ИЖЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.934

БЛАГОДАТСКИХ АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ

КОНФЛИКТНО УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
кандидат физико-математических наук,
доцент Н. Н. Петров

Ижевск 2005 г.

Оглавление

Основные обозначения **2**

Введение **3**

Глава 1. Групповое преследование одного и нескольких убегающих **20**

§1.1. Вспомогательные результаты 20

§1.2. Групповое преследование одного убегающего в примере Понтрягина 23

§1.3. Поимка заданного числа убегающих в примере Понтрягина 36

§1.4. Колебательный конфликтно управляемый процесс с одним убегающим 50

§1.5. Поимка заданного числа убегающих в колебательном конфликтно управляемом процессе 56

§1.6. Простое групповое преследование заданного числа убегающих, имеющих преимущество в скорости 60

Глава 2. Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы преследователей **66**

§2.1. Мягкое убегание жестко скоординированных убегающих от объектов с меньшей маневренностью 66

§2.2. Уклонение жестко скоординированных убегающих в шаре от группы инерционных преследователей 86

Список литературы **89**

Основные обозначения

R^ν – пространство ν-мерных вектор-столбцов с евклидовой нормой

$\|x\|$ – евклидова норма вектора $x \in R^\nu$

$\langle x, y\rangle$ – скалярное произведение векторов $x, y \in R^\nu$

$\mathrm{Int}A$ – внутренность множества A

$\mathrm{co}A$ – выпуклая оболочка множества A

∂A – граница множества A

$|A|$ – число элементов множества A

ι – мнимая единица

$\mathfrak{D}(c, r)$ – замкнутый шар с центром в точке c радиуса r

$\mathcal{I}$ – единичная матрица

Введение

Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями. Динамические процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми.

Предлагаемая работа посвящена дифференциальным играм преследования-убегания с участием двух групп (преследователей и убегающих). Потребность изучения таких задач возникает при решении ряда прикладных задач из механики, экономики, военного дела, радиоэлектроники, биологии и некоторых других областей.

Одной из первых работ в этой области, по всей видимости, следует считать работу Г. Штейнгауза, опубликованную в 1925 году, в которой он формулирует задачу преследования как дифференциальную игру преследования. Становление теории дифференциальных игр связано с исследованиями Р. Айзекса, А. Брайсона, У. Флеминга, Ю. То, Б. Н. Пшеничного, Л. А. Матроска.

Основополагающий вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли академики Н. Н. Красовский и Л. С. Понтрягин.

К настоящему времени теория дифференциальных игр получила существенное развитие.

В работе [105] Б. Н. Пшеничного рассматривалась задача простого преследования группой преследователей одного убегающего, при условии, что скорости убегающего и преследователей по норме не превосходят единицы.

Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

Ф. Л. Черноусько в работе [130] рассматривалась задача уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследующих точек, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Был построен такой способ управления, который обеспечивает уклонение от всех преследователей на конечное расстояние, причем движение уклоняющейся точки остается в фиксированной окрестности заданного движения.

Указанные работы были, по существу, первыми, посвященными задаче группового преследования группой преследователей одного убегающего.

В работе [24] Н. Л. Григоренко получены необходимые и достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от нескольких преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением, и множество управлений каждого из игроков – один и тот же выпуклый компакт.

Работа [21] обобщает результат Б. Н. Пшеничного на случай l-поимки.

В работе [151] Б. К. Хайдаров рассмотрел задачу позиционной l-поимки одного убегающего группой преследователей при условии, что каждый из игроков обладает простым движением.

В работах [47, 114] получены условия оптимальности времени преследования в дифференциальной игре одного убегающего и нескольких преследователей, движение которых является простым.

В работе [26] Н. Л. Григоренко получены необходимые и достаточные условия r-кратной поимки одного убегающего группой преследователей при условии, что все игроки обладают простым движением с максимальной по норме скоростью, равной единице.

В работе [45] Р. П. Иванов рассмотрел задачу простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий не покидает пределы выпуклого компакта с непустой внутренностью. Было доказано, что если число преследователей меньше размерности множества, то будет уклонение, иначе – поимка и получена оценка времени поимки.

Работа [80] Н. Н. Петрова обобщает результат Р. П. Иванова на случай, когда убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью.

Задачи простого преследования с "линией жизни" рассмотрены Л. А. Петросяном в [92].

А. М. Ковшов в [49] рассмотрел задачу простого преследования одного убегающего группой преследователей на сфере.

По всей видимости, первой работой, посвященной задаче преследования группой преследователей группы убегающих была работа [79]. В данной работе рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что скорости всех участников по норме не превосходят единицы и целью преследователей является поимка всех убегающих. Были получены достаточные условия уклонения от встречи и получены оценки сверху и снизу минимального числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

Работа [144] обобщает результаты предыдущей работы на линейные дифференциальные игры.

Хотя с момента первой публикации, посвященной задаче преследования группой преследователей группы убегающих прошло более 20 лет, число публикаций посвященных данной задаче невелико.

В работе [78] рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что скорости всех участников по норме не превосходят единицы, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а убегающие в начальный момент времени выбирают свое управление на интервал $[0, \infty)$. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

В работах [56, 146] рассматривалась задача преследования четырьмя преследователями на плоскости двух убегающих.

В работе [119] Н. Ю. Сатимов и М. Ш. Маматов рассмотрели задачу преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что преследователи и убегающие обладают простым движением с единичной по норме максимальной скоростью и, убегающие, кроме того, используют одно и то же управление (жестко скоординированные убегающие) . Цель группы преследователей – поймать хотя бы одного убегающего. Были приведены достаточные условия поимки.

Работы Д. А. Вагина и Н. Н. Петрова [18, 90] дополняют предыдущую работу.

Среди других работ, посвященных задаче простого преследования, отметим работы [1, 6, 22, 35, 57, 63, 64, 94, 121, 123, 141, 153, 154].

Обобщением задачи простого преследования является пример Понтрягина [98]. Данному примеру посвящена обширная литература, так как он является модельным для анализа полученных различных условий поимки и убегания.

В работе [109] Б. Н. Пшеничный и И. С. Раппопорт рассмотрели задачу преследования группой преследователей одного убегающего в дифференциальной игре, закон движения каждого из участников в которой имеет вид

$$\dot{z} + az = u, \quad \|u\| \leqslant 1, \ a < 0.$$

Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

В работе [87] Н. Н. Петров рассмотрел задачу преследования группой преследователей одного убегающего в примере Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями игроков. Были получены достаточные условия поимки.

В работе [89] рассмотрена задача о многократной поимке одного убегающего группой преследователей в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями.

Задача преследования жестко скоординированных убегающих группой преследователей в примере Понтрягина при равных динамических и инерционных возможностях участников рассмотрена в [19]. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего.

В работе [88] Н. Н. Петров рассмотрел задачу преследования группой преследователей группы убегающих в примере Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями игроков, при условии, что каждый преследователь ловит не более одного убегающего и убегающие выбирают свои управления при $t = 0$ сразу на $[0, \infty)$ и не покидают пределы множества D. Были получены достаточные условия поимки.

"Мягкая" поимка одного убегающего группой преследователей для инерционных объектов рассматривалась Р. П. Ивановым в работе [43].

В работе [145] А. А. Чикрий и П. В. Прокопович рассмотрели задачу уклонения одного убегающего от группы преследователей в дифференциальной игре, закон движения каждого из участников в которой имеет вид

$$\ddot{z} = u, \quad \|u\| \leqslant 1.$$

При условии дискриминации преследователей были получены достаточные условия убегания.

Задачи уклонения одного убегающего, обладающего большей маневренностью, от группы преследователей в примере Понтрягина рассматривались ранее Н. Ю. Сатимовым и Б. Б. Рихсиевым в [122]. При условии дискриминации преследователей были получены достаточные условия убегания.

Пример Понтрягина с различными инерционными и динамическими возможностями участников рассматривался также в работах [28, 38, 39, 40, 41, 60, 67, 95, 98, 120, 142].

Квазилинейные динамические процессы представляют собой естественное обобщение рассмотренных выше задач.

При условии дискриминации убегающего в работах Н. Л. Григоренко [28], А. А. Чикрия [142] рассмотрены различные методы группового преследования одного убегающего в квазилинейных динамических процессах. Получены достаточные условия поимки и r-кратной поимки.

В работе [95] Ю. В. Пилипенко и А. А. Чикрий рассматривали квазилинейные процессы, для которых условие Л. С. Понтрягина [98] выполнено лишь на некоторых интервалах числовой полуоси, последнее обстоятельство может иметь место, например, если однородная система осуществляет периодические колебательные движения. При дискриминации убегающего получены достаточные условия поимки группой преследователей.

Среди других работ посвященных задачам преследования и убегания в квазилинейных процессах со многими участниками отметим [27, 31, 50, 71, 84, 118, 122, 134, 135, 136].

Ниже приведены краткий обзор данной работы и список публикаций автора по теме диссертации.

Краткий обзор работы

Работа состоит из двух глав и восьми параграфов. Первая глава содержит шесть параграфов и посвящена задачам группового преследования одного и нескольких убегающих.

Первый параграф носит вспомогательный характер, здесь доказаны некоторые свойства почти периодических функций специального вида и приведена теорема Холла о существовании системы различных представителей.

Определение 1. *Для множеств $J_\beta, \beta \in M = \{1, 2, \ldots, r\}$ существует система различных представителей, если можно выбрать попарно различные элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ такие, что $\alpha_\beta \in J_\beta, \beta \in M$.*

Все дифференциальные игры рассматриваются в пространстве $R^\nu (\nu \geqslant 2)$.

Во втором параграфе рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + a_2 x_i^{(l-2)} + \cdots + a_l x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{1}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1 y^{(l-1)} + a_2 y^{(l-2)} + \cdots + a_l y = v, \quad v \in V. \tag{2}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(0) = X_i^q,\ y^{(q)}(0) = Y^q,\ \text{причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i,\ Z_0 = (X_i^q, Y^q).$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in R^\nu$, $a_1, a_2, \ldots, a_l \in R^1$, V – строго выпуклый компакт R^ν такой, что $\mathrm{Int} V \neq \emptyset$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

Вместо (1), (2) рассмотрим уравнение с начальными условиями

$$z_i^{(l)} + a_1 z_i^{(l-1)} + a_2 z_i^{(l-2)} + \cdots + a_l z_i = u_i - v, \quad z_i^{(q)}(0) = Z_i^q = X_i^q - Y^q.$$

Определение 2. *В игре* Γ *возможна поимка, если существует момент* $T_0 = T_0(Z_0)$, *что для любого допустимого управления* $v(t)$ *найдутся допустимые управления*

$$u_i(t) = u_i(t,\ Z_0,\ v(s),\ 0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [0, T_0],\ \alpha \in I$ *выполнено* $z_\alpha(\tau) = 0$.

Всюду под допустимыми понимаются управления из класса измеримых функций, удовлетворяющие указанным ограничениям.

Через φ_q обозначим решение уравнения с начальными условиями

$$\omega^{(l)} + a_1\omega^{(l-1)} + a_2\omega^{(l-2)} + \cdots + a_l\omega = 0$$

$$\omega(0) = 0, \ldots, \omega^{(q-1)}(0) = 0,\ \omega^{(q)}(0) = 1,\ \omega^{(q+1)}(0) = 0, \ldots, \omega^{(l-1)}(0) = 0.$$

Предположение 1. *Все корни характеристического уравнения*

$$\lambda^l + a_1\lambda^{l-1} + a_2\lambda^{l-2} + \cdots + a_l = 0$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Пусть далее,

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t)Z_i^0 + \varphi_1(t)Z_i^1 + \cdots + \varphi_{l-1}(t)Z_i^{l-1}.$$

Считаем, что $\xi_i(t) \neq 0$ для всех $i, t > 0$, ибо если $\xi_\alpha(\tau) = 0$ при некоторых $\alpha \in I, \tau > 0$, то преследователь P_α ловит убегающего E к моменту τ, полагая $u_\alpha(t) = v(t),\ t \in [0, \tau]$.

