Доказательство. Возьмем любые матрицы с положительными диагональными элементами, нижнюю треугольную L и верхнюю треугольную G. Из леммы 23.4 следует, что $LG \in \mathcal{H}$. Положим

$$r = \|LG - E\|, \quad \rho = \min\{1;\, \det(L)_j \det(G)_j : j = 1, \ldots, n\}.$$

Тогда $LG \in \mathcal{H}(r,\rho)$, и утверждение следствия вытекает из теоремы 23.3.

Следствие 23.2 [139]. *Если система* (21.1) ϑ*-равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то существуют такие обратимые матрицы* $F_k \in \mathrm{M}_n$, $k \in \mathbb{Z}$, *что для любых последовательностей* $n\times n$ *матриц с положительными диагональными элементами, нижних треугольных* $\{L_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *и верхних треугольных* $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, *таких, что* $\sup\limits_k\{\|L_k\|,\|L_k^{-1}\|,\|G_k\|,\|G_k^{-1}\|\} < \infty$, *найдется управление* $U \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, *для которого*

$$X_U(k\vartheta,(k-1)\vartheta) = X(k\vartheta,(k-1)\vartheta)F_kL_kG_kF_k^{-1}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 22.2 при каждом $k\in\mathbb{Z}$ построим матрицу $F_k := F((k-1)\vartheta)$, образующую базис чистых движений для системы (21.1) на $[(k-1)\vartheta,k\vartheta]$. Возьмем произвольные последовательности $n\times n$ матриц с положительными диагональными элементами, нижних треугольных $\{L_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и верхних треугольных $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, такие, что $\sup\limits_k\{\|L_k\|,\|L_k^{-1}\|,\|G_k\|,\|G_k^{-1}\|\} =: \gamma < \infty$. Тогда для диагональных элементов $l_{ii}^{(k)}$, $i=1,\ldots,n$, матрицы L_k при каждом $k\in\mathbb{Z}$ справедливы неравенства

$$l_{ii}^{(k)} = |l_{ii}^{(k)}| = |e_i^*L_ke_i| \leqslant \|L_k\| \leqslant \gamma,$$

$$1/l_{ii}^{(k)} = |1/l_{ii}^{(k)}| = |e_i^*L_k^{-1}e_i| \leqslant \|L_k^{-1}\| \leqslant \gamma,$$

т. е. $1/\gamma \leqslant l_{ii}^{(k)} \leqslant \gamma$, $i=1,\ldots,n$, $k\in\mathbb{Z}$. Такие же оценки имеют место для диагональных элементов $g_{ii}^{(k)}$, $i=1,\ldots,n$, матриц G_k. Следовательно, при всех $k\in\mathbb{Z}$ и $j\in\{1,\ldots,n\}$

$$\det(L_k)_j = \prod_{i=1}^{j} l_{ii}^{(k)} \geqslant \gamma^{-j}, \quad \det(G_k)_j = \prod_{i=1}^{j} g_{ii}^{(k)} \geqslant \gamma^{-j}.$$

Пусть $H_k := L_kG_k$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда из леммы 23.4 вытекает, что $H_k\in\mathcal{H}$, при этом

$$\|H_k - E\| \leqslant \|H_k\| + 1 \leqslant \|L_k\|\,\|G_k\| + 1 \leqslant \gamma^2 + 1,$$

$$\det(H_k)_j = \det(L_k)_j\det(G_k)_j \geqslant \gamma^{-2j} \geqslant \gamma^{-2n}, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad j=1,\ldots,n.$$

Поэтому $H_k\in\mathcal{H}(\gamma^2+1,\gamma^{-2n})$. Из теоремы 23.3 следует, что на каждом из отрезков $[(k-1)\vartheta,k\vartheta]$ можно построить кусочно непрерывное управление $U_k(\cdot)$, $\|U_k\|_{C[(k-1)\vartheta,k\vartheta]} \leqslant \beta\|H_k-E\| \leqslant (\gamma^2+1)\beta$, где $\beta := \beta(\gamma^2+1,\gamma^{-2n})$, такое, что

$$X_{U_k}(k\vartheta,(k-1)\vartheta)=X(k\vartheta,(k-1)\vartheta)F_kH_kF_k^{-1}.$$

Положим

$$U(t)\equiv U_k(t),\quad t\in[(k-1)\vartheta,k\vartheta[,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Тогда $U(\cdot)$ кусочно непрерывно на каждом из отрезков $[(k-1)\vartheta,k\vartheta]$, причем точки разрыва $U(\cdot)$ равномерно по $k\in\mathbb{Z}$ разделены между собой и отделены от концов отрезков $[(k-1)\vartheta,k\vartheta]$. Для нормы $U(\cdot)$ имеет место оценка $\|U\|_{C(\mathbb{R})}\leqslant(\gamma^2+1)\beta$, следовательно, $U\in KC_{mn}(\mathbb{R})$. Кроме того,

$$X_U(k\vartheta,(k-1)\vartheta)=X(k\vartheta,(k-1)\vartheta)F_kL_kG_kF_k^{-1},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Следствие доказано.

Замечание 23.1. Матрицы F_k из следствия 23.2 обладают тем свойством, что $\|F_k\|$ и $\|F_k^{-1}\|$, $k\in\mathbb{Z}$, ограничены в совокупности. Действительно, $\|F_k\|\leqslant\sqrt{n}\max\{\|F_ke_i\|:\ i=1,\ldots,n\}\leqslant\sqrt{n}e^{a\vartheta}b$, $\|F_k^{-1}\|\leqslant\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$, где α — из теоремы 22.2.

В качестве иллюстрации применения полученных утверждений докажем пропорциональную глобальную управляемость верхнего особого показателя системы (21.2) и равномерную стабилизируемость этой системы.

Теорема 23.4 [98]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то верхний особый показатель системы* (21.2) *пропорционально глобально управляем на множестве $\{\mu\in\mathbb{R}:\ |\mu|\leqslant\mu_0\}$ при каждом $\mu_0>0$, т. е. для всякого $\mu_0>0$ существует $l=l(\mu_0)>0$ такое, что для любого $\mu\in\mathbb{R}$, $|\mu|\leqslant\mu_0$, найдется управление $U_\mu(\cdot)\in KC_{mn}(\mathbb{R})$, удовлетворяющее оценке $\|U_\mu\|_C\leqslant l|\mu|$ и гарантирующее для верхнего особого показателя $\Omega^0(A+BU_\mu)$ системы* (21.2) *с $U=U_\mu(\cdot)$ выполнение равенства*

$$\Omega^0(A+BU_\mu)=\Omega^0(A)+\mu.$$

Доказательство. Пусть $\vartheta>0$ — число, обеспечивающее ϑ-равномерную полную управляемость системы (21.1). Возьмем произвольное $\mu_0>0$. Функция $\mu\mapsto e^{\mu\vartheta}-1$ выпукла, поэтому при всех $\mu\in[0,\mu_0]$ выполнено неравенство

$$|e^{\mu\vartheta}-1|=e^{\mu\vartheta}-1\leqslant\frac{\mu}{\mu_0}(e^{\mu_0\vartheta}-1)=\frac{e^{\mu_0\vartheta}-1}{\mu_0}|\mu|.$$

При $\mu \in [-\mu_0, 0]$ справедливы оценки

$$|e^{\mu\vartheta} - 1| = 1 - e^{\mu\vartheta} \leqslant -\mu\vartheta = \vartheta|\mu|.$$

Так как $e^{\mu_0}\vartheta \geqslant 1 + \mu_0\vartheta$, то $\vartheta \leqslant \dfrac{e^{\mu_0\vartheta} - 1}{\mu_0}$, следовательно, имеет место неравенство

$$|e^{\mu\vartheta} - 1| \leqslant \frac{e^{\mu_0\vartheta} - 1}{\mu_0}|\mu|, \quad \mu \in [-\mu_0, \mu_0].$$

Возьмем любое $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ и положим $H_\mu := e^{\mu\vartheta}E \in \mathrm{M}_n$. Тогда

$$\|H_\mu - E\| = |e^{\mu\vartheta} - 1| \leqslant \frac{e^{\mu_0\vartheta} - 1}{\mu_0}|\mu| \leqslant \frac{e^{\mu_0\vartheta} - 1}{\mu_0},$$

$$\det(H_\mu)_j = \prod_{k=1}^{j} e^{\mu\vartheta} = e^{\mu j\vartheta} \geqslant e^{-\mu_0 j\vartheta} \geqslant e^{-\mu_0 n\vartheta}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

поэтому матрица H_μ принадлежит множеству $\mathcal{H}(r, \rho)$, где $\rho = e^{-\mu_0 n\vartheta}$, $r = (e^{\mu_0\vartheta} - 1)/\mu_0$. Из теоремы 23.3 следует, что существует управление $U_\mu \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|U_\mu\|_C \leqslant \beta\|H_\mu - E\|$, такое, что при каждом $k \in \mathbb{Z}$

$$X_{U_\mu}(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = X(k\vartheta, (k-1)\vartheta)F_k H_\mu F_k^{-1} = e^{\mu\vartheta}X(k\vartheta, (k-1)\vartheta),$$

где F_k — матрица базиса чистых движений системы (21.1) на отрезке $[(k-1)\vartheta, k\vartheta]$, а величина $\beta > 0$ зависит только от r и ρ (т. е. только от μ_0). Следовательно, для $\|U_\mu\|_C$ имеем оценку

$$\|U_\mu\|_C \leqslant \beta\|H_\mu - E\| = \beta|e^{\mu\vartheta} - 1| \leqslant \beta\frac{e^{\mu_0\vartheta} - 1}{\mu_0}|\mu| =: l|\mu|.$$

Вычислим верхний особый показатель $\Omega^0(A + BU_\mu)$ системы (21.2) с управлением $U = U_\mu(\cdot)$. С этой целью возьмем последовательность $T_j = j\vartheta$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Omega^0(A + BU_\mu) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sup_k \ln\|X_{U_\mu}((k+1)T, kT)\| =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{T_j} \sup_k \ln\|X_{U_\mu}((k+1)T_j, kT_j)\| =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j\vartheta} \sup_k \ln\|X_{U_\mu}((k+1)j\vartheta, kj\vartheta)\| =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j\vartheta} \sup_k \ln\Big(\|X((k+1)j\vartheta, kj\vartheta)\|e^{\mu j\vartheta}\Big) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j\vartheta} \sup_k \Big(\mu j\vartheta + \ln \|X((k+1)j\vartheta, kj\vartheta)\|\Big) = \mu + \Omega^0(A).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 23.2. Аналогичное утверждение получено В. А. Зайцевым в работе [49] без предположения кусочной равномерной непрерывности матрицы $B(\cdot)$ (достаточна кусочная непрерывность этой матрицы).

О п р е д е л е н и е 23.2 (Е. Л. Тонков, [171]). Система (21.2) называется равномерно стабилизируемой, если для каждого $\alpha > 0$ найдется такое управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, что верхний показатель Боля $\overline{\beta}[x]$ всякого нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (21.2) при $U = U(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $\overline{\beta}[x] < -\alpha$.

С л е д с т в и е 23.3 [98]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то система* (21.2) *равномерно стабилизируема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теоремы 23.4 с учетом того факта, что верхний особый показатель ограничивает сверху верхние показатели Боля всех нетривиальных решений линейной системы.

З а м е ч а н и е 23.3. Из теоремы 23.4 следует также, что если выполнены ее условия, то систему (21.2) выбором матричного управления $U(\cdot)$ можно сделать равномерно (относительно начального момента времени) асимптотически устойчивой (К. П. Персидский, [120]).

§ 24. Глобальная ляпуновская приводимость периодических систем

В этом параграфе установлена эквивалентность полной управляемости периодической системы (21.1) с кусочно непрерывными коэффициентами и глобальной ляпуновской приводимости соответствующей системы (21.2) (теорема 24.1).

П. Бруновским в [181] была доказано, что для полной управляемости (см. определение 1.2) ω-периодической системы (21.1) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами необходима и достаточна глобальная управляемость мультипликаторов [39, с. 185] системы (21.2), т. е. существование для произвольной наперед заданной вещественной $n \times n$-матрицы Λ с положительным определителем такого ω-периодического управления $U(\cdot)$, что система (21.2) с этим управлением имеет своими мультипликаторами собственные значения матрицы Λ. В [181] автором указано, что примененный им метод доказательства необходимости глобальной управляемости мультипликаторов системы (21.2) для полной управляемости системы (21.1) не позволяет уменьшить гладкость коэффициентов системы (21.1).

В этом параграфе установлена эквивалентность полной управляемости периодической системы (21.1) с кусочно непрерывными коэффициентами и глобальной ляпуновской приводимости соответствующей системы (21.2).

Пусть $P \in \mathrm{M}_n$ — произвольная матрица с ненулевым определителем. Напомним (см. [176, с. 139]), что QR-разложением матрицы P называется разложение вида $P = QR$, где Q — ортогональная, а R — верхняя треугольная вещественные матрицы. Диагональные элементы R можно выбрать положительными, и в этом случае Q и R определяются однозначно. Докажем предварительно один результат, касающийся QR-разложения.

Лемма 24.1 [139]. *Для любой невырожденной $n \times n$ матрицы X существует нижняя треугольная матрица H с единичной диагональю, такая, что в QR-разложении произведения XH ортогональная матрица Q при некотором $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет равенству $Q^k = E$, а верхняя треугольная матрица R имеет положительные диагональные элементы.*

Доказательство. Построим такую нижнюю треугольную матрицу H с единичной диагональю, что в равенстве $XH = QR$ ортогональная матрица Q образована некоторой перестановкой столбцов $e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}$ единичной матрицы, взятых со знаками $+$ или $-$.

Равенство $XH = QR$ выполнено тогда и только тогда, когда $X^{-1}Q = HR^{-1}$. Предположим, что по заданной матрице X^{-1} матрица $Q = [\pm e_{k_1}, \ldots, \pm e_{k_n}]$ построена так, что $X^{-1}Q \in \mathcal{H}$. Тогда в силу леммы 23.4 существуют единственные нижняя треугольная матрица H с единичной диагональю и верхняя треугольная $\widetilde{R}$ с положительными диагональными элементами, такие, что $X^{-1}Q = H\widetilde{R}$. Возьмем $R = \widetilde{R}^{-1}$, получим требуемое равенство.

Итак, задача заключается в построении по заданной невырожденной матрице $Y{:=}X^{-1}$ матрицы $Q = [\pm e_{k_1}, \ldots, \pm e_{k_n}]$ такой, что $YQ \in \mathcal{H}$.

По условию $\det Y \neq 0$, поэтому ранг $(n-1)\times n$ матрицы, полученной из Y выбрасыванием последней строки, равен $n-1$. Следовательно, существует $k_n \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что матрица Y_{n-1}, образованная из Y вычеркиванием последней строки и k_n-го столбца, имеет ненулевой определитель. Тогда ранг $(n-2)\times(n-1)$ матрицы, полученной из Y выбрасыванием последних двух строк и k_n-го столбца, равен $n-2$. Поэтому существует $k_{n-1} \in \{1, \ldots, n\}$, $k_{n-1} \neq k_n$, такое, что матрица Y_{n-2}, образованная из Y вычеркиванием последних двух строк и k_n-го и k_{n-1}-го столбцов, имеет ненулевой определитель. Продолжая этот процесс, получим перестановку $\{k_n, k_{n-1}, \ldots, k_1\}$ индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$, такую, что каждая из матриц Y_j, $j = n-1, n-2, \ldots, 1$, полученная из Y вычеркиванием n-й, $(n-1)$-й, $\ldots$, $(j+1)$-й строк и k_n-го, k_{n-1}-го, $\ldots$, k_{j+1}-го столбцов, имеет ненулевой определитель.

Теперь построим нужную ортогональную матрицу $Q = [q_1, \ldots, q_n]$. Обозначим $Z = YQ$, $Z = [z_1, \ldots, z_n]$. Возьмем $q_1 = \pm e_{k_1}$. Тогда $z_1 = Yq_1 = \pm Ye_{k_1} = \pm y_{k_1}$, т.е. z_1 с точностью до знака совпадает с y_{k_1}, поэтому с точностью до знака $(Z)_1$ совпадает с Y_1. Выберем знак q_1 так, чтобы $\det(Z)_1 > 0$. Положим $q_2 = \pm e_{k_2}$. Тогда с точностью до знаков столбцов $(Z)_2$ совпадает с Y_2, следовательно, $|\det(Z)_2| = |\det Y_2| > 0$. Возьмем знак q_2 так, чтобы $\det(Z)_2 > 0$. Полагая всякий раз $q_i = \pm e_{k_i}$, $i = 1, \ldots, n$, получим, что каждая из матриц $(Z)_j$ с точностью до знаков столбцов совпадает с Y_j, поэтому $|\det(Z)_j| = |\det Y_j| > 0$. Знаки $q_1, \ldots, q_n$ последовательно могут быть выбраны так, что $\det(Z_j) > 0$, $j = 1, \ldots, n$, т.е. $Z = YQ \in \mathcal{H}$, что и требовалось.

