МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.929

БАРАНОВ ВИКТОР НИКОЛАЕВИЧ

ЗАДАЧИ ВЫЖИВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор Е.Л. Тонков

Ижевск — 2003 г.

Оглавление

Обозначения

$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n с нормой $|\cdot|$;

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$;

$\big(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}}\big)$ — банахово пространство;

$B_{\mathfrak{X}}(x,r)$ и $B_{\mathfrak{X}}[x,r]$ — соответственно открытый и замкнутый шары радиуса r с центром в точке x;

$\mathrm{cl}^{\mathfrak{X}} M$ — замыкание множества M в пространстве $\mathfrak{X}$;

$\mathrm{conv}\, M$ — выпуклая оболочка множества $M \subset \mathfrak{X}$;

$\rho_{\mathfrak{X}}(x,M)$ — расстояние от элемента $x \in \mathfrak{X}$ до множества $M \subset \mathfrak{X}$, определяемое равенством $\rho_{\mathfrak{X}}(x,M) = \inf\limits_{y\in M} \|x-y\|_{\mathfrak{X}}$;

$B_{\mathfrak{X}}[M,\varepsilon]$ — ε-окрестность множества $M \subset \mathfrak{X}$, определяемая неравенством $B_{\mathfrak{X}}[M,\varepsilon] = \{x \in \mathfrak{X} : \rho_{\mathfrak{X}}(x,M) \leqslant \varepsilon\}$;

$AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$;

$C([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$;

$L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство суммируемых функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$;

$\mathrm{comp}\,\mathfrak{X}$ — совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathfrak{X}$;

$\mathfrak{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ — пространство линейных ныпрерывных операторов из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$;

$t \to x_t \in \mathfrak{X},\ t\in[a,b]$ — отображение отрезка $[a,b]$ в пространство $\mathfrak{X}$.

Введение

Задачи выживания (термин принадлежит Aubin J.-P.) для управляемых динамических систем включают в себя большое число вполне конкретных приложений, интерес к которым не ослабевает с конца 50-х годов прошлого столетия. К числу таких прикладных задач относятся задачи об обходе препятствия, о построении управления, удерживающего траектории системы в заранее заданном множестве, в частности, на заданном многообразии, некоторые задачи математической экономики и многое другое.

Вопрос о существовании решения $x(t, x_0)$ задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x) \tag{0.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \tag{0.2}$$

в течении некоторого времени остающегося в наперед заданном множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ (такое решение называется выживающим), был разрешен в 1942 году Нагумо [41]. Теорема Нагумо состоит в следующем. Пусть задано множество M. Оказывается, что для каждой точки $x_0 \in M$ существует выживающее решение $x(t, x_0)$ задачи (0.1), (0.2) в том и только том случае, если во всех точках x, принадлежащих границе множества M, выполняется включение

$$f(x) \in T_x M, \quad x \in \partial M,$$

где $T_x M$ — конус Булигана к множеству M в точке x (определение конуса Булигана дано ниже).

Близкими к вопросам выживаемости являются задачи управления с фазовыми ограничениями. Например, требуется среди всех траекторий управляемой системы, выходящих из данной точки, найти траекторию максимально долго остающуюся в заданном множестве. В некоторых задачах требуется минимизировать функционал качества, заданный на траекториях управляемой системы, при этом траектория не должна покидать некоторое заданное в фазовом пространстве множество.

Хорошо известно (см., например, статью В. И. Благодатских и А. Ф. Филиппова [13]), что управляемые системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U,$$

тесно связаны с дифференциальными включениями

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = f(t, x, U),$$

поэтому (и мы будем пользоваться этим в дальнейшем) имеет смысл изучать задачи выживания для дифференциальных включений.

В работах А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филипповой [21], [22] получено аналитическое описание множества траекторий линейных дифференциальных включений, выживающих до определенного момента времени в пределах заданного множества.

В работе А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филипповой [23] установлены связи между задачами о выживаемости для дифференциальных включеий и системами включений, содержащими возмущающие параметры и функции.

Задаче о выборе траектории дифференциального включения из множества всех траекторий, удовлетворяющих заданному начальному условию, которая максимально долго находится в заданном замкнутом множестве, посвящена работа А. З. Фазылова [31]. Эту задачу (по аналогии с задачей о быстродействии, ее естественно называть задачей о "долгодействии") можно отнести к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями, необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина для которой даны в работе В. И. Благодатских [39]. Другой подход к решению задач на экстремум при наличии ограничений предложен А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным в работе [17].

Задачу выживания в множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ можно интерпретировать, как задачу избежания столкновения с множеством $\mathbb{R}^n \backslash M$. Задачам об избежании столкновения посвящены статьи А. З. Фазылова [32], Н. Сатимова и А. Азамова [28].

Задачи выживания для систем с последействием (их еще называют системами с наследственностью) отличаются от задач выживания для обыкновенных дифференциальных уравнений в первую очередь тем, что естественное фазовое пространство $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ таких систем бесконечномерно. Эту интерпретацию систем с последействием предложил Н. Н. Красовский [20].

Для системы с последействием

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \tag{0.3}$$

и целевого множества M, заданного в пространстве абсолютно непрерывных функций неравенством

$$M \doteq \{\sigma \in C([-r,0],\mathbb{R}^n) :\ \beta(\sigma(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\sigma(s))ds \leqslant 0\}$$

в статье Е. Л. Тонкова [29] были найдены достаточные условия выживаемости.

* * *

Основной целью работы является исследование условий выживания решений систем с последействием и дифференциальных включений с последействием в заданном множестве фазового пространства $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Формальное распространение теоремы Нагумо на системы с последействием оказалось невозможным по той причине, что даже простые движения гладкой динамической системы в бесконечномерном фазовом пространстве могут не иметь производной (понимаемой в обычном смысле) на множествах положительной меры. В связи с этим в работе вводится понятие вариации движений динамической системы, в терминах которой удается получить условия (необходимые и достаточные) выживания движений в заданном множестве.

В первом параграфе работы вводится понятие вариации δx_t движения $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in \mathbb{R}$ в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, причем эта вариация является элементом более широкого пространства $\mathfrak{Y}$.

Определение 0.1. Пусть заданы банаховы пространства $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$. Будем говорить, что отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, где $t \in [0, \alpha]$, $\alpha > 0$, имеет в точке $t \in [0, \alpha)$ *вариацию* $\delta x_t \in \mathfrak{Y}$, если существует отображение $\varepsilon \to r(\varepsilon) \in \mathfrak{Y}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$x_{t+\varepsilon} = x_t + \varepsilon \delta x_t + r(\varepsilon),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\|r(\varepsilon)\|_{\mathfrak{Y}}}{\varepsilon} = 0, \quad \sup_{\varepsilon > 0} \left\| \delta x_t + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Это определение позволяет естественным образом ввести понятие касательного конуса $T_x^{\mathfrak{Y}} M$ к множеству $M \subset \mathfrak{X}$ в точке x, элементы которого тоже лежат в более широком пространстве $\mathfrak{Y}$.

Определение 0.2. Пусть заданы банаховы пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$. Пусть далее, M — непустое подмножество пространства $\mathfrak{X}$ и $x \in M$. Элемент $h \in \mathfrak{Y}$ называется *касательным направлением* к множеству M в точке x, если существуют отображение $t \to r(t) \in \mathfrak{Y}$ и последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$\lim_{i\to\infty} t_i = 0, \quad x + th + r(t) \in M,$$

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\|r(t_i)\|_{\mathfrak{Y}}}{t_i} = 0, \quad \sup_i \Big\| h + \frac{r(t_i)}{t_i} \Big\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Обозначим $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ — множество касательных направлений к M в точке x.

Доказаны необходимые для дальнейшего изложения утверждения, описывающие структуру конуса и дающие его связь с хорошо изученным конусом Булигана, который совпадает с $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ при $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$.

Теорема 0.1. *Элемент $h \in \mathfrak{Y}$ принадлежит множеству $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{(\delta_i, h_i)\}$, где $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, $h_i \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$x + \delta_i h_i \in M, \quad \delta_i \to 0, \quad \|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad \sup_i \|h_i\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Лемма 0.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, $x \in M$, где $M \subset \mathfrak{X}$. Тогда для конуса $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ имеет место включение*

$$\bigcup_{r>0} \mathrm{cl}^{\mathfrak{Y}}\big((T_xM)^{\mathfrak{X}} \cap B_{\mathfrak{X}}[0,r]\big) \subset T_x^{\mathfrak{Y}}M \subset \big(T_xM\big)^{\mathfrak{Y}} \bigcap \left(\bigcup_{r>0} \mathrm{cl}^{\mathfrak{Y}}(B_{\mathfrak{X}}[0,r])\right).$$

Здесь через $\big(T_xM\big)^{\mathfrak{X}}$ и $\big(T_xM\big)^{\mathfrak{Y}}$ обозначены конусы Булигана к множеству M в точке x в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно.

Далее, во втором параграфе дается постановка задачи выживания. Введем следующие обозначения. Для произвольной непрерывной функции $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, \alpha]$, где $r > 0$, $\alpha > 0$, обозначим x_t — отображение отрезка $[0, \alpha]$ в пространство непрерывных функций $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, действующее по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in [0, \alpha], \quad s \in [-r, 0]. \tag{0.4}$$

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с последействием

$$\dot{x} = f(x_t), \tag{0.5}$$

$$x_0 = \varphi. \tag{0.6}$$

Вместе с системой (0.5) будем рассматривать некоторое непустое подмножество $M \subset AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 0.3. Пусть $\varphi \in M$. Будем говорить, что решение $x(t, \varphi)$ задачи Коши (0.5), (0.6) *выживает* в множестве M, если существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $t \in [0, \alpha]$ выполнено включение $x_t \in M$, где x_t движение в пространстве $AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, порожденное по правилу (0.4).

О п р е д е л е н и е 0.4. Множество M обладает *свойством выживаемости* для системы (0.5), если для всякого $\varphi \in M$ найдется решение $x(t, \varphi)$ задачи Коши (0.5), (0.6), выживающее в M. Будем говорить также, что множество M есть *множество выживаемости системы* (0.5).

В данной работе исследуются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять система (0.5) и множество M, чтобы множество M обладало свойством выживаемости для системы (0.5).

В третьем параграфе изучены условия выживания уравнения

$$\delta x_t = F(x_t), \tag{0.7}$$

где отображение F действует в произвольном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$.

Следующие теоремы дают нам необходимые и достаточные условия выживания уравнения (0.7).

Напомним, что множество $M \subset \mathfrak{X}$ называется локально компактным, если для всякой точки $x \in M$ найдется число $r > 0$ такое, что множество $B_{\mathfrak{X}}[x, r] \cap M$ — компактно.

Теорема 0.2. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, и заданы локально компактное множество M в $\mathfrak{X}$ и непрерывное отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Пусть далее, для всех точек $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение $t \to x_t \in M$, $t \in [0, \alpha]$ такое, что $x_0 = \varphi$ и $\delta x_t = F(x_t)$ для почти всех $t \in [0, \alpha)$, то есть существует выживающее в M решение (0.7) с начальным условием $x_0 = \varphi$.*

Тогда для всех точек $\varphi \in M$ имеет место включение

$$F(x) \in T_x^{\mathfrak{Y}} M.$$

Теорема 0.3. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, заданы локально компактное множество M в $\mathfrak{X}$ и непрерывное отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Пусть далее:*

1) для каждого $x \in M$ имеет место включение $F(x) \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$;

2) найдется константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in M$ выполнено неравенство

$$\sup_i \left\| F(x) + \frac{r(t_i(x), x)}{t_i(x)} \right\|_{\mathfrak{X}} < c,$$

где $r(t_i(x), x)$ и $t_i(x)$ из определения касательного конуса $T_x^{\mathfrak{Y}} M$.

Тогда для всякого $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение $t \to x_t \in M$, $t \in [0, \alpha]$ такое, что $x_0 = \varphi$ и $\delta x_t = F(x_t)$ для почти всех $t \in [0, \alpha)$.

Доказано, что в теореме 0.3 условие непрерывности отображения F можно заменить на более слабое: достаточно замкнутости отображения F.

В четвертом параграфе указана связь между системой с последействием и уравнением (0.7). Оказывается, что если в качестве пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ взять $AC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ и $L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, а отображение $F:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ определить равенством

$$F(\sigma) \doteq (\dot{\sigma}, f(\sigma)), \tag{0.8}$$

то между решениями уравнений (0.3) и (0.5) существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть

$$\mathfrak{X} = AC([-r,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} = L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n.$$

Лемма 0.2. *Пусть функция*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r,\alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (0.3). *Тогда отображение*

$$t \to x_t \in \mathfrak{X}, \quad t \in [0,\alpha),$$

построенное по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in [0,\alpha), \quad s \in [-r,0],$$

имеет для почти всех $t \in [0,\alpha)$ *вариацию* δx_t *и является решением уравнения* (0.7).

Лемма 0.3. *Пусть отображение*

$$t \to y_t, \quad t \in [0,\alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (0.7). *Тогда отображение*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r,\alpha)$$

где

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-r, 0], \quad x(t) = y_t(0), \quad t \in [0, \alpha)$$

является решением уравнения (0.3).

Из теоремы 0.3 и этих лемм следует утверждение, дающее достаточные условия выживания для уравнений с последействием.

Теорема 0.4. *Рассмотрим некоторое локально компактное множество* $M \subset \mathfrak{X}$. *Для того, чтобы существовало движение* $t \to x_t \in M$, *порожденное дифференциальным уравнением с последействием* $\dot{x}(t) = f(x_t)$ *и начальным условием* $x_0 = \varphi \in M$ *достаточно, чтобы для всякой точки* $\sigma \in M$ *выполнялось включение*

$$F(\sigma) \in T_\sigma^{\mathfrak{Y}} M,$$

где $F(\sigma)$ *определено равенством* (0.8).

Доказана замкнутость оператора дифференцирования.

Лемма 0.4. *Оператор дифференцирования*

$$(F_0\sigma)(t) \doteq \dot{\sigma}(t), \quad t \in [-r, 0]$$

является замкнутым оператором, если его рассматривать как оператор, действующий из $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ *в* $L_1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ *с областью определения* $D(F_0) \doteq AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

Из этого утверждения следует, что в теореме 0.4 в качестве пространства $\mathfrak{X}$ можно взять пространство $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Множество M при этом попрежнему будет задаваться в пространстве абсолютно непрерывных функций, но компактно оно должно быть в пространстве $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$\mathfrak{X} \doteq AC([-r,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} \doteq L_1([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n.$$

Пусть множество $M \subset \mathfrak{X}$ определено равенством

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a(\varphi) = 0\},$$

где отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$a(\varphi) \doteq \beta(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s))ds, \tag{0.9}$$

$\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$— непрерывные функции.

В пятом параграфе найдены достаточные условия выживаемости для системы с последействием и множеством M, заданным одним уравнением.

Теорема 0.5. *Пусть*

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a(\varphi) = 0\},$$

где отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ определено равенством (0.9) с функциями $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемыми по x. Пусть далее, для множества M выполнены следующие условия

1) *во всех точках $\varphi \in M$ выполнено неравенство*

$$\left|\beta'(x)|_{x=\varphi(0)}\right| + \int_{-r}^{0} \left|\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) *во всех точках $\varphi \in M$ выполнено равенство*

$$\langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle \alpha_x{}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot{\varphi}(s)\rangle ds = 0.$$

Тогда для всех точек $\varphi \in M$, с существенно ограниченной производной существуют $\vartheta > 0$ и отображение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r,\vartheta]$ являющееся решением задачи (0.5), (0.6) такие, что для всех $t \in [0,\vartheta]$ выполнено включение $x_t \in M$.

В шестом параграфе найдены достаточные условия выживаемости для системы с последействием и множеством M, заданном конечным числом уравнений.

Теорема 0.6. *Пусть*

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a_1(\varphi) = 0, \dots a_m(\varphi) = 0\},$$

где отображение $a_i : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ *есть*

$$a_i(\varphi) \doteq \beta_i(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha_i(s, \varphi(s)) ds,$$

с функциями $\beta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемыми по* x. *Пусть далее, во всех точках* $\varphi \in M$ *выполнены следующие условия:*

1) для всех $i = 1, \dots, m$ выполнены неравенства

$$\left|\beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}\right| + \int_{-r}^{0} \left|{\alpha_i}_x'(s, x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) функционалы $a_i'(\varphi)[\cdot] \in \mathfrak{X}^*$, $i = 1, \dots, m$ линейно независимы, где

$$a_i'(\varphi)[\psi] = \langle \beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0) \rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_i}_x'(s, x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s) \rangle ds$$

3) *для всех* $i = 1, \dots, m$ *имеют место равенства*

$$\langle \beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi) \rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_i}_x'(s, x)|_{x=\varphi(s)}, \dot{\varphi}(s) \rangle ds = 0.$$

Тогда для всех точек $\varphi \in M$, *с существенно ограниченной производной существуют* $\vartheta > 0$ *и отображение* $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, 0]$ *являющееся решением задачи* (0.5), (0.6) *такие, что для всех* $t \in [0, \vartheta]$ *выполнено включение* $x_t \in M$.

В седьмом параграфе рассмотрены смешанные системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t, y(t)) \\ \dot{y}(t) = g(x_t, y(t)), \end{cases} \tag{0.10}$$

$$\begin{cases} x_0 = \varphi \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{0.11}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y, y_0 \in \mathbb{R}^m$, $\varphi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $f : C([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : C([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. В таком виде можно записать, например, задачу Коши для неавтономной системы уравнений с последействием

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t),$$

$$x(t_0) = \varphi.$$

О п р е д е л е н и е 0.5. Решением системы (0.10), (0.11) называются непрерывные функции

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \vartheta), \quad t \to y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, \vartheta)$$

$\vartheta > 0$, такие, что

1) $x(s) = \varphi(s)$, $s \in [-r, 0]$;

2) $y(0) = y_0$;

3) $x(t)$ и $y(t)$ абсолютно непрерывны на $[0, \vartheta)$ и обращают систему (0.10) в тождество.

Для смешанных систем найдены условия выживания в множестве M, заданном в пространстве $C([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m$ одним уравнением.

Теорема 0.7. *Пусть*

$$M \doteq \{(\varphi, y) \in C([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m : a(\varphi, y) = 0\},$$

где отображение $a : C([-r,0],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *определено равенством*

$$a(\varphi,y) \doteq \beta(\varphi(0),y) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s))ds,$$

с функциями $\beta : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемыми по* x. *Пусть далее, для множества* M *выполнены следующие условия*

1) *во всех точках* $(\varphi,y)\in M$ *выполнено неравенство*

$$\left|\beta_x'(x,y)|_{x=\varphi(0)}\right| + |\beta_y'(\varphi(0),y)| + \int_{-r}^{0} \left|\alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) *во всех точках* $(\varphi,y)\in M$ *выполнено равенство*

$$\langle\beta_x'(x,y)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi)\rangle + \langle\beta_y'(\varphi(0),y), g(y)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle\alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot\varphi(s)\rangle ds = 0.$$

Тогда для всех точек $(\varphi,y_0)\in M$ *таких, что*

$$\operatorname*{vraisup}_{s\in[-r,0]} |\dot\varphi(s)| < +\infty$$

существуют $\vartheta > 0$ *и отображения*

$$t\to x(t)\in\mathbb{R}^n,\quad t\in[-r,\vartheta],\quad t\to y(t)\in\mathbb{R}^m,\quad t\in[0,\vartheta],$$

являющиеся решением задачи (0.10), (0.11) *такие, что для всех* $t\in[0,\vartheta]$ *выполнено включение* $(x_t, y(t))\in M$.

В восьмом параграфе исследованы условия, при которых для заданных непустого множества M банахова пространства $\mathfrak{X}$ и многозначной функции $x\to F(x)\in\operatorname{comp}\mathfrak{Y}$, $x\in M$ порождающей задачу

$$\delta x_t \in F(x_t), \tag{0.12}$$

$$x_0 = \varphi \in M, \tag{0.13}$$

найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x_t$ задачи (0.12), (0.13) удовлетворяющее при всех $t \in [0, \alpha]$ включению $x_t \in M$.

Введем следующие обозначения. Напомним, что функция $r(t)$ и последовательность $\{t_i\}$ в определении касательного направления зависят от точки $x \in M$ и элемента касательного конуса $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$. Эту зависимость будем записывать $r(t, x, h)$ и $t_i(x, h)$.

Пусть $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$, обозначим

$$c(x,h) \doteq \sup_i \left\| h + \frac{r(t_i(x,h), x, h)}{t_i(x,h)} \right\|_{\mathfrak{X}}.$$

Если задано многозначное отображение $x \to F(x) \in \operatorname{comp} \mathfrak{Y}$, $x \in M$ и для всех $x \in M$ выполнено включение $F(x) \subset T_x^{\mathfrak{Y}} M$, то обозначим

$$c(x) \doteq \sup_{h \in F(x)} c(x,h).$$

Теорема 0.8. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ и заданы локально компактное множество M в $\mathfrak{X}$ и полунепрерывное сверху многозначное отображение*

$$F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp} \mathfrak{Y}.$$

Пусть далее:

1) *для каждого $x \in M$ имеет место включение*

$$F(x) \subset T_x^{\mathfrak{Y}} M;$$

2) *найдется константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in M$ выполнено неравенство*

$$\sup_{x \in M} c(x) < c.$$

Тогда для всякого $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение

$$t \to x_t \in M, \quad t \in [0, \alpha]$$

такие, что

$$x_0 = \varphi \quad \textit{и} \quad \delta x_t \in F(x_t)$$

для почти всех $t \in [0, \alpha)$.