Обозначим через H_i кривые

$$H_i = \{\xi_i(t),\ t \in [0, \infty)\}.$$

Условие 1. *Существуют* $h_i^0 \in H_i$ *такие, что*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены предположение 1 и условие 1. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Условие 2. *Начальные позиции участников таковы, что*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}.$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены предположение 1 и условие 2. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнено предположение 1,* $\nu = 2$ *и* $n = 2$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

В третьем параграфе рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением (1), закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + a_2 y_j^{(l-2)} + \cdots + a_l y_j = v_j, \quad v_j \in V. \tag{3}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(0) = X_i^q,\ y_j^{(q)}(0) = Y_j^q,\ \text{причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j,\ Z_0 = (X_i^q, Y_j^q).$$

Здесь и далее $y_j, v_j \in R^\nu$, $j \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Цель группы преследователей – "поймать" не менее r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ убегающих, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может "поймать" не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant r$.

Вместо (1), (3) рассмотрим уравнение с начальными условиями

$$z_{ij}^{(l)} + a_1 z_{ij}^{(l-1)} + a_2 z_{ij}^{(l-2)} + \dots + a_l z_{ij} = u_i - v_j, \quad z_{ij}^{(q)}(0) = Z_{ij}^q = X_i^q - Y_j^q.$$

Определение 3. *В игре Γ возможна поимка, если существует момент $T_0 = T_0(Z_0)$, что для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$ найдутся допустимые управления*

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ Z_0,\ v_j(s),\ s \in [0, \infty)\big)$$

обладающие следующим свойством: существуют множества

$$N \subset I,\ M \subset J,\ |N| = |M| = r$$

такие, что каждый убегающий $E_\beta, \beta \in M$ ловится не позднее момента T_0 некоторым преследователем $P_\alpha, \alpha \in N$, причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не поймаными. Выражение "преследователь P_α ловит убегающего E_β" означает, что для некоторого $\tau_{\alpha\beta} \in [0, T_0]$ выполнено $z_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$.

Пусть

$$\xi_{ij}(t) = \varphi_0(t) Z_{ij}^0 + \varphi_1(t) Z_{ij}^1 + \dots + \varphi_{l-1}(t) Z_{ij}^{l-1}.$$

Считаем, что $\xi_{ij}(t) \neq 0$ для всех $i, j, t > 0$.

Обозначим через H_{ij} кривые

$$H_{ij} = \{\xi_{ij}(t),\ t \in [0, \infty)\}.$$

Условие 3. *Для каждого $k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ верно следующее: для любого множества $N \subset I, |N| = n - k$ найдется такое множество $M \subset J, |M| = r - k$, что для всех $\beta \in M$*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{H_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены предположение 1 и условие 3. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $m = r = 1$*, выполнено предположение 1,* $\nu = 2$ *и* $n = 1$*. Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

Условие 4. *Для каждого* $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ *верно следующее: для любого множества* $N \subset I, |N| = n - k$ *найдется такое множество* $M \subset J, |M| = r - k$*, что для всех* $\beta \in M$

$$0 \in \mathrm{Intco}\{Z^0_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}.$$

С л е д с т в и е 3. *Пусть выполнены предположение 1 и условие 4. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

В четвертом параграфе рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$\dot{x}_i = Ax_i + u_i, \quad u_i \in V, \tag{4}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = Ay + v, \quad v \in V. \tag{5}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = X_i^0,\ y(0) = Y^0,\ \text{причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i,\ Z_0 = (X_i^0, Y^0).$$

Здесь и далее A – постоянная квадратная порядка ν матрица.

Вместо (4), (5) рассмотрим уравнение с начальными условиями

$$\dot{z}_i = Az_i + u_i - v, \quad z_i(0) = Z_i^0 = X_i^0 - Y^0.$$

Определение 4. *В игре* Γ *возможна поимка, если существует момент* $T_0 = T_0(Z_0)$, *что для любого допустимого управления* $v(t)$ *найдутся допустимые управления*

$$u_i(t) = u_i(t,\ Z_0,\ v(t))$$

такие, что для некоторых $\tau \in [0, T_0],\ \alpha \in I$ *выполнено* $z_\alpha(\tau) = 0$.

Пусть Φ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A\omega$$

такая, что $\Phi(0) = \mathcal{I}$. Считаем, что $\Phi(t)Z_i^0 \neq 0$ для всех $i, t > 0$.

Предположение 2. *Все корни характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены предположение 2 и условие 2. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

В пятом параграфе рассматривается дифференциальная игра Γ $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением (4), закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = Ay_j + v_j, \quad v_j \in V. \tag{6}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = X_i^0,\ y_j(0) = Y_j^0,\ \text{причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j,\ Z_0 = (X_i^0, Y_j^0).$$

Цель группы преследователей – "поймать" не менее r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ убегающих, при условии указанном в третьем параграфе.

Вместо (4), (6) рассмотрим уравнение

$$\dot{z}_{ij} = Az_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(0) = Z_{ij}^0 = X_i^0 - Y_j^0.$$

Возможность поимки в игре Γ понимаем в смысле определения 3.

Считаем, что $\Phi(t)Z_{ij}^0 \neq 0$ для всех $i, j, t > 0$.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнены предположение 2 и условие 4. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

В последнем параграфе первой главы рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \dots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \tag{7}$$

закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j, \quad \|v_j\| \leqslant \gamma, \ \gamma > 1. \tag{8}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = X_i^0, \ y_j(0) = Y_j^0, \text{ причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j, \ Z_0 = (X_i^0, Y_j^0).$$

Цель группы преследователей – "поймать" не менее r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ убегающих, при условии указанном в третьем параграфе.

Возможность поимки в игре Γ понимаем в смысле определения 3, где выражение "преследователь P_α ловит убегающего E_β" означает, что для некоторого $\tau_{\alpha\beta} \in [0, T_0]$ выполнено $x_\alpha(\tau_{\alpha\beta}) = y_\beta(\tau_{\alpha\beta})$.

Обозначим через A_{ij} множество точек пространства R^ν, которые преследователем P_i могут достигаться не позже, чем убегающим E_j. Отметим, что каждое из множеств A_{ij} – замкнутый шар. Далее, $A_j(N) = \bigcup\limits_{\alpha \in N} A_{\alpha j}$ – множество точек пространства R^ν, которые хотя бы одним из преследователей $P_\alpha, \alpha \in N$ достигаются не позже, чем убегающим E_j.

Пусть ℓ_j – луч с началом в точке Y_j^0, ρ_j – непрерывная кривая с началом в точке Y_j^0 такая, что для любого положительного числа L найдется точка $\rho \in \rho_j$, для которой $\|\rho - Y_j^0\| \geqslant L$.

Предположение 3. *Если для некоторых $N \subset I$ и $\beta \in J$ существует кривая ρ_β, для которой $A_\beta(N) \cap \rho_\beta = \emptyset$, то существует луч ℓ_β такой, что $A_\beta(N) \cap \ell_\beta = \emptyset$.*

Условие 5. *Для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ верно следующее: для любого множества $N \subset I, |N| = n - k$ найдется такое множество $M \subset J, |M| = r - k$, что для всех $\beta \in M$ и ℓ_β*

$$A_\beta(N) \cap \ell_\beta \neq \emptyset.$$

Теорема 6. *Пусть выполнено предположение 3. В игре Γ возможна поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие 5.*

Вторая глава состоит из двух параграфов, в ней рассматриваются задачи уклонения всей группы жестко скоординированных убегающих от группы преследователей.

В первом параграфе рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(n_i)} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \tag{9}$$

закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$y_j^{(m_j)} = v, \quad \|v\| \leqslant \gamma, \quad \gamma \in (0,1), \tag{10}$$

где $n_i > m_j \geqslant 1$ для всех i, j. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(\alpha_i)}(0) = X_i^{\alpha_i},\ y_j^{(\beta_j)}(0) = Y_j^{\beta_j},\ \text{причем } X_i^{\beta_j} \neq Y_j^{\beta_j} \text{ для всех } i, j, \beta_j.$$

Здесь и далее $\alpha_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1,\ \beta_j = 0, 1, \ldots, m_j - 1.$

Определение 5. *В игре* Γ *возможно мягкое убегание, если для любых допустимых управлений* $u_i(t)$ *найдется допустимое управление*

$$v(t) = v\big(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(t),\ y_j^{(\beta_j)}(t)\big)$$

такое, что $x_i^{(\beta_j)}(t) \neq y_j^{(\beta_j)}(t)$ *для всех* $t \in [0, \infty)$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент времени t по величинам $\big\{x_i^{(\alpha_i)}(t),\ y_j^{(\beta_j)}(t)\big\}$ для всех убегающих E_j выбирает одно и тоже управление $v(t)$.

Т е о р е м а 7. *В игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

В последнем параграфе рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением (9), где $n_i \geqslant 2$ для всех i, закон движения каждого убегающего E_j имеет вид (10), где $m_j = 1$ для всех j. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(\alpha_i)}(0) = X_i^{\alpha_i},\ y_j(0) = Y_j^0,\ \text{причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j.$$

Дополнительно предполагается, что убегающий E_j не покидает пределы шара $\mathfrak{D}(Y_j^0, r_0)$, где r_0 положительное число.

Определение 6. *В игре* Γ *возможно уклонение от встречи в шаре, если для любых допустимых управлений* $u_i(t)$ *найдется допустимое управление*

$$v(t) = v\big(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(t),\ y_j(t)\big)$$

такое, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ *и* $y_j(t) \in \mathfrak{D}(Y_j^0, r_0)$ *для всех* $t \in [0, \infty)$.

Т е о р е м а 8. *В игре* Γ *возможно уклонение от встречи в шаре из любых начальных позиций.*

Публикации автора по теме диссертации

1. *Благодатских А.И.* Две задачи группового преследования// Известия ИМИ, №1(21), 2001, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-14.

2. *Благодатских А.И.* Пример Понтрягина со многими убегающими// Известия ИМИ, №2(25), 2002, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 23-26.

3. *Благодатских А.И.* Уклонение от группы инерционных объектов// Шестая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция: Материалы конференции. Часть 2, Ижевск: УдГУ, 2004, с. 77.

4. *Благодатских А.И.* Уклонение жестко скоординированных убегающих в одной задаче группового преследования// Известия ИМИ, №2(30), 2004, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-24.

5. *Благодатских А.И.* Одна задача уклонения жестко скоординированных убегающих// Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тезисы докладов, Екатеринбург: УрО РАН, 2004, с. 147-148.

6. *Благодатских А.И.* Об одной задаче уклонения от многих преследователей// Проблемы современного математического образования в ВУЗах и школах России: Тезисы докладов, Киров: ВятГГУ, 2004, с. 137-138.

7. *Благодатских А.И.* Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы инерционных объектов// Известия РАН. Теория и системы управления, 2004, №6, с. 143-149.

8. *Благодатских А.И.* О некоторых задачах группового преследования// Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной конференции. Т.2, Узбекистан, Ташкент, 2004, с. 33-36.

9. *Благодатских А.И.* О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками// Известия ИМИ, №2(32), 2005, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-22.

10. *Благодатских А.И.* Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками// Известия РАН. Теория и системы управления, 2005, №2, с. 43-45.

ГЛАВА 1

Групповое преследование одного и нескольких убегающих

§1.1. Вспомогательные результаты

Напомним определение и два известных свойства почти периодических функций.

Определение 1.1. *Непрерывная на R^1 функция g называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $T(\varepsilon) > 0$ такое, что любой отрезок $[a, a + T(\varepsilon)]$ содержит по меньшей мере одно число τ, для которого при всех t справедливо неравенство*

$$\|g(t+\tau) - g(t)\| < \varepsilon.$$

1. Периодическая функция является почти периодической.

2. Линейная комбинация почти периодических функций есть функция почти периодическая.

Рассмотрим почти периодическую функцию f вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{p} \bigl(c_k \cos b_k t + s_k \sin b_k t\bigr), \text{ где } c_k, s_k, b_k \in R^1, b_k > 0.$$

Л е м м а 1.1. *Пусть $f(t) \not\equiv 0$. Тогда найдутся положительные числа t_1, t_2, τ такие, что $f(t_1) < 0,\ f(t_2) > 0,\ f(\tau) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование таких чисел t_1, t_2 следует из леммы 1.1 [71, стр. 151], поэтому, учитывая непрерывность функции f, найдется, хотя бы одно, искомое τ.

Лемма доказана.