Пусть l — порядок [69, с. 150] перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для произвольной матрицы $P = [p_1, \ldots, p_n] \in \mathrm{M}_n$ справедливо равенство $PQ = [\pm p_{k_1}, \ldots, \pm p_{k_n}]$, поэтому при всяком $j \in \mathbb{N}$ матрица Q^j образована столбцами $e_{s_1}, \ldots, e_{s_n}$, взятыми со знаками $+$ или $-$, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix} = \pi^j.$$

Тогда с точностью до знаков столбцы матрицы Q^l совпадают с векторами $e_1, \ldots, e_n$, а $Q^{2l} = E$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь вполне управляемую систему (21.1) с ω-периодическими и кусочно непрерывными на $\mathbb{R}$ матричными коэффициентами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Тогда (21.1) является ϑ-равномерно вполне управляемой при $\vartheta = n\omega$ [181, 170], а функция $t \mapsto B(t)$ кусочно равномерно непрерывна. Известно [39, с. 183], что для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица Коши однородной ω-периодической системы (21.3) удовлетворяет равенству

$$X(t+\omega, 0) = X(t,0)X(\omega,0),$$

поэтому

$$X(t+l\omega,0) = X(t+(l-1)\omega+\omega,0) = X(t+(l-1)\omega,0)X(\omega,0) =$$
$$= X(t+(l-2)\omega+\omega,0)X(\omega,0) = X(t+(l-2)\omega,0)X(\omega,0)X(\omega,0) =$$
$$= X(t+(l-2)\omega,0)X^2(\omega,0) = \ldots = X(t,0)X^l(\omega,0)$$

и

$$X(t+l\omega, s+l\omega) = X(t+l\omega,0)(X(s+l\omega,0))^{-1} =$$
$$= X(t,0)X^l(\omega,0)(X(s,0)X^l(\omega,0))^{-1} = X(t,0)X(0,s) = X(t,s)$$

при всех $t, s \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 24.1. Пусть $\vartheta := n\omega$. Пользуясь теоремой 22.2, на отрезке $[0,\vartheta]$ построим матрицу базиса чистых движений

$$F = [Q(0,t_1)\nu_1, \ldots, Q(0,t_n)\nu_n],$$

где $\nu_i \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_i\| = 1$, $t_j \in [\delta_0, \vartheta - \delta_0]$, $t_j - t_{j-1} \geqslant \delta_0$ и $B(\cdot)$ непрерывна на каждом $]t_j - \delta_0/2, t_j + \delta_0/2[$. Зафиксируем любое $k \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим матрицу

$$F_k = [Q(k\vartheta, k\vartheta + t_1)\nu_1, \ldots, Q(k\vartheta, k\vartheta + t_n)\nu_n].$$

Все моменты времени $k\vartheta + t_j$ принадлежат $[k\vartheta + \delta_0, (k+1)\vartheta - \delta_0]$, удовлетворяют оценкам $(k\vartheta + t_j) - (k\vartheta + t_{j-1}) \geqslant \delta_0$ и $B(\cdot)$ непрерывна на $]k\vartheta + t_j - \delta_0/2, k\vartheta + t_j + \delta_0/2[$. Кроме того,

$$Q(k\vartheta, k\vartheta+t_j)\nu_j = X(k\vartheta, k\vartheta+t_j)B(k\vartheta+t_j)\nu_j = X(0,t_j)B(t_j)\nu_j = Q(0,t_j)\nu_j$$

при каждом $j \in \{1, \ldots, n\}$, поэтому $F_k = F$. Следовательно, матрица F образует базис чистых движений для ω-периодической системы (21.1) на каждом из отрезков $[k\vartheta, (k+1)\vartheta]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 24.1 [139]. *Пусть* (21.1) — *система с кусочно непрерывными ω-периодическими коэффициентами. Для того чтобы* (21.1) *была вполне управляема, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая замкнутая система* (21.2) *обладала свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Доказательство. Необходимость. Положим $\vartheta = n\omega$ и в соответствии с замечанием 24.1 построим матрицу F, образующую базис чистых движений для системы (21.1) на каждом из отрезков $[k\vartheta, (k+1)\vartheta]$. Так как матрица Коши $X((k+1)\vartheta, k\vartheta) = X(\vartheta, 0)$ однородной периодической системы (21.3) не зависит от k, введем обозначение $X := F^{-1}X((k+1)\vartheta, k\vartheta)F$. В соответствии с леммой 24.1 построим такую нижнюю треугольную матрицу H с единичной диагональю, что $XH = QR$, где Q — ортогональная матрица, удовлетворяющая равенству $Q^l = E$ при некотором $l \in \mathbb{N}$, а верхняя треугольная матрица R имеет положительные диагональные элементы. Тогда матрица R^{-1} — верхняя треугольная с положительными диагональными элементами. Пользуясь следствием 23.1, на каждом из отрезков $[k\vartheta, (k+1)\vartheta]$ построим такое кусочно непрерывное ограниченное управление $U(\cdot)$, что матрица Коши $X_U(t,s)$ системы (21.2) удовлетворяет равенству

$$X_U((k+1)\vartheta, k\vartheta) = X((k+1)\vartheta, k\vartheta)F(HR^{-1})F^{-1} =$$

$$= FXF^{-1}FHR^{-1}F^{-1} = F(XH)R^{-1}F^{-1} = FQRR^{-1}F^{-1} = FQF^{-1}.$$

Заметим, что функция $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ может быть выбрана ϑ-периодической. К построенной системе (21.2) применим постоянное преобразование $x = Fy$, получим систему с ϑ-периодическими кусочно непрерывными коэффициентами

$$\dot{y} = F^{-1}\dot{x} = F^{-1}(A(t) + B(t)U(t))x = F^{-1}(A(t) + B(t)U(t))Fy, \qquad (24.1)$$

матрица Коши $Y(t,s)$ которой при всех $t, s \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $Y(t,s) = F^{-1}X_U(t,s)F$. Следовательно,

$$Y(\vartheta, 0) = F^{-1}X_U(\vartheta, 0)F = F^{-1}FQF^{-1}F = Q.$$

Функция $t \mapsto Y(t,0)$ имеет период $l\vartheta$, так как

$$Y(t + l\vartheta, 0) = Y(t,0)Y^l(\vartheta, 0) = Y(t,0)Q^l = Y(t,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что матрица $Y(t,0)$ является матрицей Ляпунова. Действительно,

1) $\|Y(\cdot,0)\|_{C(\mathbb{R})} = \|Y(\cdot,0)\|_{C([0,l\vartheta])} \leqslant \exp(\varkappa(F)(a+b\|U\|_C)l\vartheta) < \infty$;

2) $Y^*(0,t)$ является нормированной в нуле $l\vartheta$-периодической фундаментальной матрицей сопряженной системы

$$\dot{\xi} = -F^*(A^*(t) + U^*(t)B^*(t))(F^{-1})^*\xi,$$

поэтому

$$\|Y^{-1}(\cdot,0)\|_{C(\mathbb{R})} = \|Y(0,\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \|Y^*(0,\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} =$$
$$= \|Y^*(0,\cdot)\|_{C([0,l\vartheta])} \leqslant \exp(\varkappa(F)(a+b\|U\|_C)l\vartheta) < \infty;$$

3) для $\dot{Y}(t,0)$ справедлива оценка

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\dot{Y}(t,0)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F^{-1}(A(t)+B(t)U(t))FY(t,0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa(F)(a+b\|U\|_C)\exp(\varkappa(F)(a+b\|U\|_C)l\vartheta) < \infty.$$

Отметим (см. теоремы 1.2 и 1.3), что система

$$\dot{y} = F^{-1}(A(t)+B(t)U(t))Fy + F^{-1}B(t)u$$

ϑ-равномерно вполне управляема, а ее коэффициенты ϑ-периодические и кусочно непрерывные на $\mathbb{R}$. Применим к этой системе ляпуновское преобразование $y = Y(t,0)\eta$, получим

$$\dot{y} = \dot{Y}(t,0)\eta + Y(t,0)\dot{\eta} = F^{-1}(A(t)+B(t)U(t))FY(t,0)\eta + Y(t,0)\dot{\eta} =$$
$$= F^{-1}(A(t)+B(t)U(t))Fy + Y(t,0)\dot{\eta},$$

поэтому

$$\dot{\eta} = Y(0,t)F^{-1}B(t)u.$$

Это ϑ-равномерно вполне управляемая (и, следовательно, $l\vartheta$-равномерно вполне управляемая) и $l\vartheta$-периодическая система с нулевой матрицей при η и с кусочно непрерывной матрицей при u. Пользуясь замечанием 24.1, построим матрицу F_1, образующую базис для этой системы на каждом из отрезков $[kl\vartheta,(k+1)l\vartheta]$, $k\in\mathbb{Z}$.

Покажем, что для любой системы (21.7) с кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ матрицей коэффициентов $C(\cdot)$ существует такое управление $V(\cdot)\in KC_{mn}(\mathbb{R})$, что замкнутая система

$$\dot{\eta} = Y(0,t)F^{-1}B(t)V(t)\eta \tag{24.2}$$

асимптотически эквивалентна системе (21.7).

Поскольку всякая система (21.7) перроновским преобразованием приводится к треугольному виду, без ограничения общности будем считать, что матрица $C(t) = \{c_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ — верхняя треугольная. Пусть $Z(t,s)$ — матрица Коши системы (21.7), $c := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|C(t)\|$. При каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $Z((k+1)l\vartheta, kl\vartheta)$ — верхняя треугольная с положительными диагональными элементами

$$\exp \int\limits_{kl\vartheta}^{(k+1)l\vartheta} c_{jj}(\tau)\, d\tau, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Имеем равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ оценки

$$\|Z((k+1)l\vartheta, kl\vartheta) - E\| \leqslant \exp(cl\vartheta) + 1,$$

$$\det(Z((k+1)l\vartheta, kl\vartheta))_j = \exp \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{kl\vartheta}^{(k+1)l\vartheta} c_{ii}(\tau)\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \exp \sum_{i=1}^{j} l\vartheta(-\max\{|c_{ii}(t)| : \, t \in [kl\vartheta, (k+1)l\vartheta]\}) \geqslant$$

$$\geqslant \exp(-l\vartheta \sum_{i=1}^{j} \max\{\|C(t)e_i\| : \, t \in [kl\vartheta, (k+1)l\vartheta]\}) \geqslant$$

$$\geqslant \exp(-l\vartheta n \|C\|_{C(\mathbb{R})}) = \exp(-cnl\vartheta), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, каждая из матриц $Z((k+1)l\vartheta, kl\vartheta)$ принадлежит множеству $\mathcal{H}(r,\rho)$, где $r = \exp(cl\vartheta) + 1$, $\rho = \exp(-cnl\vartheta)$. В соответствии со следствием 23.2 построим кусочно непрерывное на $\mathbb{R}$ управление $V(\cdot)$, обеспечивающее для матрицы Коши $\eta_V(t,s)$ системы (24.2) равенства

$$\eta_V((k+1)l\vartheta, kl\vartheta) = F_1 Z((k+1)l\vartheta, kl\vartheta) F_1^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{24.3}$$

при этом

$$\|V\|_{C(\mathbb{R})} = \sup\{\|V\|_{C([kl\vartheta,(k+1)l\vartheta])} : \, k \in \mathbb{Z}\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\beta \|Z((k+1)l\vartheta, kl\vartheta) - E\| : \, k \in \mathbb{Z}\} \leqslant \beta r,$$

где величина β не зависит от k.

К системе (21.7) применим постоянное преобразование $\xi = F_1 z$, получим систему

$$\dot{\xi} = F_1 C(t) F_1^{-1} \xi$$

с матрицей Коши $F_1 Z(t,s) F_1^{-1}$. Тогда из (24.3) следует (Е. К. Макаров, [90]), что системы (24.2) и $\dot{\xi} = F_1 C(t) F_1^{-1}\xi$ асимптотически эквивалентны, поэтому в этом отношении находятся также и системы (21.7) и (24.2). К системе (24.2) применим обратное ляпуновское преобразование $y = Y(t,0)\eta$, получим

$$\dot y = \dot Y(t,0)\eta + Y(t,0)\dot\eta = F^{-1}(A(t)+B(t)U(t))FY(t,0)\eta +$$
$$+Y(t,0)Y(0,t)F^{-1}B(t)V(t)\eta = F^{-1}(A(t)+B(t)U(t))Fy+$$
$$+F^{-1}B(t)V(t)Y(0,t)y = F^{-1}(A(t)+B(t)(U(t)+V(t)Y(0,t)F^{-1}))Fy.$$

Возьмем в качестве матричного управления кусочно непрерывную и ограниченную на $\mathbb{R}$ функцию

$$U_1(t) = U(t) + V(t)Y(0,t)F^{-1},$$

тогда системы (21.7) и

$$\dot y = F^{-1}(A(t)+B(t)U_1(t))Fy$$

асимптотически эквивалентны. К последней системе применим обратное преобразование $x = Fy$, получим систему

$$\dot x = (A(t)+B(t)U_1(t))x,$$

асимптотически эквивалентную системе (21.7).

Достаточность. Предположим противное, пусть система (21.1) не является вполне управляемой. Тогда [181] линейное подпространство $\mathcal{N} := \{\xi \in \mathbb{C}^n : \xi^* Q(0,t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\}$ имеет размерность не меньше 1 и является $X^*(0,\omega)$-инвариантным, т. е. если $\xi \in \mathcal{N}$, то и $X^*(0,\omega)\xi \in \mathcal{N}$. Следовательно [176, с. 68], $\mathcal{N}$ содержит по меньшей мере один собственный вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ матрицы $X^*(0,\omega)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — соответствующее ему собственное значение ($\lambda \neq 0$, так как $\det X^*(0,\omega) \neq 0$).

Возьмем произвольную матрицу $C(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$ и в соответствии со свойством глобальной ляпуновской приводимости построим управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность систем (21.2) и (21.7). Тогда сопряженные к (21.2) и (21.7) системы

$$\dot y = -(A(t)+B(t)U(t))^* y \tag{24.4}$$

и $\dot\eta = -C^*(t)\eta$ также асимптотически эквивалентны [18, с. 244].

Матрица Коши $X_U(t,s)$ системы (21.2) при всех $t,s \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству

$$X_U(t,s) = X(t,s)\Big(E + \int\limits_s^t X(s,\tau)B(\tau)U(\tau)X_U(\tau,s)\,d\tau\Big),$$

поэтому

$$\xi^* X_U((k-1)\omega, k\omega) =$$

$$= \xi^* X((k-1)\omega, k\omega)\Big(E + \int\limits_{k\omega}^{(k-1)\omega} X(k\omega,\tau)B(\tau)U(\tau)X_U(\tau,k\omega)\,d\tau\Big) =$$

$$= \xi^* X(0,\omega)\Big(E + \int\limits_{0}^{-\omega} X(k\omega, s+k\omega)B(s+k\omega)U(s+k\omega)X_U(s+k\omega,k\omega)\,ds\Big) =$$

$$= \lambda\xi^*\Big(E - \int\limits_{-\omega}^{0} X(0,s)B(s)U(s+k\omega)X_U(s+k\omega,k\omega)\,ds\Big) =$$

$$= \lambda\xi^* - \lambda\int\limits_{-\omega}^{0} \xi^* Q(0,s)U(s+k\omega)X_U(s+k\omega,k\omega)\,ds) = \lambda\xi^*$$

при каждом $k \in \mathbb{Z}$. Для матрицы Коши $Y_U(t,s)$ системы (24.4) справедливо представление $Y_U(t,s) = X_U^*(s,t)$ для всех $s,t \in \mathbb{R}$, поэтому

$$Y_U(k\omega,(k-1)\omega)\xi = X_U^*((k-1)\omega,k\omega)\xi = \lambda\xi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, при каждом $k \in \mathbb{N}$

$$Y_U(k\omega,0)\xi = Y_U(k\omega,\omega)Y_U(\omega,0)\xi = \lambda Y_U(k\omega,\omega)\xi =$$

$$= \lambda Y_U(k\omega,2\omega)Y_U(2\omega,\omega)\xi = \lambda^2 Y_U(k\omega,2\omega)\xi = \ldots = \lambda^k\xi.$$

Рассмотрим вообще говоря комплексное решение $y(t) = Y_U(t,0)\xi$ системы (24.4). Для его характеристического показателя имеем равенства

$$\lambda[y] = \varlimsup_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|y(t)\| = \varlimsup_{k\to\infty}(k\omega)^{-1}\ln\|y(k\omega)\| =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty}(k\omega)^{-1}\ln\|\lambda^k\xi\| = \varlimsup_{k\to\infty}(k\omega)^{-1}\ln|\lambda|^k = \ln|\lambda|/\omega.$$

Тогда [39, с. 136–137] система (24.4) имеет вещественное решение с тем же показателем Ляпунова, т. е. число $\ln|\lambda|/\omega$ входит в полный спектр показателей Ляпунова системы (24.4), а потому и в полный спектр системы $\dot\eta = -C^*(t)\eta$. Это противоречит произвольности $C(\cdot)$. Теорема доказана.

Замечание 24.2. Из доказанной теоремы вытекает, что если ω-периодическая система (21.1) вполне управляема, то мультипликаторы соответствующей замкнутой системы (21.2) глобально управляемы в следующем смысле: для любой матрицы $\Lambda \in \mathrm{M}_n$ с положительным определителем найдутся управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ и ляпуновское преобразование $z = L(t)x$, такие, что система (21.2) с управлением $U(\cdot)$ приводится этим преобразованием к ω-периодической системе (21.7), имеющей своими мультипликаторами собственные значения матрицы Λ. При этом матрицы $U(\cdot)$ и $L(\cdot)$ не обязательно периодические, поскольку при перроновском преобразовании к треугольному виду периодическая система (21.7) переходит в общем случае в рекуррентную систему (В. М. Миллионщиков, [105]).

Замечание 24.3. В ходе доказательства теоремы 24.1 построено управление $U(\cdot)$ такое, что система (24.1) имеет матрицу Коши $Y(t,s)$, имеющую при каждом фиксированном $s \in \mathbb{R}$ период $nl\omega$ по переменной t. Поскольку матрицы Коши $Y(t,s)$ и $X_U(t,s)$ связаны равенством $X_U(t,s) = FY(t,s)F^{-1}$, где F — постоянная матрица, то имеет место

Следствие 24.1. *Если* (21.1) — *вполне управляемая система с кусочно непрерывными ω-периодическими коэффициентами, то существует матричное управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что при некотором $l \in \mathbb{N}$ матрица Коши $X_U(t,s)$ системы* (21.2) *имеет период $nl\omega$ по переменной t при каждом фиксированном $s \in \mathbb{R}$.*

§ 25. Глобальная достижимость двумерных систем

В этом параграфе доказана глобальная достижимость произвольной двумерной ($n = 2$) замкнутой системы вида (21.2) при условии равномерной полной управляемости соответствующей открытой системы (21.1) (теорема 25.1).