Теорема 0.9. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *— банаховы пространства,* $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ *и задано замкнутое многозначное отображение*

$$F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp} \mathfrak{Y}$$

с областью определения $D(F)$. *Пусть далее, задано локально компактное множество* M *в* $D(F)$ *и выполнены условия:*

1) *для всех* $x \in M$ *отображение* $x \to H(x) \in \operatorname{comp} \mathfrak{Y}$, $x \in M$ *построенное по правилу*

$$H(x) = F(x) \cap T_x^{\mathfrak{Y}} M$$

является полунепрерывным сверху ;

2) *найдется константа* $c > 0$ *такая, что для всех* $x \in M$ *выполнено неравенство*

$$\sup_{x \in M} c(x) < c,$$

где

$$c(x) \doteq \sup_{h \in H(x)} \Big\{ \sup_i \Big\| h + \frac{r(t_i(x,h), x, h)}{t_i(x,h)} \Big\|_{\mathfrak{X}} \Big\}.$$

Тогда для всякого $\varphi \in M$ *существуют число* $\alpha > 0$ *и непрерывное отображение*

$$t \to x_t \in M, \quad t \in [0, \alpha]$$

такое, что

$$x_0 = \varphi \quad \textit{и} \quad \delta x_t \in F(x_t)$$

для почти всех $t \in [0, \alpha)$.

Доказано, что в теоремах 0.8, 0.9 условие полунепрерывности сверху многозначного отображения F можно заменить на более слабое: достаточно замкнутости многозначного отображения F в смысле замкнутости графика $\Gamma(F)$ в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.

В девятом параграфе доказано взаимно однозначное соответствие между задачей Коши для включения

$$\dot{x}(t) \in f(x_t), \tag{0.14}$$

$$x_0 = \varphi, \tag{0.15}$$

где $f : AC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$, $\varphi \in AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ и задачей Коши для включения

$$\delta x_t \in F(x_t), \tag{0.16}$$

$$x_0 = \varphi, \tag{0.17}$$

где $F : AC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to L_1([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ действует по правилу

$$F(\sigma) \doteq (\dot{\sigma}, f(\sigma)).$$

Лемма 0.5. *Пусть функция*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \alpha), \quad \alpha > 0,$$

является решением задачи (0.14), (0.15). *Тогда отображение*

$$t \to x_t \in \mathfrak{X}, \quad t \in [0, \alpha)$$

построенное по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t + s), \quad t \in [0, \alpha), \quad s \in [-r, 0],$$

имеет для почти всех $t \in [0, \alpha)$ *вариацию* δx_t *и является решением задачи* (0.16), (0.17).

Лемма 0.6. *Пусть отображение*

$$t \to y_t, \quad t \in [0, \alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (0.16), (0.17). *Тогда отображение*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \alpha)$$

где

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-r, 0], \quad x(t) = y_t(0), \quad t \in [0, \alpha)$$

является решением задачи (0.14), (0.15).

Таким образом имеет место теорема.

Теорема 0.10. *Рассмотрим некоторое локально компактное множество* $M \subset AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. *Для того, чтобы существовало движение* $t \to x_t \in M$, *порожденное дифференциальным включением с запаздыванием* $\dot{x}(t) \in f(x_t)$ *и начальным условием* $x_0 = \varphi \in M$, *достаточно, чтобы для всякой точки* $\sigma \in M$ *выполнялось включение*

$$F(\sigma) \subset T_\sigma^{\mathfrak{Y}} M,$$

где $F(\sigma) = (\dot{\sigma}(s), f(\sigma))$, $\mathfrak{Y} = L_1([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$.

Доказана замкнутость отображения F, действующего из пространства $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ в пространство $L_1([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ по правилу $F(\sigma) = (\dot{\sigma}(s), f(\sigma))$, где $D(F) = AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ — область определения F. Таким образом, в теореме 0.10 пространство абсолютно непрерывных функций $AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ можно заменить на пространство непрерывных функций $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Множество M при этом по-прежнему будет задаваться в пространстве абсолютно непрерывных функций, а условие локальной компактности множества M должно быть выполнено в $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

Основные результаты работы докладывались на городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (Ижевск, 1999 — 2003 годы), Международной конференции "Ломоносов — 2000"(Москва, МГУ), XXXII-й региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики"(Екатеринбург, 2001), 5-ой Российской университетско-академической научно-практической конференции (Ижевск, ЕГНОК — 2001), конференции "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения", посвященной 80-летию Н. В. Азбелева (Ижевск, 2002), семинаре В. А. Кондратьева, В. М. Миллионщикова и Н. Х. Розова по качественной теории дифференциальных уравнений (Москва, МГУ, 2003), Международной конференции, посвященной 100-летию А. Н. Колмогорова (Тамбов, ОПУ-2003) и опубликованы в [4] — [12].

Выражаю глубокую признательность Е. Л. Тонкову за постановку интересной задачи и сделанные в процессе работы над диссертацией замечания.

Глава 1

Основная теорема о выживании

§ 1. Определение и основные свойства касательного конуса

Из теории функций действительного переменного известно [19], что всякая абсолютно непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема почти всюду на отрезке $[a, b]$. Однако, для функций со значениями в некотором банаховом пространстве это свойство не имеет места.

В качестве примера рассмотрим отображение $t \to x_t : [0, 1] \to C[-1, 0]$, определенное равенством

$$x_t(s) \doteq \begin{cases} 0, & -1 \leqslant s < -t, \\ s + t, & -t \leqslant s \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Если определить правую производную $\dfrac{d}{dt}x_t \in C[-1, 0]$ отображения (1.1), как предел в $C[-1, 0]$ равенством

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left\| \frac{d}{dt}x_t - \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon} \right\|_{C[-1,0]} = 0,$$

то наше отображение не имеет производной ни в одной точке интервала $[0, 1)$. Однако, если предел брать в пространстве суммируемых функций, то в каждой точке $t \in [0, 1)$ он существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon} = \varphi(s) \in L_1[-1, 0], \quad \varphi(s) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant s < -t, \\ 1, & -t \leqslant s \leqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому, для движений в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, в качестве аналога производной введем понятие вариации, являющейся элементом более широкого пространства. В дальнейшем предполагается, что банаховы пространства $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ и $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|_{\mathfrak{Y}})$ удовлетворяют следующему условию.

Условие А. Будем говорить, что банаховы пространства $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ и $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|_{\mathfrak{Y}})$ удовлетворяют условию А, если $\mathfrak{X}$— всюду плотное подмножество пространства $\mathfrak{Y}$ и найдется такое число k, что для всякого $x \in \mathfrak{X}$ выполнено неравенство $\|x\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant k\|x\|_{\mathfrak{X}}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию А. Будем говорить, что отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, где $t \in [0, \alpha]$, $\alpha > 0$, имеет в точке $t \in [0, \alpha)$ *вариацию* $\delta x_t \in \mathfrak{Y}$, если существует отображение $\varepsilon \to r(\varepsilon) \in \mathfrak{Y}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$x_{t+\varepsilon} = x_t + \varepsilon \delta x_t + r(\varepsilon),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\|r(\varepsilon)\|_{\mathfrak{Y}}}{\varepsilon} = 0, \quad \sup_{\varepsilon > 0} \left\| \delta x_t + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

П р и м е р 1.1. Докажем, что в рассмотренном выше примере вариация отображения $t \to x_t \in C[-1, 0]$, $t \in [0, 1]$ существует в каждой точке t полуинтервала $[0, 1)$, если в качестве пространства $\mathfrak{Y}$ взять пространство суммируемых функций $L_1[-1, 0]$.

Действительно, для всех $t \in [0, 1)$ начиная с некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$x_{t+\varepsilon} = x_t + \varepsilon \delta x_t + r(\varepsilon),$$

где

$$\delta x_t = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant s < -t, \\ 1, & -t \leqslant s \leqslant 0, \end{cases}$$

$$r(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant s < -t-\varepsilon, \\ s+t+\varepsilon, & -t-\varepsilon \leqslant s < -t, \\ 0, & -t \leqslant s \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\delta x_t + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant s < -t-\varepsilon, \\ \dfrac{s+t+\varepsilon}{\varepsilon}, & -t-\varepsilon \leqslant s < -t, \\ 1, & -t \leqslant s \leqslant 0. \end{cases}$$

При этом выполнены равенства

$$\|r(\varepsilon)\|_{L_1[-1,0]} = \int_{-1}^{-t-\varepsilon} 0\,ds + \int_{-t-\varepsilon}^{-t} (s+t+\varepsilon)ds + \int_{-t}^{0} 0\,ds = \frac{\varepsilon^2}{2},$$

и

$$\left\|\delta x_t + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right\|_{C[-1,0]} = \sup_{s\in[-1,0]} \left|\delta x_t(s) + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon}(s)\right| = 1.$$

Откуда получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\|r(\varepsilon)\|_{L_1[-1,0]}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varepsilon}{2} = 0,$$

$$\sup_{\varepsilon>0} \left\|\delta x_t + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right\|_{C[-1,0]} = 1 < +\infty.$$

Этот пример можно обобщить.

П р и м е р 1.2. Пусть на отрезке $[-r,\vartheta]$, $r > 0$, $\vartheta > 0$ задана абсолютно непрерывная функция $x \in AC[-r,\vartheta]$ с существенно ограниченной производной

$$\operatorname*{vraisup}_{s\in[-r,\vartheta]} |\dot{x}(s)| = c < +\infty.$$

Тогда отображение $t \to x_t \in C[-r,0]$, порожденное по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in [0,\vartheta], \quad s \in [-r,0]$$

имеет вариацию $\delta x_t \in L_1[-r,0]$ в каждой точке $t \in [0,1)$ и

$$\delta x_t(s) = \dot{x}_t(s).$$

Докажем это утверждение Определим $\delta x_t \in L_1[-r,0]$ и отображение $\varepsilon \to r(\varepsilon) \in L_1[-r,0]$, $\varepsilon > 0$ следующим образом

$$\delta x_t(s) \doteq \dot{x}_t(s), \quad r(\varepsilon) \doteq x_{t+\varepsilon} - x_t - \varepsilon \delta x_t.$$

Докажем, что условия

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\|r(\varepsilon)\|_{L_1[-r,0]}}{\varepsilon} = 0$$

и

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left\| \delta x_t + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\|_{C[-r,0]} < +\infty$$

из определения вариации выполнены.

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left\| \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\|_{L_1[-r,0]} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-r}^{0} \left| \frac{x_{t+\varepsilon}(s) - x_t(s)}{\varepsilon} - \dot{x}_t(s) \right| ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-r}^{0} \left| \frac{x(t+s+\varepsilon) - x(t+s)}{\varepsilon} - \dot{x}(t+s) \right| ds.$$

В силу того, что функция $\dfrac{x(t+s+\varepsilon) - x(t+s)}{\varepsilon}$ почти всюду на отрезке $t \in [0,\vartheta)$, $s \in [-r,0]$ сходится к функции $\dot{x}(t+s)$ при $\varepsilon \to 0+$ и разность

$$\left| \frac{x(t+s+\varepsilon) - x(t+s)}{\varepsilon} - \dot{x}(t+s) \right|$$

ограничена константой $2c$, под знаком интеграла можно перейти к пределу

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-r}^{0} \left| \frac{x(t+s+\varepsilon) - x(t+s)}{\varepsilon} - \dot{x}(t+s) \right| ds = 0.$$

Первое из условий доказано. Докажем второе.

$$\left\| \delta x_t + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\|_{C[-r,0]} = \left\| \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon} \right\|_{C[-r,0]} = \sup_{s \in [-r,0]} \frac{|x_{t+\varepsilon}(s) - x_t(s)|}{\varepsilon}.$$

Из неравенства $\operatorname*{vraisup}_{s \in [-r,\vartheta]} |\dot{x}(s)| = c < +\infty$ получаем

$$\frac{|x_{t+\varepsilon}(s) - x_t(s)|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} |x(t+s+\varepsilon) - x(t+s)| =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}|x(t+s) + \int_{t+s}^{t+s+\varepsilon} \dot{x}(t+s+\tau)d\tau - x(t+s)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}c\varepsilon = c$$

для всех $t \in [0, \vartheta)$, $s \in [-r, 0]$, следовательно,

$$\left\|\frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon}\right\|_{C[-r,0]} = \sup_{s\in[-r,0]} \frac{|x_{t+\varepsilon}(s) - x_t(s)|}{\varepsilon} \leqslant c$$

для всех $\varepsilon > 0$ таких, что $t + \varepsilon \leqslant \vartheta$, поэтому

$$\sup_{\varepsilon>0} \left\|\delta x_t + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right\|_{C[-r,0]} \leqslant c < +\infty.$$

□

В силу определения 1.1 вариация функции со значениями в пространстве $\mathfrak{X}$ является элементом более широкого пространства $\mathfrak{Y}$. Введем определение касательного направления, также являющееся элементом более широкого пространства.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию A (см. с. 23), M — непустое, подмножество пространства $\mathfrak{X}$ и $x \in M$. Элемент $h \in \mathfrak{Y}$ называется *касательным направлением* к M в точке x, если существуют отображение $t \to r(t) \in \mathfrak{Y}$ и последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$\lim_{i\to\infty} t_i = 0, \quad x + th + r(t) \in M,$$

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\|r(t_i)\|_{\mathfrak{Y}}}{t_i} = 0, \quad \sup_i \left\|h + \frac{r(t_i)}{t_i}\right\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Обозначим $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ — множество касательных направлений к M в точке x.

П р и м е р 1.3. Построим $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ к множеству M, в случае, когда M есть все пространство $\mathfrak{X}$. Оказывается, что для всех $x \in \mathfrak{X}$ конус $T_x^{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X}$

состоит только из тех элементов $h \in \mathfrak{Y}$, для которых существует последовательность $\{h_i\} \subset \mathfrak{X}$, ограниченная в $\mathfrak{X}$ $(\sup\limits_i \|h_i\|_{\mathfrak{X}} < +\infty)$ и сходящаяся к h в $\mathfrak{Y}$ $(\|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0)$. По другому это можно записать так:

$$T_x^{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X} = \bigcup_{c>0} \operatorname{cl}^{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}}[0, c]. \tag{1.2}$$

Докажем равенство (1.2).

Пусть $h \in T_x^{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X}$. Возьмем $r(t)$ и $\{t_i\}$ из определения 1.2 и обозначим $h_i = h + \dfrac{r(t_i)}{t_i}$. Тогда

$$\sup_i \|h_i\|_{\mathfrak{X}} = \sup_i \|h + \frac{r(t_i)}{t_i}\|_{\mathfrak{X}} = c < +\infty,$$

$$\|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} = \|\frac{r(t_i)}{t_i}\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad i \to \infty.$$

Поэтому $h \in \operatorname{cl}^{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}}[0, c]$ и, следовательно,

$$T_x^{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X} \subset \bigcup_{c>0} \operatorname{cl}^{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}}[0, c].$$

Пусть теперь для $h \in \mathfrak{Y}$ найдется последовательность $\{h_i\} \subset \mathfrak{X}$ такая, что $\sup\limits_i \|h_i\|_{\mathfrak{X}} < +\infty$, $\|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0$. Определим $t_i \doteq 1/i$, $r(t_i) \doteq t_i(h_i - h)$. На отрезках $[t_{i+1}, t_i]$ определим

$$r(t) \doteq \frac{t_i - t}{t_i - t_{i+1}} t_{i+1} h_{i+1} + \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} t_i h_i - th.$$

Нетрудно проверить, что $\{t_i\}$ и $r(t)$ удовлетворяют определению 1.2, следовательно, для всех $c > 0$ имеет место включение

$$\operatorname{cl}^{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}}[0, c] \in T_x^{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X},$$

откуда следует включение

$$\bigcup_{c>0} \operatorname{cl}^{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}}[0, c] \in T_x^{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X}.$$

Таким образом, равенство (1.2) имеет место. $\square$

Следующие утверждения дают описание структуры множества $T_x^{\mathfrak{Y}}M$.

Лемма 1.1. *Пусть* M — *непустое связное подмножество пространства* $\mathfrak{X}$ *и* $x \in M$. *Элемент* $h \in \mathfrak{Y}$ *принадлежит* $T_x^{\mathfrak{Y}}M$, *если и только если существует такая положительная константа* $c > 0$, *что*

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0+,\, B_{\mathfrak{X}}[0,c] \ni g \to h} \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \varepsilon g, M)}{\varepsilon} = 0. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Для доказательства равенства (1.3) достаточно построить последовательность $\{(\delta_k, h_k)\}$, где $\delta_k \in \mathbb{R}^+$, $h_k \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\delta_k \to 0, \quad \|h_k - h\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad \sup_k \|h_k\|_{\mathfrak{X}} < +\infty \quad \text{и}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \delta_k h_k, M)}{\delta_k} = 0. \tag{1.4}$$

Пусть $h \in T_x^{\mathfrak{Y}}M$. Из определения 1.2 следует, что существуют отображение $t \to r(t)$, удовлетворяющее включению $x + th + r(t) \in M$, и последовательность $\{t_i\}$, удовлетворяющая следующему неравенству

$$\sup_{i \to +\infty} \Big\| h + \frac{r(t_i)}{t_i} \Big\|_{\mathfrak{X}} < +\infty. \tag{1.5}$$

Рассмотрим последовательность $\{(\delta_k, h_k)\}$, где

$$\delta_k \doteq t_k, \quad h_k \doteq h + \frac{r(t_k)}{t_k}.$$

Из включения $x + t_k h + r(t_k) \in M$ следует, что $x + \delta_k h_k \in M$. Поэтому $\rho_{\mathfrak{X}}(x + \delta_k h_k, M) = 0$ и равенство (1.4) выполнено. Ограниченность последовательности h_k следует из неравенства (1.5).

Достаточность. Пусть выполнено условие (1.3). Тогда найдутся элемент $h \in \mathfrak{Y}$, сходящаяся к нулю последовательность $\{\delta_k\} \subset \mathbb{R}^+$ и ограниченная в $\mathfrak{X}$ последовательность $\{h_k\} \subset \mathfrak{X}$, сходящаяся к h по норме в $\mathfrak{Y}$ (то есть $\|h_k - h\|_{\mathfrak{Y}} \to 0$), удовлетворяющие равенству (1.4).

Построим отображение $t \to r(t)$. Предварительно отметим, что для произвольных δ_k и h_k существует элемент y_k множества M, удовлетворяющий неравенству

$$\|x + \delta_k h_k - y_k\|_{\mathfrak{X}} \leqslant 2\rho_{\mathfrak{X}}(x + \delta_k h_k, M). \tag{1.6}$$

Обозначим теперь $t_k = \delta_k$ и определим $r(t_k) = y_k - x - t_k h$. Из связности M имеем, что для произвольных y_k и y_{k+1} существует непрерывное отображение $t \to z_k(t) \in M$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$, соединяющее y_k и y_{k+1}. Определим $r(t)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ следующим образом: $r(t) \doteq z_k(t) - x - th$. Тогда $x + th + r(t) \in M$ для всех t.

Покажем, что для построенного таким образом отображения выполнены все свойства определения 1.2. Оценим норму $r(t_k)$. Для произвольного t_k имеем

$$\|r(t_k)\|_{\mathfrak{Y}} = \|y_k - x - t_k h\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \|y_k - x - t_k h_k\|_{\mathfrak{Y}} + t_k\|h - h_k\|_{\mathfrak{Y}}. \tag{1.7}$$

Далее, из условия A (см. с. 23) следует оценка

$$\|x + t_k h_k - y_k\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant k\|x + t_k h_k - y_k\|_{\mathfrak{X}}.$$

Подставив это неравенство в неравенство (1.7), получаем

$$\|r(t_k)\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant k\|y_k - x - t_k h_k\|_{\mathfrak{X}} + t_k\|h - h_k\|_{\mathfrak{Y}}.$$

Из этого неравенства и неравенства (1.6) следует, что

$$\|r(t_k)\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant 2k\rho_{\mathfrak{X}}(x + \delta_k h_k, M) + t_k\|h - h_k\|_{\mathfrak{Y}},$$

откуда, в силу свойств последовательности $\{(\delta_k, h_k)\}$ (1.4) и $\|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0$ имеем,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|r(t_k)\|_{\mathfrak{Y}}}{t_k} \leqslant \lim_{k\to+\infty} \frac{2k\rho_{\mathfrak{X}}(x + t_k h_k, M)}{t_k} + \lim_{k\to+\infty} \|h - h_k\|_{\mathfrak{Y}} = 0.$$

Из выбора y_k следует оценка

$$\left\|h + \frac{r(t_k)}{t_k}\right\|_{\mathfrak{X}} = \frac{\|y_k - x\|_{\mathfrak{X}}}{t_k} \leqslant \frac{\|y_k - x - t_k h_k\|_{\mathfrak{X}}}{t_k} + \|h_k\|_{\mathfrak{X}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + t_k h_k, M)}{t_k} + \|h_k\|_{\mathfrak{X}}.$$

Из ограниченности h_k и ограниченности последовательности

$$\left\{\frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + t_k h_k, M)}{t_k}\right\}_{k=1}^{+\infty},$$

получим неравенство

$$\sup_k \left\|h + \frac{r(t_k)}{t_k}\right\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Таким образом, $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$. $\square$

Следствие 1.1. *Множество $T_x^{\mathfrak{Y}} M$ является конусом.*

Доказательство. Пусть $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$. Докажем, что $\lambda h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$ для всех $\lambda > 0$. По лемме 1.1 найдется константа $c > 0$ такая, что

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0+,\, B_{\mathfrak{X}}[0,c] \ni g \to h} \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \varepsilon g, M)}{\varepsilon} = 0,$$

то есть найдутся $\{\varepsilon_i, g_i\}$ такие, что

$$\|g_i\|_{\mathfrak{X}} < c, \quad \|g_i - h\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad \varepsilon_i \to 0+ \quad \text{и} \quad \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \varepsilon_i g_i, M)}{\varepsilon_i} < \frac{1}{i}.$$

Возьмем $\delta_i \doteq \varepsilon_i/\lambda$, $h_i \doteq \lambda g_i$. Получаем, что $\|h_i - \lambda h\|_{\mathfrak{Y}} \to 0$, $\|h_i\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \lambda c$ и

$$\frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \delta_i h_i, M)}{\delta_i} = \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \varepsilon_i g_i, M)}{(\varepsilon_i/\lambda)} < \frac{\lambda}{i}.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0+,\, B_{\mathfrak{X}}[0,\lambda c] \ni g \to \lambda h} \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \varepsilon g, M)}{\varepsilon} \leqslant \lim_{i \to +\infty} \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \delta_i h_i, M)}{\delta_i} = 0.$$

По лемме (1.1) имеем, что $\lambda h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$. $\square$

Практически повторив доказательство леммы 1.1 получим теорему, которая дает эквивалентное определение касательного конуса.