Докажем некоторые свойства почти периодической функции ξ такой, что

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{p} \bigl(C_k \cos b_k t + S_k \sin b_k t\bigr), \text{ где } C_k, S_k \in R^{\nu}, b_k \in R^1, b_k > 0$$

или в координатной форме

$$\xi^q(t) = \sum_{k=1}^{p} \big(C_k^q \cos b_k t + S_k^q \sin b_k t\big), \; q = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Обозначим через H кривую

$$H = \{\xi(t), t \in [0, \infty)\}.$$

Л е м м а 1.2. *Пусть* $\xi(t) \neq 0$ *для всех* $t \in [0, \infty)$. *Тогда*

1) если $\nu \geqslant 3$, *то* $\mathrm{Intco}H = \emptyset$ *или* $0 \in \mathrm{Intco}H$;

2) если $\nu = 2$, *то* $0 \in \mathrm{Intco}H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Предположим противное:

$$\mathrm{Intco}H \neq \emptyset \text{ и } 0 \notin \mathrm{Intco}H.$$

В таком случае, по теореме отделимости, найдется не нулевой вектор $e \in R^\nu$ такой, что

$$\langle h, e\rangle \leqslant 0 \text{ для всех } h \in \mathrm{co}H.$$

Из последнего следует, что функция

$$f(t) = \langle \xi(t), e\rangle = \sum_{q=1}^{\nu} \xi^q(t) e^q \leqslant 0 \text{ для всех } t \in [0, \infty).$$

Если $f(t) = 0$ для всех $t \in [0, \infty)$, то $\mathrm{Intco}H = \emptyset$, что невозможно. Таким образом, функция $f(t) \not\equiv 0$, поэтому к ней можно применить лемму 1.1, откуда $f(t_2) > 0$ при некотором $t_2 > 0$. Получили противоречие. Утверждение 1 леммы доказано.

2) Предположим, что

$$\mathrm{Intco}H = \emptyset.$$

Тогда $H \subset L$ для некоторой прямой L, откуда следует существование констант $a, b \in R^1$, что для всех $t \in [0, \infty)$ имеет место одно из трех равенств:

$$1.\ \xi^1(t) - a\xi^2(t) = b,\ a \neq 0; \quad 2.\ \xi^1(t) = b; \quad 3.\ \xi^2(t) = b.$$

В первом случае положим $f(t) = \xi^1(t) - a\xi^2(t)$. Из леммы 1.1 следует, что $f(\tau_1) = 0$ для некоторого $\tau_1 > 0$, значит $b = 0$ и $\xi^1(t) = a\xi^2(t)$. Снова применяя лемму 1.1 получим, что $\xi^2(\tau) = 0$ при некотором значении $\tau > 0$, поэтому $\xi^1(\tau) = 0$ и $\xi(\tau) = 0$.

Аналогично доказывается, что во втором случае $b = 0$. Из леммы 1.1 получаем $\xi^2(\tau) = 0,\ \tau > 0$ и $\xi(\tau) = 0$. Такой же вывод и в последнем случае.

Итак, показано, что во всех случаях найдется значение $\tau > 0$ такое, что $\xi(\tau) = 0$. Получили противоречие условию леммы, следовательно

$$\mathrm{Intco} H \neq \emptyset.$$

Дальнейшее доказательство проводим аналогично доказательству утверждения 1. Утверждение 2 доказано.

Лемма доказана.

Приведем один результат теории систем различных представителей.

Определение 1.2. *Для множеств $J_\beta, \beta \in M = \{1, 2, \ldots, r\}$ существует система различных представителей, если можно выбрать попарно различные элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ такие, что $\alpha_\beta \in J_\beta, \beta \in M$.*

Т е о р е м а 1.1 (Холла)[152]. *Пусть $J_\beta, \beta \in M$ таковы, что*

$$|J_1| \leqslant |J_2| \leqslant \ldots \leqslant |J_r| \ \textit{и} \ \left|\bigcup_{\beta=1}^{k} J_\beta\right| \geqslant k \ \textit{для всех} \ k = 1, 2, \ldots, r.$$

Тогда для $J_\beta, \beta \in M$ существует система различных представителей.

§1.2. Групповое преследование одного убегающего в примере Понтрягина

В пространстве R^ν ($\nu \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + a_2 x_i^{(l-2)} + \cdots + a_l x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{2.1}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1 y^{(l-1)} + a_2 y^{(l-2)} + \cdots + a_l y = v, \quad v \in V, \tag{2.2}$$

где $x_i, y, u_i, v \in R^\nu$, $a_1, a_2, \ldots, a_l \in R^1$, V – строго выпуклый компакт R^ν такой, что $\mathrm{Int} V \neq \emptyset$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(0) = X_i^q, \ y^{(q)}(0) = Y^q, \text{ причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i.$$

Здесь и далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \ q = 0, 1, \ldots, l-1, \ Z_0 = (X_i^q, Y^q).$$

Вместо (2.1), (2.2) рассмотрим уравнение

$$z_i^{(l)} + a_1 z_i^{(l-1)} + a_2 z_i^{(l-2)} + \cdots + a_l z_i = u_i - v \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(0) = Z_i^q = X_i^q - Y^q.$$

Определение 2.1. *Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (2.1), (2.2) называются допустимыми.*

Определение 2.2. *В игре* Γ *возможна поимка, если существует момент* $T_0 = T_0(Z_0)$, *что для любого допустимого управления* $v(t)$ *найдутся допустимые управления*

$$u_i(t) = u_i(t,\ Z_0,\ v(s),\ 0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [0, T_0],\ \alpha \in I$ *выполнено* $z_\alpha(\tau) = 0$.

Через φ_q обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1\omega^{(l-1)} + a_2\omega^{(l-2)} + \cdots + a_l\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \ldots, \omega^{(q-1)}(0) = 0,\ \omega^{(q)}(0) = 1,\ \omega^{(q+1)}(0) = 0, \ldots, \omega^{(l-1)}(0) = 0.$$

Предположение 2.1. *Все корни характеристического уравнения*

$$\lambda^l + a_1\lambda^{l-1} + a_2\lambda^{l-2} + \cdots + a_l = 0 \tag{2.4}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Обозначим корни уравнения (2.4) через

$$\pm b_1\iota, \pm b_2\iota, \ldots, \pm b_p\iota \quad (0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_p,\ 2p = l).$$

Пусть далее,

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t)Z_i^0 + \varphi_1(t)Z_i^1 + \cdots + \varphi_{l-1}(t)Z_i^{l-1}$$

и так как каждая из функций φ_q имеет вид

$$\varphi_q(t) = \sum_{k=1}^{p}\bigl(c_k\cos b_kt + s_k\sin b_kt\bigr),\ \text{где } c_k, s_k \in R^1,$$

то все функции ξ_i представимы в виде

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^{p}\bigl(C_k\cos b_kt + S_k\sin b_kt\bigr),\ \text{где } C_k, S_k \in R^\nu.$$

Считаем, что $\xi_i(t) \neq 0$ для всех $i, t > 0$, ибо если $\xi_\alpha(\tau) = 0$ при некоторых $\alpha \in I, \tau > 0$, то преследователь P_α ловит убегающего E к моменту τ, полагая $u_\alpha(t) = v(t),\ t \in [0, \tau]$.

Обозначим через H_i кривые

$$H_i = \{\xi_i(t),\ t \in [0, \infty)\}.$$

Условие 2.1. *Существуют $h_i^0 \in H_i$ такие, что*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}.$$

Условие 2.2. *Для любых $h_i \in \mathfrak{D}(h_i^0, \varepsilon)$*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_i\}.$$

Л е м м а 2.1. *Пусть выполнено условие 2.1. Тогда при некотором значении $\varepsilon > 0$ выполнено условие 2.2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\operatorname{co}\{h_i^0\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в $h_k^0,\ k \in K \subset I$. Из условия 2.1 следует, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_k^0\}.$$

Так как множество $\operatorname{Intco}\{h_k^0\}$ является открытым, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $h_k \in \mathfrak{D}(h_k^0, \varepsilon)$

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_k\}.$$

Из последнего, учитывая, что

$$\operatorname{Intco}\{h_k\} \subset \operatorname{Intco}\{h_i\},$$

следует справедливость условия 2.2.

Лемма доказана.

Так как функции ξ_i являются почти периодическими, то существует число $T(\varepsilon) > 0$, для которого выполнено

Условие 2.3. *Для всех* $t \geqslant 0$ *найдется* $\tau_i \in [t, t + T(\varepsilon))$, *что*

$$\xi_i(\tau_i) \in \mathfrak{D}(h_i^0, \varepsilon).$$

Считаем, что $\varepsilon > 0$ и $T(\varepsilon)$ выбраны исходя из условий 2.2 и 2.3.

Определим функции ψ, λ, Q

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{l-1}(t) \geqslant 0 \\ -1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda(v, \psi, h) = \sup \left\{ \lambda : \lambda \geqslant 0,\ (v - \lambda\psi h) \in V \right\},$$

$$Q(t, h) = \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)| \lambda(v(s), \psi(t-s), h) ds.$$

Положим

$$d = (h_1, h_2, \ldots, h_n),\ \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(h_1^0, \varepsilon) \times \mathfrak{D}(h_2^0, \varepsilon) \times \cdots \times \mathfrak{D}(h_n^0, \varepsilon).$$

Л е м м а 2.2. *Пусть выполнены предположение 2.1 и условие 2.1. Тогда существует момент* T *такой, что для каждых допустимого управления* $v(t)$ *и* $d \in \mathfrak{D}$ *найдется номер* $\alpha \in I$, *что* $Q(T, h_\alpha) \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что выполнено условие 2.2, поэтому, для произвольного $d \in \mathfrak{D}$,

$$\delta_{\pm 1}(d) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, \pm 1, h_i) > 0.$$

В силу леммы 1.3.13 [142, стр. 30] функция λ непрерывна на каждом из множеств $V \times \{\pm 1\} \times \mathfrak{D}(h_i^0, \varepsilon)$, откуда

$$\lim_{d^* \to d} \delta_{\pm 1}(d^*) = \lim_{d^* \to d} \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, \pm 1, h_i^*) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, \pm 1, h_i) = \delta_{\pm 1}(d),$$

следовательно и функции $\delta_{\pm 1}$ являются непрерывными, учитывая еще, что множество $\mathfrak{D}$ компакт, получим

$$\delta = \min_{d\in\mathfrak{D}} \min_{\psi\in\{1,-1\}} \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v,\psi,h_i) = \min_{d\in\mathfrak{D}}\{\delta_{+1}(d),\delta_{-1}(d)\} > 0.$$

Далее,

$$\max_{i\in I} Q(t,h_i) = \max_{i\in I} \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)|\lambda(v(s),\psi(t-s),h_i)ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)| \sum_{i\in I}\lambda(v(s),\psi(t-s),h_i)ds \geqslant \frac{\delta}{n}\int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)|ds.$$

Таким образом, для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n}\int\limits_0^T |\varphi_{l-1}(T-s)|ds \geqslant 1,$$

и некоторого $\alpha \in I$ выполнено $Q(T,h_\alpha) \geqslant 1$.

Лемма доказана.

Пусть

$$T_1 = T_1(Z_0) = \min\{t \geqslant 0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{d\in\mathfrak{D}} \max_{i\in I} Q(t,h_i) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2.2 $T_1 < \infty$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнены предположение 2.1 и условие 2.1. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши для всех $t \geqslant 0$

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int\limits_0^t \varphi_{l-1}(t-s)(u_i(s)-v(s))ds.$$

Пусть $v(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant T_0 = T_1 + T(\varepsilon)$ – произвольное допустимое управление убегающего E и t_1 – наименьший положительный корень функции

$$F(t) = 1 - \max_{i \in I} \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(\tau_i - s)| \lambda(v(s), \psi(\tau_i - s), \xi_i(\tau_i)) ds,$$

где $\tau_i \in [T_1, T_0)$ выбраны так, чтобы выполнялось условие 2.3. Отметим, что $t_1 \leqslant \tau_i$, т.к. в силу леммы 2.2 $F(\tau_i) \leqslant 0$.

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \psi(\tau_i - t), \xi_i(\tau_i)) \psi(\tau_i - t) \xi_i(\tau_i),\ t \in [0, T_0],$$

где считаем, что $\lambda(v(t), \psi(\tau_i - t), \xi_i(\tau_i)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$. Тогда, с учетом формулы Коши,

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i) \Big(1 - \int\limits_0^{t_1} |\varphi_{l-1}(\tau_i - s)| \lambda(v(s), \psi(\tau_i - s), \xi_i(\tau_i)) ds\Big).$$

В силу определения t_1, для некоторого $\alpha \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_\alpha(\tau_\alpha) = 0$.