Определение 25.1 [139]. Пусть $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l$ — базисы пространства $\mathbb{R}^n$, $\Lambda \in \mathrm{M}_n$. Будем говорить, что упорядоченная совокупность $n \times n$ матриц $P_1, \ldots, P_{l-1}$ образует ρ-легальный маршрут от E к Λ относительно базисов $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l$, если при каждом $i \in \{1, \ldots, l\}$ пара (P_{i-1}, P_i) ρ-законопослушна относительно $\mathcal{F}_i$; здесь $P_0 := E$, $P_l := \Lambda$.

Лемма 25.1 [139]. *Пусть $\rho \in]0,1]$. Для того чтобы ρ-легальный маршрут от E к Λ относительно базисов $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l$ существовал, необходимо и достаточно, чтобы нашлись матрицы $H_1 \in \mathcal{H}(\rho)$, $H_j \in$*

$\in \mathcal{H}(\rho/\prod_{i=1}^{j-1}\det H_i)$, $j=2,\ldots,l$, *такие, что* Λ *представима в виде*

$$\Lambda = (F_l H_l F_l^{-1})(F_{l-1}H_{l-1}F_{l-1}^{-1})\ldots(F_1H_1F_1^{-1}) =: \prod_{j=l}^{1} F_jH_jF_j^{-1}.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что матрицы $P_1,\ldots,P_{l-1}$ образуют ρ-легальный маршрут от E к Λ относительно базисов $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_l$. Поскольку при каждом $j\in\{1,\ldots,l\}$ пара (P_{j-1},P_j) ρ-законопослушна относительно $\mathcal{F}_j$, в силу теоремы 23.2 имеем равенство $P_j = F_jH_jF_j^{-1}P_{j-1}$, где H_j — некоторая матрица из множества $\mathcal{H}(\rho/\det P_{j-1})$.

Так как $P_0=E$, то $H_1\in\mathcal{H}(\rho)$. Следовательно,

$$\det P_1 = \det(F_1H_1F_1^{-1}P_0) = \det H_1$$

и $H_2\in\mathcal{H}(\rho/\det H_1)$. Далее,

$$\det P_2 = \det(F_2H_2F_2^{-1}P_1) = \det H_2 \det P_1 = \det H_1 \det H_2,$$

поэтому $H_3\in\mathcal{H}(\rho/(\det H_1\det H_2))$. Продолжая этот процесс, получим, что каждая из матриц H_j принадлежит множеству $\mathcal{H}(\rho/\prod_{i=1}^{j-1}\det H_i)$. Кроме того,

$$\Lambda = P_l = F_lH_lF_l^{-1}P_{l-1} = F_lH_lF_l^{-1}F_{l-1}H_{l-1}F_{l-1}^{-1}P_{l-2} = \ldots = \prod_{j=l}^{1}F_jH_jF_j^{-1}.$$

Достаточность. Пусть Λ представима в виде $\Lambda = \prod_{j=l}^{1}F_jH_jF_j^{-1}$, где $H_1\in\mathcal{H}(\rho)$, $H_j\in\mathcal{H}(\rho/\prod_{i=1}^{j-1}\det H_i)$, $j=2,\ldots,l$. Положим

$$P_k = \prod_{j=k}^{1}F_jH_jF_j^{-1}, \quad k=1,\ldots,l.$$

Тогда

$$P_k = F_kH_kF_k^{-1}\prod_{j=k-1}^{1}F_jH_jF_j^{-1} = F_kH_kF_k^{-1}P_{k-1}, \quad k=1,\ldots,l,$$

и

$$\det P_{k-1} = \prod_{j=1}^{k-1}\det(F_jH_jF_j^{-1}) = \prod_{j=1}^{k-1}\det H_j,$$

поэтому $H_k \in \mathcal{H}(\rho/\det P_{k-1})$. Из теоремы 23.2 вытекает ρ-законопослушность пары (P_{k-1}, P_k) относительно базиса $\mathcal{F}_k$ при каждом $k \in \{1,\dots,l\}$. Лемма доказана.

Выясним условия существования ρ-легального маршрута в двумерном пространстве.

Пусть фиксирован базис $\mathcal{F} = \{\xi_1, \xi_2\}$ пространства $\mathbb{R}^2$, F — матрица базиса $\mathcal{F}$, т. е. $F = [\xi_1, \xi_2]$. Возьмем произвольные матрицы $P, R \in \mathrm{M}_2$ и в соответствии с формулами (23.2) построим векторы $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$u_k = (F^{-1})^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}})^* e_k = (R - P)^*(F^{-1})^* e_k, \ k = 1, 2. \tag{25.1}$$

Из (23.3) получаем вид промежуточного шага на пути от P к R в базисе $\mathcal{F}$:

$$S := S_1 = P_{\mathcal{F}} + e_1 e_1^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}}) = E \cdot P_{\mathcal{F}} + e_1 e_1^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}}) =$$

$$= (e_1 e_1^* + e_2 e_2^*) P_{\mathcal{F}} + e_1 e_1^* R_{\mathcal{F}} - e_1 e_1^* P_{\mathcal{F}} = e_1 e_1^* R_{\mathcal{F}} + e_2 e_2^* P_{\mathcal{F}}.$$

Обозначим $\widetilde{S} = P + \xi_1 u_1^*$. Тогда

$$\widetilde{S} = P + F e_1 u_1^* = F(F^{-1} P F + e_1 u_1^* F) F^{-1} =$$

$$= F(P_{\mathcal{F}} + e_1 e_1^*(R_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{F}})) F^{-1} = F S F^{-1}$$

и

$$\det \widetilde{S} = \det S = \det(e_1 e_1^* F^{-1} R F + e_2 e_2^* F^{-1} P F). \tag{25.2}$$

Согласно определению 23.1, пара (P, R) ρ-законопослушна относительно $\mathcal{F}$, если $\det P \geqslant \rho$, $\det R \geqslant \rho$ и $\det S \geqslant \rho$.

Обозначим $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица поворота на угол $-\pi/2$ в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Предложение 25.1 [97]. *Для любой невырожденной 2×2 матрицы F справедливы соотношения*

$$J F^{-1} e_2 = F^* e_1 / \det F, \quad J F^{-1} e_1 = -F^* e_2 / \det F. \tag{25.3}$$

Доказательство. Пусть $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^2$. Имеем равенства

$$J F^{-1} e_2 \cdot \det F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ -f_{21} & f_{11} \end{pmatrix} e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_{12} \\ f_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{pmatrix} = F^* e_1,$$

$$JF^{-1} e_1 \cdot \det F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ -f_{21} & f_{11} \end{pmatrix} e_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{22} \\ -f_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{21} \\ -f_{22} \end{pmatrix} = -F^* e_2,$$

что и требовалось.

Лемма 25.2 [97]. *Для любой матрицы* $\Lambda \in \mathrm{M}_2$ *с положительным определителем и для любых базисов* $\mathcal{F}_i = \{\xi_{2i-1}, \xi_{2i}\}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ *пространства* $\mathbb{R}^2$ *найдется число* $\rho > 0$ *и матрицы* P_1, P_2, $P_3 \in \mathrm{M}_2$, *образующие* ρ*-легальный маршрут от* E *к* Λ *относительно базисов* $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_4$.

Доказательство. Обозначим через F_i матрицу со столбцами ξ_{2i-1}, ξ_{2i}, $i = 1, \ldots, 4$. Пусть $\varkappa(F_i) = \|F_i\| \, \|F_i^{-1}\|$ — спектральное число обусловленности матрицы F_i. Возьмем $f = \max\limits_{i=1,\ldots,4} \varkappa(F_i)$ и положим $h = 2f^4$. Поскольку число обусловленности всякой матрицы F удовлетворяет неравенству $\varkappa(F) \geqslant 1$, для величины h имеем оценку $h \geqslant 2$.

Запишем Λ в произвольном из базисов $\mathcal{F}_i$, полученную матрицу обозначим через $M = \{\mu_{kj}\}_{k,j=1}^2$, тогда $M = F_i^{-1} \Lambda F_i$. Так как определители матриц Λ и M совпадают, то

$$\det \Lambda = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} \leqslant |\mu_{11}| \, |\mu_{22}| + |\mu_{12}| \, |\mu_{21}| \leqslant$$

$$\leqslant \max\{|\mu_{2j}| : \, j = 1, 2\}(|\mu_{11}| + |\mu_{12}|) \leqslant \|M\|(|\mu_{11}| + |\mu_{12}|) \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa(F_i)\|\Lambda\|(|\mu_{11}| + |\mu_{12}|) \leqslant f\|\Lambda\|(|\mu_{11}| + |\mu_{12}|).$$

Пусть $r := \det \Lambda / (2f\|\Lambda\|) = (2f\|\Lambda^{-1}\|)^{-1}$, тогда из предыдущего неравенства получим

$$|\mu_{11}| + |\mu_{12}| \geqslant 2r. \tag{25.4}$$

Возможны следующие 3 случая:

(I). Хотя бы в одном из четырех базисов $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_4$ матрица Λ имеет элемент $\mu_{11} \geqslant r/h$.

(II). В каждом из базисов $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, элемент $\mu_{11} < r/h$, при этом в $\mathcal{F}_4$ справедливо неравенство $\mu_{11} \leqslant -r/h$.

(III). В каждом из базисов $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, элемент $\mu_{11} < r/h$, при этом в $\mathcal{F}_4$ имеет место включение $\mu_{11} \in]-r/h, r/h[$.

Для каждого из этих случаев будет построен набор матриц P_1, P_2, P_3 и найдено число $\rho > 0$, обеспечивающее ρ-законопослушность пар (P_{i-1}, P_i) при всех $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

Рассмотрим подробно случаи (I) – (III).

(I). Пусть $\mathcal{F}_l$ — тот базис, в котором $\mu_{11} \geqslant r/h$. Возьмем $P_j = E$ при $j \in \{1, \ldots, l-1\}$ и $P_j = \Lambda$ при $j \in \{l, \ldots, 3\}$. Для каждой пары (P_{i-1}, P_i), $i = 1, \ldots, 4$, пользуясь (25.1), построим векторы

$$u_{2i-1} = (P_i - P_{i-1})^*(F_i^{-1})^* e_1, \quad u_{2i} = (P_i - P_{i-1})^*(F_i^{-1})^* e_2 \tag{25.5}$$

и матрицы $\widetilde{S}_i = P_{i-1} + \xi_{2i-1} u_{2i-1}^*$, $S_i = F_i^{-1} \widetilde{S} F_i$. Так как при $i \neq l$ имеем равенства $u_{2i-1} = u_{2i} = 0$, то $\widetilde{S}_i = P_{i-1}$, т. е. $\widetilde{S}_i = E$ при $i < l$ и $\widetilde{S}_i = \Lambda$ при $i > l$. Пользуясь (25.2), найдем определитель матрицы S_l:

$$\det S_l = \det(e_1 e_1^* F_l^{-1} \Lambda F_l + e_2 e_2^* F_l^{-1} E F_l) = \det(e_1 e_1^* M + e_2 e_2^* E) = \mu_{11} \geqslant r/h.$$

Возьмем $\rho = \min\{1, \det \Lambda, r/h\}$, тогда получим ρ-законопослушность всех пар (P_{i-1}, P_i), $i = 1, \ldots, 4$.

(II). Положим $P_1 = E + \alpha F_1 J F_1^{-1}$, $P_2 = -E + \alpha F_1 J F_1^{-1}$, $P_3 = -E$; значение величины $\alpha \in \mathbb{R}$ уточним ниже. В соответствии с (25.5) построим векторы u_j, $j = 1, \ldots, 8$, и, используя (25.2), найдем $\det S_i$, $i = 1, \ldots 4$.

а) Для $\det S_1$ справедливы равенства

$$\det S_1 = \det(e_1 e_1^* F_1^{-1}(E + \alpha F_1 J F_1^{-1}) F_1 + e_2 e_2^* F_1^{-1} E F_1) =$$
$$= \det(e_1 e_1^*(E + \alpha J) + e_2 e_2^*) = 1.$$

б) Обозначим $F = F_2^{-1} F_1$, $\Delta_F = e_2^* F F^* e_1$. Тогда, пользуясь (25.3), получим

$$\det S_2 = \det(e_1 e_1^* F_2^{-1}(-E + \alpha F_1 J F_1^{-1}) F_2 + e_2 e_2^* F_2^{-1}(E + \alpha F_1 J F_1^{-1}) F_2) =$$
$$= \det(e_1 e_1^*(-E + \alpha F J F^{-1}) + e_2 e_2^*(E + \alpha F J F^{-1})) =$$
$$= \det(\alpha F J F^{-1}) - \alpha e_2^* F J F^{-1} e_2 + \alpha e_1^* F J F^{-1} e_1 - 1 =$$
$$= \alpha^2 - \alpha e_2^* F F^* e_1 / \det F - \alpha e_1^* F F^* e_2 / \det F - 1 = \alpha^2 - 2\alpha \Delta_F / \det F - 1.$$

Выберем величину α так, чтобы выполнялось равенство $\det S_2 = 1$. Решая уравнение $\alpha^2 - 2\alpha \Delta_F / \det F - 1 = 1$, получим для α два возможных значения:

$$\alpha_{1,2} = \Delta_F / \det F \pm \sqrt{(\Delta_F / \det F)^2 + 2}.$$

для которых имеет место оценка $|\alpha_{1,2}| \leqslant |\Delta_F / \det F| + \sqrt{(\Delta_F/\det F)^2 + 2}$. Так как

$$\left|\frac{\Delta_F}{\det F}\right| \leqslant \frac{\|F^* e_1\| \, \|F^* e_2\|}{|\det F|} \leqslant \frac{\|F^*\|^2}{|\det F|} = \|F\| \, \|F^{-1}\| \leqslant \varkappa(F_1)\varkappa(F_2) \leqslant f^2,$$

то $|\alpha| \leqslant f^2 + \sqrt{f^4+2} \leqslant f^2 + \sqrt{f^4 + 3f^4} = 3f^2$.

в) Пусть $G = F_3^{-1}F_1$, $\Delta_G = e_2^* G G^* e_1$. Тогда

$$\det S_3 = \det(e_1 e_1^* F_3^{-1}(-E)F_3 + e_2 e_2^* F_3^{-1}(-E + \alpha F_1 J F_1^{-1})F_3) =$$
$$= \det(-e_1e_1^* + e_2e_2^*(-E + \alpha GJG^{-1})) = -e_2^*(-E + \alpha GJG^{-1})e_2 =$$
$$= 1 - \alpha e_2^* GJG^{-1} e_2 = 1 - \alpha e_2^* GG^* e_1/\det G = 1 - \alpha\Delta_G/\det G.$$

Возьмем в качестве α ту из величин α_1 и α_2, знак которой противоположен знаку $\Delta_G/\det G$ (если $\Delta_G = 0$, то выберем положительную). Тогда $\det S_3 = 1 + |\alpha| \, |\Delta_G|/|\det G| \geqslant 1$.

г) Для $\det S_4$ имеем равенства

$$\det S_4 = \det(e_1e_1^* F_4^{-1} \Lambda F_4 + e_2 e_2^* F_4^{-1}(-E)F_4) =$$
$$= \det(e_1 e_1^* M - e_2 e_2^*) = -\mu_{11} \geqslant r/h.$$

Кроме того,

$$\det P_1 = \det(F_1(E + \alpha J)F_1^{-1}) = \det(E + \alpha J) = 1 + \alpha^2 \geqslant 1,$$

$$\det P_2 = \det(-E + \alpha J) = 1 + \alpha^2 \geqslant 1, \ \det P_3 = 1, \ \det P_4 = \det\Lambda.$$

Поэтому каждая из пар (P_{i-1}, P_i), $i = 1, \ldots, 4$, является ρ-законопослушной при $\rho = \min\{1, \det\Lambda, r/h\}$.

(III). Возьмем $P_1 = E$, $P_2 = E + \alpha F_2 J F_2^{-1}$, $P_3 = \alpha F_2 J F_2^{-1}$; выбор величины $\alpha \in \mathbb{R}$ уточним ниже. Используя (25.5), построим векторы u_j, $j = 1, \ldots, 8$. Найдем определители матриц S_i, $i = 1, \ldots, 4$.

а) Так как $P_0 = P_1 = E$, то $u_1 = u_2 = 0$, следовательно, $S_1 = E$ и $\det S_1 = 1$.

б) Вычисление $\det S_2$ аналогично вычислению $\det S_1$ в случае (II), поэтому $\det S_2 = 1$.