Теорема 1.1. *Элемент $h \in \mathfrak{Y}$ принадлежит множеству $T_x^{\mathfrak{Y}} M$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{(\delta_i, h_i)\}$, где $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, $h_i \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$x + \delta_i h_i \in M, \quad \delta_i \to 0, \quad \|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad \sup_i \|h_i\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Напомним определение конуса Булигана.

О п р е д е л е н и е 1.3 (см. [36, с. 7]). Пусть M — непустое, подмножество пространства $\mathfrak{X}$ и $x \in M$. Элемент $h \in \mathfrak{X}$ называется *касательным направлением к M в точке x*, если имеет место равенство

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \varepsilon h, M)}{\varepsilon} = 0.$$

Множество $T_x M$ касательных направлений к M в точке x называется конусом Булигана.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию А (см. с. 23) и M — непустое подмножество $\mathfrak{X}$. Отметим теперь, что конус Булигана к множеству M в точке $x \in M$ можно строить как в пространстве $\mathfrak{X}$, так и в пространстве $\mathfrak{Y}$ (поскольку $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$). Эти два конуса могут не совпадать поэтому, при необходимости, конус Булигана в точке x к множеству M в пространстве $\mathfrak{X}$ будем обозначать $(T_x M)^{\mathfrak{X}}$ (следовательно, $(T_x M)^{\mathfrak{X}} = T_x M$), а в пространстве $\mathfrak{Y}$ — $(T_x M)^{\mathfrak{Y}}$.

Теорема 1.2 (см. [36, с. 8]). *Пусть M — непустое подмножество $\mathfrak{X}$. Элемент $h \in \mathfrak{X}$ принадлежит конусу Булигана $T_x M$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{(\delta_i, h_i)\}$ такая, что*

$$x + \delta_i h_i \in M, \quad \delta_i \to 0+, \quad \|h - h_i\|_{\mathfrak{X}} \to 0.$$

Лемма 1.2. *Пусть пространства* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *удовлетворяют условию A (см. с. 23),* M *— подмножество* $\mathfrak{X}$, $x \in M$. *Тогда для конуса* $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ *(см. определение* 1.2 *) имеют место включения*

$$(T_x M)^{\mathfrak{X}} \subset T_x^{\mathfrak{Y}} M \subset (T_x M)^{\mathfrak{Y}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in (T_x M)^{\mathfrak{X}}$. По теореме 1.2 существует последовательность $\{(\delta_i, h_i)\}$ такая, что

$$\delta_i \to 0+, \quad \|h - h_i\|_{\mathfrak{X}} \to 0 \quad \text{и} \quad x + \delta_i h_i \in M.$$

Эта последовательность будет удовлетворять условиям $\|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0$ (из свойств пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$), а в силу сходимости $\|h - h_i\|_{\mathfrak{X}} \to 0$ имеем, что $\{h_i\}$ ограничена в $\mathfrak{X}$. Таким образом, последовательность $\{(\delta_i, h_i)\}$, удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1 и, следовательно, $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$.

Если $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$, то по теореме 1.1 существует последовательность $\{(\delta_i, h_i)\}$ такая, что

$$\delta_i \to 0+, \quad \|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad x + \delta_i h_i \in M, \quad \sup_i \|h_i\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

В силу теоремы 1.2, первых трех условий достаточно для того, чтобы $h \in (T_x M)^{\mathfrak{Y}}$. □

Следствие 1.2. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, то

$$(T_x M)^{\mathfrak{X}} = T_x^{\mathfrak{Y}} M = (T_x M)^{\mathfrak{Y}},$$

то есть при $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ конус $T_x^{\mathfrak{X}} M$ есть конус Булигана $(T_x M)^{\mathfrak{X}}$.

Следующие утверждения позволяют указать связь между касательными направлениями из конуса Булигана и направлениями из определения 1.2.

Лемма 1.3. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *удовлетворяют условию* A *(см. с. 23), и* M *— подмножество* $\mathfrak{X}$. *Тогда для всякой точки* $x \in M$ *имеет место включение*

$$\bigcup_{r>0} \mathrm{cl}^{\mathfrak{Y}}\big((T_x M)^{\mathfrak{X}} \cap B_{\mathfrak{X}}[0,r]\big) \subset T_x^{\mathfrak{Y}} M.$$

Доказательство. Пусть $h \in \bigcup\limits_{r>0} \mathrm{cl}^{\mathfrak{Y}}\big((T_x M)^{\mathfrak{X}} \cap B_{\mathfrak{X}}[0,r]\big)$. Тогда найдется $r > 0$, что $h \in \mathrm{cl}^{\mathfrak{Y}}\big((T_x M)^{\mathfrak{X}} \cap B_{\mathfrak{X}}[0,r]\big)$, то есть найдется последовательность $\{h_i\} \subset (T_x M)^{\mathfrak{X}}$, ограниченая по норме в $\mathfrak{X}$ ($\sup\limits_i \|h_i\|_{\mathfrak{X}} \leqslant r$), и сходящаяся к h в $\mathfrak{Y}$ ($\|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0$). Для всякого h_i имеем равенство

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \varepsilon h_i, M)}{\varepsilon} = 0,$$

откуда получаем, что для любого числа $1/i$ и h_i найдется $\delta_i > 0$ такое, что

$$\frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \delta_i h_i, M)}{\delta_i} < \frac{1}{i},$$

причем δ_i можно выбрать так, что $\delta_{i+1} < \delta_i$ и $\delta_i \to 0$. Таким образом, мы построили последовательность $\{(\delta_i, h_i)\}$ такую, что $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, $h_i \in \mathfrak{X}$,

$$\delta_i \to 0, \quad \|h_k - h\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad \|h_i\|_{\mathfrak{X}} < r, \quad \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \delta_i h_i, M)}{\delta_i} < \frac{1}{i}.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0+,\, B_{\mathfrak{X}}[0,r] \ni g \to h} \frac{\rho_{\mathfrak{X}}(x + \varepsilon g, M)}{\varepsilon} = 0.$$

По лемме 1.1 получаем, что $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$. □

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *удовлетворяют условию* A *(см. с. 23), и* M *— подмножество* $\mathfrak{X}$. *Тогда для всякой точки* $x \in M$ *имеет место включение*

$$T_x^{\mathfrak{Y}} M \subset \big(T_x M\big)^{\mathfrak{Y}} \bigcap \left(\bigcup_{r>0} \mathrm{cl}^{\mathfrak{Y}}(B_{\mathfrak{X}}[0,r])\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in T_x^{\mathfrak{Y}}M$. Тогда по лемме 1.2 имеет место включение $h \in (T_xM)^{\mathfrak{Y}}$. По теореме 1.1 найдется последовательность $\{h_i\}$, удовлетворяющая следующим условиям: $\|h - h_i\|_{\mathfrak{Y}} \to 0$, $\sup\limits_i \|h_i\|_{\mathfrak{X}} = c < +\infty$. Поэтому $h \in \operatorname{cl}^{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}}[0, c]$.

Получили следующее включение

$$h \in (T_xM)^{\mathfrak{Y}} \bigcap \big(\operatorname{cl}^{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}}[0, c]\big),$$

доказывающее лемму. $\square$

§ 2. Постановка задачи выживания

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

и некоторое непустое подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$. Напомним определение выживаемости.

О п р е д е л е н и е 2.1 (см. [36, с. 9]). Пусть $x_0 \in M$. Решение $x(t, x_0)$ системы (2.1) с начальным условием $x(0) = x_0$ *выживает* в множестве M, если существует $\alpha > 0$ такое, что $x(t) \in M$ для всех $t \in [0, \alpha]$.

О п р е д е л е н и е 2.2 (см. [36, с. 9]). Множество M обладает *свойством выживаемости* для системы (2.1), если для всякого $x_0 \in M$ найдется решение $x(t, x_0)$ системы (2.1), выживающее в M.

Следующее утверждение известно как теорема Нагумо.

Теорема 2.1 (см. [36, с. 11]). *Замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством выживаемости для системы* (2.1) *тогда и только тогда, когда для всех $x \in \partial M$ выполнено включение*

$$f(x) \in T_x M$$

где $T_x M$ — конус Булигана к множеству M в точке x.

В теории дифференциальных включений $\dot{x} \in F(x)$ с фазовыми ограничениями известна теорема (см. [40]), дающая необходимое и достаточное условие существования выживающего решения дифференциального включения в множестве M. Оказывается, это условие похоже на условие в теореме Нагумо, а именно: *дифференциальное включение имеет выживающее* *решение в множестве M если и только если во всех $x \in \partial M$ имеет место неравенство*

$$F(x) \cap T_x M \neq \varnothing,$$

где $T_x M$ — конус Булигана.

Обратимся теперь к автономной системе дифференциальных уравнений с последействием $\dot{x}(t) = f(x_t)$. В соответствии с трактовкой Н. Н. Красовского [20], предложившего рассматривать в качестве естественного фазового пространства систем с последействием пространство непрерывных функций, задачу выживания для систем с последействием мы будем формулировать как задачу выживания в заданном подмножестве пространства непрерывных функций.

Введем следующие обозначения. Для произвольной непрерывной функции $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, \alpha]$, где $r > 0$, $\alpha > 0$, обозначим x_t — отображение отрезка $[0, \alpha]$ в пространство непрерывных функций $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, действующее по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in [0, \alpha], \quad s \in [-r, 0]. \tag{2.2}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с последействием

$$\dot{x} = f(x_t). \tag{2.3}$$

Напомним определение решения системы (2.3) с начальным условием

$$x_0 = \varphi, \tag{2.4}$$

где $\varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 2.3 (см. [35, с. 11]). *Решением задачи Коши* (2.3), (2.4) называется непрерывная функция $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, где $t \in [-r, \alpha]$, $\alpha > 0$ такая, что для всех $t \in [-r, 0]$ выполнено равенство $x(t) = \varphi(t)$ и для почти всех $t \in [0, \alpha]$ выполнено $\dot{x}(t) = f(x_t)$.

Вместе с системой (2.3) будем рассматривать некоторое непустое подмножество $M \subset AC([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Определение 2.4. Пусть $\varphi \in M$. Будем говорить, что решение $x(t,\varphi)$ задачи Коши (2.3), (2.4) *выживает* в множестве M, если существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $t \in [0,\alpha]$ выполнено включение $x_t \in M$, где x_t — движение в пространстве $AC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ определеное равенством (2.2).

Определение 2.5. Множество M обладает *свойством выживаемости* для системы (2.3), если для всякого $\varphi \in M$ найдется решение $x(t,\varphi)$ задачи Коши (2.3), (2.4), выживающее в M.

В данной работе существенное внимание уделено исследованию необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять автономная система (2.3) и множество M, чтобы множество M было множеством выживаемости для (2.3). Аналогичный вопрос изучается для неавтономной системы $\dot{x}(t) = f(t,x_t)$. Кроме того, в работе изучаются задачи выживания для дифференциальных включений с последействием (что позволит в будущем рассматривать задачи выживания для управляемых систем с последействием). Важное внимание уделено также рассмотрению примера с множеством M, имеющим конкретное экономическое содержание.

Следует отметить, что задача выживания имеет многочисленные приложения. В частности, в математической экономике представляет интерес исследование условий, при которых конкретная экономическая система функционирует в заранее заданных ограничениях. Эти ограничения определяются плановым заданием и возможностями самой экономики. Математическое описание экономических моделей чаще всего приводит к соответствующим системам дифференциальных уравнений. Существенно при этом, что при внимательном моделировании экономических моделей мы вынуждены учитывать всегда присутствующий в экономике эффект запаздывания (инвестиции, вложенные в экономику, приносят доход не сразу, а через некоторый промежуток времени). Таким образом, мы вынуждены моделировать экономические процессы с помощью уравнений с последействием. На важность этого обстоятельства и актуальность задачи выживания движения x_t, порожденного решением дифференциального уравнения с последействием обратили внимание участников городского семинара по дифференциальным уравнениям и теории управления пермские математики В. П. Максимов [1, с. 263] и Д. Л. Андрианов [2], [3]. Первые из известных нам работ по теории выживания для дифференциальных систем с последействием принадлежат J.-P. Aubin [36, глава 6] и Е. Л. Тонкову [29].

Близкими к задачам выживания являются задачи о построении стабильных мостов в дифференциальных играх сближения-уклонения. Оказывается, что стабильные мосты можно строить в терминах конуса Булигана (см. работу В. Н. Ушакова [30]). В связи с задачами описания стабильных мостов в Екатеринбурге (в ИММ УрО РАН) под руководством А. Б. Куржанского, Т. Ф. Филипповой и В. Н. Ушакова активно развивается теория выживания для дифференциальных включений [14], [15], [16], [24], [25], [34]. Важное внимание в этих работах уделяется построению ядра выживания и разработке численных алгоритмов, позволяющих строить ядро выживания для конкретных математических объектов.

§ 3. Основная теорема

В этом разделе найдены условия (теорема 3.2), при которых для заданных непустого множества $M \subset \mathfrak{X}$ и функции $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, порождающей уравнение

$$\delta x_t = F(x_t), \tag{3.1}$$

найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x_t$ уравнения (3.1) удовлетворяющее при всех $t \in [0, \alpha]$ включению $x_t \in M$.

Следующая теорема дает нам необходимые условия выживания.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию A (см. с. 23), и заданы множество M в $\mathfrak{X}$ и непрерывное отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Пусть далее, для всех точек $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение $t \to x_t \in M$, $t \in [0, \alpha]$ такое, что $x_0 = \varphi$ и $\delta x_t = F(x_t)$ для почти всех $t \in [0, \alpha)$, то есть существует выживающее в M решение (3.1) с начальным условием $x_0 = \varphi$.*

Тогда для всех точек $\varphi \in M$ имеет место включение

$$F(x) \in T_x^{\mathfrak{Y}} M.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку $\varphi \in M$. По условию теоремы существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение $t \to x_t \in M$, $t \in [0, \alpha]$ такое, что $x_0 = \varphi$ и $\delta x_t = F(x_t)$ для почти всех $t \in [0, \alpha)$, в частности

$$\delta x_0 = F(\varphi).$$

По определению 1.1 вариации δx_t это означает, что отображение x_t представимо в виде

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon \delta x_0 + r(\varepsilon),$$

или

$$x_\varepsilon = \varphi + \varepsilon F(\varphi) + r(\varepsilon),$$

для $\varepsilon \in [0, \vartheta]$, $\vartheta \in (0, \alpha]$, и выполнены условия

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\|r(\varepsilon)\|_{\mathfrak{Y}}}{\varepsilon} = 0, \quad \sup_{\varepsilon > 0} \left\| \delta x_0 + \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\|_{\mathfrak{X}} < +\infty. \tag{3.2}$$

Это означает, что для точки $\varphi \in M$ и элемента $F(\varphi) \in \mathfrak{Y}$ нашлось отображение $\varepsilon \to r(\varepsilon) \in \mathfrak{Y}$ такое, что

$$\varphi + \varepsilon F(\varphi) + r(\varepsilon) \in M,$$

и имеют место свойства (3.2). По определению 1.2 получаем, что $F(\varphi)$ является касательным направлением к множеству M в точке x. Следовательно, имеет место включение

$$F(\varphi) \in T_\varphi^{\mathfrak{Y}} M$$

для всех $\varphi \in M$. □

Напомним, что множество $M \subset \mathfrak{X}$ называется локально компактным, если для всякой точки $x \in M$ найдется число $r > 0$ такое, что множество $B_{\mathfrak{X}}[x, r] \cap M$ — компактно.

Отметим теперь, что функция $r(t)$ и последовательность $\{t_i\}$ в определении 1.2 зависят от точки x и элемента h. Поэтому, при необходимости, мы будем пользоваться записью $r(t, x, h)$ и $t_i(x, h)$. Если $h = F(x)$, то для краткости записи будем писать

$$r(t, x) \doteq r(t, x, F(x)),$$

$$t_i(x) \doteq t_i(x, F(x)).$$

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию A (см. с. 23), и заданы локально компактное множество M в $\mathfrak{X}$ и непрерывное отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Пусть далее:*

1) *для каждого* $x \in M$ *имеет место включение* $F(x) \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$;

2) *найдется константа* $c > 0$ *такая, что для всех* $x \in M$ *выполнено неравенство*

$$\sup_i \Big\| F(x) + \frac{r(t_i(x), x)}{t_i(x)} \Big\|_{\mathfrak{X}} < c.$$

Тогда для всякого $\varphi \in M$ *существуют число* $\alpha > 0$ *и непрерывное отображение* $t \to x_t \in M$, $t \in [0, \alpha]$ *такое, что* $x_0 = \varphi$ *и* $\delta x_t = F(x_t)$ *для почти всех* $t \in [0, \alpha)$.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда, для любой точки* $x \in M$ *и всякого целого* m *существуют число* $\varepsilon(x, m) \in (0, 1/m)$ *и элемент* $u(x, m) \in \mathfrak{X}$ *такие, что имеют место свойства:*

1) $x + \varepsilon(x, m) u(x, m) \in M$;

2) $u(x, m) \in B_{\mathfrak{Y}} \Big[F \Big(B_{\mathfrak{X}}[x, 1/m] \Big), 1/m \Big]$;

3) *при каждом натуральном* m *функция* $x \to \varepsilon(x, m)$ *ограничена снизу некоторым положительным числом, то есть* $\inf\limits_{x \in M} \varepsilon(x, m) = \vartheta_m > 0$;

4) $\sup\limits_{m \in \mathbb{N},\, x \in M} \|u(x, m)\|_{\mathfrak{X}} < +\infty$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $y \in M$. Тогда из условия $F(y) \in T_y^{\mathfrak{Y}} M$ и теоремы 1.1 следует, что существуют число $\delta_y \in (0, 1/m)$ и элемент $h_y \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$y + \delta_y h_y \in M, \tag{3.3}$$

$$\|h_y - F(y)\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{2m}, \tag{3.4}$$

$$\|h_y\|_{\mathfrak{X}} < c. \tag{3.5}$$

Рассмотрим $B_{\mathfrak{X}}(y, \eta_y)$, где $y \in M$, η_y определено равенством

$$\eta_y = \frac{\delta_y}{2(k+1)m}.$$

В силу условия теоремы о локальной компактности пространства M, не ограничивая общности будем считать, что само пространство M компактно (в противном случае будем рассматривать пересечение M с некоторым замкнутым шаром). Следовательно, найдется конечное покрытие $\{B_{\mathfrak{X}}(y_j, \eta_{y_j})\}$ множества M. Далее, для каждого $x \in M$ найдется j, что $x \in B_{\mathfrak{X}}(y_j, \eta_{y_j})$. Обозначим

$$\varepsilon(x,m) \doteq \delta_{y_j}, \quad u(x,m) \doteq h_{y_j} + \frac{y_j - x}{\delta_{y_j}}.$$

Докажем, что пара $\varepsilon(x,m)$ и $u(x,m)$ — искомая для x и m. Действительно, из определения $u(x,m)$ получаем

$$x + \varepsilon(x,m)u(x,m) = x + \delta_{y_j}\big(h_{y_j} + \frac{y_j - x}{\delta_{y_j}}\big) = y_j + \delta_{y_j} h_{y_j}.$$

Из включения (3.3) следует, что

$$x + \varepsilon(x,m)u(x,m) \in M.$$

Первое утверждение леммы выполнено.

Далее, имеем оценку

$$\|u(x,m) - F(y_j)\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \|u(x,m) - h_{y_j}\|_{\mathfrak{Y}} + \|h_{y_j} - F(y_j)\|_{\mathfrak{Y}}.$$

Первое слагаемое в правой части оценим сверху, используя определения $u(x,m)$ и η_{y_j} :

$$\|u(x,m) - h_{y_j}\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \frac{\|y_j - x\|_{\mathfrak{Y}}}{\delta_{y_j}} \leqslant \frac{k\|y_j - x\|_{\mathfrak{X}}}{\delta_{y_j}} \leqslant \frac{k\eta_{y_j}}{\delta_{y_j}} \leqslant \frac{k}{2(k+1)m} \leqslant \frac{1}{2m}.$$

Второе слагаемое из неравенства (3.4) ограничено

$$\|h_{y_j} - F(y_j)\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \frac{1}{2m}.$$

Следовательно

$$\|u(x,m) - F(y_j)\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Поэтому, из включения $y_j \in B_{\mathfrak{X}}(x, \eta_{y_j})$ имеем:

$$u(x,m) \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F\Big(B_{\mathfrak{X}}[x, 1/m]\Big), 1/m\Big].$$

Второе утверждение леммы выполнено.

Пусть

$$\theta_m = \min_j \delta_{y_j}.$$

Так как $\{B_{\mathfrak{X}}(y_j, \eta_{y_j})\}$ — конечное покрытие множества M и каждое число $\delta_{y_i} > 0$, то $\theta_m > 0$. Поэтому, в силу равенства $\varepsilon(x,m) = \delta_{y_i}$ имеем

$$\inf_{x \in M} \varepsilon(x,m) = \vartheta_m > 0.$$

Третье утверждение леммы выполнено.

Для любых x и m имеет место оценка

$$\|u(x,m)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \|h_{y_j}\|_{\mathfrak{X}} + \frac{\|y_j - x\|_{\mathfrak{X}}}{\delta_{y_j}},$$

из неравенства (3.5) следует, что

$$\|u(x,m)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c + \frac{1}{2m(k+1)},$$

откуда получаем неравенство $\sup\limits_{m \in \mathbb{N},\, x \in M} \|u(x,m)\|_{\mathfrak{X}} < +\infty$. Таким образом, четвертое утверждение леммы тоже выполнено. □

Перейдем к доказательству теоремы 3.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку φ пространства M. Обозначим $\alpha = r/c$, где $r = \max\limits_{x \in M} \|x - \varphi\|_{\mathfrak{X}}$.

На основании леммы 3.1, для всякого $m \in \mathbb{N}$ построим целое число j, конечный набор чисел $\varepsilon_1^m \dots \varepsilon_j^m \in (\theta_m, 1/m)$ и элементов $x_1^m \dots x_j^m \in M$, где

$$x_0^m = \varphi, \quad x_{i+1}^m = x_i^m + \varepsilon_i^m u_i^m,$$
$$u_i^m \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F\Big(B_{\mathfrak{X}}[x_i^m, 1/m]\Big), 1/m\Big], \quad i = 1 \dots j, \tag{3.6}$$

причем индекс j определяется из неравенства $\sum\limits_{i=0}^{j-1} \varepsilon_i^m \geqslant \alpha$.