Теорема доказана.

Условие 2.4. *Начальные позиции участников таковы, что*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}.$$

Следствие 2.1. *Пусть выполнены предположение 2.1 и условие 2.4. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Доказательство. В качестве h_i^0 в условии 2.1 можно взять $Z_i^0 = \xi_i(0) \in H_i$ и применить теорему 2.1.

Следствие доказано.

Следствие 2.2. *Пусть выполнено предположение 2.1,* $\nu = 2$ *и* $n = 3$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из второго утверждения леммы 1.2 следует, что можно выбрать h_i^0 так, чтобы условие 2.1 имело место. Теперь осталось воспользоваться теоремой 2.1.

Следствие доказано.

Следствие 2.2, построив другое управление, можно усилить. Далее (до примеров) считаем

$$\nu = 2,\ n = 2,\ k = 1, 2.$$

Зафиксируем число $r > 0$ так, чтобы

$$H_i \in \mathrm{Int}\mathfrak{D}(0, r),$$

его существование следует из ограниченности функций ξ_i. Начало координат обозначим через O. Далее, по единичным векторам $e_i^k \in R^2$ определим следующее: $D_i^k \in \partial\mathfrak{D}(0, r)$ – точки вида $e_i^k r$; $\mathfrak{D}_i$ – наименьший из двух секторов круга $\mathfrak{D}(0, r)$, образованных отрезками OD_i^1 и OD_i^2; ∂_i – окружность сектора $\mathfrak{D}_i$; наконец,

$$\theta_i(t) = \{\xi_i(s),\ s \in [t_*, t^*]\},$$

где $t^* > t_* \geqslant t$ – такие моменты, для которых, впервые,

$$\Big(\xi_i(t_*) \in OD_i^1,\ \xi_i(t^*) \in OD_i^2\Big) \text{ или } \Big(\xi_i(t_*) \in OD_i^2,\ \xi_i(t^*) \in OD_i^1\Big) \text{ и}$$

$$\xi_i(s) \in \mathfrak{D}_i,\ s \in [t_*, t^*],$$

т.е. $\theta_i(t)$ – это кривая, лежащая в секторе $\mathfrak{D}_i$, обладающая следующим свойством: если двигаться из точки $\xi_i(t)$ в направлении роста t, то данный сектор впервые "пересечешь целиком" именно по этой кривой. В силу второго утверждения леммы 1.2, существуют e_i^k такие, что

$$\langle e_i^1, e_i^2 \rangle > 0,\ e_2^k = -e_1^k,\ \mathrm{Int}\mathfrak{D}_i \neq \emptyset \text{ и } \theta_i(t) \neq \emptyset \text{ для всех } t \geqslant 0.$$

Считаем, что такие вектора выбраны, смотрите рис. 2.1.

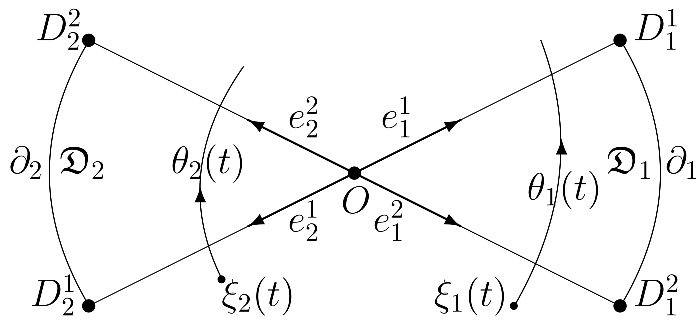

Рис. 2.1

Отметим, что

$$0 \in \mathrm{Intco}\{e_i^k\}. \tag{2.5}$$

Определим функции $\lambda_i^k,\ k_i,\ Q_i$

$$\lambda_i^k(v,\psi) = \lambda(v,\psi,e_i^k r),$$

значение функции $k_i(t,s) \in I$ находится из условия

$$\lambda_i^{k_i(t,s)}(v(s),\psi(t-s)) = \max_{k\in I} \lambda_i^k(v(s),\psi(t-s)),$$

если же оно не определяется однозначно, то положим $k_i(t,s) = 1$,

$$Q_i(t) = \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t+\Delta-s)| \lambda_i^{k_i(t+\Delta,s)}(v(s),\psi(t+\Delta-s)) e_i^{k_i(t+\Delta,s)} r ds.$$

Лемма 2.3. *Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда существует момент T такой, что для каждых допустимого управления $v(t)$ и $\Delta \in R^1$ найдется номер $\alpha \in I$ и момент $\tau \leqslant T$, что*

$$Q_\alpha(t) \in \mathfrak{D}_\alpha \text{ для всех } t \in [0,\tau] \text{ и } Q_\alpha(\tau) \in \partial_\alpha.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция Q_i при каждом $t \geqslant 0$ представима в виде $Q_i(t) = q_i^1(t)e_i^1 + q_i^2(t)e_i^2$, где функции $q_i^k(t) \geqslant 0,\ q_i^k(0) = 0$ и непрерывны. Отсюда следует, что значение функции Q_i может выйти за пределы $\mathfrak{D}_i$ только через ∂_i, смотрите рис. 2.1.

Таким образом, достаточно доказать, что существует момент T такой, что для каждых допустимого $v(t)$ и $\Delta \in R^1$ выполнено

$$\max_{i \in I} \|Q_i(T)\| \geqslant r.$$

Из (2.5) получаем, что величина

$$\sigma = \min_{\psi \in \{1,-1\}} \min_{v \in V} \max_{(i,k) \in I \times I} \lambda_i^k(v, \psi) > 0.$$

Далее,

$$\max_{i \in I} \|Q_i(t)\| =$$

$$= \max_{i \in I} \Big\| \int_0^t |\varphi_{l-1}(t + \Delta - s)| \lambda_i^{k_i(t+\Delta,s)}(v(s), \psi(t + \Delta - s)) e_i^{k_i(t+\Delta,s)} r ds \Big\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r}{2} \max_{i \in I} \int_0^t |\varphi_{l-1}(t + \Delta - s)| \lambda_i^{k_i(t+\Delta,s)}(v(s), \psi(t + \Delta - s)) ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r}{8} \int_0^t |\varphi_{l-1}(t+\Delta-s)| \sum_{i,k \in I} \lambda_i^k(v(s), \psi(t+\Delta-s)) ds \geqslant \frac{r\sigma}{8} \int_0^t |\varphi_{l-1}(t+\Delta-s)| ds.$$

Таким образом, в момент T, определяемый из условия

$$\frac{\sigma}{8} \inf_{\Delta \in R^1} \int_0^T |\varphi_{l-1}(T + \Delta - s)| ds \geqslant 1,$$

получим, что $\max_{i \in I} \|Q_i(T)\| \geqslant r$.

Лемма доказана.

Пусть

$$T_2 = T_2(Z_0) = \min\{t \geqslant 0 : Q_i(s) \in \mathfrak{D}_i, s \in [0,t] \text{ и } \inf_{v(\cdot)} \inf_{\Delta \in R^1} \max_{i \in I} \|Q_i(t)\| \geqslant r\}.$$

В силу леммы 2.3 $T_2 < \infty$.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть выполнено предположение 2.1,* $\nu = 2$ *и* $n = 2$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем T_0 так,чтобы

$$\theta_i(T_2) \subset \{\xi_i(s),\ s \in [T_2, T_0]\}.$$

Пусть $v(s),\ 0 \leqslant s \leqslant T_0$ – произвольное допустимое управление убегающего E. Выберем наименьшее положительное число t_1 так, чтобы для некоторых $\alpha \in I$ и $\tau \in [T_2, T_0]$

$$\int_0^{t_1} |\varphi_{l-1}(T_0 - s)| \lambda_i^{k_i(T_0,s)}(v(s), \psi(T_0 - s)) e_i^{k_i(T_0,s)} r ds = \xi_\alpha(\tau) \in \theta_\alpha(T_2).$$

Так как $T_0 = T_2 + \Delta$, где $\Delta = T_0 - T_2$, то, в силу определения момента T_2, получим, что $t_1 \leqslant T_2$.

Согласно формуле Коши для всех $t \geqslant 0$ имеем

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_0^t \varphi_{l-1}(t - s)(u_i(s) - v(s)) ds.$$

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i^{k_i(T_0,t)}(v(t), \psi(T_0 - t)) \psi(T_0 - t) e_i^{k_i(T_0,t)} r,\ t \in [0, T_0],$$

где считаем, что $\lambda_i^{k_i(T_0,t)}(v(t), \psi(T_0 - t)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$.

Тогда, с учетом формулы Коши для $t \in [T_2, T_0]$, имеем

$$z_i(t) = \xi_i(t) - \int_0^{t_1} |\varphi_{l-1}(T_0 - s)| \lambda_i^{k_i(T_0,s)}(v(s), \psi(T_0 - s)) e_i^{k_i(T_0,s)} r ds$$

и по определению момента t_1 для некоторых $\alpha \in I$ и $\tau \in [T_2, T_0]$ имеем $z_\alpha(\tau) = \xi_\alpha(\tau) - \xi_\alpha(\tau) = 0$.

Теорема доказана.

П р и м е р 2.1. В R^3 рассмотрим дифференциальную игру Γ 6 лиц: 5 преследователей P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и убегающего E. Уравнение (2.3) и начальные условия имеют вид

$$\ddot{z}_i + z_i = u_i - v,$$

$$Z_1^0 = Z_2^0 = Z_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Z_4^0 = Z_5^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Z_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

равны $\pm\iota$ и предположение 2.1 выполнено. Здесь условие 2.4 не выполнено. Покажем, что имеет место условие 2.1, т.к.

$$\xi_i(t) = Z_i^0 \cos t + Z_i^1 \sin t,$$

то $H_1 = H_2 = H_3$ – это окружности радиуса 1 с центром в начале координат, лежащие в плоскости первой и второй координаты, $H_4 = H_5$ – это окружности радиуса 1 с центром в начале координат, лежащие в плоскости второй и третьей координаты, смотрите рис. 2.2. Выбирая

$$h_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} h_2^0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} h_3^0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} h_4^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} h_5^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

получаем, что условие 2.1 выполнено, смотрите рис. 2.3. Из теоремы 2.1 следует

У т в е р ж д е н и е 2.1. *В игре* Γ *возможна поимка.*

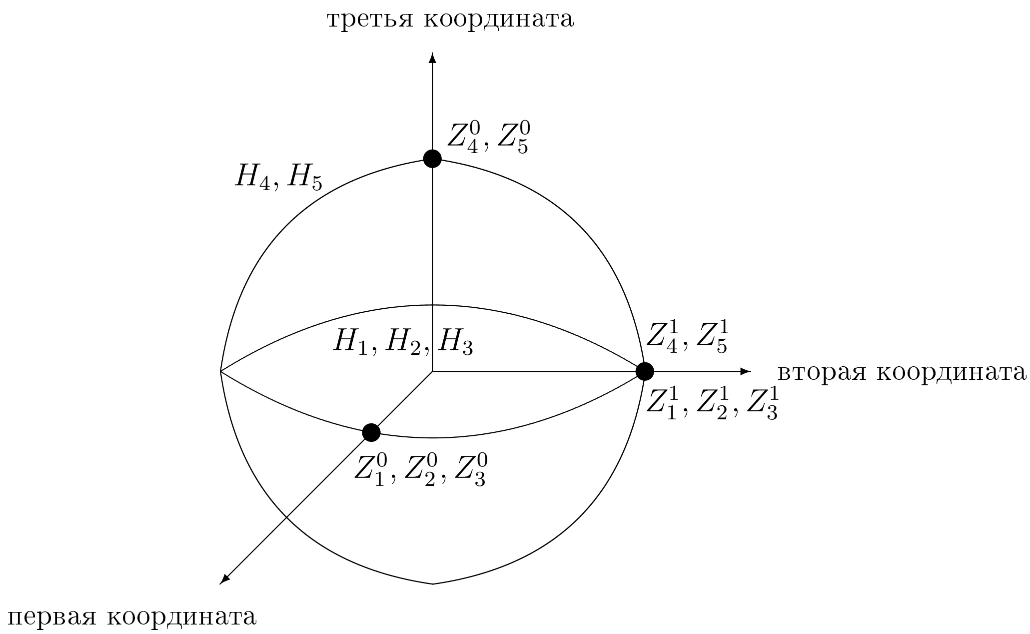
третья координата
Z_4^0, Z_5^0
H_4, H_5
H_1, H_2, H_3
Z_4^1, Z_5^1
вторая координата
Z_1^1, Z_2^1, Z_3^1
Z_1^0, Z_2^0, Z_3^0
первая координата