в) Положим $F = F_3^{-1}F_2$, $\Delta_F = e_2^* F F^* e_1$. Пользуясь (25.3), получим

$$\det S_3 = \det(e_1 e_1^* F_3^{-1}(\alpha F_2 J F_2^{-1})F_3 + e_2 e_2^* F_3^{-1}(E + \alpha F_2 J F_2^{-1})F_3) =$$
$$= \det(e_1 e_1^* \alpha FJF^{-1} + e_2 e_2^*(E + \alpha FJF^{-1})) = \det(e_2 e_2^* + \alpha FJF^{-1}) =$$
$$= \det(\alpha FJF^{-1}) + \alpha e_1^* FJF^{-1} e_1 = \alpha^2 \det(FJF^{-1}) - \alpha e_1^* FF^* e_2/\det F =$$

$$= \alpha^2 - \alpha\Delta_F/\det F.$$

Потребуем $\det S_3 = 1$, тогда для α получим два возможных значения

$$\alpha_{1,2} = \Delta_F/(2\det F) \pm \sqrt{(\Delta_F/(2\det F))^2 + 1}.$$

и оценки

$$|\alpha| \leqslant f^2/2 + \sqrt{f^4/4+1} \leqslant (f^2 + \sqrt{f^4 + 8f^4})/2 = 2f^2,$$

$$|\alpha| \geqslant \sqrt{(\Delta_F/(2\det F))^2 + 1} - |\Delta_F|/(2|\det F|) =$$
$$= (\sqrt{(\Delta_F/(2\det F))^2 + 1} + |\Delta_F|/(2|\det F|))^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant (f^2/2 + \sqrt{f^4/4+1})^{-1} \geqslant (2f^2)^{-1}.$$

г) Обозначим $G = F_4^{-1}F_2$, $\Delta_G = e_2^*GG^*e_1$. Тогда

$$\det S_4 = \det(e_1e_1^*F_4^{-1}\Lambda F_4 + e_2e_2^*F_4^{-1}(\alpha F_2JF_2^{-1})F_4) =$$
$$= \det(e_1e_1^*M + \alpha e_2e_2^*GJG^{-1}) = \mu_{11}\alpha e_2^*GJG^{-1}e_2 - \mu_{12}\alpha e_2^*GJG^{-1}e_1 =$$
$$= \alpha(\mu_{11}e_2^*GG^*e_1/\det G + \mu_{12}e_2^*GG^*e_2/\det G) =$$
$$= \alpha(\mu_{11}\Delta_G + \mu_{12}\|G^*e_2\|^2)/\det G.$$

Так как в рассматриваемом случае $|\mu_{11}| < r/h$, причем $h \geqslant 2$, то из (25.4) следует, что $|\mu_{12}| \geqslant r$. Возьмем в качестве α ту из величин α_1 и α_2, знак которой совпадает со знаком $\mu_{12}/\det G$. Тогда из неравенства $\varkappa(G) \leqslant \varkappa(F_2)\varkappa(F_4) \leqslant f^2$ и оценки снизу для $|\alpha|$ вытекает, что

$$\det S_4 \geqslant |\alpha|(|\mu_{12}|\,\|G^*e_2\|^2 - |\mu_{11}|\,|\Delta_G|)/|\det G| \geqslant$$
$$\geqslant |\alpha|(|\mu_{12}| \min_{\|x\|=1} \|G^*x\|^2 - |\mu_{11}| \max_{\|x\|=1} \|G^*x\|^2)/|\det G| \geqslant$$
$$\geqslant r|\alpha|(\|G^{-1}\|^{-2} - \|G\|^2/h)/|\det G| =$$
$$= r|\alpha|(h - \|G^{-1}\|^2\|G\|^2)/(h|\det G|\,\|G^{-1}\|^2) \geqslant$$
$$\geqslant r|\alpha|(2f^4 - f^4)/(2f^4\|G^{-1}\|^2|\det G|) =$$
$$= r|\alpha|\,|\det G|/(2\|G^{-1}\|\,\|G\|\,|\det G|) =$$
$$= r|\alpha|/(2\|G^{-1}\|\,\|G\|) \geqslant r|\alpha|/(2f^2) \geqslant r/(4f^4).$$

Кроме того,

$$\det P_1 = 1,\ \det P_2 = 1 + \alpha^2 \geqslant 1,$$
$$\det P_3 = \alpha^2 \det J = \alpha^2 \geqslant (4f^4)^{-1},\ \det P_4 = \det\Lambda,$$

поэтому все пары (P_{i-1}, P_i) при $i = 1, \ldots, 4$ являются ρ-законопослушными при $\rho = \min\{\det\Lambda, r/(4f^4), 1/(4f^4)\}$.

Возьмем $\rho = \min\{\det\Lambda, \det\Lambda/(8f^5\|\Lambda\|), 1/(4f^4)\}$. В каждом из трех возможных случаев построен ρ-легальный маршрут от E к Λ. Лемма доказана.

Следствие 25.1 [97]. *Для любых обратимых матриц $F_1, F_2, F_3, F_4 \in \mathrm{M}_2$ и для любой матрицы $\Lambda \in \mathrm{M}_2$ с положительным определителем существуют такие 2×2 матрицы $H_1, H_2, H_3, H_4 \in \mathcal{H}$, что $\Lambda = \prod\limits_{j=4}^{1} F_j H_j F_j^{-1}$.*

Следствие 25.2 [97]. *Для любого $\gamma \geqslant 1$ существуют такие $r > 0$ и $\rho > 0$, что для произвольных обратимых матриц $F_i \in \mathrm{M}_2$, $\|F_i\| \leqslant \gamma$, $\|F_i^{-1}\| \leqslant \gamma$, $i = 1, 2, 3, 4$, и для любой матрицы $\Lambda \in \mathrm{M}_2$ с положительным определителем, $\|\Lambda\| \leqslant \gamma$, $\|\Lambda^{-1}\| \leqslant \gamma$, найдутся 2×2 матрицы $H_i \in \mathcal{H}(r, \rho)$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что*

$$\Lambda = \prod_{j=4}^{1} F_j H_j F_j^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \geqslant 1$. Возьмем любые $F_1, \ldots, F_4 \in \mathrm{M}_2$, такие, что $\|F_i\| \leqslant \gamma$, $\|F_i^{-1}\| \leqslant \gamma$, и произвольную матрицу $\Lambda \in \mathrm{M}_2$ с положительным определителем, $\|\Lambda\| \leqslant \gamma$, $\|\Lambda^{-1}\| \leqslant \gamma$. Тогда

$$\|\Lambda\|^{-1} \leqslant \|\Lambda^{-1}\| \leqslant \gamma, \quad \|\Lambda^{-1}\|^{-1} \leqslant \|\Lambda\| \leqslant \gamma,$$

поэтому

$$\det\Lambda = \frac{\|\Lambda\|}{\|\Lambda^{-1}\|} \leqslant \gamma^2, \quad \det\Lambda \geqslant \frac{1}{\gamma^2}.$$

Для величины $f := \max\limits_i \varkappa(F_i)$ имеем оценку $f \leqslant \gamma^2$.

Пусть $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_4$ — базисы пространства $\mathbb{R}^2$, матрицы которых совпадают с $F_1, \ldots, F_4$. Из леммы 25.2 вытекает существование ρ_0-легального маршрута от E к Λ относительно базисов $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_4$, где $\rho_0 = \min\Big\{\det\Lambda, \dfrac{\det\Lambda}{8f^5\|\Lambda\|}, \dfrac{1}{4f^4}\Big\}$. Поскольку

$$\det\Lambda \geqslant \frac{1}{\gamma^2}, \quad \frac{\det\Lambda}{8f^5\|\Lambda\|} \geqslant \frac{1}{8\gamma^{13}}, \quad \frac{1}{4f^4} \geqslant \frac{1}{4\gamma^8},$$

справедливо неравенство

$$\rho_0 \geqslant \min\Big\{\frac{1}{\gamma^2}, \frac{1}{8\gamma^{13}}, \frac{1}{4\gamma^8}\Big\} = \frac{1}{8\gamma^{13}} =: \rho_1,$$

поэтому построенные при доказательстве леммы 25.2 матрицы P_1, P_2, P_3 в каждом из случаев I – III образует ρ_1-легальный маршрут от E к Λ.

Из леммы 25.1 следует, что $\Lambda = \prod\limits_{j=4}^{1} F_j H_j F_j^{-1}$, где $H_1 \in \mathcal{H}(\rho_1)$, $H_j \in$ $\in \mathcal{H}(\rho_1/\prod\limits_{i=1}^{j-1} \det H_i)$, $j = 2, 3, 4$, при этом $P_j = F_j H_j F_j^{-1} P_{j-1}$, $j = 1, \ldots, 4$, следовательно,

$$H_j = F_j^{-1} P_j P_{j-1}^{-1} F_j, \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Отсюда при каждом $j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\|H_j - E\| \leqslant \|H_j\| + 1 \leqslant \varkappa(F_j) \|P_j P_{j-1}^{-1}\| + 1 \leqslant \gamma^2 \|P_j P_{j-1}^{-1}\| + 1,$$

$$\det H_j = \frac{\det P_j}{\det P_{j-1}}.$$

Найдем зависящие от γ величины r и ρ, такие, что $H_j \in \mathcal{H}(r, \rho)$, $j = 1, \ldots, 4$. Для этого вновь рассмотрим случаи I – III.

I. а) При $j < l$: $P_{j-1} = P_j = E$, поэтому $\|P_j P_{j-1}^{-1}\| = 1$, $\det H_j = 1$.

б) При $j = l$: $P_{l-1} = E$, $P_l = \Lambda$, поэтому $\|P_l P_{l-1}^{-1}\| = \|\Lambda\|$, $\det H_l =$ $= \det \Lambda$.

в) При $j > l$: $P_{j-1} = P_j = \Lambda$, поэтому $\|P_j P_{j-1}^{-1}\| = 1$, $\det H_j = 1$.

Следовательно, в случае I

$$\|H_j - E\| \leqslant \gamma^2 \max\{1, \|\Lambda\|\} + 1 \leqslant \gamma^3 + 1, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\prod_{i=1}^{j-1} \det H_i \leqslant \max\{1, \det \Lambda\} \leqslant \gamma^2, \quad j = 2, 3, 4,$$

т. е.

$$H_j \in \mathcal{H}\Big(\frac{\rho_1}{\gamma^2}\Big) = \mathcal{H}\Big(\frac{1}{8\gamma^{15}}\Big), \quad j = 2, 3, 4,$$

$$H_1 \in \mathcal{H}(\rho_1) \subset \mathcal{H}\Big(\frac{1}{8\gamma^{15}}\Big).$$

II. а) $\det H_1 = \det P_1 = 1 + \alpha^2$,

$$\|P_1 P_0^{-1}\| = \|P_1\| \leqslant 1 + |\alpha| \varkappa(F_1) \|J\| \leqslant 1 + |\alpha| f \leqslant 1 + 3f^3 \leqslant 1 + 3\gamma^6 \leqslant 4\gamma^6.$$

б) $\det H_2 = \dfrac{\det P_2}{\det P_1} = \dfrac{\det(-E + \alpha J)}{\det(E + \alpha J)} = \dfrac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2} = 1$,

$$\|P_2 P_1^{-1}\| \leqslant \|P_2\|\, \|P_1^{-1}\| = \frac{\|P_2\|\, \|P_1\|}{|\det P_1|} \leqslant \frac{(1 + |\alpha| f)^2}{1 + \alpha^2} \leqslant$$

$$\leqslant (1+|\alpha|f)^2 \leqslant (1+3f^3)^2 \leqslant (1+3\gamma^6)^2 \leqslant (4\gamma^6)^2 = 16\gamma^{12}.$$

в) $\det H_2 = \dfrac{\det P_3}{\det P_2} = \dfrac{\det(-E)}{\det(-E+\alpha J)} = \dfrac{1}{1+\alpha^2}\,,$

$$\|P_3P_2^{-1}\| = \|P_2^{-1}\| = \frac{\|P_2\|}{|\det P_2|} \leqslant \frac{1+|\alpha|f}{1+\alpha^2} \leqslant 1+|\alpha|f \leqslant 1+3f^3 \leqslant 1+3\gamma^6 \leqslant 4\gamma^6.$$

г) $\|P_4P_3^{-1}\| = \|P_4\| = \|\Lambda\| \leqslant \gamma\,.$

Таким образом, в случае II

$$\|H_j - E\| \leqslant \gamma^2 \max\{4\gamma^6, 16\gamma^{12}, \gamma\} + 1 = 16\gamma^{14} + 1, \quad j = 1,2,3,4,$$

$$\prod_{i=1}^{j-1} \det H_i \leqslant \max\{1+\alpha^2, 1\} = 1+\alpha^2 \leqslant 1+9f^4 \leqslant 1+9\gamma^8 \leqslant 10\gamma^8, \quad j = 2,3,4,$$

т. е.

$$H_j \in \mathcal{H}\Big(\frac{\rho_1}{10\gamma^8}\Big) = \mathcal{H}\Big(\frac{1}{80\gamma^{21}}\Big), \quad j = 2,3,4,$$

$$H_1 \in \mathcal{H}(\rho_1) \subset \mathcal{H}\Big(\frac{1}{80\gamma^{21}}\Big).$$

III. а) $\det H_1 = \det P_1 = 1\,,$ $\|P_1P_0^{-1}\| = 1\,.$

б) $\det H_2 = \dfrac{\det P_2}{\det P_1} = \det(E+\alpha J) = 1+\alpha^2\,,$

$$\|P_2P_1^{-1}\| = \|P_2\| \leqslant 1 + |\alpha|\varkappa(F_2)\|J\| \leqslant 1+|\alpha|f \leqslant 1+2f^3 \leqslant 1+2\gamma^6 \leqslant 3\gamma^6.$$

в) $\det H_3 = \dfrac{\det P_3}{\det P_2} = \dfrac{\det(\alpha J)}{\det(E+\alpha J)} = \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\,,$

$$\|P_3P_2^{-1}\| \leqslant \|P_3\|\,\|P_2^{-1}\| \leqslant \frac{\|P_2\|\,\|P_3\|}{|\det P_2|} \leqslant \frac{(1+|\alpha|f)|\alpha|f}{1+\alpha^2} \leqslant$$

$$\leqslant (1+|\alpha|f)|\alpha|f \leqslant (1+2f^3)2f^3 \leqslant (1+2\gamma^6)2\gamma^6 \leqslant 3\gamma^6 \cdot 2\gamma^6 = 6\gamma^{12}.$$

г) Так как $P_3^{-1} = \alpha^{-1}F_2J^{-1}F_2^{-1}$, то

$$\|P_4P_3^{-1}\| \leqslant \|P_4\|\,\|P_3^{-1}\| \leqslant \frac{\|\Lambda\|\varkappa(F_2)}{|\alpha|} \leqslant \frac{\|\Lambda\|f}{|\alpha|} \leqslant 2\|\Lambda\|f^3 \leqslant 2\gamma^7.$$

Итак, в случае III

$$\|H_j - E\| \leqslant \gamma^2 \max\{1, 3\gamma^6, 6\gamma^{12}, 2\gamma^7\} + 1 = 16\gamma^{14} + 1, \quad j = 1,2,3,4,$$

$$\prod_{i=1}^{j-1} \det H_i \leqslant \max\{1, 1+\alpha^2, \alpha^2\} = 1+\alpha^2 \leqslant 1+4f^4 \leqslant 5f^4 \leqslant 5\gamma^8, \quad j = 2,3,4,$$

т. е.

$$H_j \in \mathcal{H}\Big(\frac{\rho_1}{5\gamma^8}\Big) = \mathcal{H}\Big(\frac{1}{40\gamma^{21}}\Big), \quad j = 2, 3, 4,$$

$$H_1 \in \mathcal{H}(\rho_1) \subset \mathcal{H}\Big(\frac{1}{40\gamma^{21}}\Big).$$

Таким образом, в каждом из случаев I – III

$$\|H_j - E\| \leqslant \max\{\gamma^3, 16\gamma^{14}\} + 1 = 16\gamma^{14} + 1,$$

$$H_j \in \mathcal{H}\Big(\frac{1}{8\gamma^{15}}\Big) \cap \mathcal{H}\Big(\frac{1}{80\gamma^{21}}\Big) \cap \mathcal{H}\Big(\frac{1}{40\gamma^{21}}\Big) = \mathcal{H}\Big(\frac{1}{80\gamma^{21}}\Big), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

т. е. при $r = 16\gamma^{14} + 1$ и $\rho = \dfrac{1}{80\gamma^{21}}$ справедливы включения $H_j \in \in \mathcal{H}(r, \rho)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 25.1. Пусть система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема. Зафиксируем какие-либо $t_0 \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{N}$. Тогда на каждом из отрезков $[t_0 + (k-1)\vartheta, t_0 + k\vartheta]$, $k = 1, \ldots, l$, существует базис чистых движений $F_k = [Q(t_0 + (k-1)\vartheta, t_1^k)\nu_1^k, \ldots, Q(t_0 + (k-1)\vartheta, t_n^k)\nu_n^k]$, где $t_j^k \in]t_0 + (k-1)\vartheta, t_0 + k\vartheta[$, $\nu_j^k \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_j^k\| = 1$, $j = 1, \ldots, n$, при этом $\|F_k\| \leqslant \sqrt{n} e^{a\vartheta} b$, $\|F_k^{-1}\| \leqslant \alpha$. Рассмотрим матрицы

$$\widetilde{F}_k := X(t_0, t_0 + (k-1)\vartheta) F_k, \quad k = 1, \ldots, l.$$

Для них справедливы равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ оценки

$$\begin{gathered} \|\widetilde{F}_k\| \leqslant e^{a(l-1)\vartheta} \|F_k\| \leqslant \sqrt{n} e^{al\vartheta} b, \\ \|\widetilde{F}_k^{-1}\| \leqslant \|F_k^{-1}\| \, \|X(t_0 + (k-1)\vartheta, t_0)\| \leqslant \alpha e^{a(l-1)\vartheta}. \end{gathered} \tag{25.6}$$

Пусть $r > 0$ и $\rho \in]0, 1]$ фиксированы. В силу теоремы 23.3 для любых матриц $H_k \in \mathcal{H}(r, \rho)$, $k = 1, \ldots, l$, существует такое управление $U(\cdot) \in KC_{mn}([t_0, t_0 + l\vartheta])$, $\|U\|_C \leqslant \beta \max\limits_k \|H_k - E\| \leqslant \beta r$, что

$$X_U(t_0 + k\vartheta, t_0 + (k-1)\vartheta) = X(t_0 + k\vartheta, t_0 + (k-1)\vartheta) F_k H_k F_k^{-1}, \quad k = 1, \ldots, l.$$

Докажем по индукции, что при всех $k \in \{1, \ldots, l\}$

$$X_U(t_0 + k\vartheta, t_0) = X(t_0 + k\vartheta, t_0) \prod_{i=k}^{1} \widetilde{F}_i H_i \widetilde{F}_i^{-1}. \tag{25.7}$$

Действительно, при $k = 1$

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X(t_0 + \vartheta, t_0) F_1 H_1 F_1^{-1} = X(t_0 + \vartheta, t_0) \widetilde{F}_1 H_1 \widetilde{F}_1^{-1}.$$

Пусть (25.7) установлено при $k = j$, где $j \in \{1, \ldots, l-1\}$. Проверим (25.7) для $k = j+1$. Имеют место равенства

$$X_U(t_0 + (j+1)\vartheta, t_0) = X_U(t_0 + (j+1)\vartheta, t_0 + j\vartheta) X_U(t_0 + j\vartheta, t_0) =$$

$$= X(t_0 + (j+1)\vartheta, t_0 + j\vartheta) F_{j+1} H_{j+1} F_{j+1}^{-1} X(t_0 + j\vartheta, t_0) \prod_{i=j}^{1} \widetilde{F}_i H_i \widetilde{F}_i^{-1}.$$

Представим множитель, находящийся слева от F_{j+1}, в виде

$$X(t_0 + (j+1)\vartheta, t_0 + j\vartheta) = X(t_0 + (j+1)\vartheta, t_0) X(t_0, t_0 + j\vartheta),$$

и заметим, что $X(t_0, t_0 + j\vartheta) F_{j+1} = \widetilde{F}_{j+1}$, $F_{j+1}^{-1} X(t_0 + j\vartheta, t_0) = \widetilde{F}_{j+1}^{-1}$. Тогда

$$X_U(t_0 + (j+1)\vartheta, t_0) = X(t_0 + (j+1)\vartheta, t_0) \widetilde{F}_{j+1} H_{j+1} \widetilde{F}_{j+1}^{-1} \prod_{i=j}^{1} \widetilde{F}_i H_i \widetilde{F}_i^{-1} =$$

$$= X(t_0 + (j+1)\vartheta, t_0) \prod_{i=j+1}^{1} \widetilde{F}_i H_i \widetilde{F}_i^{-1}.$$

Таким образом, (25.7) установлено при всех $k \in \{1, \ldots, l\}$. В частности, $X_U(t_0 + l\vartheta, t_0) = X(t_0 + l\vartheta, t_0) \prod\limits_{i=l}^{1} \widetilde{F}_i H_i \widetilde{F}_i^{-1}$.