Согласно лемме 3.1, для любых целых i и m имеет место неравенство $\|u_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c$. Тогда для всякого i выполнено включение $x_i^m \in B_{\mathfrak{X}}[\varphi, r]$. Действительно,

$$\|x_i^m - \varphi\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \sum_{q=0}^{i-1} \|x_{q+1}^m - x_q^m\|_{\mathfrak{X}} = \sum_{q=0}^{i-1} \varepsilon_i^m \|u_q^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c \sum_{q=0}^{i-1} \varepsilon_i^m = r.$$

Положим

$$\tau_i^m \doteq \varepsilon_0^m + \cdots + \varepsilon_i^m.$$

На каждом из отрезков $[\tau_i^m, \tau_{i+1}^m]$ построим линейную функцию

$$x_t^m \doteq x_i^m + (t - \tau_i^m) u_i^m.$$

Тогда для всех $t \in [\tau_i^m, \tau_{i+1}^m]$ имеет место неравенство

$$\|x_t^m - x_i^m\|_{\mathfrak{X}} = (t - \tau_i^m)\|u_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \varepsilon_i^m \|u_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \frac{c}{m}. \tag{3.7}$$

Далее, для всякого $t \in [\tau_i^m, \tau_{i+1}^m)$ справедливо равенство $\delta x_t^m = u_j^m$, поэтому на основании (3.6), (3.7) имеем, что для всякой точки $t \in [0, \alpha]$

$$x_t^m \in B_{\mathfrak{X}}(M, c/m), \tag{3.8}$$

$$\delta x_t^m \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F(B_{\mathfrak{X}}[x_t^m, c/m]), 1/m\Big]. \tag{3.9}$$

Докажем, что последовательность функций x_t^m, $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела. Ясно, что для всякого целого m отображение $t \to x_t^m \in \operatorname{conv} M$, $t \in [0, \alpha]$, где $\operatorname{conv} M$ — выпуклая оболочка M, действует из компакта в компакт.

Далее, равномерная ограниченность последовательности $\{x_t^m\}$ следует из включения (3.8).

Докажем теперь, что последовательность равностепенно непрерывна. Рассмотрим произвольную функцию x_t^m. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для всяких $t_1,\ t_2 \in [0,\alpha]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \varepsilon$ количество узлов $\tau_i^m \in [t_1, t_2]$ не превосходит $(m+1)\varepsilon$. Следовательно

$$\|x_{t_1}^m - x_{t_2}^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \frac{c(m+1)\varepsilon}{m}.$$

По теореме Арцела существует движение $t \to x_t \in M,\ t \in [0,\alpha]$ такое, что $\|x_t - x_t^m\|_{\mathfrak{X}} \to 0$ равномерно на $[0,\alpha]$. Поэтому из неравенства (3.8) следует, что $x_t \in M$.

Далее, имеет место оценка

$$\|\delta x_t^m - F(x_t)\|_{\mathfrak{Y}} = \|u_i^m - F(x_t)\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \|u_i^m - F(x_i^m)\|_{\mathfrak{Y}} + \|F(x_i^m) - F(x_t)\|_{\mathfrak{Y}}.$$

Следовательно, из включения (3.6) получаем $\|u_i^m - F(x_i^m)\|_{\mathfrak{Y}} \to 0$, то есть первое слагаемое стремится к 0 равномерно по t. Далее, из неравенства (3.7), непрерывности $F(x)$ и оценки

$$\|x_t - x_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \|x_t - x_t^m\|_{\mathfrak{X}} + \|x_t^m - x_i^m\|_{\mathfrak{X}},$$

получаем, что и второе слагаемое равномерно по t стремится к 0.

Тем самым $x_t^m \to x_t$ и $\delta x_t^m \to F(x_t)$ равномерно по t.

Докажем, что для всех $t \in [0,\alpha)$ выполнено равенство $\delta x_t = F(x_t)$. Фиксируем $t_0 \in [0,\alpha)$. Для выполнения равенства $\delta x_{t_0} = F(x_{t_0})$ достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых Δt выполнены неравенства

$$\left\| \frac{x_{t_0+\Delta t} - x_{t_0}}{\Delta t} - F(x_{t_0}) \right\|_{\mathfrak{Y}} < \varepsilon, \quad \left\| \frac{x_{t_0+\Delta t} - x_{t_0}}{\Delta t} \right\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Так как $\|x_t^m - x_t\|_{\mathfrak{X}} \to 0$ равномерно по t, для выполнения этого неравенства достаточно доказать, что при достаточно больших m имеют место неравенства

$$\left\|\frac{x^m_{t_0+\Delta t}-x^m_{t_0}}{\Delta t}-F(x_{t_0})\right\|_{\mathfrak{Y}}<\varepsilon,\quad \left\|\frac{x^m_{t_0+\Delta t}-x^m_{t_0}}{\Delta t}\right\|_{\mathfrak{X}}<+\infty.$$

Из непрерывности $F(\varphi)$ имеем, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\eta>0$ такое, что $\|F(\varphi)-F(x_{t_0})\|_{\mathfrak{Y}}<\varepsilon$ для всех $\|\varphi-x_{t_0}\|_{\mathfrak{X}}<(4c+1)\eta$.

Возьмем m достаточно большим, чтобы $1/m<\eta$ и $\|x^m_t-x_t\|_{\mathfrak{X}}<2c\eta$ для всех $t\in[0,\alpha)$, и возьмем $\Delta t<\eta$.

Найдутся номера i_1 и i_2 такие, что

$$\tau^m_{i_1}\leqslant t_0<\tau^m_{i_1+1}<\dots<\tau^m_{i_2-1}<t_0+\Delta t\leqslant\tau^m_{i_2}.$$

Докажем, что для всех номеров $i_1\leqslant s\leqslant i_2$ выполнено включение

$$B_{\mathfrak{X}}[x^m_s,1/m]\subset B_{\mathfrak{X}}[x_{t_0},4(c+1)\eta]. \tag{3.10}$$

Все τ^m_s, $s=i_1,\dots,i_2$ отличаются от t_0 менее, чем на 2η. Следовательно,

$$\|x^m_s-x_{t_0}\|_{\mathfrak{X}}\leqslant\|x^m_s-x^m_{t_0}\|_{\mathfrak{X}}+\|x^m_{t_0}-x_{t_0}\|_{\mathfrak{X}}<2c\eta+2c\eta=4c\eta.$$

Таким образом, $x^m_s\in B_{\mathfrak{X}}[x_{t_0},4c\eta]$ и требуемое включение выполнено.

Напомним, что на каждом из отрезков $[\tau^m_s,\tau^m_{s+1}]$, $s=i_1,\dots,i_2-1$, отображение x^m_t линейно и имеет вид

$$x^m_t=x^m_{t_s}+(t-t_s)u^m_s,\quad t\in[\tau^m_s,\tau^m_{s+1}].$$

Тогда, на отрезке $[t_0,t_0+\Delta t]$ имеют место равенства:

$$\begin{array}{rcll} x^m_t-x^m_{t_0} & = & (t-t_0)u^m_{i_1}, & t\in[t_0,\tau^m_{i_1+1}],\\ x^m_t-x^m_{i_1+1} & = & (t-\tau^m_{i_1+1})u^m_{i_1+1}, & t\in[\tau^m_{i_1+1},\tau^m_{i_1+2}],\\ & & \dots & \\ x^m_t-x^m_{i_2-1} & = & (t-\tau^m_{i_2-1})u^m_{i_2-1}, & t\in[\tau^m_{i_2-1},t_0+\Delta t]. \end{array}$$

По построению, для всех u_i^m имеет место оценка

$$\|u_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c.$$

Следовательно, для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ выполнены неравенства

$$\|x_t^m - x_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c(t - \tau_i),$$

сложив которые, получим

$$\|x_t^m - x_{t_0}^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c(t - t_0).$$

Поделив обе части на $t - t_0$ и обозначив $\Delta t = t - t_0$, получаем неравенство

$$\left\| \frac{x_{t_0+\Delta t}^m - x_{t_0}^m}{\Delta t} \right\|_{\mathfrak{X}} < c$$

для всех $\Delta t < \eta$. Перейдя к пределу $m \to +\infty$, получим неравенство

$$\left\| \frac{x_{t_0+\Delta t} - x_{t_0}}{\Delta t} \right\|_{\mathfrak{X}} < c.$$

Таким образом, второе неравенство из определения δx_t выполнено.

Докажем, что первое также имеет место. Для всех $i_1 \leqslant s \leqslant i_2 - 1$ по определению u_s^m имеем

$$u_s^m \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F\Big(B_{\mathfrak{X}}[x_s^m, 1/m]\Big), 1/m\Big],$$

то есть найдется $y \in B_{\mathfrak{X}}[x_s^m, 1/m]$ такое, что

$$\|u_s^m - F(y)\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant 1/m.$$

С другой стороны, из включения (3.10) имеем, что $y \in B_{\mathfrak{X}}[x_{t_0}, 4(c+1)\eta]$ и по построению η получаем

$$\|F(y) - F(x_{t_0})\|_{\mathfrak{Y}} < \varepsilon.$$

Таким образом, для всех u_s^m выполнено

$$\|u_s^m - F(x_{t_0})\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \|u_s^m - F(y)\|_{\mathfrak{Y}} + \|F(y) - F(x_{t_0})\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant 1/m + \varepsilon.$$

Следовательно, все неравенства

$$\|x_t^m - x_s^m - (t-\tau_s^m)F(x_{t_0})\|_{\mathfrak{Y}} = (t-\tau_s^m)\|u_s^m - F(x_{t_0})\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant (t-\tau_s^m)(1/m+\varepsilon)$$

можно сложить и получить, что для достаточно больших m и $\Delta t < \eta$ имеет место неравенство

$$\|x_{t_0+\Delta t}^m - x_{t_0}^m - \Delta t F(x_{t_0})\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \Delta t(1/m+\varepsilon).$$

Перейдя к пределу по m и поделив обе части на Δt, получаем требуемую оценку

$$\left\|\frac{x_{t_0+\Delta t} - x_{t_0}}{\Delta t} - F(x_{t_0})\right\|_{\mathfrak{Y}} < \varepsilon.$$

□

В формулировке теоремы 3.2 отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ предполагается непрерывным на пространстве $\mathfrak{X}$. Интерес представляет случай, когда отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ не является непрерывным. Оказывается, что для доказательства теоремы достаточно замкнутости отображения F. Напомним определение замкнутого отображения.

О п р е д е л е н и е 3.1 (см. [27, с. 276]). Отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ называется *замкнутым* отображением, если график $\Gamma(F)$ является замкнутым множеством, где график $\Gamma(F)$ — множество пар вида

$$\Gamma(F) \doteq \{(\sigma, F(\sigma)) : \quad \sigma \in D(F)\},$$

а $D(F) \subset \mathfrak{X}$ — область определения отображения F.

Другими словами, отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ является замкнутым если и только если из условий

$$\|\sigma_i - \sigma\|_{\mathfrak{X}} \to 0, \quad \{\sigma_i\} \subset D(F),$$

$$\|F(\sigma_i) - f\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad f \in \mathfrak{Y}$$

следует, что $\sigma \in D(F)$ и имеет место равенство $F(\sigma) = f$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *удовлетворяют условию* A (*см. с.* 23), *и задано замкнутое отображение* $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *с областью определения* $D(F)$. *Пусть далее, задано локально компактное множество* M *в* $D(F)$ *и выполнены условия:*

1) *для каждого* $x \in M$ *имеет место включение* $F(x) \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$;

2) *найдется константа* $c > 0$ *такая, что для всех* $x \in M$ *выполнено неравенство*

$$\sup_i \Big\| F(x) + \frac{r(t_i(x), x)}{t_i(x)} \Big\|_{\mathfrak{X}} < c.$$

Тогда для всякого $\varphi \in M$ *существуют число* $\alpha > 0$ *и непрерывное отображение* $t \to x_t \in M$, $t \in [0, \alpha]$ *такое, что* $x_0 = \varphi$ *и* $\delta x_t = F(x_t)$ *для почти всех* $t \in [0, \alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях теоремы утверждение леммы 3.1 остается верным и ее доказательство проводится практически без изменений. Поправки в доказательстве леммы происходят в местах, где используется непрерывность отображения F, понимаемая в следующем смысле: *для всяких* $\hat{x} \in D(F)$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что из условий* $\|x - \hat{x}\|_{\mathfrak{X}} < \delta \quad x \in D(F)$ *следует неравенство* $\|F(x) - F(\hat{x})\|_{\mathfrak{Y}} < \varepsilon$.

Доказательство самой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 3.2. Это позволяет сделать локальная компактность множества M, так как все предельные переходы сохраняются. $\square$

Глава 2

Задача выживания для системы уравнений с последействием

§ 4. Задача выживания для уравнений с последействием

Для произвольной функции

$$\tau \to x(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \in [-r, \vartheta], \quad r > 0, \quad \vartheta > 0$$

обозначим

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad s \in [-r, 0], \quad t \in [0, \vartheta].$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\mathfrak{X} = AC([-r, 0], \mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} = L_1([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n.$$

Нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$ соответственно равны

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{X}} = \sup_{s \in [-r,0]} |\varphi(s)| + \int_{-r}^{0} |\dot{\varphi}(s)| ds,$$

$$\|(\varphi, b)\|_{\mathfrak{Y}} = \max\{\int_{-r}^{0} |\varphi(s)| ds, |b|\}.$$

Напомним, что условие A означает включение $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ и выполнение неравенства $\sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{X}, \varphi \neq 0} \dfrac{\|\varphi\|_{\mathfrak{Y}}}{\|\varphi\|_{\mathfrak{X}}} < +\infty$. Для выполнения этого условия будем рассматривать элемент $\varphi \in \mathfrak{X}$, как пару

$$(\varphi(\cdot), \varphi(0)) \in \tilde{\mathfrak{X}},$$

где
$$\tilde{\mathfrak{X}} \doteq \{(\varphi(\cdot), b) \in AC([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : \quad b = \varphi(0)\}$$
с нормой
$$\|(\varphi(\cdot), b)\|_{\tilde{\mathfrak{X}}} = \max\{\|\varphi\|_{\mathfrak{X}}, |b|\}.$$
В дальнейшем будем отождествлять $\mathfrak{X}$ и $\tilde{\mathfrak{X}}$. В этом случае пространство $\mathfrak{X}$ является подмножеством пространства $\mathfrak{Y}$ и требуемое неравенство $\sup\limits_{\varphi\in\mathfrak{X},\varphi\neq 0} \dfrac{\|\varphi\|_{\mathfrak{Y}}}{\|\varphi\|_{\mathfrak{X}}} < +\infty$ выполнено.

Пусть имеется задача Коши для уравнения с последействием
$$\dot{x}(t) = f(x_t), \quad x_0 = \varphi. \tag{4.1}$$

Введем в рассмотрение отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, определенное равенством
$$F(\sigma) \doteq (\dot{\sigma}(\cdot), f(\sigma))$$
и вместе с задачей (4.1) будем рассматривать задачу
$$\delta x_t = F(x_t), \quad x_0 = \varphi. \tag{4.2}$$

О п р е д е л е н и е 4.1. *Решением задачи* (4.2) называется отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in [0,\alpha)$, $\alpha > 0$ такое, что $x_0 = \varphi$, отображение x_t абсолютно непрерывно на любом отрезке $[0,\beta]$, $\beta < \alpha$ и для почти всех $t \in [0,\alpha)$ выполнено равенство $\delta x_t = F(x_t)$.

Формулируемые ниже две леммы устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями задач (4.2) и (4.1).

Лемма 4.1. *Пусть функция*
$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r,\alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (4.1). *Тогда отображение*

$$t \to x_t \in \mathfrak{X}, \quad t \in [0, \alpha),$$

построенное по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in [0, \alpha), \quad s \in [-r, 0],$$

имеет для почти всех $t \in [0, \alpha)$ *вариацию* δx_t *и является решением задачи* (4.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, где $t \in [0, \alpha)$. По определению, вариация δx_t отображения $t \to x_t$, это пара

$$\delta x_t = (\sigma, b) \in L_1[-r, 0] \times \mathbb{R}^n$$

такая, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big\| \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon} - \delta x_t \Big\|_{\mathfrak{Y}} = 0,$$

где

$$\Big\| \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon} - \delta x_t \Big\|_{\mathfrak{Y}} =$$

$$= \max\Big\{ \Big\| \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon}(\cdot) - \sigma(\cdot) \Big\|_{L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)}, \Big| \frac{x_{t+\varepsilon}(0) - x_t(0)}{\varepsilon} - b \Big| \Big\}.$$

Откуда получаем, что

$$\sigma(s) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x_{t+\varepsilon}(s) - x_t(s)}{\varepsilon}$$

и

$$b = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x_{t+\varepsilon}(0) - x_t(0)}{\varepsilon}.$$

Для всех $s < 0$, начиная с некоторого ε справедливо $s + \varepsilon < 0$, поэтому

$$\sigma(s) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x_t(s+\varepsilon) - x_t(s)}{\varepsilon} = \dot{x}_t(s).$$

для почти всех $s \in [-r, 0]$.

Для b, по определению решения задачи (4.1) (см. [35, с. 51]), имеем

$$b = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{x(t)+\displaystyle\int_t^{t+\varepsilon} f(x_s)ds - x(t)}{\varepsilon} = f(x_t)$$

при почти всех $t \in [0,\alpha)$.

Таким образом,

$$\delta x_t = (\dot{x}_t(s), f(x_t))$$

почти всюду на $[0,\alpha)$. □

Лемма 4.2. *Пусть отображение*

$$t \to y_t, \quad t \in [0,\alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (4.2). *Тогда отображение*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r,\alpha),$$

где

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-r,0], \quad x(t) = y_t(0), \quad t \in [0,\alpha)$$

является решением задачи (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть почти всюду на интервале $[0,\alpha)$ имеет место равенство

$$\delta y_t = F(y_t) = (\dot{y}_t, f(y_t)) \in \mathfrak{Y}.$$

По определению вариации δy_t получаем, что для почти всех $t \in [0,\alpha)$ имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left\| \frac{(y_{t+\varepsilon}(\cdot), y_{t+\varepsilon}(0)) - (y_t(\cdot), y_t(0))}{\varepsilon} - (\dot{y}_t(\cdot), f(y_t)) \right\|_{\mathfrak{Y}} = 0.$$

Откуда следует выполнение равенств

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-r}^0 \left| \frac{y_{t+\varepsilon}(s) - y_t(s)}{\varepsilon} - \dot{y}_t(s) \right| ds = 0 \qquad (4.3)$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{y_{t+\varepsilon}(0)-y_t(0)}{\varepsilon}-f(y_t)\right|=0. \tag{4.4}$$

для почти $t\in[0,\alpha)$.

Рассмотрим отображение $t\to x(t)\in\mathbb{R}^n$, $t\in[-r,0]$, построенное по правилу

$$x(s)=\varphi(s),\quad s\in[-r,0],\quad x(t)=y_t(0),\quad t\in[0,\alpha).$$

Для $x(t)$ из равенства (4.4) получаем, что

$$\dot{x}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{y_{t+\varepsilon}(0)-y_t(0)}{\varepsilon}=f(y_t).$$

Для доказательства утверждения леммы требуется доказать равенство

$$\dot{x}(t)=f(x_t),$$

следовательно, необходимо показать, что для всех $s\in[-r,0]$ выполнено равенство $y_t(s)=x_t(s)$. По определению x_t необходимо доказать, что

$$x(t+s)=y_t(s).$$

Из определения $x(t)$ следует, что это равенство эквивалентно равенству

$$y_{t+s}(0)=y_t(s).$$

Рассмотрим функцию двух переменных $y(t,s)\doteq y_t(s)$, где $t\in[0,\alpha)$, $s\in[-r,0]$. Покажем, что функция $y(t,s)$ постоянна вдоль отрезков $s+t=\mathrm{const}$, $s\in[-r,0]$, $t\in[0,\alpha)$.

Из равенства (4.3) следует, что выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{y_{t+\varepsilon}(s)-y_t(s)}{\varepsilon}=\dot{y}_t(s)$$

для почти всех $s\in[-r,0]$. Следовательно, для почти всех точек

$$(t,s)\in[0,\alpha)\times[-r,0)$$

имеем цепочку равенств

$$\frac{\partial y(t,s)}{\partial t} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{y(t+\varepsilon,s)-y(t,s)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{y_{t+\varepsilon}(s)-y_t(s)}{\varepsilon} = \dot{y}_t(s) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{y_t(s+\varepsilon)-y_t(s)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{y(t,s+\varepsilon)-y(t,s)}{\varepsilon} = \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}.$$

Продифференцировав функцию $y(t, \mathrm{const}-t)$ получим

$$\frac{d}{dt}y(t,\mathrm{const}-t) = \left.\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}\right|_{s=\mathrm{const}-t} + \left.\frac{\partial y(t,s)}{\partial s}\right|_{s=\mathrm{const}-t} \frac{d(\mathrm{const}-t)}{dt} =$$

$$= \left.\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}\right|_{s=\mathrm{const}-t} - \left.\frac{\partial y(t,s)}{\partial s}\right|_{s=\mathrm{const}-t} = 0.$$

Таким образом, функция $y(t,\mathrm{const}-t)$ является константой.

Покажем, что $y_{t+\tau}(s) = y_{t+s}(\tau)$ для всех $s,\tau \in [-r,0)$. Имеют место равенства

$$\dot{y}_{t+s}(\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{y_{t+s}(\tau+\varepsilon)-y_{t+s}(\tau)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{y_{t+\tau+\varepsilon}(s)-y_{t+\tau}(s)}{\varepsilon} = \dot{y}_{t+\tau}(s).$$

Так как $y_{t+s}(\tau) \in AC[-r,0]$, то

$$y_{t+s}(0) = \int_s^0 \dot{y}_{t+s}(\tau)d\tau + y_{t+s}(s).$$

С другой стороны,

$$y_t(s) = \int_s^0 \dot{y}_{t+\tau}(s)d\tau + y_{t+s}(s)$$

и поэтому $y_{t+s}(0) = y_t(s)$. $\square$

Таким образом, на основании теоремы 3.2 и лемм 4.2, 4.1, можно сформулировать достаточное условие выживания для систем с последействием.