Рис. 2.2

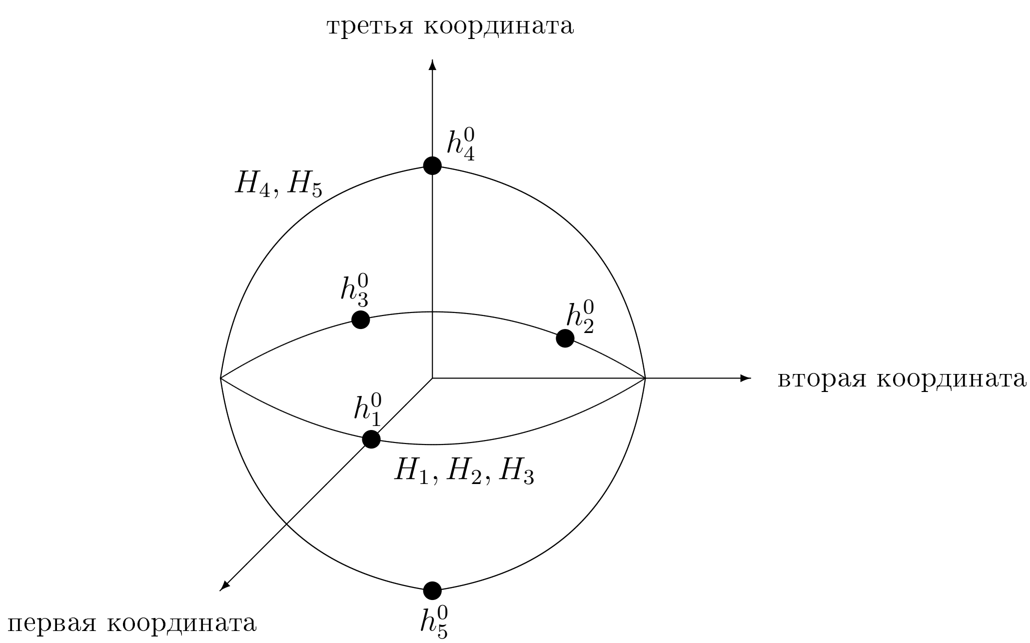
третья координата
h_4^0
H_4, H_5
h_3^0
h_2^0
вторая координата
h_1^0
H_1, H_2, H_3
первая координата
h_5^0

Рис. 2.3

П р и м е р 2.2. В R^ν рассмотрим дифференциальную игру Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (2.3) имеет вид

$$z_i^{(6)} + 14z_i^{(4)} + 49\ddot{z}_i + 36z_i = u_i - v.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^6 + 14\lambda^4 + 49\lambda^2 + 36 = 0$$

равны $\pm\iota,\ \pm2\iota,\ \pm3\iota$ и предположение 2.1 выполнено.

У т в е р ж д е н и е 2.2. *Пусть* $0 \in \mathrm{Intco}\{Z_i^0\}$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

У т в е р ж д е н и е 2.3. *Пусть* $\nu = 2$ *и* $n = 2$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

§1.3. Поимка заданного числа убегающих в примере Понтрягина

В пространстве R^ν ($\nu \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + a_2 x_i^{(l-2)} + \cdots + a_l x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{3.1}$$

закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + a_2 y_j^{(l-2)} + \cdots + a_l y_j = v_j, \quad v_j \in V, \tag{3.2}$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in R^\nu$, $a_1, a_2, \ldots, a_l \in R^1$, V – строго выпуклый компакт R^ν такой, что $\mathrm{Int}V \neq \emptyset$. При $t=0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(0) = X_i^q,\ y_j^{(q)}(0) = Y_j^q, \text{ причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j.$$

Здесь и далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\},\ j \in J = \{1, 2, \ldots, m\},$$

$$q = 0, 1, \ldots, l-1,\ Z_0 = (X_i^q, Y_j^q).$$

Цель группы преследователей – "поймать" не менее r ($1 \leqslant r \leqslant m$) убегающих, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может "поймать" не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant r$.

Вместо (3.1), (3.2) рассмотрим уравнение

$$z_{ij}^{(l)} + a_1 z_{ij}^{(l-1)} + a_2 z_{ij}^{(l-2)} + \cdots + a_l z_{ij} = u_i - v_j \tag{3.3}$$

с начальными условиями

$$z_{ij}^{(q)}(0) = Z_{ij}^q = X_i^q - Y_j^q.$$

Определение 3.1. *Управления* $u_i(t), v_j(t)$ *из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (3.1), (3.2) называются допустимыми.*

Определение 3.2. *В игре* Γ *возможна поимка, если существует момент* $T_0 = T_0(Z_0)$, *что для любой совокупности допустимых управлений* $v_j(t)$ *найдутся допустимые управления*

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ Z_0,\ v_j(s),\ s \in [0, \infty)\big)$$

обладающие следующим свойством: существуют множества

$$N \subset I,\ M \subset J,\ |N| = |M| = r$$

такие, что каждый убегающий $E_\beta, \beta \in M$ *ловится не позднее момента* T_0 *некоторым преследователем* $P_\alpha, \alpha \in N$, *причем если преследователь* P_α *ловит убегающего* E_β, *то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение "преследователь* P_α *ловит убегающего* E_β*" означает, что для некоторого* $\tau_{\alpha\beta} \in [0, T_0]$ *выполнено* $z_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$.

Через φ_q обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1\omega^{(l-1)} + a_2\omega^{(l-2)} + \cdots + a_l\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \ldots, \omega^{(q-1)}(0) = 0,\ \omega^{(q)}(0) = 1,\ \omega^{(q+1)}(0) = 0, \ldots, \omega^{(l-1)}(0) = 0.$$

Предположение 3.1. *Все корни характеристического уравнения*

$$\lambda^l + a_1\lambda^{l-1} + a_2\lambda^{l-2} + \cdots + a_l = 0 \tag{3.4}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Обозначим корни уравнения (3.4) через

$$\pm b_1\iota, \pm b_2\iota, \dots, \pm b_p\iota \quad (0 < b_1 < b_2 < \dots < b_p,\ 2p = l).$$

Пусть далее,

$$\xi_{ij}(t) = \varphi_0(t)Z_{ij}^0 + \varphi_1(t)Z_{ij}^1 + \dots + \varphi_{l-1}(t)Z_{ij}^{l-1}$$

и так как каждая из функций φ_q имеет вид

$$\varphi_q(t) = \sum_{k=1}^{p}\bigl(c_k \cos b_k t + s_k \sin b_k t\bigr),\ \text{где } c_k, s_k \in R^1,$$

то все функции ξ_{ij} представимы в виде

$$\xi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{p}\bigl(C_k \cos b_k t + S_k \sin b_k t\bigr),\ \text{где } C_k, S_k \in R^\nu.$$

Считаем, что $\xi_{ij}(t) \neq 0$ для всех $i, j, t > 0$, ибо если $\xi_{\alpha\beta}(\tau) = 0$ при некоторых $\alpha \in I, \beta \in J, \tau > 0$, то преследователь P_α ловит убегающего E_β к моменту τ, полагая $u_\alpha(t) = v_\beta(t),\ t \in [0, \tau]$.

Обозначим через H_{ij} кривые

$$H_{ij} = \{\xi_{ij}(t),\ t \in [0, \infty)\}.$$

Условие 3.1. *Имеет место включение*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{H_{i1}\}.$$

Из условия 3.1 следует, что можно выбрать точки, принадлежащих совокупности кривых H_{i1} (при этом на каждой кривой из совокупности берется одна или несколько точек), внутренность выпуклой оболочки которых содержит начало координат. Таким образом, если имеет место условие 3.1, то справедливо

Условие 3.2. *Существуют* $h^0_{iq_i} \in H_{i1}$ *такие, что*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{h^0_{iq_i}\}.$$

В условии 3.2 и далее

$$q_i \in L_i = \{1, 2, \ldots, l_i\},\ \sigma = l_1 + l_2 + \cdots + l_n.$$

Из леммы 2.1 следует, что если выполнено условие 3.2, то при некотором значении $\varepsilon > 0$ выполнено

Условие 3.3. *Для любых* $h_{iq_i} \in \mathfrak{D}(h^0_{iq_i}, \varepsilon)$

$$0 \in \mathrm{Intco}\{h_{iq_i}\}.$$

Так как функции ξ_{i1} являются почти периодическими, то существует число $T(\varepsilon) > 0$, для которого выполнено

Условие 3.4. *Для всех* $t \geqslant 0$ *найдутся* $\tau_{iq_i} \in [t, t + T(\varepsilon))$, *что*

$$\xi_{i1}(\tau_{iq_i}) \in \mathfrak{D}(h^0_{iq_i}, \varepsilon).$$

Считаем, что $h^0_{iq_i}, \varepsilon > 0$ и $T(\varepsilon)$ выбраны исходя из условий 3.2, 3.3 и 3.4.

Определим функции $\psi,\ \lambda,\ Q$

$$\psi(t) = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } \varphi_{l-1}(t) \geqslant 0 \\ -1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda(v, \psi, h) = \sup\left\{\lambda : \lambda \geqslant 0,\ (v - \lambda\psi h) \in V\right\},$$

$$Q(t, h) = \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t - s)|\lambda(v_1(s), \psi(t - s), h)ds.$$

Положим

$$d = (h_{11}, h_{12}, \ldots, h_{1l_1},\ h_{21}, h_{22}, \ldots, h_{2l_2}, \ldots\ldots,\ h_{n1}, h_{n2}, \ldots, h_{nl_n}),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = \ & \mathfrak{D}(h^0_{11}, \varepsilon) \times \mathfrak{D}(h^0_{12}, \varepsilon) \times \cdots \times \mathfrak{D}(h^0_{1l_1}, \varepsilon) \times \\ & \mathfrak{D}(h^0_{21}, \varepsilon) \times \mathfrak{D}(h^0_{22}, \varepsilon) \times \cdots \times \mathfrak{D}(h^0_{2l_2}, \varepsilon) \times \cdots\cdots \times \\ & \mathfrak{D}(h^0_{n1}, \varepsilon) \times \mathfrak{D}(h^0_{n2}, \varepsilon) \times \cdots \times \mathfrak{D}(h^0_{nl_n}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Л е м м а 3.1. *Пусть выполнены предположение 3.1 и условие 3.1. Тогда существует момент T такой, что для каждых допустимого управления $v_1(t)$ и $d \in \mathfrak{D}$ найдутся номера $\alpha \in I$ и $g \in L_\alpha$, что $Q(T, h_{\alpha g}) \geqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что выполнено условие 3.3, поэтому, для произвольного $d \in \mathfrak{D}$,

$$\delta_{\pm 1}(d) = \min_{v \in V} \max_{i \in I,\ q_i \in L_i} \lambda(v, \pm 1, h_{iq_i}) > 0.$$

Так как функция λ непрерывна, то

$$\lim_{d^* \to d} \delta_{\pm 1}(d^*) = \lim_{d^* \to d} \min_{v \in V} \max_{i \in I,\ q_i \in L_i} \lambda(v, \pm 1, h^*_{iq_i}) =$$

$$= \min_{v \in V} \max_{i \in I,\ q_i \in L_i} \lambda(v, \pm 1, h_{iq_i}) = \delta_{\pm 1}(d),$$

следовательно и функции $\delta_{\pm 1}$ являются непрерывными, учитывая еще, что множество $\mathfrak{D}$ компакт, получим

$$\delta = \min_{d \in \mathfrak{D}} \min_{\psi \in \{1, -1\}} \min_{v \in V} \max_{i \in I,\ q_i \in L_i} \lambda(v, \psi, h_{iq_i}) = \min_{d \in \mathfrak{D}} \{\delta_{+1}(d), \delta_{-1}(d)\} > 0.$$

Далее,

$$\max_{i \in I,\ q_i \in L_i} Q(t, h_{iq_i}) = \max_{i \in I,\ q_i \in L_i} \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)| \lambda(v_1(s), \psi(t-s), h_{iq_i}) ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sigma} \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)| \sum_{i \in I,\ q_i \in L_i} \lambda(v_1(s), \psi(t-s), h_{iq_i}) ds \geqslant \frac{\delta}{\sigma} \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)| ds.$$

Таким образом, для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{\sigma} \int\limits_0^T |\varphi_{l-1}(T-s)| ds \geqslant 1,$$

и некоторых $\alpha \in I,\ g \in L_\alpha$ выполнено $Q(T, h_{\alpha g}) \geqslant 1$.