Теорема 25.1 [96, 97]. *Пусть $n = 2$. Если система* (21.1) *ϑ-равномерно вполне управляема, а матричная функция $B : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{2,m}$ кусочно равномерно непрерывна, то соответствующая замкнутая система* (21.2) *является 4ϑ-равномерно глобально достижимой.*

Доказательство. Возьмем любые $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ и зафиксируем произвольный момент времени t_0. Пусть $H \in \mathrm{M}_2$ — такая матрица, что $\|H\| \leqslant \alpha_0$, $\det H \geqslant \beta_0$. Тогда

$$\|H^{-1}\| = \frac{\|H\|}{\det H} \leqslant \alpha_0 \beta_0^{-1}.$$

На каждом из отрезков $[t_0 + (j-1)\vartheta, t_0 + j\vartheta]$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, построим матрицу базиса чистых движений F_j и обозначим

$$\widetilde{F}_j = X(kT, kT + (j-1)\vartheta) F_j.$$

Из (25.6) следует, что для $\widetilde{F}_j$ справедливы оценки

$$\|\widetilde{F}_j\| \leqslant e^{4a\vartheta} \sqrt{2} b, \quad \|\widetilde{F}_j^{-1}\| \leqslant \alpha e^{3a\vartheta}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Положим

$$\gamma = \max\{\alpha_0, \alpha_0 \beta_0^{-1}, e^{4a\vartheta} \sqrt{2} b, \alpha e^{3a\vartheta}\}.$$

Тогда

$$\|H\| \leqslant \gamma, \ \|H^{-1}\| \leqslant \gamma, \ \|\widetilde{F}_j\| \leqslant \gamma, \ \|\widetilde{F}_j^{-1}\| \leqslant \gamma.$$

В соответствии со следствием 25.2 по найденному $\gamma \geqslant 1$ выберем величины $r > 0$ и $\rho \in]0,1]$ и матрицы $H_j \in \mathcal{H}(r,\rho)$, $j = 1,2,3,4$, такие, что

$$H = \prod_{j=4}^{1} \widetilde{F}_j H_j \widetilde{F}_j^{-1}.$$

В силу замечания 25.1 существует кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0 + 4\vartheta] \to \mathrm{M}_{m,2}$, $\|U\|_C \leqslant \beta r =: l$, такое, что

$$X_U(t_0 + 4\vartheta, t_0) = X(t_0 + 4\vartheta, t_0) \prod_{j=4}^{1} \widetilde{F}_j H_j \widetilde{F}_j^{-1} = X(t_0 + 4\vartheta, t_0) H.$$

Положительная величина l, ограничивающая сверху норму управления, не зависит от выбора t_0 и H, следовательно, система (21.2) обладает свойством 4ϑ-равномерной глобальной достижимости. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 25.3 [96, 97]. *Пусть $n = 2$. Если матричная функция $B : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{2,m}$ кусочно равномерно непрерывна, а система* (21.1) *равномерно вполне управляема, то система* (21.2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теорем 21.3 и 25.1.

§ 26. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа. Управление свойствами правильности, приводимости и устойчивости показателей Ляпунова

В этом параграфе установлено, что для произвольной скалярной функции $p(\cdot)$ и всякой равномерно вполне управляемой системы вида (21.1) можно построить такое матричное управление $U(\cdot)$, что соответствующая замкнутая система (21.2) с этим управлением $U(\cdot)$ асимптотически эквивалентна системе $\dot z = p(t) z$, $z \in \mathbb{R}^n$ (теорема 26.1). Как следствие установлена глобальная управляемость таких ляпуновских инвариантов, как коэффициенты неправильности, правильность, приводимость и устойчивость полного спектра показателей Ляпунова.

Пусть $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная ограниченная кусочно непрерывная функция. Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{z} = p(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{26.1}$$

Матрица Коши $Z(t,s)$ системы (26.1) имеет вид

$$Z(t,s) = E\int\limits_s^t p(\tau)\,d\tau,$$

а для решения $z(\cdot)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$ справедливо представление

$$z(t) = z_0\int\limits_{t_0}^t p(\tau)\,d\tau,$$

следовательно, оно ведет себя как решение скалярного уравнения

$$\dot{\varphi} = p(t)\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

с начальным условием $\varphi(t_0) = 1$. По этой причине системы вида (26.1) будем называть системами скалярного типа. Системы скалярного типа рассматривались М. И. Рахимбердиевым в [144] в связи с вопросами почти приводимости.

Определение 26.1 [140]. Будем говорить, что система (21.2) глобально скаляризуема, если для произвольной наперед заданной кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ скалярной функции $p(\cdot)$ существует такое управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, что система (21.2) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (26.1).

Теорема 26.1 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то система* (21.2) *глобально скаляризуема.*

Доказательство. Пусть система (21.1) ϑ-равномерно вполне управляема. Согласно следствию 23.2 существуют такие невырожденные матрицы F_k, $k \in \mathbb{Z}$, что для любой последовательности верхних треугольных $n \times n$ матриц $\{H_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ с положительными диагональными элементами, такой, что $\sup\{\|H_k\|, \|H_k^{-1}\| : k \in \mathbb{Z}\} < \infty$, найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (21.2) равенства

$$X_U(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = X(k\vartheta, (k-1)\vartheta)F_kH_kF_k^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

причем для $\|F_k\|$ и $\|F_k^{-1}\|$ имеют место равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ оценки $\|F_k\| \leqslant \sqrt{n}be^{a\vartheta}$, $\|F_k^{-1}\| \leqslant \alpha$.

По теореме о QR-разложении [176, с. 139] при всяком $k \in \mathbb{Z}$ для обратимой матрицы $F_{k+1}^{-1} X(k\vartheta,(k-1)\vartheta) F_k$ существуют ортогональная матрица Q_k и верхняя треугольная матрица R_k с положительной диагональю такие, что

$$F_{k+1}^{-1} X(k\vartheta,(k-1)\vartheta) F_k = Q_k R_k.$$

Тогда

$$X(k\vartheta,(k-1)\vartheta) F_k R_k^{-1} F_k^{-1} = F_{k+1} Q_k F_k^{-1}.$$

Поскольку $R_k = Q_k^{-1} F_{k+1}^{-1} X(k\vartheta,(k-1)\vartheta) F_k$, имеем оценки

$$\|R_k\| \leqslant \|Q_k^{-1}\|\,\|F_{k+1}^{-1}\|\,\|X(k\vartheta,(k-1)\vartheta)\|\,\|F_k\| \leqslant \alpha e^{a\vartheta}\sqrt{n} b e^{a\vartheta} = \alpha b\sqrt{n} e^{2a\vartheta},$$

$$\|R_k^{-1}\| \leqslant \|Q_k\|\,\|F_{k+1}\|\,\|X((k-1)\vartheta,k\vartheta)\|\,\|F_k^{-1}\| \leqslant \alpha b\sqrt{n} e^{2a\vartheta}.$$

Возьмем любую ограниченную кусочно непрерывную скалярную функцию $p(\cdot)$, $\gamma := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |p(t)|$, и для произвольных $s,t \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\varphi(t,s) = \exp\int\limits_s^t p(\tau)\,d\tau.$$

Тогда $\varphi(s,t) = \varphi^{-1}(t,s)$, $\varphi(t,s) = \varphi(t,\tau)\varphi(\tau,s)$ и $\varphi(t,s) \leqslant e^{\gamma|t-s|}$ для всех $t,s,\tau \in \mathbb{R}$. Матрица $H_k := R_k^{-1}\varphi(k\vartheta,(k-1)\vartheta)$ — верхняя треугольная с положительными диагональными элементами, причем для $\|H_k\|$ и $\|H_k^{-1}\|$ имеем равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ оценки

$$\|H_k\| \leqslant \|R_k^{-1}\|\varphi(k\vartheta,(k-1)\vartheta) \leqslant \alpha b\sqrt{n} e^{2a\vartheta} e^{\gamma\vartheta} = \alpha b\sqrt{n} e^{(2a+\gamma)\vartheta},$$

$$\|H_k^{-1}\| \leqslant \alpha b\sqrt{n} e^{(2a+\gamma)\vartheta},$$

поэтому существует управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что

$$X_U(k\vartheta,(k-1)\vartheta) = X(k\vartheta,(k-1)\vartheta) F_k H_k F_k^{-1} =$$

$$= X(k\vartheta,(k-1)\vartheta) F_k R_k^{-1} F_k^{-1} \varphi(k\vartheta,(k-1)\vartheta) = F_{k+1} Q_k F_k^{-1} \varphi(k\vartheta,(k-1)\vartheta)$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$. Перемножая эти матрицы, при каждом $k \in \mathbb{Z}$ получим

$$X_U(k\vartheta,0) = X_U(k\vartheta,(k-1)\vartheta) X_U((k-1)\vartheta,(k-2)\vartheta)\ldots X_U(\vartheta,0) =$$

$$= (F_{k+1} Q_k F_k^{-1})(F_k Q_{k-1} F_{k-1}^{-1})\ldots(F_2 Q_1 F_1^{-1}) \times$$

$$\times \varphi(k\vartheta,(k-1)\vartheta)\varphi((k-1)\vartheta,(k-2)\vartheta)\ldots\varphi(\vartheta,0) =$$

$$= F_{k+1} Q_k Q_{k-1}\ldots Q_1 F_1^{-1}\varphi(k\vartheta,0) =: F_{k+1}\widetilde{Q}_k F_1^{-1}\varphi(k\vartheta,0),$$

где $\widetilde{Q}_k$ ортогональна как произведение ортогональных матриц.

Докажем, что $L(t) := X_U(t,0)\varphi(0,t)$ — матрица Ляпунова. Действительно, при каждом $k \in \mathbb{Z}$ и всех $t \in [(k-1)\vartheta, k\vartheta]$ справедливы оценки

$$\|L(t)\| = \|X_U(t,k\vartheta)X_U(k\vartheta,0)\varphi(0,t)\| \leqslant \|X_U(t,k\vartheta)\|\,\|X_U(k\vartheta,0)\|\varphi(0,t) \leqslant$$
$$\leqslant \exp((a+b\|U\|_C)\vartheta)\|F_{k+1}\|\,\|\widetilde{Q}_k\|\,\|F_1^{-1}\|\varphi(k\vartheta,0)\varphi(0,t) \leqslant$$
$$\leqslant \exp((a+b\|U\|_C)\vartheta)\alpha b\sqrt{n}e^{a\vartheta}\varphi(k\vartheta,t) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha b\sqrt{n}\exp((2a+b\|U\|_C+\|p\|_C)\vartheta) =: l,$$
$$\|L^{-1}(t)\| = \|X_U(0,k\vartheta)X_U(k\vartheta,t)\varphi(t,0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F_{k+1}^{-1}\|\,\|\widetilde{Q}_k^{-1}\|\,\|F_1\|\varphi(0,k\vartheta)\exp((a+b\|U\|_C)\vartheta)\varphi(t,0) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha b\sqrt{n}e^{a\vartheta}\exp((a+b\|U\|_C)\vartheta)\varphi(t,k\vartheta) \leqslant l,$$

следовательно, $\|L\|_C \leqslant l < \infty$, $\|L^{-1}\|_C \leqslant l < \infty$. Кроме того,

$$\dot{L}(t) = \dot{X}_U(t,0)\varphi(0,t) + X_U(t,0)\dot{\varphi}(0,t) = (A(t)+B(t)U(t)-p(t)E)L(t),$$

поэтому $\|\dot{L}\|_C \leqslant (a+b\|U\|_C+\gamma)\|L\|_C < \infty$.

Применим ляпуновское преобразование $x = L(t)z$ к системе (21.2) с $U = U(\cdot)$. Тогда

$$\dot{z} = (L^{-1}(t)x)^{\cdot} = -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)x + L^{-1}(t)\dot{x} =$$
$$= -L^{-1}(t)(A(t)+B(t)U(t)-p(t)E)x + L^{-1}(t)(A(t)+B(t)U(t))x =$$
$$= L^{-1}(t)p(t)x = p(t)z.$$

Таким образом, системы (26.1) и (21.2) при $U = U(\cdot)$ асимптотически эквивалентны. Теорема доказана.

Следствие 26.1. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то существует управление* $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ *такое, что система* (21.2) *с этим управлением асимптотически эквивалентна системе* $\dot{z} = 0$, $z \in \mathbb{R}^n$.

На основании теоремы 26.1 удается доказать глобальную управляемость некоторых инвариантов преобразований Ляпунова системы (21.2).

Теорема 26.2 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то система* (21.2) *обладает свойством глобальной управляемости коэффициента неправильности Ляпунова* (*Перрона, Гробмана*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного числа $\gamma \geqslant 0$ рассмотрим систему (26.1) с непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функцией

$$p(t) = \gamma(\sin\ln(|t|+1) + \cos\ln(|t|+1) + 1)/2.$$

Поскольку $\overline{p} = \gamma$, $\underline{p} = 0$ [18, с. 77–78], полный спектр показателей Ляпунова системы (26.1) состоит из чисел $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \overline{p} = \gamma$, а полный спектр сопряженной системы $\dot{\xi} = -p(t)\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, — из чисел $\mu_1 = \ldots = \mu_n = \overline{(-p)} = -\underline{p} = 0$. Следовательно, коэффициент неправильности Ляпунова системы (26.1) равен

$$\sigma_{\text{Л}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^t \mathrm{Sp}(p(s)E)\,ds = n\gamma - n\underline{p} = n\gamma,$$

а коэффициент неправильности Перрона

$$\sigma_{\text{П}} := \max\{\lambda_i + \mu_i : i = 1, \ldots, n\} = \gamma.$$

Матрица $Z(t) = E\exp\int_0^t p(s)\,ds$ является нормальной фундаментальной матрицей системы (26.1), показатель Ляпунова i-й строки матрицы $Z^{-1}(t) = E\exp\Bigl(-\int_0^t p(s)\,ds\Bigr)$ совпадает с

$$\delta_i = \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^t (-p(s)\,ds) = \overline{(-p)} = 0.$$

Отсюда вытекает, что коэффициент неправильности Гробмана равен

$$\sigma_{\text{Г}} := \max\{\lambda_i + \delta_i : i = 1, \ldots, n\} = \gamma.$$

Пользуясь теоремой 26.1, построим управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы (21.2) и системы (26.1) с выбранной функцией $p(\cdot)$. Тогда $\sigma_{\text{Л}}(A+BU) = n\gamma$, $\sigma_{\text{П}}(A+BU) = \gamma$, $\sigma_{\text{Г}}(A+BU) = \gamma$. В силу произвольности $\gamma \geqslant 0$ имеем требуемое. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 26.2 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то система* (21.2) *обладает свойством глобальной управляемости правильности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теоремы 26.2 с учетом того факта, что правильность системы равносильна равенству нулю коэффициента неправильности Ляпунова.

Следствие 26.3 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то система* (21.2) *обладает свойством глобальной управляемости приводимости.*

Доказательство. Существование управления $U(\cdot)$, при котором система (21.2) приводима, вытекает из следствия 26.1. Из следствия 26.2 получаем существование $U(\cdot)$ такого, что при $U = U(\cdot)$ система (21.2) неправильна, и по этой причине неприводима.

Замечание 26.1. Задачи управления правильностью и приводимостью систем вида (21.2) в случае гладких коэффициентов рассматривались Е. Я. Смирновым в [164, с. 33] и И. В. Гайшуном в [30, с. 310–311].

Лемма 26.1 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то найдется управление* $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ *такое, что система* (21.2) *при* $U = U(\cdot)$ *имеет неустойчивые показатели Ляпунова.*

Доказательство. Если показатели Ляпунова однородной системы (21.3) неустойчивы, то полагаем $U(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

Пусть (21.3) имеет устойчивые показатели. Пользуясь следствием 26.1, построим управление $U_1(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (21.2) с $U = U_1(\cdot)$ некоторым преобразованием Ляпунова $y = L(t)x$ приводится к системе $\dot{y} = 0$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\dot{y} = \dot{L}(t)x + L(t)\dot{x} = (\dot{L}(t)L^{-1}(t) + L(t)(A(t) + B(t)U_1(t))L^{-1}(t))y = 0,$$

поэтому

$$L^{-1}(t)\dot{L}(t) = -(A(t) + B(t)U_1(t)). \tag{26.2}$$

Это же преобразование приводит систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x + B(t)u$$

к системе

$$\dot{y} = L(t)B(t)u,$$

которая равномерно вполне управляема согласно теоремам 1.2 и 1.3. Применяя к этой системе теорему 11.5, найдем положительные величины δ и l. Пусть $P(t) = \operatorname{diag}(\delta \sin \pi\sqrt{|t|}, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{M}_n$. Поскольку $\|P\|_C = \delta$, найдется управление $V(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|V\|_C \leqslant l\delta$, такое, что системы

$$\dot{z} = P(t)z \tag{26.3}$$

и

$$\dot{y} = L(t)B(t)V(t)y \tag{26.4}$$

асимптотически эквивалентны. Так как для системы (26.3) справедливы соотношения $\lambda_1(P) = \ldots = \lambda_n(P) = 0$, $\Omega(P) = \delta/\pi > 0$ [18, с. 113], из критерия устойчивости показателей (В. М. Миллионщиков [109], Б. Ф. Былов, Н. А. Изобов [19]) вытекает неустойчивость показателей Ляпунова системы (26.3) и, следовательно, системы (26.4). К (26.4) применим обратное преобразование $y = L(t)x$, тогда с учетом (26.2) получим

$$\dot{x} = (L^{-1}(t)y)^{\cdot} = -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)y + L^{-1}(t)\dot{y} =$$

$$= -L^{-1}(t)\dot{L}(t)x + L^{-1}(t)L(t)B(t)V(t)y =$$

$$= (A(t) + B(t)U_1(t))x + B(t)V(t)L(t)x = (A(t) + B(t)(U_1(t) + V(t)L(t)))x.$$

Положим $U(t) = U_1(t) + V(t)L(t)$. Система (21.2) с $U = U(\cdot)$ асимптотически эквивалентна системе (26.4), поэтому ее показатели Ляпунова неустойчивы. Лемма доказана.