Теорема 4.1. *Рассмотрим некоторое локально компактное множество $M \subset \mathfrak{X}$. Для того, чтобы существовало движение $t \to x_t \in M$, порожденное дифференциальным уравнением с запаздыванием $\dot{x}(t) = f(x_t)$ и начальным условием $x_0 = \varphi \in M$, достаточно, чтобы для всякой точки $\sigma \in M$ выполнялось включение $F(\sigma) \in T_\sigma^{\mathfrak{Y}} M$, где $F(\sigma) = (\dot{\sigma}(s), f(\sigma))$.*

Возьмем теперь, в качестве пространств

$$\mathfrak{X} = C([-r,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} = L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n.$$

Докажем, что отображение $\sigma \to F(\sigma) \in \mathfrak{Y}$, $\sigma \in \mathfrak{X}$, действующее по правилу

$$F(\sigma) = (\dot{\sigma}, f(\sigma))$$

является замкнутым.

Для этого достаточно доказать замкнутость оператора дифференцирования F_0, как отображения действующего из $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ в $L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)$ с областью определения $D(F_0) = AC([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Лемма 4.3. *Пусть F_0 действует из пространства $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ в пространство $L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)$ по правилу*

$$(F_0\sigma)(t) \doteq \dot{\sigma}(t), \quad t \in [-r,0], \quad \sigma \in D(F_0),$$

где областью определения является пространство абсолютно непрерывных функций $D(F_0) = AC([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Тогда этот оператор является замкнутым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутость F_0 означает, что из условий

$$\|\sigma_n - \hat{\sigma}\|_{C([-r,0],\mathbb{R}^n)} \to 0$$

и

$$\|F_0(\sigma_n) - f\|_{L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)} \to 0$$

следует, что $(\hat{\sigma}, f) \in \Gamma(F_0)$ или, что то же самое, $F_0(\hat{\sigma}) = f$.

Обозначим

$$\varphi_n \doteq F_0(\sigma_n) = \dot{\sigma}_n.$$

Из свойств абсолютно непрерывных функций следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\sigma_n(t) = \sigma_n(-r) + \int_{-r}^{t} \varphi_n(s)ds.$$

Нам требуется доказать равенство

$$\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}(-r) + \int_{-r}^{t} f(s)ds.$$

Тем самым будет доказано (с учетом включения $f \in L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)$), что $\sigma \in AC([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Из последнего включения будет следовать, что f является производной $\hat{\sigma}$ и, следовательно, $(\sigma, f) \in \Gamma(F_0)$.

Оценим норму разности

$$|\hat{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(-r) - \int_{-r}^{t} f(s)ds| \leqslant |\hat{\sigma}(t) - \sigma_n(t)| + |\sigma_n(t) - \hat{\sigma}(-r) - \int_{-r}^{t} f(s)ds|.$$

По определению σ_n и φ_n, имеет место равенство

$$\sigma_n(t) = \sigma_n(-r) + \int_{-r}^{t} \varphi_n(s)ds,$$

поэтому, второе слагаемое можно оценить следующим образом

$$|\sigma_n(t) - \hat{\sigma}(-r) - \int_{-r}^{t} f(s)ds| \leqslant |\sigma_n(-r) - \hat{\sigma}(-r)| + \int_{-r}^{t} |\varphi_n(s) - f(s)|ds.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$|\hat{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(-r) - \int_{-r}^{t} f(s)ds| \leqslant$$

$$\leqslant |\hat{\sigma}(t) - \sigma_n(t)| + |\sigma_n(-r) - \hat{\sigma}(-r)| + \int_{-r}^{t} |\varphi_n(s) - f(s)|ds.$$

Первые два слагаемых сходятся к 0 в силу равномерной сходимости σ_n к $\hat{\sigma}$. Из сходимости φ_n к f в $L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)$ и оценки

$$\int_{-r}^{t} |\varphi_n(s) - f(s)|ds \leqslant \int_{-r}^{0} |\varphi_n(s) - f(s)|ds$$

следует сходимость к 0 третьего слагаемого. Поэтому правая часть неравенства может стать сколь угодно малой, что означает равенство

$$|\hat{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(-r) - \int_{-r}^{t} f(s)ds| = 0$$

для всех $t \in [-r, 0]$. $\square$

Из этой леммы, теоремы (3.3) следует утверждение, дающее достаточные условия выживаемости для уравнений с последействием и множества, заданного в пространстве непрерывных функций.

Теорема 4.2. *Пусть* M *— некоторое множество абсолютно непрерывных функций, локально компактное в пространстве непрерывных функций. Для того, чтобы существовало движение* $t \to x_t \in M$, *порожденное дифференциальным уравнением с запаздыванием* $\dot{x}(t) = f(x_t)$ *и начальным условием* $x_0 = \varphi \in M$, *достаточно, чтобы для всякой точки* $\sigma \in M$ *выполнялось включение* $F(\sigma) \in T_{\sigma}^{\mathfrak{Y}} M$, *где* $F(\sigma) = (\dot{\sigma}(s), f(\sigma))$.

§ 5. Дифференциальное уравнение с последействием и одним ограничением

Пусть

$$\mathfrak{X} \doteq AC([-r,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} \doteq L_1([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

и множество M задано в $\mathfrak{X}$ уравнением

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a(\varphi) = 0\},$$

где отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$a(\varphi) \doteq \beta(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s))ds,$$

$\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции.

Введем следующие обозначения: $\beta'(x)|_{x=x_0}$ — градиент функции $\beta(x)$ в точке x_0, то есть

$$\beta'(x)|_{x=x_0} \doteq \left(\frac{\partial\beta(x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\beta(x)}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=x_0},$$

и соответственно

$$\alpha_x'(t,x)|_{x=x_0} \doteq \left(\frac{\partial\alpha(t,x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\alpha(t,x)}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=x_0}.$$

Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 5.1. *Пусть функция $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна вместе со своей производной $\beta'(x)$ на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна вместе со своей производной $\alpha_x'(t,x)$ на всем пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Тогда отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, где*

$$a(\varphi) \doteq \beta(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s))ds$$

дифференцируемо по Фреше во всех точках $\hat{\varphi} \in \mathfrak{X}$ *и производная*

$$a'(\hat{\varphi})[\cdot] : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$$

действует по правилу

$$a'(\hat{\varphi})[\psi] = \langle \beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}, \psi(s)\rangle ds.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\varphi \in \mathfrak{X}$. Найдем производную отображения $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ в точке φ по направлению $\psi \in \mathfrak{X}$

$$a'(\varphi)[\psi] \doteq \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{a(\varphi+\varepsilon\psi) - a(\varphi)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon}\big(\beta(\varphi(0)+\varepsilon\psi(0)) - \beta(\varphi(0))\big) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon}\big(\int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s)+\varepsilon\psi(s))ds - \int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s))ds\big).$$

В силу того, что функция $\beta(x)$ дифференцируема во всех точках $x \in \mathbb{R}^n$, имеем равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon}\big(\beta(\varphi(0)+\varepsilon\psi(0)) - \beta(\varphi(0))\big) = \langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle.$$

Из непрерывной дифференцируемости $\alpha(t,x)$ по x следует, что под знаком интеграла можно перейти к пределу:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon}\big(\int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s)+\varepsilon\psi(s))ds - \int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s))ds\big) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-r}^{0} \frac{1}{\varepsilon}(\alpha(s,\varphi(s)+\varepsilon\psi(s)) - \alpha(s,\varphi(s)))ds = \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds.$$

Таким образом,

$$a'(\varphi)[\psi] = \langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds.$$

Нетрудно проверить, что в каждой точке $\varphi \in \mathfrak{X}$ отображение

$$a'(\varphi)[\cdot] : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$$

линейно и непрерывно, то есть $a'(\varphi)[\cdot] \in \mathfrak{X}^*$.

Покажем, что отображение

$$\varphi \to a'(\varphi)[\cdot],$$

непрерывно в каждой точке $\hat{\varphi}$, как отображение, действующее из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^*$.

По определению нормы в $\mathfrak{X}^*$ имеем равенство

$$\|a'(\hat{\varphi}) - a'(\varphi)\|_{\mathfrak{X}^*} \doteq \sup_{\|\psi\|_{\mathfrak{X}}=1} |a'(\hat{\varphi})[\psi] - a'(\varphi)[\psi]|.$$

Оценим норму разности

$$|a'(\hat{\varphi})[\psi] - a'(\varphi)[\psi]| = \big|\langle \beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)} - \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle +$$

$$+ \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)} - {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds\big| \leqslant$$

$$\leqslant \big|\langle \beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)} - \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle\big| +$$

$$+ \int_{-r}^{0} \big|\langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)} - \alpha' x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle\big| ds.$$

Напомним, что $\mathfrak{X}$ есть пространство абсолютно непрерывных функций, поэтому из равенства $\|\psi\|_{\mathfrak{X}} = 1$ следует, что $|\psi(s)| \leqslant 1$ для всех $s \in [-r, 0]$. Следовательно, мы можем оценить правую часть неравенства следующим образом

$$\big|\langle \beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)} - \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle\big| \leqslant \big|\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)} - \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}\big| \cdot |\psi(0)| \leqslant$$

$$\leqslant \big|\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)} - \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}\big|$$

и

$$\int_{-r}^{0} \big|\langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)} - {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle\big| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-r}^{0} \big|{\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)} - {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\big| \cdot |\psi(s)| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-r}^{0} \Big| {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat\varphi(s)} - {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)} \Big| ds.$$

Эти неравенства выполнены для всех $\|\psi\|_{\mathfrak{X}} = 1$, следовательно, норма разности $\|a'(\hat\varphi) - a'(\varphi)\|_{\mathfrak{X}^*}$ оценивается сверху следующим образом

$$\|a'(\hat\varphi) - a'(\varphi)\|_{\mathfrak{X}^*} = \sup_{\|\psi\|_{\mathfrak{X}}=1} |a'(\hat\varphi)[\psi] - a'(\varphi)[\psi]| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\beta'(x)|_{x=\hat\varphi(0)} - \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}\Big| + \int_{-r}^{0} \Big| {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat\varphi(s)} - {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)} \Big| ds.$$

Из сходимости $\|\hat\varphi - \varphi\|_{\mathfrak{X}} \to 0$ следует, что $\hat\varphi(s) \to \varphi(s)$ равномерно на отрезке $[-r, 0]$. В силу непрерывной дифференцируемости $\beta(x)$ имеем, что

$$|\beta'(x)|_{x=\hat\varphi(0)} - \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}| \to 0,$$

при $\|\hat\varphi - \varphi\|_{\mathfrak{X}} \to 0$.

Из свойств функции $\alpha(t,x)$ (${\alpha_x}'(\cdot,\cdot)$ — непрерывна по (t,x) и на каждом компакте $G \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ограничена константой) следует, что под знаком интеграла можно перейти к пределу (теорема о предельном переходе см. [19, с. 276]):

$$\lim_{\hat\varphi \to \varphi} \int_{-r}^{0} \Big| {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat\varphi(s)} - {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)} \Big| ds =$$

$$= \int_{-r}^{0} \lim_{\hat\varphi \to \varphi} \Big| {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat\varphi(s)} - {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)} \Big| ds = 0.$$

Таким образом, имеем что

$$\|a'(\hat\varphi) - a'(\varphi)\|_{\mathfrak{X}^*} \to 0$$

при $\|\hat\varphi - \varphi\|_{\mathfrak{X}} \to 0$.

По теореме о сильной дифференцируемости (см. [18, с. 36]) получаем, что отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ дифференцируемо по Фреше в каждой точке

$\hat{\varphi} \in \mathfrak{X}$ и эта производная $a'(\hat{\varphi})[\cdot] : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ действует по правилу

$$a'(\hat{\varphi})[\psi] = \langle \beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}, \psi(0) \rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}, \psi(s) \rangle ds.$$

□

Лемма 5.2. *Пусть*

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a(\varphi) = 0\},$$

где отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ *есть*

$$a(\varphi) \doteq \beta(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s, \varphi(s)) ds,$$

функции $\beta(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемы по* x. *Тогда во всех точках* $\hat{\varphi} \in M$, *в которых выполнено неравенство*

$$\left| \beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)} \right| + \int_{-r}^{0} \left| {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)} \right| ds \neq 0,$$

касательное пространство $T_{\hat{\varphi}}M$ *имеет вид*

$$T_{\hat{\varphi}}M = \{\psi \in \mathfrak{X} : \langle \beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}, \psi(0) \rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}, \psi(s) \rangle ds = 0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для всех $\hat{\varphi} \in \mathfrak{X}$ таких, что

$$\left| \beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)} \right| + \int_{-r}^{0} \left| {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)} \right| ds \neq 0$$

отображение $a'(\hat{\varphi})[\cdot] : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ сюрьективно, то есть $\operatorname{Im} a'(\hat{\varphi})[\cdot] = \mathbb{R}$. Для этого достаточно указать хотя бы одно $\psi \in \mathfrak{X}$ такое, что $a'(\hat{\varphi})[\psi] \neq 0$. Действительно, если такое ψ существует, то для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ получим

$$a'(\hat{\varphi})[\lambda\psi] = \lambda a'(\hat{\varphi})[\psi],$$

откуда следует, что $a'(\hat{\varphi})[\cdot]$ может принимать любые значения из $\mathbb{R}$.

Пусть
$$\left|\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}\right| \neq 0.$$
Из свойств функции $\alpha(t,x)$ имеем, что $|\alpha_x{}'(t,x)|$ ограничена на множестве $\{(s,\hat{\varphi}(s))\}_{s\in[-r,0]}$ некоторой константой (в силу того, что $\{(s,\hat{\varphi}(s))\}_{s\in[-r,0]}$ компактно в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$). В качестве $\psi\in\mathfrak{X}$ возьмем абсолютно непрерывную функцию, такую, что
$$\psi(0)=\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)},$$
$$\psi(s)=0, \quad s\in[-r,-\varepsilon], \quad \varepsilon>0.$$
Получаем
$$a'(\hat{\varphi})[\psi]=\left|\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}\right|^2+\int_{-\varepsilon}^{0}\langle\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)},\psi(s)\rangle ds.$$
В силу ограниченности $\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}$ и $\psi(s)$ можно выбрать ε достаточно маленьким, чтобы
$$\left|\int_{-\varepsilon}^{0}\langle\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)},\psi(s)\rangle ds\right|<\frac{\left|\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}\right|^2}{2}.$$
Таким образом
$$a'(\hat{\varphi})[\psi]>\left|\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}\right|^2-\frac{\left|\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}\right|^2}{2}=\frac{\left|\beta'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}\right|^2}{2}>0.$$
Пусть
$$\int_{-r}^{0}\left|\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}\right|ds\neq 0.$$
Из свойств интеграла следует, что существует $\varepsilon>0$ такое, что
$$\int_{-r}^{-\varepsilon}\left|\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}\right|ds\neq 0.$$
Найдется абсолютно непрерывная на $[-r,-\varepsilon]$ функция $\hat{\psi}(s)$, такая, что
$$\int_{-r}^{-\varepsilon}\langle\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\hat{\varphi}(s)},\hat{\psi}(s)\rangle ds>0.$$

Определим абсолютно непрерывную функцию ψ на отрезке $[-r, 0]$ следующим образом: $\psi(s) = \hat{\psi}(s)$, $s \in [-r, -\varepsilon]$, $\psi(0) = 0$, на отрезке $[-\varepsilon, 0]$ линейна.

Получаем, что

$$a'(\varphi)[\psi] = \langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds =$$

$$= \int_{-r}^{-\varepsilon} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds + \int_{-\varepsilon}^{0} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds.$$

Можно выбрать ε так чтобы

$$\Big|\int_{-\varepsilon}^{0} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds\Big| < \frac{1}{2}\int_{-r}^{-\varepsilon} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds.$$

Таким образом получим, что

$$a'(\varphi)[\psi] > \frac{1}{2}\int_{-r}^{-\varepsilon} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds > 0.$$

Рассмотрим произвольное $\varphi \in M$, то есть $a(\varphi) = 0$. Если имеет место неравенство

$$\left|\beta'(x)|_{x=\varphi(0)}\right| + \int_{-r}^{0} \left|\alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0,$$

то в этой точке выполнены все условия теоремы Люстерника (см. [18, с. 41]) ($a(\varphi)$ сильно дифференцируемое отображение и $\operatorname{Im} a'(\hat{\varphi})[\cdot] = \mathbb{R}$). Следовательно

$$T_\varphi M = \operatorname{Ker} a'(\hat{\varphi})[\cdot] =$$

$$= \{\psi \in \mathfrak{X} : \langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds = 0\}.$$

$\square$

Рассмотрим дифференциальное уравнение с последействием

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \tag{5.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f : C([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n)$ — непрерывная функция, и начальное условие
$$x_0 = \varphi, \tag{5.2}$$
где $\varphi \in \mathfrak{X}$. Следующее утверждение дает достаточные условия выживания решения задачи (5.1), (5.2) в множестве, заданном одним уравнением.

Теорема 5.1. *Пусть*
$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a(\varphi) = 0\},$$
где отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ *есть*
$$a(\varphi) \doteq \beta(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s, \varphi(s))ds,$$
функции $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемы по* x. *Пусть далее, для множества* M *выполнены следующие условия:*

1) *во всех точках* $\varphi \in M$ *выполнено неравенство*
$$\left|\beta'(x)|_{x=\varphi(0)}\right| + \int_{-r}^{0} \left|\alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) *во всех точках* $\varphi \in M$ *выполнено равенство*
$$\langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot{\varphi}(s)\rangle ds = 0.$$

Тогда для всех точек $\varphi \in M$, *с существенно ограниченной производной, существуют число* $\vartheta > 0$ *и отображение* $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, \vartheta]$ *являющееся решением задачи* (5.1), (5.2) *такие, что для всех* $t \in [0, \vartheta]$ *выполнено включение*
$$x_t \in M.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение множества $W(l,c)$, где $l > 0$, $c > 0$,
$$W(l,c) \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : \sup_{s\in[-r,0]} |\varphi(s)| \leqslant l, \quad \operatorname{vraisup}_{s\in[-r,0]} |\dot{\varphi}| \leqslant c\}.$$

Все множества $W(l,c)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, следовательно, по теореме Арцела, они являются относительно компактными в пространстве $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Докажем, что множества $W(l,c)\subset C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ замкнуты.

Пусть $\{\varphi_i\}\subset W(l,c)$ и $\varphi_i\to\varphi$ в $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, то есть

$$\sup_{s\in[-r,0]}|\varphi_i(s)-\varphi(s)|\to 0,\quad i\to+\infty.$$

Для любого i и любых $s_1,\ s_2\in[-r,0]$ в силу ограниченности производной

$$\operatorname*{vraisup}_{s\in[-r,0]}|\dot\varphi|\leqslant c$$

имеем, что

$$|\varphi_i(s_2)-\varphi_i(s_1)|=|\int_{s_1}^{s_2}\dot\varphi_i(s)ds|\leqslant c|s_2-s_1|.$$

Перейдя к пределу $i\to+\infty$ получим, что для любых $s_1,\ s_2\in[-r,0]$ имеет место неравенство

$$|\varphi(s_2)-\varphi(s_1)|\leqslant c|s_2-s_1|,$$

то есть φ абсолютно непрерывная функция.

Для всяких $i,\ t\in[-r,0]$ и $\varepsilon\in\mathbb{R}$ таких, что $s+\varepsilon\in[-r,0]$ имеем неравенство

$$\frac{\varphi_i(s+\varepsilon)-\varphi_i(s)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon}\dot\varphi_i(\tau)d\tau\leqslant c.$$

Перейдя к пределу $i\to+\infty$ получаем, для всяких $i,\ s\in[-r,0]$ и $\varepsilon\in\mathbb{R}$ таких, что $s+\varepsilon\in[-r,0]$ имеем неравенство

$$\frac{\varphi(s+\varepsilon)-\varphi(s)}{\varepsilon}\leqslant c.$$

Из этого неравенства и так как функция φ абсолютно непрерывна следует, что предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(s+\varepsilon)-\varphi(s)}{\varepsilon}$$

существует почти всюду на $[-r,0]$ и

$$\dot{\varphi}(s) \leqslant c$$

для почти всех $s \in [-r,0]$. Получили, что $\varphi \in W(l,c)$.

Из непрерывности $a(\varphi)$ следует, что M — замкнутое множество. Тогда множества

$$M_{(l,c)} \doteq M \cap W(l,c)$$

компактны для всех $l > 0$, $c > 0$.

Возьмем произвольное $\varphi \in M$ такое, что

$$\operatorname*{vraisup}_{s\in[-r,0]} |\dot{\varphi}(s)| < +\infty.$$

Обозначим

$$q \doteq \operatorname*{vraisup}_{s\in[-r,0]} |\dot{\varphi}(s)| + 1, \quad p \doteq \sup_{s\in[-r,0]} |\varphi(s)| + 1.$$

Множество $M_{(q,p)}$ — компактно и

$$\varphi \in M_{(q,p)}.$$

Заметим, что $\bigcup\limits_{c>0} W(l,c)$ всюду плотно в шаре $B_{\mathfrak{C}}[0,l]$, поэтому

$$T_\varphi M = T_\varphi\big(M \cap \bigcup_{c>0} W(q,c)\big) = T_\varphi \bigcup_{c>0} M(q,c).$$

Из леммы 1.3 следует, что

$$\bigcup_{c>0} \mathrm{cl}^{\mathfrak{Y}}\big(T_x M \cap B_{\mathfrak{X}}[0,r]\big) \subset T_x^{\mathfrak{Y}} M.$$

Из леммы 5.2 следует, что

$$T_\varphi M = \{\psi \in \mathfrak{X} : \langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle \alpha_x{}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds = 0\}.$$

Тогда, для всякого $c > 0$ имеет место равенство

$$cl^{\mathfrak{Y}}\big(T_xM \cap B_{\mathfrak{X}}[0,c]\big) = \{(\psi, b) \in \mathfrak{Y} : \underset{s\in[-r,0]}{\operatorname{vraisup}} |\psi(s)| \leqslant c,$$

$$\langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, b\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds = 0\}.$$

По условию леммы во всех точках $\varphi \in M_{[p,q]}$ выполнено равенство

$$\langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot{\varphi}(s)\rangle ds = 0.$$

Из оценки $\underset{s\in[-r,0]}{\operatorname{vraisup}} |\dot{\varphi}(s)| < q$, следует, что для всех $\varphi \in M_{[p,q]}$ выполнено включение

$$F(\varphi) \in \mathrm{cl}^{\mathfrak{Y}}\big(T_xM \cap B_{\mathfrak{X}}[0,q]\big) \subset T_x^{\mathfrak{Y}}M,$$

где

$$F(\varphi) = (\dot{\varphi}(\cdot), f(\varphi)).$$

Из теоремы 4.2 следует, что существуют константа $\vartheta > 0$ и отображение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, 0]$ являющееся решением задачи (5.1), (5.2) такие, что для всех $t \in [-r, 0]$ выполнено включение

$$x_t \in M.$$

$\square$

В работе Е. Л. Тонкова [29] показано, что если

$$\beta'(t)|_{t=\sigma(0)} f(\sigma) + \int_{-r}^{0} {\alpha_x}'(s,x)|_{x=\sigma(s)} \dot{\sigma}(s) ds < 0$$

для всех $\sigma \in \partial M$, где $M \doteq \{\sigma \in \mathfrak{X} :\ a(\sigma) \leqslant 0\}$, то задача локального выживания в M разрешима. В теореме Тонкова движение $t \to x_t$ не может оставаться на границе множества M. Последнее утверждение дополняет этот результат для движения по границе множества M.