Лемма доказана.

Пусть

$$T_1 = T_1(Z_0) = \min\{t \geqslant 0 : \inf_{v_1(\cdot)} \min_{d \in \mathfrak{D}} \max_{i \in I,\ q_i \in K_i} Q(t, h_{iq_i}) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 3.1 $T_1 < \infty$.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $m = r = 1$, *выполнены предположение 3.1 и условие 3.1. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши для всех $t \geqslant 0$

$$z_{i1}(t) = \xi_{i1}(t) + \int_0^t \varphi_{l-1}(t-s)(u_i(s) - v_1(s))ds.$$

Пусть $v_1(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant T_0 = T_1 + T(\varepsilon)$ – произвольное допустимое управление убегающего E_1 и t_1 – наименьший положительный корень функции

$$F(t) = 1 - \max_{i \in I,\ q_i \in K_i} \int_0^t |\varphi_{l-1}(\tau_{iq_i} - s)| \lambda(v_1(s), \psi(\tau_{iq_i} - s), \xi_{i1}(\tau_{iq_i}))ds, \qquad (3.5)$$

где $\tau_{iq_i} \in [T_1, T_0)$ выбраны так, чтобы выполнялось условие 3.4. Отметим, что $t_1 \leqslant \tau_{iq_i}$, т.к. в силу леммы 3.1 $F(\tau_{iq_i}) \leqslant 0$. Пусть $\alpha \in I,\ g \in L_\alpha$ те номера, на которых в формуле (3.5) в момент t_1 достигается максимум (равный 1).

Задаем управление преследователя P_α следующим образом:

$$u_\alpha(t) = v_1(t) - \lambda(v_1(t), \psi(\tau_{\alpha g} - t), \xi_{\alpha 1}(\tau_{\alpha g}))\psi(\tau_{\alpha g} - t)\xi_{\alpha 1}(\tau_{\alpha g}),\ t \in [0, T_0],$$

где считаем, что $\lambda(v_1(t), \psi(\tau_{\alpha g} - t), \xi_{\alpha 1}(\tau_{\alpha g})) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$. Управление остальных преследователей задаем произвольным образом. Тогда, с учетом формулы Коши, имеем

$$z_{\alpha 1}(\tau_{\alpha g}) = \xi_{\alpha 1}(\tau_{\alpha g})\Big(1 - \int_0^{t_1} |\varphi_{l-1}(\tau_{\alpha g} - s)| \lambda(v_1(s), \psi(\tau_{\alpha g} - s), \xi_{\alpha 1}(\tau_{\alpha g}))ds\Big).$$

В силу определения t_1 и выбора $\alpha \in I,\ g \in K_\alpha$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_{\alpha 1}(\tau_{\alpha g}) = 0$.

Теорема доказана.

Условие 3.5. *Начальные позиции участников таковы, что*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{i1}^0\}.$$

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть* $m = r = 1$, *выполнены предположение 3.1 и условие 3.5. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве h_{i1}^0 в условии 3.2 возьмем $Z_{i1}^0 = \xi_{i1}(0) \in H_{i1}$. Условие 3.2 влечет выполнение условия 3.1. Осталось применить теорему 3.1.

Следствие доказано.

С л е д с т в и е 3.2. *Пусть* $m = r = 1$, *выполнено предположение 3.1,* $\nu = 2$ *и* $n = 1$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из второго утверждения леммы 1.2 следует, что выполнено условие 3.1. Теперь воспользуемся теоремой 3.1.

Следствие доказано.

Условие 3.6. *Для каждого* $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ *верно следующее: для любого множества* $N \subset I, |N| = n - k$ *найдется такое множество* $M \subset J, |M| = r - k$, *что для всех* $\beta \in M$

$$0 \in \operatorname{Intco}\{H_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}.$$

Т е о р е м а 3.2. *Пусть выполнены предположение 3.1 и условие 3.6. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что любые $n-k$ преследователей ловят не менее $r-k$ убегающих, где $k \in \{0,1,\dots,r-1\}$. При $k=0$ получим утверждение теоремы.

Пусть $k=r-1$ и $N \subset I, |N|=n-k$. В силу условия 3.6 по N существует $\beta \in J$ такой, что $0 \in \operatorname{Intco}\{H_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}$. Из теоремы 3.1 следует, что преследователи $P_\alpha, \alpha \in N$ ловят убегающего E_β.

Предположим, что утверждение доказано для всех $k \geqslant k_0+1$.

Докажем утверждение при $k=k_0$. Пусть $N \subset I,\ |N|=n-k_0$. Тогда существует $M \subset J, |M|=r-k_0$, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{H_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\} \text{ для любого } \beta \in M.$$

Для всех $\beta \in M$ определим множества

$$J_\beta = \{\alpha \in N: \text{ преследователь } P_\alpha \text{ ловит убегающего } E_\beta\}.$$

Будем считать, что

$$M=\{1,2,\dots,r-k_0\} \text{ и } |J_1| \leqslant |J_2| \leqslant \dots \leqslant |J_{r-k_0}|.$$

В силу теоремы 3.1 $J_\beta \neq \emptyset$ для всех $\beta \in M$.

Возможны два случая:

1) $\left|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\right| \geqslant n_1$ для любого $n_1=1,2,\dots,r-k_0$.

По теореме 1.1(Холла) для множеств J_β существует система различных представителей, т.е. существуют попарно различные $\alpha_\beta \in N,\ \beta \in M$ такие, что $\alpha_\beta \in J_\beta$. Таким образом, доказано, что преследователь P_{α_β} ловит убегающего $E_\beta, \beta \in M$ и утверждение в этом случае справедливо.

2) Существует $n_1 \in \{1, 2, \ldots, r-k_0\}$, что $\left|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\right| < n_1$. Пусть n_1 – наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих данному свойству. Отметим, что $n_1 > 1$ и $\left|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_2} J_\beta\right| \geqslant n_2$ для всех $n_2 \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$. При $n_2 = n_1 - 1$ имеем систему неравенств

$$\left|\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\right| < n_1, \quad \left|\bigcup_{\beta=1}^{n_1-1} J_\beta\right| \geqslant n_1 - 1.$$

Отсюда $\left|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\right| = n_1 - 1$. Рассмотрим множество $N_1 = N \setminus \bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta$. Множество N_1 не пусто, так как

$$|N| = n - k_0, \ \left|\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\right| = n_1 - 1, \ n_1 \in \{1, 2, \ldots, r - k_0\}, \ n \geqslant r.$$

По предположению для числа $k = k_0 + n_1 - 1$ существует множество $M_1 \subset J, |M_1| = r - (k_0 + n_1 - 1)$, что преследователи $P_\alpha, \alpha \in N_1$ ловят убегающих $E_\beta, \beta \in M_1$, причем $\{1, 2, \ldots, n_1 - 1\} \cap M_1 = \emptyset$, ибо в противном случае существовал бы номер $\alpha \in N_1$ такой, что преследователь P_α ловит убегающего E_β, где $\beta \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$, что противоречит построению множества N_1.

$\left|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_2} J_\beta\right| \geqslant n_2$ для всех $n_2 \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$, применяя теорему 1.1(Холла), получим, что для J_β существует система различных представителей, т.е. существуют попарно различные $\alpha_\beta \in J_\beta$, где $\beta = 1, 2, \ldots, n_1 - 1$. Значит преследователи P_α, где $\alpha \in \bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1-1} J_\beta$ ловят не менее $n_1 - 1$ убегающих.

Таким образом, все преследователи ловят не менее

$$(r - (k_0 + n_1 - 1)) + (n_1 - 1) = r - k_0$$

убегающих.

Теорема доказана.

Условие 3.7. *Для каждого* $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ *верно следующее: для любого множества* $N \subset I, |N| = n - k$ *найдется такое множество* $M \subset J, |M| = r - k$, *что для всех* $\beta \in M$

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z^0_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}.$$

С л е д с т в и е 3.3. *Пусть выполнены предположение 3.1 и условие 3.7. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $Z^0_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta}(0) \in H_{\alpha\beta}$, поэтому условие 3.7 влечет справедливость условия 3.6, воспользуемся теоремой 3.2.

Следствие доказано.

П р и м е р 3.1. В R^3 рассмотрим дифференциальную игру Γ 3 лиц: 2 преследователей P_1, P_2 и убегающего E_1, цель преследователей – "поймать" убегающего ($m = r = 1$). Уравнение (3.3) и начальные условия имеют вид

$$\ddot{z}_{i1} + z_{i1} = u_i - v_1,$$

$$Z^0_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Z^0_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad Z^1_{i1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ i = 1, 2.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

равны $\pm\iota$ и предположение 3.1 выполнено. Здесь условие 3.5 не выполнено. Покажем, что имеет место условие 3.1, т.к.

$$\xi_{i1}(t) = Z^0_{i1}\cos t + Z^1_{i1}\sin t,$$

то H_{11} – это окружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащая в плоскости первой и второй координаты, H_{21} – это окружность радиуса

1 с центром в начале координат, лежащая в плоскости второй и третьей координаты. Получаем, что условие 3.1 выполнено, смотрите рис. 3.1. Из теоремы 3.1 следует

Утверждение 3.1. *В игре* Γ *возможна поимка.*

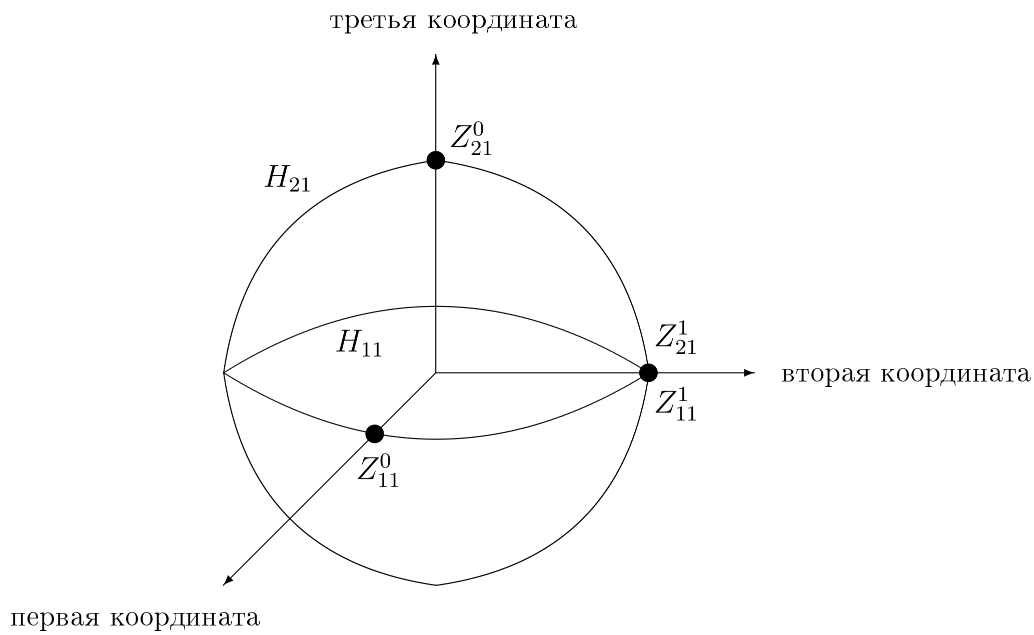

Рис. 3.1

Пример 3.2. В R^ν рассмотрим дифференциальную игру Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E_1, цель преследователей – "поймать" убегающего ($m = r = 1$). Пусть уравнение (3.3) имеет вид

$$z_i^{(6)} + 14 z_i^{(4)} + 49 \ddot{z}_i + 36 z_i = u_i - v.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^6 + 14\lambda^4 + 49\lambda^2 + 36 = 0$$

равны $\pm\iota,\ \pm 2\iota,\ \pm 3\iota$ и предположение 3.1 выполнено.