Теорема 26.3 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то система* (21.2) *обладает свойством глобальной управляемости устойчивости показателей Ляпунова.*

Доказательство. Так как показатели Ляпунова системы с нулевой матрицей устойчивы, то существование управления $U(\cdot)$, обеспечивающего устойчивость показателей системы (21.2), вытекает из следствия 26.1. Построение управления $U(\cdot)$, при котором система (21.2) обладает неустойчивыми показателями, осуществляется на основании леммы 26.1.

§ 27. Глобальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова, центральных, особых и экспоненциальных показателей

Здесь доказана глобальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова, а также тех ляпуновских инвариантов, которые для треугольных систем определяются системами их диагонального приближения. К этим инвариантам относятся, в частности, центральные показатели Р. Э. Винограда и В. М. Миллионщикова, особые показатели П. Боля и экспоненциальные показатели Н. А. Изобова.

Лемма 27.1 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то для любых непрерывных и ограниченных функций* $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *существует управление* $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ *такое, что замкнутая система* (21.2) *при* $U = U(\cdot)$ *асимптотически эквивалентна системе с верхней треугольной кусочно непрерывной и ограниченной на* $\mathbb{R}$ *матрицей, диагональ которой совпадает с* $(p_1(\cdot), \ldots, p_n(\cdot))$.

Доказательство. Возьмем произвольные непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ скалярные функции $p_1(\cdot), \ldots, p_n(\cdot)$; $\gamma := \max\limits_{i=1,\ldots,n} \|p_i\|_C$. Пусть $\vartheta > 0$ — число, обеспечивающее ϑ-равномерную полную управляемость системы (21.1). Пользуясь теоремой 26.1, построим такое управление $U_1(\cdot)$, что система (21.2) с $U = U_1(\cdot)$ некоторым ляпуновским преобразованием $y = L(t)x$ приводится к системе

$$\dot{y} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Это же преобразование приводит систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x + B(t)u$$

к системе

$$\dot{y} = L(t)B(t)u, \tag{27.1}$$

которая ϑ-равномерно вполне управляема в силу теорем 1.2 и 1.3. Матрица при управлении в этой системе кусочно равномерно непрерывна, так как $L(\cdot)$ равномерно непрерывна. Применим к системе (27.1) следствие 23.2, тогда получим существование таких невырожденных матриц

F_k, $k \in \mathbb{Z}$, что для любых последовательностей $n\times n$ матриц с положительными диагональными элементами, нижних треугольных $\{L_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и верхних треугольных $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, таких, что

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\{\|L_k\|, \|L_k^{-1}\|, \|G_k\|, \|G_k^{-1}\|\} < \infty,$$

найдется управление $V(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, обеспечивающее для матрицы Коши $Y_V(t,s)$ замкнутой системы (26.4) равенство

$$Y_V(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = F_k L_k G_k F_k^{-1}.$$

Из замечания 23.1 следуют равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ оценки $\|F_k\| \leqslant f$, $\|F_k^{-1}\| \leqslant f$, где $f > 0$. В соответствии с теоремой о QR-разложении представим F_k в виде $F_k = R_k Q_k$, где R_k верхняя треугольная, а Q_k — ортогональная матрица. Тогда при каждом $k \in \mathbb{Z}$

$$\|R_k\| = \|F_k Q_k^{-1}\| \leqslant \|F_k\| \leqslant f, \quad \|R_k^{-1}\| = \|Q_k F_k^{-1}\| \leqslant \|F_k^{-1}\| \leqslant f.$$

Обозначим

$$D_k = \operatorname{diag}\Big(\exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} p_1(\tau)\,d\tau\Big), \ldots, \exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} p_n(\tau)\,d\tau\Big)\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Применим теорему о QR-разложении к матрице $D_k Q_k$, получим представление $D_k Q_k = \widetilde{Q}_k \widetilde{R}_k$, где $\widetilde{Q}_k$ ортогональная, а $\widetilde{R}_k$ — верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами. Тогда при каждом $k \in \mathbb{Z}$

$$\|\widetilde{R}_k\| = \|\widetilde{Q}_k^{-1} D_k Q_k\| \leqslant \|D_k\| = \max_{i=1,\ldots,n} \exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} p_i(\tau)\,d\tau\Big) \leqslant \exp(\frac{1}{2}\gamma\vartheta),$$

$$\|\widetilde{R}_k^{-1}\| = \|Q_k^{-1} D_k^{-1} \widetilde{Q}_k\| \leqslant \|D_k^{-1}\| = \max_{i=1,\ldots,n} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} p_i(\tau)\,d\tau\Big) \leqslant \exp(\frac{1}{2}\gamma\vartheta).$$

Итак, $\{\widetilde{R}_k^*\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widetilde{R}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — это последовательности соответственно нижних треугольных и верхних треугольных $n \times n$ матриц, такие, что $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\{\|\widetilde{R}_k^*\|, \|(\widetilde{R}_k^*)^{-1}\|, \|\widetilde{R}_k\|, \|\widetilde{R}_k^{-1}\|\} \leqslant \exp(\gamma\vartheta/2) < \infty$. Из следствия 23.2 вытекает существование управления $V(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, обеспечивающего при каждом $k \in \mathbb{Z}$ выполнение равенств

$$Y_V(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = F_k \widetilde{R}_k^* \widetilde{R}_k F_k^{-1} = F_k \widetilde{R}_k^* \widetilde{Q}_k^* \widetilde{Q}_k \widetilde{R}_k F_k^{-1} = F_k Q_k^* D_k^* D_k Q_k F_k^{-1} =$$

$$= F_k Q_k^* D_k^2 Q_k F_k^{-1} = R_k Q_k Q_k^* D_k^2 Q_k Q_k^{-1} R_k^{-1} = R_k D_k^2 R_k^{-1}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{27.2}$$

где

$$C(t) := R_k \operatorname{diag}(p_1(t), \ldots, p_n(t)) R_k^{-1}, \quad t \in [(k-1)\vartheta, k\vartheta[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Функция $t \mapsto C(t)$ кусочно непрерывна и ограничена, так как

$$\|C(t)\| \leqslant \|R_k\| \, \|R_k^{-1}\| \gamma \leqslant f^2 \gamma, \quad t \in \mathbb{R}.$$

При каждом $t \in \mathbb{R}$ матрица коэффициентов $C(t)$ верхняя треугольная с диагональю $(p_1(t), \ldots, p_n(t))$.

На $](k-1)\vartheta, k\vartheta[$ к системе (27.2) с выбранной $C(\cdot)$ применим постоянное преобразование $\eta = R_k^{-1} z$. Тогда

$$\dot{\eta} = \operatorname{diag}(p_1(t), \ldots, p_n(t)) \eta, \tag{27.3}$$

поэтому матрица Коши $\eta(t,s)$ системы (27.3) при всех $t, s \in](k-1)\vartheta, k\vartheta[$ имеет вид

$$\eta(t,s) = \operatorname{diag}\Big(\exp \int_s^t p_1(\tau)\, d\tau, \ldots, \exp \int_s^t p_n(\tau)\, d\tau\Big).$$

Так как матрицы Коши $Z(t,s)$ и $\eta(t,s)$ систем (27.2) и (27.3) связаны соотношением

$$Z(t,s) = R_k \eta(t,s) R_k^{-1}, \quad t, s \in](k-1)\vartheta, k\vartheta[,$$

то предельным переходом при $s \to (k-1)\vartheta + 0$ и $t \to k\vartheta - 0$ получаем равенство

$$Z(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = R_k \operatorname{diag}\Big(\exp \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} p_1(\tau)\, d\tau, \ldots, \exp \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} p_n(\tau)\, d\tau\Big) R_k^{-1} =$$

$$= R_k D_k^2 R_k^{-1} = Y_V(k\vartheta, (k-1)\vartheta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Это равенство означает (Е. К. Макаров, [90]), что системы (27.2) и (26.4) асимптотически эквивалентны.

Применим к системе (26.4) обратное ляпуновское преобразование $y = L(t)x$, получим систему (21.2) с $U = U(t) := U_1(t) + V(t)L(t)$, асимптотически эквивалентную системе (27.2). Теорема доказана.

Докажем утверждения о глобальной управляемости центральных, особых и экспоненциальных показателей. Формулы верхнего центрального показателя Р. Э. Винограда $\Omega(A)$, младшего центрального показателя В. М. Миллионщикова $\overline{\omega}(A)$ и экспоненциальных показателей Н. А. Изобова $\Delta_0(A)$, $\nabla_0(A)$ и роль этих показателей в асимптотической теории линейных систем описаны во введении (см. с. 14 – 16). Нижний центральный показатель $\underline{\omega}(A)$ Р. Э. Винограда (см. с. 14) служит достижимой нижней границей показателей Перрона системы (21.3) при малых возмущениях. Верхний особый показатель $\Omega^0(A)$ (см. с. 14, теорему 23.4 и замечание 23.3) — достижимая верхняя граница верхних показателей Боля. Нижний особый и младший особый показатели

$$\omega_0(A) := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\inf_k \ln\|X(kT,(k+1)T)\|^{-1},$$

$$\omega^0(A) := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sup_k \ln\|X(kT,(k+1)T)\|^{-1}$$

— достижимые нижние границы соответственно нижнего и верхнего показателей Боля.

Т е о р е м а 27.1 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то центральные показатели* $\underline{\omega}$, $\overline{\omega}$ *и* Ω *системы* (21.2) *одновременно глобально управляемы, т. е. для любых чисел* $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ *существует управление* $U(\cdot)\in KC_{mn}(\mathbb{R})$ *такое, что система* (21.2) *при* $U=U(\cdot)$ *имеет своими центральными показателями числа* $\underline{\omega}(A+BU)=\alpha$, $\overline{\omega}(A+BU)=\beta$, $\Omega(A+BU)=\gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любые числа $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ и положим

$$p_1(t)=\alpha+(\beta-\alpha)(\sin\ln(|t|+1)+\cos\ln(|t|+1)+1)/2,$$

$$p_2(t)=\ldots=p_n(t)\equiv\gamma.$$

Тогда $\underline{p_1}=\alpha$, $\overline{p_1}=\beta$ [18, с. 77 – 78]. Пользуясь леммой 27.1, построим такое управление $U(\cdot)$, что система (21.2) при $U=U(\cdot)$ асимптотически эквивалентна системе (21.7), матрица $C(t)$ которой при каждом $t\in\mathbb{R}$ — верхняя треугольная с диагональю $(p_1(t),\ldots,p_n(t))$. Пусть $\eta(t,s)$ — матрица Коши системы (27.3) с выбранными функциями $p_i(\cdot)$, $i=1,\ldots,n$. Поскольку центральные показатели всякой треугольной системы совпадают с центральными показателями системы ее диагонального приближения [18, с. 120 – 121] и являются ляпуновскими инвариантами [18, с. 117 – 118], справедливы равенства (см. [18, с. 116–117, 537])

$$\underline{\omega}(A+BU)=\underline{\omega}(C)=\underline{\omega}\Big(\operatorname{diag}(p_1(\cdot),\ldots,p_n(\cdot))\Big)=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^{k}\ln\|\eta((i-1)T,iT)\|^{-1}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^{k}\ln\Big(\exp\int\limits_{iT}^{(i-1)T}p_1(s)\,ds\Big)^{-1}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{(i-1)T}^{iT}p_1(s)\,ds=\lim_{T\to\infty}\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\int\limits_{0}^{kT}p_1(s)\,ds=\underline{p_1}=\alpha;$$

$$\overline{\omega}(A+BU)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^{k}\ln\|\eta((i-1)T,iT)\|^{-1}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^{k}\ln\Big(\exp\int\limits_{iT}^{(i-1)T}p_1(s)\,ds\Big)^{-1}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{(i-1)T}^{iT}p_1(s)\,ds=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\int\limits_{0}^{kT}p_1(s)\,ds=\overline{p_1}=\beta;$$

$$\Omega(A+BU)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^{k}\ln\|\eta(iT,(i-1)T)\|=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\int\limits_{0}^{kT}p_n(s)\,ds=\overline{p_n}=\gamma.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 27.2 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то особые показатели* $\omega_0(A+BU)$, $\omega^0(A+BU)$ *и* $\Omega^0(A+BU)$ *системы* (21.2) *одновременно глобально управляемы.*

Т е о р е м а 27.3 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то экспоненциальные показатели* $\Delta_0(A+BU)$ *и* $\nabla_0(A+BU)$ *системы* (21.2) *одновременно глобально управляемы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 27.2 и 27.3 аналогично доказательству теоремы 27.1. Совпадение экспоненциальных показателей всякой треугольной системы с экспоненциальными показателями системы ее диагонального приближения следует из работы А. М. Нурматова [114].

Докажем теперь глобальную управляемость полного спектра показателей Ляпунова.

Т е о р е м а 27.4 [140]. *Если система* (21.1) *равномерно вполне управляема,* $B(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна, то для любых чисел* $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ *существует управление* $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ *такое, что система* (21.2) *при* $U = U(\cdot)$ *правильна и имеет своим полным спектром показателей Ляпунова набор* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные числа $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. В соответствии с леммой 27.1 построим управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (21.2) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (21.7) с кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ матрицей $C(\cdot)$, диагональ которой совпадает с $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. В силу теоремы Ляпунова о правильности треугольной системы [18, с. 141] эта система правильна, а ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Следовательно, система (21.2) с построенным $U(\cdot)$ правильна и имеет своим полным спектром показателей Ляпунова набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

В заключение рассмотрим вопрос о необходимости условия равномерной полной управляемости для глобальной управляемости показателей Ляпунова. С этой целью рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{27.4}$$

с равномерно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами. Систему (27.4) отождествим с функцией $t \mapsto \sigma_0(t) := (A_0(t), B_0(t)) \in \in \mathrm{M}_{n,n+m}$. Обозначим $\sigma_\tau(t) := \sigma_0(t+\tau)$ — сдвиг σ_0 на τ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ — замыкание (в топологии равномерной сходимости на отрезках) множества $\{\sigma_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ в том и только том случае, когда существует последовательность моментов времени $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $K(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство $\max\limits_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} \|\sigma(t) - \sigma_{\tau_k}(t)\| < \varepsilon$. Метрика в $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ задается равенством

$$\rho(\sigma, \widehat{\sigma}) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \min\{\|\sigma(t) - \widehat{\sigma}(t)\|, |t|^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{R}(\sigma_0), \rho)$ компактно [112, с. 533].

Т е о р е м а 27.5. *Система* σ_0 *равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда для каждой системы* $\sigma(\cdot) = (A(\cdot), B(\cdot)) \in$

$\in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ *соответствующая ей замкнутая система*

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x \tag{27.5}$$

обладает свойством глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Доказательство. Необходимость. Пусть система σ_0 равномерно вполне управляема. Рассмотрим произвольную систему $\sigma(\cdot) = (A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$. Она также является равномерно вполне управляемой (Е. Л. Тонков, [173], теорема 2.1), а ее коэффициенты равномерно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. В силу теоремы 27.4 замкнутая система (27.5), отвечающая системе $\sigma(\cdot)$, обладает свойством глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Достаточность доказывается аналогично доказательству достаточности теоремы Тонкова об эквивалентности равномерной полной управляемости и равномерной стабилизируемости системы (27.4) (Е. Л. Тонков, [173], теорема 15.1).

Приведем пример, показывающий, что из глобальной управляемости показателей Ляпунова замкнутой системы (27.5) в общем случае не следует равномерная полная управляемость системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ t \in \mathbb{R}.$$

Пример 27.1. Определим последовательность моментов времени $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ рекуррентно равенствами

$$t_1 = 1, \quad t_{2m} = mt_{2m-1}, \quad t_{2m+1} = m + t_{2m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{t_k\}$ строго возрастает к $+\infty$, начиная с номера $k = 2$, при этом

$$\lim_{m\to\infty} \frac{t_{2m-1}}{t_{2m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{t_{2m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{t_{2m-1}} = 0.$$

Положим

$$b(t) = \begin{cases} 1, & t \in]-\infty, 2[, \\ 1, & t \in [t_{2m-1}, t_{2m}[, \\ 0, & t \in [t_{2m}, t_{2m+1}[, \end{cases}$$

где $m = 2, 3, \ldots$, и рассмотрим скалярное линейное управляемое уравнение

$$\dot{x} = b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}, \ u \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{27.6}$$

Уравнение (27.6) не является равномерно вполне управляемым, так как для каждого $\vartheta > 0$ существует номер $m := [\vartheta] + 1$ такой, что оператор управляемости уравнения (27.6) на отрезке $[t_{2m}, t_{2m} + \vartheta]$ — нулевой:

$$0 \leqslant W(t_{2m}, t_{2m} + \vartheta) = \int\limits_{t_{2m}}^{t_{2m}+\vartheta} b^2(s)\,ds \leqslant \int\limits_{t_{2m}}^{t_{2m}+m} b^2(s)\,ds = \int\limits_{t_{2m}}^{t_{2m+1}} b^2(s)\,ds = 0.$$

Замкнутое уравнение, отвечающее (27.6), имеет вид

$$\dot{x} = b(t)ux, \quad x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}. \tag{27.7}$$

Покажем, что это уравнение обладает свойством пропорциональной глобальной управляемости показателя Ляпунова.