§ 6. Дифференциальное уравнение с последействием и конечным числом ограничений

Пусть

$$\mathfrak{X} = AC([-r,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} = L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$$

и множество M задано в $\mathfrak{X}$ уравнением

$$M \doteq \{\varphi\in\mathfrak{X} : a_1(\varphi)=0,\ldots,a_m(\varphi)=0\},$$

где отображения $a_i:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$ имеют вид

$$a_i(\varphi)\doteq\beta_i(\varphi(0))+\int_{-r}^{0}\alpha_i(s,\varphi(s))ds.$$

Введем обозначение $a(\varphi):\mathfrak{X}\to\mathbb{R}^m$

$$a(\varphi)\doteq\begin{pmatrix} a_1(\varphi)\\ \vdots\\ a_m(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Лемма 6.1. *Пусть функции $\beta_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$ непрерывны вместе с производными $\beta_i'(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Функции $\alpha_i:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$ непрерывны вместе с производными ${\alpha_i}_x'(t,x)$ на всем $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.*

Тогда отображение $a:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ дифференцируемо по Фреше во всех точках $\hat\varphi\in\mathfrak{X}$ и производная $a'(\hat\varphi)[\cdot]\in\mathfrak{L}(\mathfrak{X},\mathbb{R}^m)$ определена равенством

$$a'(\hat\varphi)[\psi]=\begin{pmatrix} a_1'(\hat\varphi)[\psi]\\ \vdots\\ a_m'(\hat\varphi)[\psi]\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \langle\beta_1'(x)|_{x=\hat\varphi(0)},\psi(0)\rangle+\int\limits_{-r}^{0}\langle{\alpha_1}_x'(s,x)|_{x=\hat\varphi(s)},\psi(s)\rangle ds\\ \vdots\\ \langle\beta_m'(x)|_{x=\hat\varphi(0)},\psi(0)\rangle+\int\limits_{-r}^{0}\langle{\alpha_m}_x'(s,x)|_{x=\hat\varphi(s)},\psi(s)\rangle ds\end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично одномерному случаю имеем, что $a(\varphi)$ в каждой точке $\varphi \in \mathfrak{X}$ имеет производную по направлению $a'(\varphi)[\psi]$:

$$a'(\varphi)[\psi] \doteq \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{a(\varphi+\varepsilon\psi)-a(\varphi)}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{-1}(a_1(\varphi+\varepsilon\psi)-a_1(\varphi)) \\ \vdots \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{-1}(a_m(\varphi+\varepsilon\psi)-a_m(\varphi)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \beta_1'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int\limits_{-r}^{0} \langle {\alpha_1}_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds \\ \vdots \\ \langle \beta_m'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int\limits_{-r}^{0} \langle {\alpha_m}_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $a'(\varphi)[\cdot] \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^m)$ для всех $\varphi \in \mathfrak{X}$.

Аналогично одномерному случаю получаем, что отображение

$$\varphi \to a'(\varphi)[\cdot]$$

непрерывно в каждой точке $\hat{\varphi} \in \mathfrak{X}$ как отображение, действующие из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^m)$, то есть

$$\lim_{\varphi\to\hat{\varphi}} \|a'(\varphi)[\cdot] - a'(\hat{\varphi})[\cdot]\|_{\mathfrak{L}(\mathfrak{X},\mathbb{R}^m)} = 0,$$

где

$$\|a'(\varphi)[\cdot] - a'(\hat{\varphi})[\cdot]\|_{\mathfrak{L}(\mathfrak{X},\mathbb{R}^m)} \doteq \sup_{\|\psi\|_{\mathfrak{X}}=1} |a'(\varphi)[\psi] - a'(\hat{\varphi})[\psi]|.$$

По теореме о сильной дифференцируемости [18, с. 36] отображение $a(\varphi)$ дифференцируемо по Фреше во всех точках $\hat{\varphi} \in \mathfrak{X}$ и эта производная совпадает с $a'(\hat{\varphi})[\cdot]$. □

Лемма 6.2. *Пусть*

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a_1(\varphi) = 0, \ldots, a_m(\varphi) = 0\},$$

где отображения $a_i : \mathfrak{X} \to \mathbb{R},\ \ i = 1, \ldots, m,$ *есть*

$$a_i(\varphi) \doteq \beta_i(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha_i(s, \varphi(s))ds,$$

функции $\beta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемы по* x. *Тогда во всех точках* $\hat{\varphi} \in M$, *для которых выполнены условия:*

1) *для всех* $i = 1, \ldots, m$ *выполнены неравенства*

$$\left|\beta_i'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}\right| + \int_{-r}^{0} \left|{\alpha_i}_x'(s, x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) *функционалы* $a_i'(\hat{\varphi})[\cdot] \in \mathfrak{X}^*,\ \ i = 1, \ldots, m$ *линейно независимы, где*

$$a_i'(\hat{\varphi})[\psi] = \langle \beta_i'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_i}_x'(s, x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}, \psi(s)\rangle ds$$

касательное пространство $T_{\hat{\varphi}}M$ *состоит из элементов* $\psi \in \mathfrak{X}$, *удовлетворяющих системе уравнений*

$$\begin{cases} \langle \beta_1'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}, \psi(0)\rangle + \int\limits_{-r}^{0} \langle {\alpha_1}_x'(s, x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}, \psi(s)\rangle ds = 0 \\ \vdots \\ \langle \beta_m'(x)|_{x=\hat{\varphi}(0)}, \psi(0)\rangle + \int\limits_{-r}^{0} \langle {\alpha_m}_x'(s, x)|_{x=\hat{\varphi}(s)}, \psi(s)\rangle ds = 0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 6.1 следует, что отображение

$$\varphi \to a(\varphi) = \begin{pmatrix} \beta_1(\varphi(0)) + \int\limits_{-r}^{0} \alpha_1(s, \varphi(s))ds \\ \vdots \\ \beta_m(\varphi(0)) + \int\limits_{-r}^{0} \alpha_m(s, \varphi(s))ds \end{pmatrix}$$

дифференцируемо по Фреше и производная $a'(\hat{\varphi})[\cdot] \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^m)$ имеет вид

$$a'(\hat{\varphi})[\psi] = \begin{pmatrix} a_1'(\hat{\varphi})[\psi] \\ \vdots \\ a_m'(\hat{\varphi})[\psi] \end{pmatrix},$$

где для всех $i = 1, \ldots, m$

$$a_i'(\hat{\varphi})[\psi] = \langle \beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_{i_x}}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds.$$

Докажем, что оператор $a'(\hat{\varphi})[\cdot]$ сюръективен, то есть

$$a'(\hat{\varphi})[\mathfrak{X}] = \mathbb{R}^m.$$

По лемме 5.2 имеем, что для всех $i = 1, \ldots, m$

$$a_i'(\hat{\varphi})[\mathfrak{X}] = \mathbb{R}.$$

Из линейности оператора $a'(\hat{\varphi})[\cdot] \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^m)$ следует, что $a'(\hat{\varphi})[\mathfrak{X}]$ есть линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Обозначим

$$\mathcal{L} \doteq a'(\hat{\varphi})[\mathfrak{X}].$$

Предположим, что $\mathcal{L} \neq \mathbb{R}^m$, то есть

$$\dim \mathcal{L} = k < m.$$

Пусть

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \vdots \\ \xi_m^1 \end{pmatrix}, \ldots, \xi^k = \begin{pmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix}$$

базис в $\mathcal{L}$. Рассмотрим совокупность m $k-$мерных векторов

$$\begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^k \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \xi_m^1 \\ \xi_m^2 \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix}.$$

Так как векторов больше, чем их размерность ($k < m$) получаем, что найдутся числа $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \ldots, m$ не все равные нулю такие, что

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^k \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_m \begin{pmatrix} \xi_m^1 \\ \xi_m^2 \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix} = 0.$$

Получили, что имеют место равенства

$$\begin{cases} \lambda_1 \xi_1^1 + \lambda_2 \xi_2^1 + \ldots + \lambda_m \xi_m^1 & = & 0 \\ \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_m \xi_m^2 & = & 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \xi_1^k + \lambda_2 \xi_2^k + \ldots + \lambda_m \xi_m^k & = & 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Для любого $\psi \in \mathfrak{X}$ имеет место включение

$$a'(\hat{\varphi})[\psi] \in a'(\hat{\varphi})[\mathfrak{X}] = \mathcal{L}.$$

Следовательно, так как $\xi^1, \ldots, \xi^k$ образуют базис в $\mathcal{L}$, то найдутся числа $\mu_1(\psi), \ldots, \mu_k(\psi)$ такие, что

$$a'(\hat{\varphi})[\psi] = \mu_1(\psi)\xi^1 + \mu_2(\psi)\xi^2 + \ldots + \mu_k(\psi)\xi^k.$$

Так как

$$a'(\hat{\varphi})[\psi] = \begin{pmatrix} a_1'(\hat{\varphi})[\psi] \\ \vdots \\ a_m'(\hat{\varphi})[\psi] \end{pmatrix},$$

то получаем, что для всех $\psi \in \mathfrak{X}$

$$\begin{cases} a_1'(\hat{\varphi})[\psi] = \mu_1(\psi)\xi_1^1 + \mu_2(\psi)\xi_1^2 + \ldots + \mu_k(\psi)\xi_1^k \\ a_2'(\hat{\varphi})[\psi] = \mu_1(\psi)\xi_2^1 + \mu_2(\psi)\xi_2^2 + \ldots + \mu_k(\psi)\xi_2^k \\ \vdots \\ a_m'(\hat{\varphi})[\psi] = \mu_1(\psi)\xi_m^1 + \mu_2(\psi)\xi_m^2 + \ldots + \mu_k(\psi)\xi_m^k. \end{cases}$$

Рассмотрим линейную комбинацию функционалов $a_i'(\hat{\varphi})[\cdot]$, $i = 1, \ldots, m$

$$\lambda_1 a_1'(\hat{\varphi})[\cdot] + \lambda_2 a_2'(\hat{\varphi})[\cdot] + \ldots + \lambda_m a_m'(\hat{\varphi})[\cdot],$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ те же что и в (6.1). Для всякого $\psi \in \mathfrak{X}$ имеем, что

$$\lambda_1 a_1'(\hat{\varphi})[\psi] + \lambda_2 a_2'(\hat{\varphi})[\psi] + \ldots + \lambda_m a_m'(\hat{\varphi})[\psi] =$$

$$= \lambda_1(\mu_1(\psi)\xi_1^1 + \mu_2(\psi)\xi_1^2 + \ldots + \mu_k(\psi)\xi_1^k) +$$

$$+\lambda_2(\mu_1(\psi)\xi_2^1 + \mu_2(\psi)\xi_2^2 + \ldots + \mu_k(\psi)\xi_2^k) + \ldots +$$

$$+\lambda_m(\mu_1(\psi)\xi_m^1 + \mu_2(\psi)\xi_m^2 + \ldots + \mu_k(\psi)\xi_m^k) =$$

$$= \mu_1(\psi)(\lambda_1\xi_1^1 + \lambda_2\xi_2^1 + \ldots + \lambda_m\xi_m^1) +$$

$$+\mu_2(\psi)(\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_m\xi_m^2) + \ldots +$$

$$+\mu_k(\psi)(\lambda_1\xi_1^k + \lambda_2\xi_2^k + \ldots + \lambda_m\xi_m^k).$$

Подставив (6.1), получаем что

$$\lambda_1 a_1'(\hat{\varphi})[\psi] + \lambda_2 a_2'(\hat{\varphi})[\psi] + \ldots +$$

$$+\lambda_m a_m'(\hat{\varphi})[\psi] = \mu_1(\psi)0 + \mu_2(\psi)0 + \ldots + \mu_k(\psi)0 = 0$$

для всех $\psi \in \mathfrak{X}$. Следовательно, функционалы $a_i'(\hat{\varphi})[\cdot]$, $i = 1, \ldots, m$ линейно зависимы, что противоречит условию 2 леммы. Таким образом, $k = m$ и, следовательно, $\operatorname{Im} a'(\hat{\varphi})[\cdot] = \mathbb{R}^m$.

По теореме Люстерника [18, с. 41] (выполнены все условия: отображение $a(\hat{\varphi})$ дифференцируемо по Фреше и производная $a'(\hat{\varphi})[\psi]$ является сюрьективным отображением $\mathfrak{X} \to \mathbb{R}^m$) получаем, что во всех точках $\hat{\varphi} \in M$ имеет место равенство

$$T_{\hat{\varphi}}M = \operatorname{Ker} a'(\hat{\varphi})[\cdot] \doteq \{\psi \in \mathfrak{X} | \quad a'(\hat{\varphi})[\psi] = 0\}.$$

Это означает, что $T_{\hat\varphi}M$ состоит из решений системы уравнений

$$\begin{cases} a_1'(\hat\varphi)[\psi]=0, \\ \qquad\vdots \\ a_m'(\hat\varphi)[\psi]=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \langle \beta_1'(x)|_{x=\hat\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0}\langle {\alpha_1}_x'(s,x)|_{x=\hat\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds = 0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ \langle \beta_m'(x)|_{x=\hat\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0}\langle {\alpha_m}_x'(s,x)|_{x=\hat\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds = 0. \end{cases}$$

$\square$

Рассмотрим дифференциальное уравнение с последействием

$$\dot x(t) = f(x_t) \tag{6.2}$$

и начальное условие

$$x_0 = \varphi, \tag{6.3}$$

где $\varphi \in \mathfrak{X}$. Аналогично случаю, когда множество задано одним уравнением, доказывается следующее утверждение, дающее достаточные условия выживания решения задачи (6.2), (6.3) в множестве, заданном конечным чилом уравнением.

Теорема 6.1. *Пусть*

$$M \doteq \{\varphi\in\mathfrak{X} : a_1(\varphi)=0, \dots\ a_m(\varphi)=0\},$$

где отображение $a_i : \mathfrak{X}\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$ *есть*

$$a_i(\varphi) \doteq \beta_i(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0}\alpha_i(s,\varphi(s))ds,$$

функции $\beta_i : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *и* $\alpha_i : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемы по* x. *Пусть далее, во всех точках* $\varphi\in M$ *выполнены следующие условия:*

1) для всех $i = 1, \ldots, m$ выполнены неравенства

$$\left|\beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}\right| + \int_{-r}^{0} \left|{\alpha_{i_x}}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) функционалы $a_i'(\varphi)[\cdot] \in \mathfrak{X}^*$, $i = 1, \ldots, m$ линейно независимы, где

$$a_i'(\varphi)[\psi] = \langle \beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_{i_x}}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds;$$

3) *для всех* $i = 1, \ldots, m$ *имеют место равенства*

$$\langle \beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_{i_x}}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot{\varphi}(s)\rangle ds = 0.$$

Тогда для всех точек $\varphi \in M$, *с существенно ограниченной производной существуют* $\vartheta > 0$ *и отображение* $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, 0]$ *являющееся решением задачи* (6.2), (6.3) *такие, что для всех* $t \in [0, \vartheta]$ *выполнено включение*

$$x_t \in M.$$

§ 7. Смешанные системы уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) &= f_1(x_t^1, \dots, x_t^n, y^1(t), \dots, y^m(t)), \\ &\vdots \\ \dot{x}^n(t) &= f_n(x_t^1, \dots, x_t^n, y^1(t), \dots, y^m(t)), \\ \dot{y}^1(t) &= g_1(x_t^1, \dots, x_t^n, y^1(t), \dots, y^m(t)), \\ &\vdots \\ \dot{y}^m(t) &= g_m(x_t^1, \dots, x_t^n, y^1(t), \dots, y^m(t)), \end{cases}$$

где $f_i : C([-r,0],\mathbb{R})^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n,\ g_i : C([-r,0],\mathbb{R})^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ — непрерывные функции. Пусть заданы начальные условия

$$\begin{cases} x_0^1 &= \varphi_1, \\ &\vdots \\ x_0^n &= \varphi_n, \\ y^1(0) &= y_0^1, \\ &\vdots \\ y^m(0) &= y_0^m, \end{cases}$$

где $\varphi_i \in C([-r,0],\mathbb{R}),\ i = 1, \dots, n,\ y_0^i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m.$

Для краткости будем записывать эту задачу следующим образом

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t, y(t)), \\ \dot{y}(t) = g(x_t, y(t)), \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} x_0 &= \varphi \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{7.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n,\ y, y_0 \in \mathbb{R}^m,\ \varphi \in ([-r,0],\mathbb{R}^n),\ f : C([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : C([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Заметим, что в таком виде всегда можно записать неавтономную систему уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t),$$

$$x(0) = \varphi.$$

О п р е д е л е н и е 7.1. *Решением системы* (7.1), (7.2) называются непрерывные функции

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \vartheta], \quad t \to y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, \vartheta]$$

такие, что

1) $x(s) = \varphi(s),\ s \in [-r, 0]$;

2) $y(0) = y_0$;

3) на $[0, \vartheta)$ $x(t)$ и $y(t)$ абсолютно непрерывны и обращают (7.1) в тождество.

Перепишем систему (7.1) в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{z}^1(t) &= h_1(z_t^1, \ldots, z_t^n, z_t^{n+1}, \ldots, z_t^{n+m}), \\ & \vdots \\ \dot{z}^n(t) &= h_n(z_t^1, \ldots, z_t^n, z_t^{n+1}, \ldots, z_t^{n+m}), \\ \dot{z}^{n+1}(t) &= h_{n+1}(z_t^1, \ldots, z_t^n, z_t^{n+1}, \ldots, z_t^{n+m}), \\ & \vdots \\ \dot{z}^{n+m}(t) &= h_{n+m}(z_t^1, \ldots, z_t^n, z_t^{n+1}, \ldots, z_t^{n+m}), \end{cases}$$

где $h_i : C([-r, 0], \mathbb{R}^{n+m}) \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n+m$

$$h_i(z_t^1, \ldots, z_t^n, z_t^{n+1}, \ldots, z_t^{n+m}) \doteq$$

$$\doteq f_i(z_t^1, \ldots, z_t^n, z_t^{n+1}(0), \ldots, z_t^{n+m}(0)),$$

для $i = 1, \dots, n$ и

$$h_{n+i}(z_t^1, \dots, z_t^n, z_t^{n+1}, \dots, z_t^{n+m}) \doteq$$

$$\doteq g_i(z_t^1, \dots, z_t^n, z_t^{n+1}(0), \dots, z_t^{n+m}(0)),$$

для $i = 1, \dots, m$. Начальные условия (7.2) перепишем в виде

$$\begin{cases} z_0^1 & = & \psi_1 \\ & \vdots & \\ z_0^{n+m} & = & \psi_{n+m}, \end{cases}$$

где

$$\psi_i(s) \doteq \varphi_i(s), \quad s \in [-r, 0], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\psi_{n+i}(s) \equiv y_{i_0}, \quad s \in [-r, 0], \quad i = 1, \dots, m.$$

Кратко будем писать

$$\dot{z}(t) = h(z_t) \tag{7.3}$$

$$z_0 = \psi \tag{7.4}$$

где $z \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\psi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^{n+m})$, $h : C([-r, 0], \mathbb{R}^{n+m}) \to \mathbb{R}^{n+m}$.

Непосредственно из определения решения задач (7.1), (7.2) и (7.3), (7.4) получаем следующие утверждения.

Лемма 7.1. *Пусть $\vartheta > 0$ и отображения*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \vartheta],$$

и

$$t \to y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, \vartheta]$$

— решение задачи (7.1), (7.2). *Тогда, отображение $t \to z(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$, где*

$$z^i(t) = x^i(t), \quad t \in [-r, \vartheta], \quad i = 1, \dots, n$$

$$z^{n+i}(t) \equiv y_0^i, \quad t \in [-r, 0], \quad i = 1, \ldots, m$$

$$z^{n+i}(t) = y^i(t), \quad t \in [0, \vartheta], \quad i = 1, \ldots, m$$

— решение задачи (7.3), (7.4).

Лемма 7.2. *Пусть* $t \to z(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t \in [-r, \vartheta]$, $\vartheta > 0$ *— решение задачи* (7.3), (7.4). *Тогда отображения* $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, *где* $t \in [-r, \vartheta]$, $t \to y(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, \vartheta]$,

$$x^i(t) = z^i(t), \quad t \in [-r, \vartheta], \quad i = 1, \ldots, n$$

$$y^i(t) = z^{n+i}(t), \quad t \in [0, \vartheta], \quad i = 1, \ldots, m$$

— решение задачи (7.1), (7.2).

Согласно этим леммам задачи выживания для смешанных уравнений могут быть исследованы с использованием соответствующих утверждений для уравнений с последействием. Следующая теорема дает достаточные условия выживаемости для смешанных уравнений и одного ограничения.