Утверждение 3.2. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{i1}^0\}$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

У т в е р ж д е н и е 3.3. *Пусть* $\nu = 2$ *и* $n = 1$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

П р и м е р 3.3. В R^3 рассмотрим дифференциальную игру Γ 5 лиц: 3 преследователей P_1, P_2, P_3 и 2 убегающих E_1, E_2, цель преследователей – "поймать" всех убегающих ($r = 2$). Уравнение (3.3) и начальные условия имеют вид

$$\ddot{z}_{ij} + z_{ij} = u_i - v_j,$$

$$Z_{1j}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Z_{1j}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; Z_{2j}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Z_{2j}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_{3j}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Z_{3j}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; i = 1, 2, 3, \;\; j = 1, 2.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

равны $\pm\iota$ и предположение 3.1 выполнено. Здесь условие 3.7 не выполнено ($\mathrm{Intco}\{Z_{ij}^0\} = \emptyset$). Покажем, что имеет место условие 3.6, т.к.

$$\xi_{ij}(t) = Z_{ij}^0 \cos t + Z_{ij}^1 \sin t,$$

то H_{1j} – это окружности радиуса 1 с центром в начале координат, лежащие в плоскости первой и второй координаты, H_{2j} – это окружности радиуса 1 с центром в начале координат, лежащие в плоскости второй и третьей координаты, H_{3j} – это окружности радиуса 1 с центром в начале координат, лежащие в плоскости первой и третьей координаты. Проверяя, получаем, что условие 3.6 выполнено, смотрите рис. 3.2. Из теоремы 3.2 следует

У т в е р ж д е н и е 3.4. *В игре* Γ *возможна поимка.*

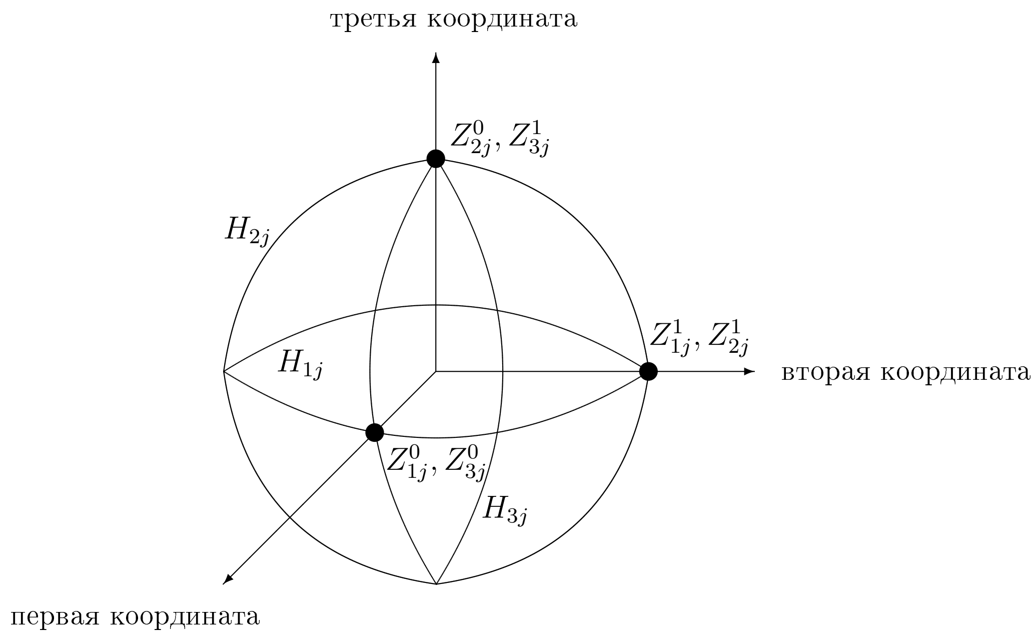

Рис. 3.2

П р и м е р 3.4. В R^2 рассмотрим дифференциальную игру Γ 6 лиц: 4 преследователей P_1, P_2, P_3, P_4 и 2 убегающих E_1, E_2, цель преследователей – "поймать" всех убегающих ($r = 2$). Уравнение (3.3) и начальные условия имеют вид

$$z_{ij}^{(4)} + 5\ddot{z}_{ij} + 4z_{ij} = u_i - v_j,$$

$$Z_{ij}^0 = X_i^0 - Y_j^0,\ Z_{ij}^1,\ Z_{ij}^2 \text{ и } Z_{ij}^3 \text{ – заданы произвольно, } i = 1,2,3,4,\ j = 1,2,$$

где X_i^0 и Y_j^0 выбраны так, чтобы их взаимное расположение было таким как на рис. 3.3 (Y_j^0 принадлежат внутренности соответствующих треугольников). Корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0$$

равны $\pm\iota,\ \pm 2\iota$ и предположение 3.1 выполнено. Проверяя, получаем, что условие 3.7 выполнено, смотрите рис. 3.3.

У т в е р ж д е н и е 3.5. *В игре* Γ *возможна поимка.*

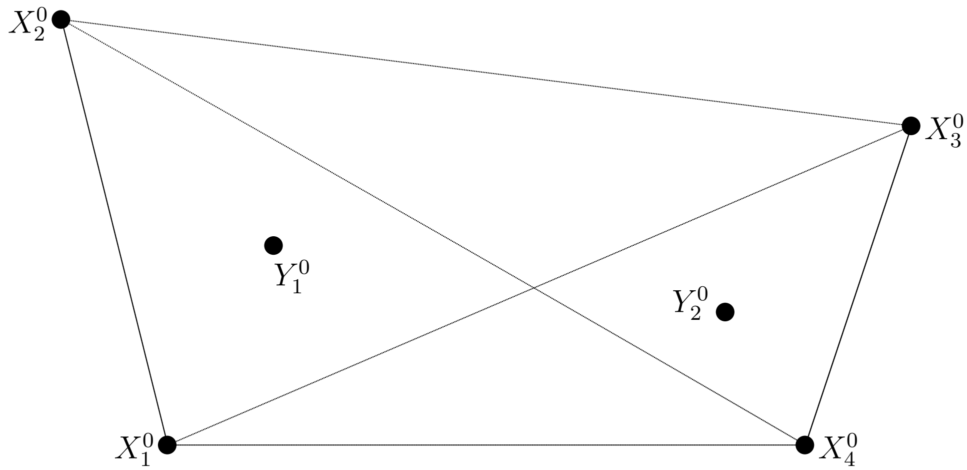

Рис. 3.3

§1.4. Колебательный конфликтно управляемый процесс с одним убегающим

В пространстве R^ν $(\nu \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$\dot{x}_i = Ax_i + u_i, \quad u_i \in V, \tag{4.1}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = Ay + v, \quad v \in V, \tag{4.2}$$

где $x_i, y, u_i, v \in R^\nu$, A – постоянная квадратная порядка ν матрица, V – строго выпуклый компакт R^ν такой, что $\mathrm{Int} V \neq \emptyset$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = X_i^0, \ y(0) = Y^0, \ \text{причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i.$$

Здесь и далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \ Z_0 = (X_i^0, Y^0).$$

Вместо (4.1), (4.2) рассмотрим уравнение

$$\dot{z}_i = Az_i + u_i - v \tag{4.3}$$

с начальными условиями

$$z_i(0) = Z_i^0 = X_i^0 - Y^0.$$

Определение 4.1. *Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (4.1), (4.2) называются допустимыми.*

Определение 4.2. *В игре Γ возможна поимка, если существует момент $T_0 = T_0(Z_0)$, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления*

$$u_i(t) = u_i(t,\ Z_0,\ v(t))$$

такие, что для некоторых $\tau \in [0, T_0],\ \alpha \in I$ выполнено $z_\alpha(\tau) = 0$.

Пусть Φ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A\omega$$

такая, что $\Phi(0) = \mathcal{I}$. Считаем, что $\Phi(t)Z_i^0 \neq 0$ для всех $i, t > 0$, ибо если $\Phi(\tau)Z_\alpha^0 = 0$ при некоторых $\alpha \in I, \tau > 0$, то преследователь P_α ловит убегающего E к моменту τ, полагая $u_\alpha(t) = v(t),\ t \in [0, \tau]$.

Предположение 4.1. *Все корни характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0 \tag{4.4}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Обозначим корни уравнения (4.4) через

$$\pm b_1\iota, \pm b_2\iota, \ldots, \pm b_p\iota \ \ (0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_p,\ 2p = \nu).$$

Условие 4.1. *Начальные позиции участников таковы, что*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{Z_i^0\}.$$

Из леммы 2.1 следует, что если выполнено условие 4.1, то при некотором значении $\varepsilon > 0$ выполнено

Условие 4.2. *Для любых $h_i \in \mathfrak{D}(Z_i^0, 2\varepsilon)$*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{h_i\}.$$

Считаем, что $\varepsilon > 0$ выбрано исходя из условия 4.2.

Определим функции $\lambda,\ J_i$

$$\lambda(v,h) = \sup\left\{\lambda : \lambda \geqslant 0, (v - \lambda h) \in V\right\},$$

$$J_i(t) = \int\limits_0^t \lambda(v(s), \Phi(s)Z_i^0)ds.$$

Л е м м а 4.1. *Пусть выполнены предположение 4.1 и условие 4.1. Тогда существует момент T такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдется номер $\alpha \in I$, что $J_\alpha(T) \geqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предположения 4.1 каждая из функций $\Phi(t)Z_i^0$ представима в виде

$$\sum_{k=1}^{p}\Big(C_k \cos b_k t + S_k \sin b_k t\Big),\ \text{где } C_k, S_k \in R^\nu. \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что функции $\Phi(t)Z_i^0$ являются почти периодическими. Из последнего, с учетом того, что

$$\Phi(0)Z_i^0 = Z_i^0 \in \mathrm{Int}\mathfrak{D}(Z_i^0, \varepsilon),$$

следует, что существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ найдется момент $\tau_k \in [T(\varepsilon)k, T(\varepsilon)(k+1))$ обладающий свойством

$$\Phi(\tau_k)Z_i^0 \in \mathfrak{D}(Z_i^0, \varepsilon) \text{ для всех } i.$$

Введем обозначения

$$\Omega_k = \{t : \Phi(t)Z_i^0 \in \mathfrak{D}(Z_i^0, 2\varepsilon),\ t \in [\tau_k, \tau_{k+1})\},\ \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k,$$

$$\mu(G)\text{– мера Лебега } G \subset R^1,\ \mathrm{dist}(D_1, D_2) = \inf_{d_1 \in D_1,\ d_2 \in D_2} \|d_1 - d_2\|.$$

Из (4.5) следует, что функции $\dfrac{d}{dt}(\Phi(t)Z_i^0)$ также представимы в виде (4.5), значит они ограничены, т.е. найдется положительное число M такое, что

$$\left\| \frac{d}{dt}(\Phi(t)Z_i^0) \right\| \leqslant M \text{ для всех } i,\ t \geqslant 0.$$

Так как $\operatorname{dist}\big(\partial\mathfrak{D}(Z_i^0, \varepsilon), \partial\mathfrak{D}(Z_i^0, 2\varepsilon)\big) = \varepsilon$, то для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mu(\Omega_k) \geqslant \mu\big(\{t : \Phi(t)Z_i^0 \in \mathfrak{D}(Z_i^0, 2\varepsilon) \backslash \operatorname{Int}\mathfrak{D}(Z_i^0, \varepsilon),\ t \in [\tau_k, \tau_{k+1})\}\big) \geqslant \frac{\varepsilon}{M},$$

следовательно $\mu(\Omega) = \infty$.