Возьмем произвольное значение $\alpha \in \mathbb{R}$ и положим $u(t) \equiv \alpha$, $t \in \mathbb{R}$. Показатель Ляпунова любого нетривиального решения уравнения (27.7) с выбранным $u(\cdot)$ совпадает с верхним средним значением функции $\alpha b(\cdot)$. Эта фунция кусочно постоянна, поэтому для нахождения ее верхнего среднего значения достаточно заставлять пробегать t лишь значения t_k [18, с. 148 – 149]. Найдем $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{t_{2m}} \int\limits_0^{t_{2m}} \alpha b(s)\,ds$ и $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{t_{2m+1}} \int\limits_0^{t_{2m+1}} \alpha b(s)\,ds$.

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{t_{2m}} \int\limits_0^{t_{2m}} \alpha b(s)\,ds =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{t_{2m} - t_{2m-1}} \cdot \frac{t_{2m} - t_{2m-1}}{t_{2m}} \Bigl(\int\limits_0^{t_{2m-1}} \alpha b(s)\,ds + \int\limits_{t_{2m-1}}^{t_{2m}} \alpha b(s)\,ds \Bigr) =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{t_{2m} - t_{2m-1}} \Bigl(\int\limits_0^{t_{2m-1}} \alpha b(s)\,ds + \int\limits_{t_{2m-1}}^{t_{2m}} \alpha\,ds \Bigr) =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\alpha}{t_{2m} - t_{2m-1}} \int\limits_0^{t_{2m-1}} b(s)\,ds + \alpha = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\alpha}{(m-1)t_{2m-1}} \int\limits_0^{t_{2m-1}} b(s)\,ds + \alpha = \alpha;$$

последнее равенство здесь следует из оценок

$$0 \leqslant \frac{1}{t_{2m-1}} \int\limits_0^{t_{2m-1}} b(s)\,ds \leqslant \frac{1}{t_{2m-1}} \int\limits_0^{t_{2m-1}} ds = 1,$$

из которых вытекает также и то, что в действительности вычисленный верхний предел является точным.

С другой стороны,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{t_{2m+1}} \int\limits_0^{t_{2m+1}} \alpha b(s)\,ds = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m+t_{2m}} \Big(\int\limits_0^{t_{2m}} \alpha b(s)\,ds + \int\limits_{t_{2m}}^{t_{2m+1}} \alpha b(s)\,ds \Big) =$$

$$= \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m+t_{2m}} \int\limits_0^{t_{2m}} \alpha b(s)\,ds = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m/t_{2m}+1} \cdot \frac{1}{t_{2m}} \int\limits_0^{t_{2m}} \alpha b(s)\,ds =$$

$$= \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{t_{2m}} \int\limits_0^{t_{2m}} \alpha b(s)\,ds = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{t_{2m}} \int\limits_0^{t_{2m}} \alpha b(s)\,ds = \alpha.$$

Таким образом, существует точный предел $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^{t} \alpha b(s)\,ds = \alpha$, поэтому уравнение (27.7) с выбранным управлением $u(\cdot)$ правильно и имеет показатель Ляпунова α.

Так как свободное уравнение для (27.6) имеет вид $\dot{x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, показатель которого равен 0, а для нормы управления $u(\cdot)$ справедливо равенство $\sup\{|u(t)| : t \in \mathbb{R}\} = |\alpha|$, то уравнение (27.7) обладает свойством пропорциональной глобальной управляемости показателя Ляпунова (и, следовательно, пропорциональной локальной управляемости показателя).

Отметим, что функцию $b(\cdot)$ в рассмотренном примере можно сконструировать равномерно непрерывной, положив, например,

$$b(t) = \begin{cases} 1, & t \in]-\infty, 2[, \\ 1, & t \in [t_{2m-1}, t_{2m}[, \\ 0, & t \in [t_{2m}+1/2, t_{2m+1}-1/2[, \end{cases}$$

$m = 2, 3, \ldots$, и доопределить ее линейно на промежутках $[t_{2m}, t_{2m}+1/2[$ и $[t_{2m+1}-1/2, t_{2m+1}[$ так, чтобы она была непрерывна.

Список литературы

1. **Адрианова Л. Я.** Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений: Учеб. пособие.— С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1992.— 240 с.

2. **Альбрехт Э. Г.** Об оптимальной стабилизации нелинейных систем // Прикл. матем. и мех.— 1961. — Т. 25, вып. 5.— С. 836 – 844.

3. **Андреев Ю. Н.** Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами (Обзор зарубежной литературы) // Автоматика и телемеханика.— 1977. — Ґ 3.— С. 5 – 50.

4. **Аносов Д. В.** Гладкие динамические системы. Исходные понятия // Итоги науки и техники. Динамические системы–1.— М.: ВИНИТИ, 1985.— Т. 1.— С. 151 – 178.

5. **Астровский А. И., Гайшун И. В.** Управляемость линейных нестационарных систем в классе обобщенных функций конечного порядка // Изв. РАН. Теория и системы управления.— 1998. — Ґ 2.— С. 24 – 30.

6. **Барабанов Е. А.** О крайних показателях Ляпунова линейных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях // Дифференц. уравнения.— 1984. — Т. 20, Ґ 2.— С. 357.

7. **Барабанов Е. А.** Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях: Автореферат дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. / Бел. гос. ун-т.— Минск, 1984.— 14 с.

8. **Барабанов Е. А., Вишневская О. Г.** Точные границы показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы с интегрально ограниченными на полуоси возмущениями // Докл. АН Беларуси. — 1997. — Т. 41, Ґ 5.— С. 29 – 34.

9. **Беклемишев Д. В.** Дополнительные главы линейной алгебры.— М.: Наука, 1983.— 336 с.

10. **Богданов Ю. С.** К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.— 1955. — Т. 104, Ґ 6.— С. 813 – 814.

11. **Богданов Ю. С.** Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений // Матем. сборник.— 1957. — Т. 41, Ґ 4.— С. 481 – 498.

12. **Богданов Ю. С.** Асимптотические характеристики решений линейных дифференциальных систем // Тр. 4-го Всесоюз. матем. съез-

да, 1961: В 2 т. / АН СССР.— М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1964.— Т. 2.— С. 424 – 432.

13. **Богданов Ю. С.** Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференц. уравнения.— 1965. — Т. 1, Ѓ 6.— С. 707 – 716.

14. **Богданов Ю. С., Мазаник С. А.** Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений: Сб. науч. тр.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.— С. 9 – 13.

15. **Борухов В. Т.** К вопросу о необходимых условиях управляемости для линейных нестационарных динамических систем // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1979. — Ѓ 6.— С. 27 – 30.

16. **Былов Б. Ф.** О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду // Матем. сборник.— 1965. — Т. 67 (109), Ѓ 3.— С. 338 – 344.

17. **Былов Б. Ф.** Обобщение теоремы Перрона // Дифференц. уравнения.— 1965. — Т. 1, Ѓ 12.— С. 1597 – 1600.

18. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.— 576 с.

19. **Былов Б. Ф., Изобов Н. А.** Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференц. уравнения.— 1969. — Т. 5, Ѓ 10.— С. 1794 – 1803.

20. **Бруновский П.** О стабилизации линейных систем при определенном классе постоянно действующих возмущений // Дифференц. уравнения.— 1966. — Т. 2, Ѓ 6.— С. 769 – 777.

21. **Виноград Р. Э.** О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник.— 1957. — Т. 42, Ѓ 2.— С. 207 – 222.

22. **Виноград Р. Э., Изобов Н. А.** Решение задачи Ляпунова об устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения.— 1970. — Т. 6, Ѓ 2.— С. 230 – 242.

23. **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Качественная теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1971.— 508 с.

24. **Гайшун И. В.** Синтез $\mathcal{G}$-приводимых линейных нестационарных систем // Докл. НАН Беларуси.— 1998. — Т. 42, Ѓ 3.— С. 5 – 8.

25. **Гайшун И. В.** Существование канонических форм линейных нестационарных систем управления относительно экспоненциальной

группы // Дифференц. уравнения.— 1998. — Т. 34, Ґ 6.— С. 727 – 734.

26. **Гайшун И. В.** Канонические формы, управление показателями Ляпунова и стабилизируемость линейных нестационарных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления.— 1998. — Ґ 6.— С. 24 – 32.

27. **Гайшун И. В.** Управляемость характеристическими векторами линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения.— 1999. — Т. 35, Ґ 1.— С. 24 – 29.

28. **Гайшун И. В.** О канонических формах линейных нестационарных систем управления // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск.— 1999. — Т. 2.— С. 58 – 62.

29. **Гайшун И. В.** Канонические формы линейных нестационарных систем управления относительно различных групп преобразований // Автоматика и телемеханика.— 1999. — Ґ 2.— С. 11 – 18.

30. **Гайшун И. В.** Введение в теорию линейных нестационарных систем.— Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1999.— 409 с.

31. **Гайшун И. В., Изобов Н. А.** Исследования в Институте математики НАН Беларуси по дифференциальным и многопараметрическим системам // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук.— 1998. — Ґ 4. — С. 5 – 19.

32. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.

33. **Гомес Х. А.** Стабилизация неустойчивых положений равновесия линейных управляемых ситем // Дифференц. уравнения.— 1983. — Т. 19, Ґ 9.— С. 1644 – 1645.

34. **Гришин С. А.** Некоторые вопросы управления и устойчивости линейных систем // Дифференц. уравнения.— 1982. — Т. 18, Ґ 11. — С. 1862 – 1869.

35. **Гришин С. А., Розов Н. Х.** Метод поворотов решений в задаче стабилизации неустойчивых положений равновесия // Автоматика и телемеханика.— 1975. — Ґ 12.— С. 18 – 26.

36. **Гробман Д. М.** Характеристические показатели систем, близких к линейным // Матем. сборник.— 1952. — Т. 30, Ґ 1.— С. 121 – 166.

37. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 536 с.

38. **Д'Анжело Г.** Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез.— М.: Машиностроение, 1974.— 287 с.

39. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устой-

чивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.

40. **Долгий Ю. Ф.** Оптимальная стабилизация дифференциальных уравнений с запаздыванием // III Междунар. семинар “Негладкие и разрывные задачи управления, оптимизации и их приложения”: Тез. докл. международн. семинара, Санкт-Петербург, 1995 г.: В 2 ч. / СПбГУ.— Санкт-Петербург, 1995.— Ч. 1.— С. 40 – 41.

41. **Еругин Н. П.** Приводимые системы // Труды матем. ин-та АН СССР— М., 1946.— Т. 13.— 96 с.

42. **Забелло Л. Е.** Об управляемости линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика.— 1973. — Ґ 8.— С. 13 – 19.

43. **Забелло Л. Е.** К теории управляемости нестационарных систем // Докл. АН БССР.— 1980. — Т. 24, Ґ 6.— С. 497 – 499.

44. **Забелло Л. Е., Мамрилла Ю.** К управляемости линейной нестационарной системы // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Механика.— 1980. — Ґ 2.— С. 30 – 33.

45. **Забелло Л. Е.** Об управлении показателями Ляпунова в линейных непрерывных системах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Механика.— 1985. — Ґ 2.— С. 55 – 58.

46. **Заде Л., Дезоер Ч.** Теория линейных систем. Метод пространства состояний.— М.: Мир, 1970.— 703 с.

47. **Зайцев В. А.** Согласованность и управление показателями Ляпунова // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск.— 1999. — Вып. 2(17).— С. 3 – 40.

48. **Зайцев В. А., Тонков Е. Л.** Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика.— 1999. — Ґ 2(441).— С. 60 – 67.

49. **Зайцев В. А.** Об управлении показателями Ляпунова и о λ-приводимости // Вестник Удмуртского ун-та.— 2000. — Ґ 1.— С. 35 – 44.

50. **Зайцев В. А.** Согласованность, достижимость и управление показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02.— Ижевск, 2000.— 102 с.

51. **Зайцев В. А.** Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского ун-та. Серия “Математика”.— 2003. — С. 31 – 62.

52. **Иванов А. Г.** Линейные управляемые системы в пространстве Степанова.— Свердловск, 1985.— 32 с.— (Препринт / АН СССР.

Уральский научный центр. Физико-технический институт).

53. **Иванов А. Г., Тонков Е. Л.** О равномерной локальной управляемости линейной системы // Дифференц. уравнения.— 1992. — Т. 28, Ґ 9.— С. 1499 – 1507.

54. **Иванов А. Г., Тонков Е. Л.** Методы топологической динамики в задаче о равномерной локальной управляемости // Докл. РАН. — 1995. — Т. 340, Ґ 4.— С. 467 – 469.

55. **Изобов Н. А.** О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения.— 1965. — Т. 1, Ґ 4.— С. 469 – 477.

56. **Изобов Н. А.** О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференц. уравнения.— 1969. — Т. 5, Ґ 7.— С. 1186 – 1192.

57. **Изобов Н. А.** Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Мат. анализ.— М.: ВИНИТИ, 1974.— Т. 12.— С. 71 – 146.

58. **Изобов Н. А.** Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения.— 1976. — Т. 12, Ґ 11.— С. 1954 – 1966.

59. **Изобов Н. А.** Минимальный показатель двумерной линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения.— 1977. — Т. 13, Ґ 5.— С. 848 – 858.

60. **Изобов Н. А.** Оценка снизу для минимального показателя линейной системы // Дифференц. уравнения.— 1978. — Т. 14, Ґ 9.— С. 1576 – 1588.

61. **Изобов Н. А.** Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР.— 1982. — Т. 26, Ґ 1.— С. 5 – 8.

62. **Изобов Н. А.** Верхняя граница показателей Ляпунова дифференциальных систем с возмущениями высшего порядка // Докл. АН БССР.— 1982. — Т. 26, Ґ 5.— С. 389 – 392.

63. **Изобов Н. А.** О характеристических показателях линейных систем с гробмановскими возмущениями // Дифференц. уравнения.— 1991. — Т. 27, Ґ 3.— С. 428 – 437.

64. **Изобов Н. А.** О существовании гробмановских спектральных множеств линейных систем положительной меры // Дифференц. уравнения.— 1991. — Т. 27, Ґ 6.— С. 953 – 957.

65. **Изобов Н. А.** Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц.

уравнения.— 1993. — Т. 29, Ѓ 12.— С. 2034 – 2055.

66. **Изобов Н. А., Зверева Т. Е.** Спектр характеристических показателей Ляпунова двухмерной стационарной системы при возмущениях-поворотах // Дифференц. уравнения.— 1981. — Т. 17, Ѓ 11.— С. 1964 – 1977.

67. **Изобов Н. А., Красовский С. Г.** О существовании линейной сингулярной системы с неограниченным по мере экспоненциальным характеристическим множеством // Дифференц. уравнения.— 1998. — Т. 34, Ѓ 8.— С. 1049 – 1055.

68. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем.— М.: Мир, 1971.— 400 с.

69. **Кострикин А. И.** Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.— 496 с.

70. **Красносельский М. А.** Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.— 392 с.

71. **Красовский Н. Н.** К теории оптимального регулирования // Прикл. матем. и мех.— 1959. — Т. 23, вып. 4.— С. 625 – 639.

72. **Красовский Н. Н.** О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // Прикл. матем. и мех.— 1963. — Т. 27, вып. 4.— С. 641 – 663.

73. **Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1963, Ѓ 6. — С. 3 – 15.

74. **Красовский Н. Н.** Проблемы управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости динамических систем // Тр. II Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике, 1964: Обз. докл. Вып. I.— М.: Наука, 1965.— С. 77 – 93.

75. **Красовский Н. Н.** Проблемы стабилизации управяемых движений: Дополнение IV // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения — М.: Наука, 1966. — С. 475 – 514.

76. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением.— М.: Наука, 1968.— 476 с.

77. **Красовский С. Г.** О спектральном множестве линейной сингулярной системы с совпадающими показателями // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук.— 1999. — Ѓ 3.— С. 10 – 15.

78. **Крылов А. Н.** О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем // Изв. АН СССР. Серия физ.–мат.— 1931. — С. 491 – 539.

79. **Култышев С. Ю., Тонков Е. Л.** Управляемость линейной нестационарной системы // Дифференц. уравнения.— 1975. — Т. 11, Ґ 7.— С. 1206 – 1216.

80. **Ланкастер П.** Теория матриц.— М.: Наука, 1978.— 280 с.

81. **Лаптинский В. Н.** Об одном способе стабилизации линейных периодических систем управления // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук.— 1988. — Ґ 5.— С. 14 – 18.

82. **Лаптинский В. Н.** Проекционный метод решения задачи стабилизации периодической системы управления // Докл. АН БССР.— 1988. — Т. 32, Ґ 8.— С. 681 – 684.

83. **Лаптинский В. Н.** Оптимальная стабилизация периодических систем управления // Дифференц. уравнения.— 1988. — Т. 24, Ґ 12.— С. 2075 – 2083.

84. **Леваков А. А.** К управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения.— 1987. — Т. 23, Ґ 5.— С. 798 – 806.

85. **Леонов Г. А.** Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ.— 2001. — Т. 13, вып. 4.— С. 134 – 155.

86. **Луньков В. А., Тонков Е. Л.** О стабилизации нестационарной системы // Автоматика и телемеханика.— 1974. — Ґ 12.— С. 19 – 23.

87. **Луньков В. А.** О полной приводимости линейной системы управления // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск.— 1996. — Вып. 2(8).— С. 15 – 25.

88. **Ляпунов А. М.** Собр. соч.: В 6 т.— М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956.— Т. 2.— 473 с.

89. **Мазаник С. А.** Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.— Минск, 1999.— 216 с.