Теорема 7.1. *Пусть*

$$M \doteq \{(\varphi, y) \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m : a(\varphi, y) = 0\},$$

где отображение $a : C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *есть*

$$a(\varphi, y) \doteq \beta(\varphi(0), y) + \int_{-r}^{0} \alpha(s, \varphi(s)) ds,$$

функция $\beta(x, y)$ *непрерывно дифференцируема, функция* $\alpha(t, x)$ *непрерывно дифференцируема по* x. *Пусть далее, для множества* M *выполнены следующие условия:*

1) *во всех точках* $(\varphi, y) \in M$ *выполнено неравенство*

$$\left|\beta_x'(x, y)|_{x=\varphi(0)}\right| + |\beta_y'(\varphi(0), y)| + \int_{-r}^{0} \left|\alpha_x'(s, x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) *во всех точках* $(\varphi, y) \in M$ *выполнено равенство*

$$\langle \beta_x'(x,y)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi)\rangle + \langle \beta_y'(\varphi(0),y)|, g(y)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle \alpha_x'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot\varphi(s)\rangle ds = 0.$$

Тогда для всех точек $(\varphi, y_0) \in M$, *таких, что*

$$\operatorname*{vraisup}_{s\in[-r,0]} |\dot\varphi(s)| < +\infty$$

существуют число $\vartheta > 0$ *и отображения* $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, \vartheta]$, $t \to y(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, \vartheta]$, *являющиеся решением задачи* (7.1), (7.2) *такие, что для всех* $t \in [0, \vartheta]$ *выполнено включение*

$$(x_t, y(t)) \in M.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу (7.3), (7.4),

$$\dot z(t) = h(z_t),$$

$$z_0 = \psi,$$

$z \in \mathbb{R}^{n+m}$, $h \in C(C([-r,0], \mathbb{R}^{n+m}), \mathbb{R}^{n+m})$, $\psi \in C([-r,0], \mathbb{R}^{n+m})$, эквивалентную задаче (7.1), (7.2).

Построим функцию $\tilde a : C([-r,0], \mathbb{R}^{n+m}) \to \mathbb{R}$, являющуюся продолжением функции $a : C([-r,0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, по правилу

$$\tilde a(\psi) = a(\varphi_1, \varphi_2(0)),$$

где

$$\psi \in C([-r,0], \mathbb{R}^{n+m}), \quad \psi = (\varphi_1, \varphi_2),$$

$$\varphi_1 \in C([-r,0], \mathbb{R}^n), \quad \varphi_2 \in C([-r,0], \mathbb{R}^m).$$

Тогда система (7.3), (7.4) и функция $\tilde a$ удовлетворяют условиям леммы 5.1. Согласно этой лемме, для всех точек $\psi \in C([-r,0], \mathbb{R}^{n+m})$, удовлетворяющих уравнению

$$\tilde a(\psi) = 0$$

с существенно ограниченной производной

$$\operatorname*{vraisup}_{s\in[-r,0]} |\dot{\psi}(s)| < +\infty,$$

существуют $\vartheta > 0$ и отображение $t \to z(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t \in [-r, \vartheta]$ являющееся решением задачи (7.3), (7.4) такие, что для всех $t \in [0, \vartheta]$ выполнено равенство

$$\tilde{a}(z_t) = 0.$$

Согласно лемме 7.2 отображения $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \to y(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, \vartheta]$, где

$$x^i(t) = z^i(t), \quad t \in [-r, \vartheta], \quad i = 1, \dots, n$$

$$y^i(t) = z^{n+i}(t), \quad t \in [0, \vartheta], \quad i = 1, \dots, m$$

являются решением задачи (7.1), (7.2). При этом выполнено равенство

$$a(x_t, y(t)) = \tilde{(}z_t) = 0.$$

Таким образом доказано, что при выполнении условий леммы найдутся $\vartheta > 0$ и отображения $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, \vartheta]$, $t \to y(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, \vartheta]$, являющиеся решением задачи (7.1), (7.2) такие, что для всех $t \in [0, \vartheta]$ выполнено включение

$$(x_t, y(t)) \in M.$$

$\square$

Глава 3

Задача выживания для дифференциальных включений

§ 8. Задача выживания для включений

Напомним некоторые определения.

Пусть $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ — фиксированное банахово пространство. Обозначим через $\operatorname{comp}\mathfrak{X} \subset 2^{\mathfrak{X}}$ — совокупность всех выпуклых компактных подмножеств $\mathfrak{X}$. Для двух множеств $M_1 \subset \mathfrak{X}$ и $M_2 \subset \mathfrak{X}$ обозначим

$$\alpha_{\mathfrak{X}}(M_1, M_2) \doteq \sup_{x \in M_1} \rho_{\mathfrak{X}}(x, M_2),$$

где $\rho_{\mathfrak{X}}(x, M)$ — расстояние от точки до множества

$$\rho_{\mathfrak{X}}(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|_{\mathfrak{X}}.$$

Напомним, что для произвольного множества $M \subset \mathfrak{X}$

$$B_{\mathfrak{X}}[M, \varepsilon] \doteq \{x \in \mathfrak{X} : \rho_{\mathfrak{X}}(x, M) \leqslant \varepsilon\}$$

означает ε-окрестность множества M.

Пусть каждой точке $x \in D$ некоторого множества $D \subset \mathfrak{X}$ поставлено в соответствие множество $F(x) \in \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$. Тогда будем говорить, что на D задана многозначная функция $F(x)$.

О п р е д е л е н и е 8.1 (см. [33, с. 52]). Многозначное отображение

$$x \to F(x) \in \operatorname{comp}\mathfrak{Y}, \quad x \in D$$

называется *полунепрерывным сверху* в точке $x \in D$, если для всякого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для всех точек $y \in \mathfrak{X}$ таких, что $\|x-y\|_{\mathfrak{X}} < \delta$ выполнено включение

$$F(y) \subset B_{\mathfrak{Y}}[F(x), \varepsilon].$$

Это включение равносильно неравенству

$$\alpha_{\mathfrak{Y}}(F(y), F(x)) < \varepsilon.$$

Многозначное отображение $x \to F(x) \in \operatorname{comp} \mathfrak{Y}$ называется *полунепрерывным сверху на множестве* D, если оно полунепрерывно сверху во всех точках $x \in D$.

Определение 8.2 (см. [33, с. 53]). Многозначное отображение

$$x \to F(x) \in \operatorname{comp} \mathfrak{Y}, \quad x \in D$$

называется *непрерывным* в точке $x \in D$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех точек $y \in \mathfrak{X}$ таких, что $\|x-y\|_{\mathfrak{X}} < \delta$ выполнено неравенство

$$\max\{\alpha_{\mathfrak{Y}}\left(F(x), F(y)\right), \alpha_{\mathfrak{Y}}\left(F(y), F(x)\right)\} < \varepsilon.$$

Это включение равносильно неравенству

$$F(x) \subset B_{\mathfrak{Y}}[F(y), \varepsilon] \quad \text{и} \quad F(y) \subset B_{\mathfrak{Y}}[F(x), \varepsilon].$$

Многозначное отображение называется *непрерывным на множестве* D, если оно непрерывно во всех точках $x \in D$.

Обозначим далее,

$$\|F(x)\|_{\mathfrak{Y}} \doteq \sup_{y \in F(x)} \|y\|_{\mathfrak{Y}}, \quad \|F(D)\|_{\mathfrak{Y}} \doteq \sup_{x \in D} \|F(x)\|_{\mathfrak{Y}}.$$

В этом разделе исследованы условия, при которых для заданных непустого множества $M \subset \mathfrak{X}$ и отображения $x \to F(x) \in \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$, $x \in M$ порождающего включение

$$\delta x_t \in F(x_t), \tag{8.1}$$

найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x_t$ включения (8.1), удовлетворяющее при всех $t \in [0, \alpha]$ включению $x_t \in M$.

Напомним, что функция $r(t)$ и последовательность $\{t_i\}$ в определении касательного направления 1.2 зависят от точки $x \in M$ и элемента касательного конуса $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$. Эту зависимость будем записывать следующим образом $r(t, x, h)$ и $t_i(x, h)$.

Введем следующие обозначения. Пусть $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$, обозначим через

$$c(x, h) \doteq \sup_i \Big\| h + \frac{r(t_i(x, h), x, h)}{t_i(x, h)} \Big\|_{\mathfrak{X}}.$$

Если задано многозначное отображение $x \to F(x) \in \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$, $x \in M$ и для всех $x \in M$ выполнено включение $F(x) \subset T_x^{\mathfrak{Y}} M$, то обозначим

$$c(x) \doteq \sup_{h \in F(x)} c(x, h).$$

Теорема 8.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию A (см. с. 23) и заданы локально компактное множество M в $\mathfrak{X}$ и полунепрерывное сверху многозначное отображение*

$$F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathfrak{Y}.$$

Пусть далее:

1) *для каждого $x \in M$ имеет место включение*

$$F(x) \subset T_x^{\mathfrak{Y}} M;$$

2) *найдется константа* $c > 0$ *такая, что для всех* $x \in M$ *выполнено неравенство*

$$\sup_{x \in M} c(x) < c.$$

Тогда для всякого $\varphi \in M$ *существуют число* $\alpha > 0$ *и непрерывное отображение* $t \to x_t \in M,\ t \in [0, \alpha]$ *такое, что*

$$x_0 = \varphi \quad \text{и} \quad \delta x_t \in F(x_t)$$

для почти всех $t \in [0, \alpha)$.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда, для любой точки* $x \in M$ *и всякого целого* m *существуют число* $\varepsilon(x, m) \in (0, 1/m)$ *и элемент* $u(x, m) \in \mathfrak{X}$ *такие, что имеют место свойства:*

1) *для всех* $x,\ m$ *имеет место включение*

$$x + \varepsilon(x, m) u(x, m) \in M;$$

2) *для всех* $x,\ m$ *выполнено включение*

$$u(x, m) \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F\Big(B_{\mathfrak{X}}[x, 1/m]\Big), 1/m\Big];$$

3) *при каждом натуральном* m *функция* $x \to \varepsilon(x, m)$ *ограничена снизу некоторым положительным числом, то есть*

$$\inf_{x \in M} \varepsilon(x, m) = \vartheta_m > 0;$$

4) *функция* $x \to u(x, m)$ *ограничена сверху при всех натуральных* m *и всех* $x \in M$ *некоторым положительным числом, то есть*

$$\sup_{m \in \mathbb{N},\, x \in M} \|u(x, m)\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $y \in M$, $h \in F(y) \subset T_y^{\mathfrak{Y}} M$. Тогда выполнено неравенство

$$\sup_i \left\| h + \frac{r(t_i(y,h),y,h)}{t_i(y,h)} \right\|_{\mathfrak{X}} = c(y,h) \leqslant c(y) < c.$$

Из включения $h \in T_y^{\mathfrak{Y}} M$ и теоремы 1.1 следует, что существуют число $\delta_y \in (0, 1/m)$ и элемент $h_y \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$y + \delta_y h_y \in M, \tag{8.2}$$

$$\|h_y - h\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{2m}, \tag{8.3}$$

$$\|h_y\|_{\mathfrak{X}} < c. \tag{8.4}$$

Неравенство (8.3) означает, что h_y удовлетворяет включению

$$h_y \in B_{\mathfrak{Y}}[F(y), 1/m].$$

Рассмотрим $B_{\mathfrak{X}}(y, \eta_y)$, где $y \in M$, $\eta_y = \dfrac{\delta_y}{2(k+1)m}$.

В силу условия теоремы о локальной компактности пространства M, не ограничивая общности будем считать, что само пространство M компактно (в противном случае будем рассматривать пересечение M с некоторым шаром). Следовательно, найдется конечное покрытие $\{B_{\mathfrak{X}}(y_j, \eta_{y_j})\}$ множества M. Далее, для каждого $x \in M$ найдется j, что $x \in B_{\mathfrak{X}}(y_j, \eta_{y_j})$. Обозначим

$$\varepsilon(x,m) \doteq \delta_{y_j}, \quad u(x,m) \doteq h_{y_j} + \frac{y_j - x}{\delta_{y_j}}.$$

Докажем, что пара $\varepsilon(x,m)$ и $u(x,m)$ — искомая для x и m. Действительно, из определения $u(x,m)$ получаем

$$x + \varepsilon(x,m)u(x,m) = x + \delta_{y_j}\big(h_{y_j} + \frac{y_j - x}{\delta_{y_j}}\big) = y_j + \delta_{y_j} h_{y_j}.$$

Из включения (8.2) следует, что $x + \varepsilon(x,m)u(x,m) \in M$. Тем самым доказано, что первое утверждение леммы выполнено.

Далее, имеем оценку

$$\rho_{\mathfrak{Y}}(u(x,m),F(y_j)) \leqslant \|u(x,m)-h_{y_j}\|_{\mathfrak{Y}} + \rho_{\mathfrak{Y}}(h_{y_j},F(y_j)).$$

Первое слагаемое в правой части оценим сверху, используя определения $u(x,m)$ и η_{y_j} :

$$\|u(x,m)-h_{y_j}\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \frac{\|y_j-x\|_{\mathfrak{Y}}}{\delta_{y_j}} \leqslant \frac{k\|y_j-x\|_{\mathfrak{X}}}{\delta_{y_j}} \leqslant \frac{k\eta_{y_j}}{\delta_{y_j}} \leqslant \frac{k}{2(k+1)m} \leqslant \frac{1}{2m}.$$

Второе слагаемое из неравенства (8.3) ограничено

$$\rho_{\mathfrak{Y}}(h_{y_j},F(y_j)) \leqslant \frac{1}{2m}.$$

Следовательно,

$$\rho_{\mathfrak{Y}}(u(x,m),F(y_j)) \leqslant \frac{1}{m}.$$

Поэтому из включения $y_j \in B_{\mathfrak{X}}(x,\eta_{y_j})$ имеем:

$$u(x,m) \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F\Big(B_{\mathfrak{X}}[x,1/m]\Big),1/m\Big].$$

Второе утверждение леммы выполнено.

Пусть $\theta_m = \min\limits_j \delta_{y_j}$. Так как $\{B_{\mathfrak{X}}(y_j,\eta_{y_j})\}$ — конечное покрытие множества M, и каждое $\delta_{y_i} > 0$, то $\theta_m > 0$. Поэтому, в силу равенства $\varepsilon(x,m) = \delta_{y_i}$, имеем $\inf\limits_{x\in M} \varepsilon(x,m) = \vartheta_m > 0$. Следовательно, третье утверждение леммы выполнено.

Для любых x и m имеет место оценка

$$\|u(x,m)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \|h_{y_j}\|_{\mathfrak{X}} + \frac{\|y_j-x\|_{\mathfrak{X}}}{\delta_{y_j}},$$

из неравенства (8.4) следует, что

$$\|u(x,m)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c + \frac{1}{2m(k+1)},$$

откуда получаем неравенство

$$\sup_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ x\in M}} \|u(x,m)\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Таким образом, четвертое утверждение леммы тоже доказано. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 8.1.

Доказательство. Рассмотрим $\varphi \in M$. Обозначим $\alpha = r/c$, где $r = \max\limits_{x\in M} \|x-\varphi\|_{\mathfrak{X}}$.

На основании леммы 8.1, для всякого $m \in \mathbb{N}$ построим целое число j и конечный набор чисел $\varepsilon_1^m \dots \varepsilon_j^m \in (\theta_m, 1/m)$ и элементов $x_1^m \dots x_j^m \in M$, где

$$x_0^m = \varphi, \quad x_{i+1}^m = x_i^m + \varepsilon_i^m u_i^m,$$
$$u_i^m \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F\Big(B_{\mathfrak{X}}[x_i^m, 1/m]\Big), 1/m\Big], \quad i = 1\dots j, \tag{8.5}$$

причем индекс j определяется из неравенства $\sum\limits_{i=0}^{j-1} \varepsilon_i^m \geqslant \alpha$.

Согласно лемме 8.1, для всяких i и m имеет место неравенство:

$$\|u_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c.$$

Тогда $x_i^m \in B_{\mathfrak{X}}[\varphi, r]$ для всякого i, так как

$$\|x_i^m - \varphi\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \sum_{q=0}^{i-1} \|x_{q+1}^m - x_q^m\|_{\mathfrak{X}} = \sum_{q=0}^{i-1} \varepsilon_i^m \|u_q^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c \sum_{q=0}^{i-1} \varepsilon_i^m = r.$$

Положим $\tau_i^m \doteq \varepsilon_0^m + \dots + \varepsilon_i^m$. На каждом из отрезков $[\tau_i^m, \tau_{i+1}^m]$ построим линейную функцию $x_t^m \doteq x_i^m + (t-\tau_i^m)u_i^m$. Для всех $t \in [\tau_i^m, \tau_{i+1}^m]$ имеет место неравенство

$$\|x_t^m - x_i^m\|_{\mathfrak{X}} = (t-\tau_i^m)\|u_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \varepsilon_i^m \|u_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \frac{c}{m}. \tag{8.6}$$

Для всякого $t \in [\tau_i^m, \tau_{i+1}^m)$ имеет место равенство $\delta x_t^m = u_j^m$. На основании (8.5), (8.6) имеем, что для всякой точки $t \in [0, \alpha]$

$$x_t^m \in B_{\mathfrak{X}}(M, c/m), \tag{8.7}$$

$$\delta x_t^m \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F(B_{\mathfrak{X}}[x_t^m, c/m]), 1/m\Big]. \tag{8.8}$$

Докажем, что последовательность функций x_t^m, $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела. Для всякого m функция $t \to x_t^m \in \operatorname{conv} M$, $t \in [0, \alpha]$, где $\operatorname{conv} M$ — выпуклая оболочка M, действует из компакта в компакт.

Равномерная ограниченность следует из (8.7).

Докажем теперь, что последовательность равностепенно непрерывна. Рассмотрим произвольную функцию x_t^m. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для всяких t_1, $t_2 \in [0, \alpha]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \varepsilon$ количество $\tau_i^m \in [t_1, t_2]$ не превосходит $(m+1)\varepsilon$. Следовательно,

$$\|x_{t_1}^m - x_{t_2}^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \frac{c(m+1)\varepsilon}{m}.$$

По теореме Арцела существует движение $t \to x_t \in M$, $t \in [0, \alpha]$ такое, что $\|x_t - x_t^m\|_{\mathfrak{X}} \to 0$ равномерно на $[0, \alpha]$. Из (8.7) следует, что $x_t \in M$.

Далее, имеет место следующая оценка

$$\rho_{\mathfrak{Y}}(\delta x_t^m, F(x_t)) = \rho_{\mathfrak{Y}}(u_i^m, F(x_t)) \leqslant \rho_{\mathfrak{Y}}(u_i^m, F(x_i^m)) + \alpha_{\mathfrak{Y}}(F(x_i^m), F(x_t)).$$

Из включения (8.5) получаем $\rho_{\mathfrak{Y}}(u_i^m, F(x_i^m)) \to 0$, то есть первое слагаемое стремится к 0 равномерно по t. Поэтому из (8.6), полунепрерывности сверху $F(x)$ и оценки

$$\|x_t - x_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \|x_t - x_t^m\|_{\mathfrak{X}} + \|x_t^m - x_i^m\|_{\mathfrak{X}},$$

получаем, что и второе слагаемое равномерно по t стремится к 0.

Получаем, что $x_t^m \to x_t$ и $\rho_{\mathfrak{Y}}(\delta x_t^m, F(x_t))$ равномерно по t.

Докажем, что для всех $t \in [0, \alpha)$ выполнено включение

$$\delta x_t \in F(x_t).$$

Фиксируем $t_0 \in [0, \alpha)$. Для выполнения включения $\delta x_{t_0} \in F(x_{t_0})$ достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых Δt выполнены неравенства

$$\rho_{\mathfrak{Y}}\left(\frac{x_{t_0+\Delta t} - x_{t_0}}{\Delta t}, F(x_{t_0})\right) < \varepsilon, \quad \left\|\frac{x_{t_0+\Delta t} - x_{t_0}}{\Delta t}\right\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Так как $\|x_t^m - x_t\|_{\mathfrak{X}} \to 0$ равномерно по t, для выполнения этого неравенства достаточно доказать, что при достаточно больших m имеют место неравенства

$$\rho_{\mathfrak{Y}}\left(\frac{x^m_{t_0+\Delta t} - x^m_{t_0}}{\Delta t}, F(x_{t_0})\right) < \varepsilon, \quad \left\|\frac{x^m_{t_0+\Delta t} - x^m_{t_0}}{\Delta t}\right\|_{\mathfrak{X}} < +\infty.$$

Из полунепрерывности сверху $F(\varphi)$ имеем, что для всякого $\varepsilon > 0$ и t_0 найдется $\eta > 0$ такое, что

$$F(\varphi) \subset B_{\mathfrak{Y}}[F(x_{t_0}), \varepsilon]$$

для всех $\|\varphi - x_{t_0}\|_{\mathfrak{X}} < (4c+1)\eta$.

Возьмем m достаточно большим, чтобы $1/m < \eta$ и $\|x_t^m - x_t\|_{\mathfrak{X}} < 2c\eta$ для всех $t \in [0, \alpha)$, и возьмем $\Delta t < \eta$.

Найдутся номера i_1 и i_2 такие, что

$$\tau^m_{i_1} \leqslant t_0 < \tau^m_{i_1+1} < \cdots < \tau^m_{i_2-1} < t_0 + \Delta t \leqslant \tau^m_{i_2}.$$

Докажем, что для всех номеров $i_1 \leqslant s \leqslant i_2$ выполнено включение

$$B_{\mathfrak{X}}[x^m_s, 1/m] \subset B_{\mathfrak{X}}[x_{t_0}, 4(c+1)\eta]. \tag{8.9}$$

Все τ^m_s, $s = i_1, \ldots, i_2$ отличаются от t_0 менее, чем на 2η. Следовательно,

$$\|x^m_s - x_{t_0}\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \|x^m_s - x^m_{t_0}\|_{\mathfrak{X}} + \|x^m_{t_0} - x_{t_0}\|_{\mathfrak{X}} < 2c\eta + 2c\eta = 4c\eta.$$

Таким образом,

$$x^m_s \in B_{\mathfrak{X}}[x_{t_0}, 4c\eta]$$

и требуемое включение выполнено.