90. **Макаров Е. К.** О дискретности асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения.— 1998. — Т. 34, Ґ 10.— С. 1322 – 1331.

91. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** Об открытости отображения, порождаемого показателем возмущенной системы // Материалы респ. научно-метод. конф., посвящ. 25-летию фак-та прикл. математики и информатики, Минск, 10 – 14 апр. 1995 г.: В 2 ч. / Бел. гос. ун-т.— Минск, 1995.— Ч. 2.— С. 102 – 105.

92. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О локальной управляемости

характеристических показателей Ляпунова двумерных систем с кратными показателями // VII-ая Белорусская математическая конференция: Тез. докл. международн. конф., Минск, 18 – 22 ноября 1996 г.: В 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси.— Минск, 1996.— Ч. 2.— С. 70 – 71.

93. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О достаточных условиях локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова двумерных систем с кратными показателями // Сб. ст., посвящ. 60-летию со дня рождения проф. В. Г. Спринджука (1936 — 1987) / Ин-т математики АН Беларуси.— Минск, 1997.— С. 75 – 77.

94. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова систем с некратными показателями // Дифференц. уравнения.— 1997. — Т. 33, Ѓ 4.— С. 495 – 499.

95. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** К методу поворотов для линейных управляемых систем // Докл. НАН Беларуси.— 1998. — Т. 42, Ѓ 6.— С. 13 – 16.

96. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О некоторых случаях глобальной управляемости ляпуновских инвариантов линейных систем // "Dynamical systems: stability, control, optimization" (DSSCO'98). Dedicated to the 80th anniversary Ye. A. Barbashin: Материалы международн. конф. / Ин-т математики НАН Беларуси.— Минск, 1998.— Ч. 2.— С. 181 – 184.

97. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения.— 1999. — Т. 35, Ѓ 1.— С. 97 – 106.

98. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Известия вузов. Математика.— 1999. — Ѓ 2(441).— С. 60 – 67.

99. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** Управляемость ляпуновских инвариантов линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения.— 2001. — Т. 37, Ѓ 8.— С. 1146.

100. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О нормальности расчлененных ФСР линейных дифференциальных систем с устойчивыми показателями // Дифференц. уравнения.— 2002. — Т. 38, Ѓ 11.— С. 1576 – 1577.

101. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О достаточных условиях локальной пропорциональной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения.— 2003. — Т. 39, Ѓ 2.— С. 217 – 226.

102. **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения— 2-е изд.— М: Наука, 1966.— 532 с.

103. **Массера Х. Л.** К теории устойчивости // Математика. Периодич. сб. переводов иностр. статей.— 1957. — Т. 1, Ѓ 4.— С. 81 – 101.

104. **Миллионщиков В. М.** Асимптотика решений линейных систем с малыми возмущениями // Докл. АН СССР.— 1965. — Т. 162, Ѓ 2.— С. 266 – 268.

105. **Миллионщиков В. М.** О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения.— 1967. — Т. 3, Ѓ 12.— С. 2127 – 2134.

106. **Миллионщиков В. М.** Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений // Матем. сборник.— 1968. — Т. 77, Ѓ 2.— С. 163 – 173.

107. **Миллионщиков В. М.** Критерий малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы // Матем. заметки.— 1968. — Т. 4, вып. 2.— С. 173 – 180.

108. **Миллионщиков В. М.** Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1969. — Т. 5, Ѓ 7.— С. 1167 – 1170.

109. **Миллионщиков В. М.** Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1969. — Т. 5, Ѓ 10.— С. 1775 – 1784.
Письмо в редакцию // Дифференц. уравнения.— 1970. — Т. 6, Ѓ 8.— С. 1532.

110. **Миллионщиков В. М.** Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. матем. журн.— 1969. — Т. 10, Ѓ 1.— С. 99 – 104.

111. **Минюк С. А.** К теории полной управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения.— 1990. — Т. 26, Ѓ 3. — С. 414 – 420.

112. **Немыцкий В. В., Степанов В. В.** Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.–Л.: Гостехиздат, 1949.— 550 с.

113. **Нефедов С. А., Шолохович Ф. А.** Критерий стабилизируемости динамических систем с конечномерным входом // Дифференц. уравнения.— 1986. — Т. 22, Ѓ 2.— С. 223 – 228.

114. **Нурматов А. М.** Об экспоненциальных показателях треугольной системы и ее диагонального приближения // Дифференц. уравнения.— 1987. — Т. 23, Ѓ 5.— С. 814 – 818.

115. **Оленчиков Д. М.** Показатели Ляпунова импульсных систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск.— 1996. — Вып. 2(8).— С. 69 – 84.

116. **Оленчиков Д. М.** Импульсное управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения.— 1997. — Т. 33, Ѓ 11.— С. 1576.

117. **Оленчиков Д. М.** Импульсное управление показателями Ляпунова. I // Фундам. и прикл. матем.— 2002. — Т. 8, Ѓ 1.— С. 151 – 169.

118. **Оленчиков Д. М.** Импульсное управление показателями Ляпунова. II // Фундам. и прикл. матем.— 2002. — Т. 8, Ѓ 2.— С. 171 – 185.

119. **Осипов Ю. С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения.— 1965. — Т. 1, Ѓ 5.— С. 605 – 618.

120. **Персидский К. П.** Об устойчивости движения по первому приближению // Матем. сборник.— 1933. — Т. 40, Ѓ 3.— С. 284 – 292.

121. **Попов В. М.** Гиперустойчивость автоматических систем.— М.: Наука, 1970.— 335 с.

122. **Попова С. Н.** К вопросу об управлении показателями Ляпунова // Вестник Удмуртского ун-та.— 1992. — Ѓ 1.— С. 23 – 39.

123. **Попова С. Н.** Задачи управления показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02.— Ижевск, 1992.— 103 с.

124. **Попова С. Н.** Равномерная согласованность систем и задачи управления показателями Ляпунова // Межгосударственная научная конференция “Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация”. Минск. Беларусь. 7–9 декабря 1993 г.: Тезисы докладов. / Бел. гос. ун-т.— Минск, 1993.— С. 69 – 70.

125. **Попова С. Н.** Управление показателями Ляпунова // Успехи матем. наук.— 1994. — Т. 49, Ѓ 4 (298).— С. 140.

126. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения.— 1994. — Т. 30, Ѓ 10.— С. 1687 – 1696.

127. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференц. уравнения.— 1994. — Т. 30, Ѓ 11.— С. 1949 – 1957.

128. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференц. уравнения.— 1995. —

Т. 31, Ѓ 2.— С. 228 – 238.

129. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференц. уравнения.— 1995. — Т. 31, Ѓ 4.— С. 723 – 724.

130. **Попова С. Н.** Критерий управляемости показателями Ляпунова // III Междунар. семинар “Негладкие и разрывные задачи управления, оптимизации и их приложения”: Тез. докл. международн. семинара, Санкт-Петербург, 1995 г.: В 2 ч. / СПбГУ.— Санкт-Петербург, 1995.— Ч. 1.— С. 125 – 126.

131. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Равномерная управлемость показателей Ляпунова // Успехи матем. наук.— 1995. — Т. 50, Ѓ 4 (302). — С. 108 – 109.

132. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения.— 1997. — Т. 33, Ѓ 2.— С. 226 – 235.

133. **Попова С. Н.** О связи между различными видами управляемости асимптотических характеристик линейных систем // Дифференц. уравнения.— 2001. — Т. 37, Ѓ 6.— С. 850 – 851.

134. **Попова С. Н.** О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск.— 2002. — Вып. 2 (25).— С. 79 – 80.

135. **Попова С. Н.** Об эквивалентности локальной достижимости и полной управляемости линейных систем // Известия вузов. Математика.— 2002. — Ѓ 6(481).— С. 50 – 53.

136. **Попова С. Н.** К свойству локальной достижимости линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения.— 2003. — Т. 39, Ѓ 1. — С. 50 – 56.

137. **Попова С. Н.** Об управлении коэффициентами неправильности линейных систем // Дифференц. уравнения.— 2003. — Т. 39, Ѓ 6. — С. 858 – 859.

138. **Попова С. Н.** К свойству пропорциональной управляемости ляпуновских инвариантов линейных систем // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, Ѓ 11.— С. 1578 – 1579.

139. **Попова С. Н.** Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения.— 2003. — Т. 39, Ѓ 12.— С. 1627 – 1636.

140. **Попова С. Н.** Глобальная приводимость линейных управляе-

мых систем к системам скалярного типа // Дифференц. уравнения.— 2004. — Т. 40, Ґ 1.— С. 41 – 46.

141. **Попова С. Н.** Одновременная локальная управляемость спектра и коэффициента неправильности Ляпунова правильных систем // Дифференц. уравнения.— 2004. — Т. 40, Ґ 3.— С. 425 – 428.

142. **Попова С. Н.** Глобальная управляемость показателей Ляпунова // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского (XXI совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2004.— С. 169.

143. **Прохорова Р. А.** О сведении линейных конечно-разностных уравнений к дифференциальным // Дифференц. уравнения.— 1989. — Т. 25, Ґ 5.— С. 780 – 785.

144. **Рахимбердиев М. И.** О линейных системах, связанных отношением почти приводимости с системами скалярного типа // Дифференц. уравнения.— 1977. — Т. 13, Ґ 4.— С. 616 – 625.

145. **Рахимбердиев М. И.** Спектральные множества линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественная теория дифференциальных уравнений: Тез. докл. VI-ой Всес. конф., Иркутск, 1 – 3 июля 1986 г. / Комиссия по дифференц. уравнениям Сиб. отд-ния АН СССР.— Иркутск, 1986.— С. 155.

146. **Рахимбердиев М. И.** Об условиях непрерывности старшего показателя линейного расширения динамической системы // Дифференц. уравнения.— 1988. — Т. 24, Ґ 4.— С. 591 – 600.

147. **Рахимбердиев М. И.** Критерий экспоненциальной разделенности линейной системы // Дифференц. уравнения.— 1994. — Т. 30, Ґ 7.— С. 1279 – 1281.

148. **Рахимбердиев М. И.** Положительность и экспоненциальная разделенность семейства автоморфизмов векторного расслоения // Дифференц. уравнения.— 1999. — Т. 35, Ґ 1.— С. 121 – 124.

149. **Рахимбердиев М. И.** Применение теории положительных операторов в исследовании грубых свойств линейной дифференциальной системы // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. — 2000. — Т. 4.— С. 136 – 139.

150. **Рахимбердиев М. И., Розов Н. Х.** Распределение показателей Ляпунова линейных систем с периодическими коэффициентами, близкими в среднем к постоянным // Дифференц. уравнения.— 1978.

— Т. 14, Ґ 9. — С. 1710 – 1714.

151. **Родина Л. И., Тонков Е. Л.** Условия полной управляемости нестационарной линейной системы в критическом случае // Кибернетика и системный анализ (в печати).

152. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 469 с.

153. **Сергеев И. Н.** Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, Ґ 3. — С. 438 – 448.

154. **Сергеев И. Н.** Инвариантность центральных показателей относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, Ґ 9. — С. 1719.

155. **Сергеев И. Н.** Вопросы стабилизируемости и дестабилизируемости линейных систем малыми в среднем линейными возмущениями // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, Ґ 11. — С. 2012 – 2013.

156. **Сергеев И. Н.** К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 1983. — Вып. 9. — С. 111 – 166.

157. **Сергеев И. Н.** Точные границы подвижности показателей Ляпунова линейных систем при малых в среднем возмущениях // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 1986. — Вып. 11. — С. 32 – 73.

158. **Сергеев И. Н.** Оценка снизу для минимального показателя трехмерной системы // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, Ґ 10. — С. 1387 – 1397.

159. **Сергеев И. Н.** Формула для минимального показателя диагональной трехмерной системы // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, Ґ 11. — С. 1576.

160. **Сергеев И. Н.** Метод поворотов и сингулярные числа трехмерных систем // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, Ґ 12. — С. 1630 – 1639.

161. **Сергеев И. Н.** Оценка сверху для минимального показателя трехмерной системы // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, Ґ 1. — С. 114 – 123.

162. **Сергеев И. Н.** Формула для вычисления минимального показателя трехмерной системы // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, Ґ 3. — С. 345 – 354.

163. **Смирнов Е. Я.** О стабилизации нестационарных линейных управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1970. —

Ѓ 5.— С. 182 – 190.

164. **Смирнов Е. Я.** Некоторые задачи математической теории управления.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— 298 с.

165. **Смирнов Е. Я.** Стабилизация программных движений.— С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1997.— 308 с.

166. **Сурков А. Г.** Точные верхняя и нижняя границы характеристических показателей двумерной системы с ограниченными возмущениями // Дифференц. уравнения.— 1983. — Т. 19, Ѓ 9.— С. 1534 – 1541.

167. **Сурков А. Г.** Точные нижняя и верхняя границы старшего и младшего характеристических показателей двумерной системы с ограниченными возмущениями // Дифференц. уравнения.— 1983. — Т. 19, Ѓ 12.— С. 2065 – 2071.

168. **Сурков А. Г.** Точные границы характеристических показателей линейных систем второго порядка с ограниченными возмущениями // Дифференц. уравнения.— 1984. — Т. 20, Ѓ 5.— С. 792 – 797.

169. **Сурков А. Г.** О спектральном множестве линейных систем второго порядка с ограниченными возмущениями.— Минск, 1984.— 43 с.— (Препринт / АН БССР. Ин-т математики; Ѓ 22(207)).

170. **Тонков Е. Л.** Замечание об управляемости линейной периодической системы // Дифференц. уравнения.— 1978. — Т. 14, Ѓ 9.— С. 1715 – 1717.

171. **Тонков Е. Л.** Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения.— 1979. — Т. 15, Ѓ 10.— С. 1804 – 1813.

172. **Тонков Е. Л.** О множестве управляемости линейного уравнения // Дифференц. уравнения.— 1983. — Т. 19, Ѓ 2.— С. 269 – 278.

173. **Тонков Е. Л.** К теории линейных управляемых систем: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.— Свердловск, 1983.— 267 с.

174. **Тонков Е. Л.** Задачи управления показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения.— 1995. — Т. 31, Ѓ 10.— С. 1682 – 1686.

175. **Тонков Е. Л.** Ляпуновская приводимость линейной системы, стабилизация и управление показателями Изобова // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск.— 2000. — Т. 4.— С. 146 – 155.

176. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ.— М.: Мир, 1989. — 655 с.

177. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. Конечномерные линейные пространства.— М.: Наука, 1969.— 432 с.

178. **Шолохович Ф. А.** Об управляемости в гильбертовом про-

странстве // Дифференц. уравнения.— 1967. — Т. 3, Г 3.— С. 479 – 484.

179. **Bohl P.** Über Differentialgleichungen // J. reine und angew. Math. — 1913. — Bd. 144.— S. 284 – 318.

180. **Brockett R.** A stabilization problem // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory.— London: Springer, 1999.— P. 75 – 78.

181. **Brunovsky P.** Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems // J. of Different. Equat.— 1969. — Vol. 6, Г 3.— P. 296 – 313.

182. **Chang A.** An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. on Automat. Control.— 1965. — Vol. AC-10, Г 1.— P. 112 – 113.

183. **Colonius P., Kliemann W.** Minimal and maximal Lyapunov exponents of bilinear control systems // J. of Different. Equat.— 1993. — Vol. 101, Г 2.— P. 232 – 275.

184. **Colonius P., Kliemann W.** The Lyapunov spectrum of families of time-varying matrices // Trans. Amer. Math. Soc.— 1996. — Vol. 348. — P. 1389 – 1408.

185. **Colonius P., Kliemann W.** Lyapunov exponents of control flows // Lyapunov exponents / Ed. L. Arnold, H. Crauel, J.-P. Eckmann. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.— P. 331 – 365.— (Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1486).

186. **Ikeda M., Maeda H., Kodama S.** Stabilization of linear systems // SIAM J. Contr.— 1972. — Vol. 10, Г 4.— P. 716 – 729.

187. **Izobov N. A., Krasovski S. G.** On existence of a measure unbounded exponential spectral quantization on symplectic manifolds // Mem. Differential Equations Math. Phys.— 1998. — Vol. 13.— P. 140 – 144.

188. **Izobov N. A.** Lyapunov problems on stability by linear approximation // Advances of stability theory at the end of XXth century.— London: Gordon and Breach Science Publishers, 2000.— P. 17 – 39.— (Stability and control: Theory, methods and applications. Vol. 13).

189. **Kalman R. E.** Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana.— 1960. — Vol. 5, Г 1.— P. 102 – 119.

190. **Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S.** Controllability of linear dynamical systems // Contr. Different. Equat.— 1963. — Vol. 1.— P. 189 – 213.

191. **Kreindler E., Sarachik P.** On the concepts of controllability and observability of linear systems // IEEE Trans. on Automatic Control.

— 1964. — Vol. AC-9, Γ́ 2. — P. 129 – 136.

192. **Langenhop C. E.** On the stabilization of linear systems // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 15, Γ́ 5. — P. 735 – 742.

193. **Perron O.** Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. — 1929. — Bd. 31, h. 5. — S. 748 – 766.

194. **Popov V. M.** Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions // Rev. Roumaine. Sci. Techn., Electrotechn. et Energ. — 1964. — Vol. 9, Γ́ 4. — P. 629 – 690.

195. **Tonkov E. L.** Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. — 2000. — P. S228–S253.

196. **Vinograd R. E.** Simultaneous attainability of central Lyapunov and Bohl exponents for ODE linear systems // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 88, Γ́ 4. — P. 595 – 601.

197. **Weiss L.** The concepts of differential controllability and differential observability // Journ. of Math. Anal. and Appl. — 1965. — Vol. 10, Γ́ 2. — P. 442 – 449.

198. **Wolovich W. A.** On the stabilization of controllable system // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1968. — Vol. AC-13, Γ́ 5. — P. 569 – 572.

199. **Wonham W. M.** On pole assignment in multi-input controllable linear systems // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1967. — Vol. AC-12, Γ́ 6. — P. 660 – 665.