По определению ломанной x_t^m, имеем равенства:

$$\begin{gathered}
x_t^m - x_{t_0}^m = (t - t_0)u_{i_1}^m, \quad t \in [t_0, \tau_{i_1+1}^m],\\
x_t^m - x_{i_1+1}^m = (t - \tau_{i_1+1}^m)u_{i_1+1}^m, \quad t \in [\tau_{i_1+1}^m, \tau_{i_1+2}^m],\\
\vdots\\
x_t^m - x_{i_2-1}^m = (t - \tau_{i_2-1}^m)u_{i_2-1}^m, \quad t \in [\tau_{i_2-1}^m, t_0 + \Delta t].
\end{gathered}$$

По построению u_i^m, имеем неравенство

$$\|u_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c,$$

откуда следует, что для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеют место неравенства

$$\|x_t^m - x_i^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c(t - \tau_i),$$

сложив которые получим

$$\|x_t^m - x_{t_0}^m\|_{\mathfrak{X}} \leqslant c(t - t_0).$$

Поделив обе части на $t - t_0$ и обозначив $\Delta t = t - t_0$, получаем

$$\left\|\frac{x_{t_0+\Delta t}^m - x_{t_0}^m}{\Delta t}\right\|_{\mathfrak{X}} < c$$

для всех $\Delta t < \eta$. Перейдя к пределу $m \to +\infty$, получим неравенство

$$\left\|\frac{x_{t_0+\Delta t} - x_{t_0}}{\Delta t}\right\|_{\mathfrak{X}} < c.$$

Таким образом, второе неравенство из определения δx_t выполнено.

Докажем, что первое неравенство имеет место. Для всех $s = i_1 \dots i_2 - 1$ по определению u_s^m имеем включение

$$u_s^m \in B_{\mathfrak{Y}}\Big[F\Big(B_{\mathfrak{X}}[x_s^m, 1/m]\Big), 1/m\Big],$$

то есть найдется $y \in B_{\mathfrak{X}}[x_s^m, 1/m]$ такое, что

$$\rho_{\mathfrak{Y}}(u_s^m, F(y)) \leqslant 1/m.$$

С другой стороны, из включения (8.9) имеем, что $y \in B_{\mathfrak{X}}[x_{t_0}, 4(c+1)\eta]$ и по построению η получаем

$$F(y) \subset B_{\mathfrak{Y}}[F(x_{t_0}), \varepsilon].$$

Таким образом, для всех u_s^m выполнено неравенсто

$$\rho_{\mathfrak{Y}}(u_s^m, F(x_{t_0})) \leqslant \rho_{\mathfrak{Y}}(u_s^m, F(y)) + \alpha_{\mathfrak{Y}}(F(y), F(x_{t_0})) \leqslant 1/m + \varepsilon.$$

Следовательно, все неравенства

$$\rho_{\mathfrak{Y}}\left(\frac{x_t^m - x_s^m}{t - \tau_s^m}, F(x_{t_0})\right) = \rho_{\mathfrak{Y}}(u_s^m, F(x_{t_0})) \leqslant 1/m + \varepsilon$$

можно сложить и получить, что для достаточно больших m и $\Delta t < \eta$ имеет место неравенство

$$\rho_{\mathfrak{Y}}\left(\frac{x_{t_0+\Delta t}^m - x_{t_0}^m}{\Delta t}, F(x_{t_0})\right) \leqslant (1/m + \varepsilon).$$

Перейдя к пределу по m, получаем требуемое неравенство

$$\rho_{\mathfrak{Y}}\left(\frac{x_{t_0+\Delta t} - x_{t_0}}{\Delta t}, F(x_{t_0})\right) < \varepsilon.$$

□

Аналогично задаче выживания для уравнения, интерес представляет случай, когда правая часть включения

$$\delta x_t \in F(x_t)$$

$F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$ не является непрерывным сверху отображением. Для доказательства теоремы достаточно замкнутости графика отображения F. Сначала, напомним определение замкнутого многозначного отображения.

Определение 8.3 (см. [33, с. 53]). Отображение $F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$ называется *замкнутым*, если график $\Gamma(F)$ является замкнутым множеством, где график $\Gamma(F)$ — множество пар вида

$$\Gamma(F) \doteq \{(\sigma, f) : \quad \sigma \in D(F), \quad f \in F(\sigma)\},$$

а $D(F) \subset \mathfrak{X}$ — область определения отображения F.

Другими словами, отображение $F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$ является замкнутым, если и только если из условий

$$\|\sigma_i - \sigma\|_{\mathfrak{X}} \to 0, \quad \{\sigma_i\} \subset D(F), \quad \|f_i - f\|_{\mathfrak{Y}} \to 0, \quad f \in F(\sigma)$$

следует, что $(\sigma, f) \in \Gamma(F)$, то есть

$$\sigma \in D(F), \quad f \in F(\sigma).$$

Теорема 8.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию A (см. с. 23), и задано замкнутое многозначное отображение*

$$F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$$

с областью определения $D(F)$. Пусть далее, задано локально компактное множество M в $D(F)$ и выполнены условия

1) *для каждого $x \in M$ имеет место включение*

$$F(x) \subset T_x^{\mathfrak{Y}} M;$$

2) *найдется константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in M$ выполнено неравенство*

$$\sup_{x \in M} c(x) < c.$$

Тогда для всякого $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение

$$t \to x_t \in M, \quad t \in [0, \alpha]$$

такое, что

$$x_0 = \varphi \quad \text{и} \quad \delta x_t \in F(x_t)$$

для почти всех $t \in [0, \alpha)$.

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого полностью повторяет доказательство теоремы 8.1.

Теорема 8.3. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *удовлетворяют условию* A (*см. с.* 23), *и замкнутое многозначное отображение*

$$F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp} \mathfrak{Y}$$

с областью определения $D(F)$. *Пусть далее задано локально компактное множество* M *в* $D(F)$ *и выполнены условия*

1) *для каждого* $x \in M$ *многозначное отображение* $x \to H(x) \in \operatorname{comp} \mathfrak{Y}$, $x \in M$ *построенное по правилу*

$$H(x) \doteq F(x) \cap T_x^{\mathfrak{Y}} M$$

является замкнутым;

2) *найдется константа* $c > 0$ *такая, что для всех* $x \in M$ *выполнено неравенство* $c(x) < c$, *где* $c(x)$ *есть*

$$c(x) \doteq \sup_{h \in H(x)} \Big\{ \sup_i \Big\| h + \frac{r(t_i(x,h), x, h)}{t_i(x,h)} \Big\|_{\mathfrak{X}} \Big\}.$$

Тогда для всякого $\varphi \in M$ *существуют число* $\alpha > 0$ *и непрерывное отображение*

$$t \to x_t \in M, \quad t \in [0, \alpha]$$

такое, что

$$x_0 = \varphi \quad \text{и} \quad \delta x_t \in F(x_t)$$

для почти всех $t \in [0, \alpha)$.

§ 9. Задача выживания для включений с последействием

Введем следующие обозначения. Для произвольной функции

$$\tau \to x(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \in [-r, \vartheta], \quad r > 0, \quad \vartheta > 0$$

обозначим

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad s \in [-r, 0], \quad t \in [0, \vartheta].$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\mathfrak{X} = AC([-r, 0], \mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} = L_1([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n.$$

Нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$ соответственно равны

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{X}} = \sup_{s\in[-r,0]} |\varphi(s)| + \int_{-r}^{0} |\dot{\varphi}(s)| ds,$$

$$\|(\varphi, b)\|_{\mathfrak{Y}} = \max\{\int_{-r}^{0} |\varphi(s)| ds, |b|\}.$$

Для того, чтобы пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяли условию A (см. с. 23), (напомним, что условие A означает включение $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ и выполнение неравенства $\sup\limits_{\varphi\in\mathfrak{X},\varphi\neq 0} \dfrac{\|\varphi\|_{\mathfrak{Y}}}{\|\varphi\|_{\mathfrak{X}}} < +\infty$) будем рассматривать элемент $\varphi \in \mathfrak{X}$, как пару

$$(\varphi(\cdot), \varphi(0)) \in \tilde{\mathfrak{X}},$$

где

$$\tilde{\mathfrak{X}} \doteq \{(\varphi(\cdot), b) \in AC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : \quad b = \varphi(0)\}$$

с нормой

$$\|(\varphi(\cdot), b)\|_{\mathfrak{X}} = \max\{\|\varphi\|_{\mathfrak{X}}, |b|\}.$$

В дальнейшем будем отождествлять $\mathfrak{X}$ и $\tilde{\mathfrak{X}}$ В этом случае пространство $\mathfrak{X}$ является подмножеством пространства $\mathfrak{Y}$.

Везде в дальнейшем считается, что $f : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ — полунепрерывное сверху отображение.

Пусть имеется задача Коши для дифференциального включения с последействием

$$\dot{x}(t) \in f(x_t), \quad x_0 = \varphi, \tag{9.1}$$

$f : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 9.1. *Решением задачи Коши* (9.1) называется функция

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \vartheta], \quad \vartheta > 0$$

непрерывная на интервале $[-r, \vartheta)$, абсолютно непрерывная на любом отрезке $[0, \tau]$, $0 < \tau < \vartheta$ и удовлетворяющая условиям

$$x(t) = \varphi, \quad \text{при всех} \quad t \in [-r, 0],$$

$$\dot{x}(t) \in f(x_t), \quad \text{при почти всех} \quad t \in [0, \vartheta].$$

Введем в рассмотрение отображение $F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$, определенное равенством

$$F(\sigma) \doteq (\dot{\sigma}(\cdot), f(\sigma)),$$

и вместе с задачей (9.1) будем рассматривать задачу

$$\delta x_t \in F(x_t), \quad x_0 = \varphi. \tag{9.2}$$

О п р е д е л е н и е 9.2. *Решением задачи* (9.2) называется отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in [0, \alpha)$, $\alpha > 0$ такое, что $x_0 = \varphi$, отображение x_t абсолютно непрерывно на любом отрезке $[0, \beta]$, $\beta < \alpha$ и для почти всех $t \in [0, \alpha)$ выполнено включение $\delta x_t \in F(x_t)$.

Как и в случае дифференциальных уравнений с последействием справедливы леммы, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между решениями задач (9.2) и (9.1).

Лемма 9.1. *Пусть функция*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (9.1). *Тогда отображение*

$$t \to x_t \in \mathfrak{X}, \quad t \in [0, \alpha),$$

построенное по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in [0, \alpha), \quad s \in [-r, 0],$$

имеет для почти всех $t \in [0, \alpha)$ *вариацию* δx_t *и является решением задачи* (9.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, где $t \in [0, \alpha)$. По определению вариации δx_t — это пара

$$\delta x_t = (\sigma, b) \in L_1[-r, 0] \times \mathbb{R}^n$$

такая, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big\| \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon} - \delta x_t \Big\|_{\mathfrak{Y}} = 0,$$

где

$$\Big\| \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon} - \delta x_t \Big\|_{\mathfrak{Y}} =$$

$$= \max\Big\{ \Big\| \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon}(\cdot) - \sigma(\cdot) \Big\|_{L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)}, \Big| \frac{x_{t+\varepsilon}(0) - x_t(0)}{\varepsilon} - b \Big| \Big\}.$$

Откуда получаем, что

$$\sigma(s) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x_{t+\varepsilon}(s) - x_t(s)}{\varepsilon}$$

и

$$b = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x_{t+\varepsilon}(0) - x_t(0)}{\varepsilon}.$$

Для всех $s < 0$, начиная с некоторого ε, справедливо $s + \varepsilon < 0$, поэтому

$$\sigma(s) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x_t(s+\varepsilon) - x_t(s)}{\varepsilon} = \dot{x}_t(s).$$

для почти всех $s \in [-r, 0]$.

Для b, по определению решения задачи (9.1) имеем

$$b = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x(t) + \displaystyle\int_t^{t+\varepsilon} f(x_s)ds - x(t)}{\varepsilon} \in f(x_t)$$

при почти всех $t \in [0, \alpha)$.

Таким образом

$$\delta x_t \in (\dot{x}_t(s), f(x_t))$$

почти всюду на $[0, \alpha)$. $\square$

Лемма 9.2. *Пусть отображение*

$$t \to y_t, \quad t \in [0, \alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (9.2). *Тогда отображение*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \alpha),$$

где

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-r, 0], \quad x(t) = y_t(0), \quad t \in [0, \alpha)$$

является решением задачи (9.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть почти всюду на интервале $[0, \alpha)$ имеют место включения

$$\delta y_t \in F(y_t) = (\dot{y}_t, f(y_t)) \in \operatorname{comp} \mathfrak{Y}.$$

По определению вариации δy_t получаем, что для почти всех $t \in [0, \alpha)$ имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \rho_{\mathfrak{Y}} \left(\frac{(y_{t+\varepsilon}(\cdot), y_{t+\varepsilon}(0)) - (y_t(\cdot), y_t(0))}{\varepsilon}, (\dot{y}_t(\cdot), f(y_t)) \right) = 0.$$

Откуда следует выполнение равенств

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-r}^{0} \left| \frac{y_{t+\varepsilon}(s) - y_t(s)}{\varepsilon} - \dot{y}_t(s) \right| ds = 0 \tag{9.3}$$

и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{y_{t+\varepsilon}(0) - y_t(0)}{\varepsilon}, f(y_t) \right) = 0. \tag{9.4}$$

для почти $t \in [0, \alpha)$.

Рассмотрим отображение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, 0]$, построенное по правилу

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-r, 0], \quad x(t) = y_t(0), \quad t \in [0, \alpha).$$

Для $x(t)$ из равенства (9.4) получаем, что

$$\dot{x}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{y_{t+\varepsilon}(0) - y_t(0)}{\varepsilon} \in f(y_t).$$

Для доказательства утверждения леммы требуется доказать включение

$$\dot{x}(t) \in f(x_t),$$

следовательно, необходимо показать, что $y_t = x_t$, то есть для всех $s \in [-r, 0]$ выполнено равенство $y_t(s) = x_t(s)$. По определению x_t необходимо доказать, что

$$x(t+s) = y_t(s).$$

Из определения $x(t)$ следует, что это эквивалентно равенству

$$y_{t+s}(0) = y_t(s).$$

Рассмотрим функцию двух переменных $y(t,s) \doteq y_t(s)$, где $t \in [0,\alpha)$, $s \in [-r,0]$.

Аналогично случаю, когда правая часть является однозначной функцией, доказывается, что функция $y(t,s)$ постоянна вдоль отрезков прямой $s+t = \mathrm{const}$, $s \in [-r,0]$, $t \in [0,\alpha)$.

Покажем, что $y_{t+\tau}(s) = y_{t+s}(\tau)$ для всех $s,\tau \in [-r,0)$. Имеют место равенства

$$\dot{y}_{t+s}(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{y_{t+s}(\tau+\varepsilon) - y_{t+s}(\tau)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{y_{t+\tau+\varepsilon}(s) - y_{t+\tau}(s)}{\varepsilon} = \dot{y}_{t+\tau}(s).$$

Так как $y_{t+s}(\tau) \in AC[-r,0]$, то

$$y_{t+s}(0) = \int_s^0 \dot{y}_{t+s}(\tau)d\tau + y_{t+s}(s).$$

С другой стороны,

$$y_t(s) = \int_s^0 \dot{y}_{t+\tau}(s)d\tau + y_{t+s}(s),$$

и поэтому $y_{t+s}(0) = y_t(s)$. $\square$

Таким образом, на основании теоремы 8.1 и лемм 9.2, 9.1, можно сформулировать достаточное условие выживаемости для включений с последействием.

Теорема 9.1. *Рассмотрим некоторое локально компактное множество $M \subset \mathfrak{X}$. Для того, чтобы существовало движение $t \to x_t \in M$, порожденное дифференциальным включением с последействием*

$$\dot{x}(t) \in f(x_t)$$

и начальным условием $x_0 = \varphi \in M$, достаточно, чтобы для всякой точки $\sigma \in M$ выполнялось включение

$$F(\sigma) \subset T_\sigma^{\mathfrak{Y}} M,$$

где $F(\sigma) = (\dot{\sigma}(s), f(\sigma))$.

Возьмем, теперь, в качестве пространств

$$\mathfrak{X} = C([-r,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} = L_1([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n.$$

Докажем, что отображение $\sigma \to F(\sigma) \in \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$, $\sigma \in \mathfrak{X}$, действующее по правилу

$$F(\sigma) = (\dot{\sigma}, f(\sigma))$$

является замкнутым.

Лемма 9.3. *Пусть отображение*

$$\sigma \to f(\sigma) \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in \mathfrak{X}$$

является полунепрерывным сверху многозначным отображением. Пусть отображение $\sigma \to F(\sigma)$ *действует из пространства* $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ *в пространство* $\operatorname{comp}(L_1([-r,0],\mathbb{R}^n))$ *по правилу*

$$F(\sigma) = (\dot{\sigma}, f(\sigma)),$$

областью определения является пространство абсолютно непрерывных функций $D(F) = AC([-r,0],\mathbb{R}^n)$. *Тогда это отображение является замкнутым.*

Доказательство. В параграфе 4 доказана замкнутость оператора дифференцирования

$$F_0(\sigma) = \dot{\sigma}.$$

Полунепрерывное сверху многозначное отображение

$$\sigma \to f(\sigma)$$

является замкнутым (см. [33, с. 53]).

Поэтому, многозначное отображение

$$F(\sigma) = (\dot{\sigma}, f(\sigma))$$

является замкнутым. $\square$

Из этой леммы, теоремы (8.2) следует утверждение, дающее достаточные условия выживаемости для включений с последействием и множества, заданного в пространстве непрерывных функций.

Теорема 9.2. *Пусть M — некоторое множество абсолютно непрерывных функций, локально компактное в пространстве непрерывных функций. Для того, чтобы существовало движение $t \to x_t \in M$, порожденное дифференциальным включением с последействием*

$$\dot{x}(t) \in f(x_t)$$

и начальным условием $x_0 = \varphi \in M$, достаточно, чтобы для всякой точки $\sigma \in M$ выполнялось включение

$$F(\sigma) \subset T_\sigma^{\mathfrak{Y}} M,$$

где $F(\sigma) = (\dot{\sigma}(s), f(\sigma))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М., 2002. 384 с.

2. Андрианов Д. Л. Целевое управление и краевые задачи для макроэкономических моделей с последействием. Автореф. докт. дисс. Ижевск. 1994. 29 с.

3. Андрианов Д. Л., Полушкина Г. Л. Прогноз — анализ — решение // Банковские технологии, 1997, № 8. С. 54–57.

4. Баранов В. Н. Численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск, 2000. № 3(20). С. 3–30.

5. Баранов В. Н. Об одном численном методе интегрирования дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Материалы Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов". Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 2000. С. 319.

6. Баранов В. Н. Численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Труды XXXII региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург. 29 января - 2 февраля 2001 г. С. 87–91.

7. Баранов В. Н. Обобщение теоремы Нагумо для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тезисы докладов 5-й Россий-

ской университетско-академической научно-практической конференции. Ч. 10. Ижевск, 2001. С. 8.

8. Баранов В. Н. Теорема Нагумо для системы с последействием // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск, 2002. № 2(25). С. 11–14.

9. Баранов В. Н. Теорема Нагумо для систем с последействием // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 2002. Вып 1. С. 29–32.

10. Баранов В. Н. Достаточные условия выживания для систем с последействием // Вестн. Тамбовского ун-та. Тамбов, 2003. Т. 8. Вып. 3. С. 343.

11. Баранов В. Н. Достаточные условия локальной выживаемости для систем с последействием // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 858.

12. Баранов В. Н. Задачи выживания для систем с последействием // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск, 2003. № 2(28). С. 3–102.

13. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–251.

14. Гусейнов Х. Г., Субботин А. И., Ушаков В. Н. Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления // Проблемы упр. и теории информации. 1985. Т. 14, №. 3. С. 1–14.

15. Гусейнов Х. Г., Ушаков В. Н. Об инфинитизимальных конструкциях в теории обобщенных динамических систем. I // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, №. 2. С. 157–165.

16. Гусейнов Х. Г., Ушаков В. Н. Об инфинитизимальных конструкциях в теории обобщенных динамических систем. II // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, №. 4. С. 457–464.

17. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, №. 3. С. 395–453.

18. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М., 1974. 478с.

19. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1989. 624с.

20. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

21. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.

22. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об оптимальном описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уранения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1303–1315.

23. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. матем. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 304–315.

24. Незнахин А. А., Ушаков В. Н. Построение ядра выживаемости с ограниченным блужданием для дифференциального включения // Деп. в ВИНИТИ 16.12.00 №. 3083-В00 24с.

25. Незнахин А. А., Ушаков В. Н. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде. Сборник докладов к Международной конференции. Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. С. 156–158.

26. Никольский М. С. Об одной задаче осуществления заданного движения. Гибкие системы // Докл. РАН. 1996. Т. 350. №. 6 С. 739–741.

27. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1 Функциональный анализ. М., 1977. 357с.

28. Сатимов Н., Азамов А. К задаче избежания столкновений в нелинейных системах // Докл. АН УзССР. 1974. № 6. С. 3–5.

29. Тонков Е. Л. Динамические задачи выживания // Вестник Пермского гос. тех. ун-та. Функцион.-дифференц. уравнения (спец. вып.). 1997. № 4. С.138–148.

30. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика 4. 1980. С. 32-45.

31. Фазылов А. З. Достаточные условия оптимальности для задачи выживания // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3 С. 535–537.

32. Фазылов А. З. К задаче избежания столкновений // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 3. С. 30–36.

33. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. 223с.

34. Филиппова Т. Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений.: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Екатеринбург. 1992. 266. с. /Ин-т математики и механики УрО РАН.

35. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421с.

36. Aubin J.-P. Viability theory. Boston: Birkhauser, 1991. 326 p.

37. Aubin J.-P. Mutational and Morphological Analysis. Tools for Shape Regulation and Optimization. 1998. 352 p.

38. Aubin J.-P. A survey of viability theory // SIAM J. Contr. and Optim. 1990. V. 28. N 4. P. 749–788.

39. Blagodatskih V. I. Sufficient condition for optimality in problems with state constraints // Appl. Math. and Optim. 1981. V. 7. N 2. P. 149–157.

40. Haddad G. Monotone trajectories of differential inclusions and functional-differential inclusions with memory // Israel J. of Math. 1984. 31. P. 83–100.

41. Nagumo M. Uber die Lage der Intergralkurven gewohnliker Differentialgleichungen // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1942. 24. P. 551–559.