Для любого

$$d = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(Z_1^0, 2\varepsilon) \times \mathfrak{D}(Z_2^0, 2\varepsilon) \times \cdots \times \mathfrak{D}(Z_n^0, 2\varepsilon),$$

учитывая условие 4.2, получаем, что

$$\rho(d) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i) > 0.$$

Так как функция λ непрерывна, то

$$\lim_{d^* \to d} \rho(d^*) = \lim_{d^* \to d} \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i^*) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i) = \rho(d),$$

следовательно и функция ρ является непрерывной, учитывая еще, что множество $\mathfrak{D}$ компакт, получим

$$r = \min_{d \in \mathfrak{D}} \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i) = \min_{d \in \mathfrak{D}} \rho(d) > 0.$$

Из последнего неравенства получаем, что величина

$$\delta = \min_{t \in \Omega} \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, \Phi(t)Z_i^0) \geqslant \min_{d \in \mathfrak{D}} \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i) = r > 0.$$

Имеет место следующая цепочка равенств-неравенств

$$\max_{i \in I} J_i(t) = \max_{i \in I} \int_0^t \lambda(v(s), \Phi(s)Z_i^0) ds \geqslant \max_{i \in I} \int\limits_{[0,t] \bigcap \Omega} \lambda(v(s), \Phi(s)Z_i^0) ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{[0,t]\bigcap\Omega} \sum_{i\in I} \lambda(v(s), \Phi(s)Z_i^0)ds \geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{[0,t]\bigcap\Omega} \delta ds = \frac{\delta}{n}\mu([0,t]\cap\Omega).$$

Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty} \mu([0,t]\cap\Omega) = \infty$, т.к. $\mu(\Omega) = \infty$. Таким образом, для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n}\mu([0,T]\cap\Omega) \geqslant 1,$$

и некоторого $\alpha \in I$ выполнено $J_\alpha(T) \geqslant 1$.

Лемма доказана.

Пусть

$$T_0 = \min\{t \geqslant 0 : \inf_{v(\cdot)} \max_{i\in I} J_i(t) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 4.1 $T_0 < \infty$.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполнены предположение 4.1 и условие 4.1. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши для всех $t \geqslant 0$

$$z_i(t) = \Phi(t)\Big(Z_i^0 + \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)(u_i(s) - v(s))ds\Big).$$

Пусть $v(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant T_0$ – произвольное допустимое управление убегающего E и t_1 – наименьший положительный корень функции

$$F(t) = 1 - \max_{i\in I} \int\limits_0^t \lambda(v(s), \Phi(s)Z_i^0)ds.$$

Отметим, что, в силу определения T_0, момент $t_1 \leqslant T_0$.

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t)Z_i^0)\Phi(t)Z_i^0 \text{ для всех } t \in [0, T_0].$$

Тогда, с учетом формулы Коши,

$$z_i(t_1) = \Phi(t_1)Z_i^0\Big(1 - \int\limits_0^{t_1} \lambda(v(s), \Phi(s)Z_i^0)ds\Big).$$

В силу определения t_1, для некоторого $\alpha \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_\alpha(t_1) = 0$.

Теорема доказана.

П р и м е р 4.1. В $R^\nu(\nu = 2p, p \geqslant 1)$ рассмотрим дифференциальную игру Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (4.3) имеет вид

$$\dot{z}_i = Az_i + u_i - v, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_p & 0 \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ – некоторые отличные от нуля и не совпадающие друг с другом по абсолютной величине числа. Корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + a_1^2)(\lambda^2 + a_2^2)\ldots(\lambda^2 + a_p^2) = 0$$

равны $\pm a_1\iota, \ \pm a_2\iota, \ldots, \pm a_p\iota$ и предположение 4.1 выполнено.

У т в е р ж д е н и е 4.1. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

§1.5. Поимка заданного числа убегающих в колебательном конфликтно управляемом процессе

В пространстве R^ν ($\nu \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$\dot{x}_i = Ax_i + u_i, \quad u_i \in V, \tag{5.1}$$

закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = Ay_j + v_j, \quad v_j \in V, \tag{5.2}$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in R^\nu$, A – постоянная квадратная порядка ν матрица, V – строго выпуклый компакт R^ν такой, что $\mathrm{Int}V \neq \emptyset$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = X_i^0, \ y_j(0) = Y_j^0, \text{ причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j.$$

Здесь и далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \ j \in J = \{1, 2, \ldots, m\}, \ Z_0 = (X_i^0, Y_j^0).$$

Цель группы преследователей – "поймать" не менее r ($1 \leqslant r \leqslant m$) убегающих, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может "поймать" не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant r$.

Вместо (5.1), (5.2) рассмотрим уравнение

$$\dot{z}_{ij} = Az_{ij} + u_i - v_j \tag{5.3}$$

с начальными условиями

$$z_{ij}(0) = Z_{ij}^0 = X_i^0 - Y_j^0.$$

Определение 5.1. *Управления $u_i(t), v_j(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (5.1), (5.2) называются допустимыми.*

Определение 5.2. *В игре Γ возможна поимка, если существует момент $T_0 = T_0(Z_0)$, что для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$ найдутся допустимые управления*

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ Z_0,\ v_j(s),\ s \in [0,\infty)\big)$$

обладающие следующим свойством: существуют множества

$$N \subset I,\ M \subset J,\ |N| = |M| = r$$

такие, что каждый убегающий $E_\beta, \beta \in M$ ловится не позднее момента T_0 некоторым преследователем $P_\alpha, \alpha \in N$, причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение "преследователь P_α ловит убегающего E_β" означает, что для некоторого $\tau_{\alpha\beta} \in [0, T_0]$ выполнено $z_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$.

Пусть Φ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A\omega$$

такая, что $\Phi(0) = \mathcal{I}$. Считаем, что $\Phi(t)Z_{ij}^0 \neq 0$ для всех $i, j, t > 0$, ибо если $\Phi(\tau)Z_{\alpha\beta}^0 = 0$ при некоторых $\alpha \in I, \beta \in J, \tau > 0$, то преследователь P_α ловит убегающего E_β к моменту τ, полагая $u_\alpha(t) = v_\beta(t),\ t \in [0, \tau]$.

Предположение 5.1. *Все корни характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Условие 5.1. *Для каждого* $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ *верно следующее: для любого множества* $N \subset I, |N| = n-k$ *найдется такое множество* $M \subset J, |M| = r-k$, *что для всех* $\beta \in M$

$$0 \in \mathrm{Intco}\{Z^0_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}.$$

Т е о р е м а 5.1. *Пусть выполнены предположение 5.1 и условие 5.1. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что любые $n-k$ преследователей ловят не менее $r-k$ убегающих, где $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. При $k = 0$ получим утверждение теоремы.

Пусть $k = r-1$ и $N \subset I, |N| = n-k.$ В силу условия 5.1 по N существует $\beta \in J$ такой, что $0 \in \mathrm{Intco}\{Z^0_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}$. Из теоремы 4.1 следует, что преследователи $P_\alpha, \alpha \in N$ ловят убегающего E_β.

Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 3.2.

Теорема доказана.

П р и м е р 5.1. В R^2 рассмотрим дифференциальную игру Γ 10 лиц: 5 преследователей P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и 5 убегающих E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, цель преследователей – "поймать" трех убегающих ($r = 3$). Уравнение (5.3) и начальные условия имеют вид

$$\dot{z}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z_{ij} + u_i - v_j,$$

$$Z^0_{ij} = X^0_i - Y^0_j,\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5,$$

где X^0_i и Y^0_j выбраны так, чтобы их взаимное расположение было таким как на рис. 5.1 (Y^0_j принадлежат внутренности соответствующих треугольников). Корни характеристического уравнения

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

равны $\pm 2\iota$ и предположение 5.1 выполнено. Проверяя, получаем, что условие 5.1 выполнено, смотрите рис. 5.1.

Утверждение 5.1. *В игре* Γ *возможна поимка.*

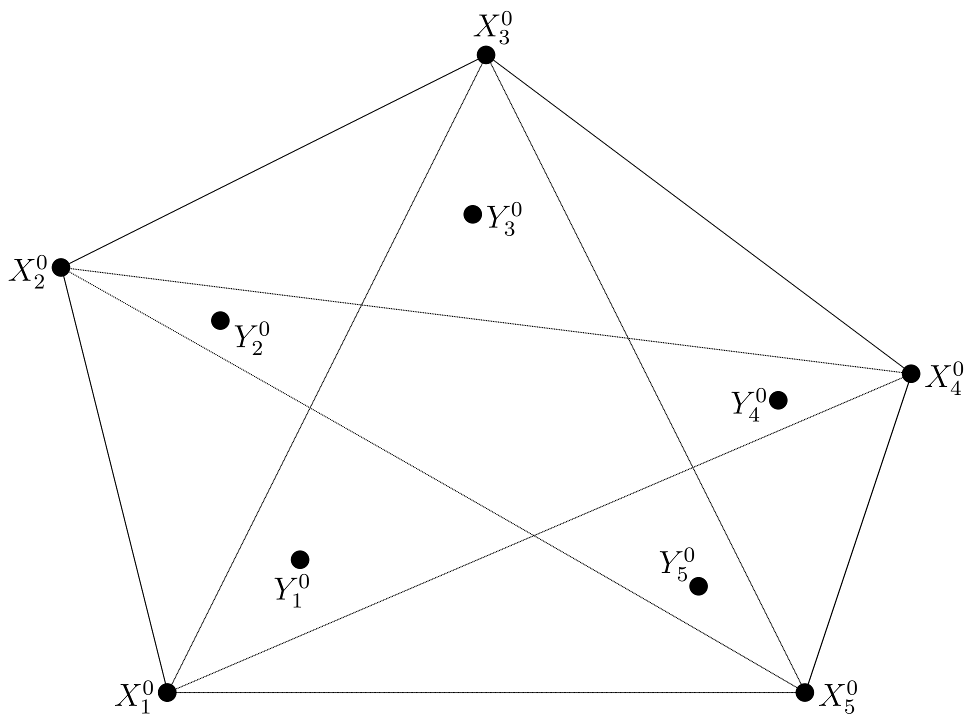

Рис. 5.1

§1.6. Простое групповое преследование заданного числа убегающих, имеющих преимущество в скорости

В пространстве R^ν ($\nu \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \tag{6.1}$$

закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j, \quad \|v_j\| \leqslant \gamma, \ \gamma > 1, \tag{6.2}$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in R^\nu$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = X_i^0, \ y_j(0) = Y_j^0, \text{ причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j.$$

Здесь и далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \ j \in J = \{1, 2, \ldots, m\}, \ Z_0 = (X_i^0, Y_j^0).$$

Цель группы преследователей – "поймать" не менее r ($1 \leqslant r \leqslant m$) убегающих, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может "поймать" не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant r$.

Определение 6.1. *Управления $u_i(t), v_j(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (6.1), (6.2) называются допустимыми.*

Определение 6.2. *В игре* Γ *возможна поимка, если существует момент* $T_0 = T_0(Z_0)$, *что для любой совокупности допустимых управлений* $v_j(t)$ *найдутся допустимые управления*

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ Z_0,\ v_j(s),\ s \in [0, \infty)\big)$$

обладающие следующим свойством: существуют множества

$$N \subset I,\ M \subset J,\ |N| = |M| = r$$

такие, что каждый убегающий $E_\beta, \beta \in M$ *ловится не позднее момента* T_0 *некоторым преследователем* $P_\alpha, \alpha \in N$, *причем если преследователь* P_α *ловит убегающего* E_β, *то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение "преследователь* P_α *ловит убегающего* E_β*" означает, что для некоторого* $\tau_{\alpha\beta} \in [0, T_0]$ *выполнено* $x_\alpha(\tau_{\alpha\beta}) = y_\beta(\tau_{\alpha\beta})$.

Обозначим через A_{ij} множество точек пространства R^ν, которые преследователем P_i могут достигаться не позже, чем убегающим E_j. Отметим, что

$$A_{ij} = \left\{ z : \|z - X_i^0\| \leqslant \frac{\|z - Y_j^0\|}{\gamma} \right\} = \mathfrak{D}\left(\frac{\gamma^2 X_i^0 - Y_j^0}{\gamma^2 - 1}, \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \|X_i^0 - Y_j^0\| \right).$$

Далее, $A_j(N) = \bigcup\limits_{\alpha \in N} A_{\alpha j}$ – множество точек пространства R^ν, которые хотя бы одним из преследователей $P_\alpha, \alpha \in N$ достигаются не позже, чем убегающим E_j. Так как каждое из множеств A_{ij} – замкнутый шар, то $A_j(N)$ – компакт для всех $N \subset I$.

Пусть ℓ_j – луч с началом в точке Y_j^0, ρ_j – непрерывная кривая с началом в точке Y_j^0 такая, что для любого положительного числа L найдется точка $\rho \in \rho_j$, для которой $\|\rho - Y_j^0\| \geqslant L$.

Предположение 6.1. *Если для некоторых* $N \subset I$ *и* $\beta \in J$ *существует кривая* ρ_β, *для которой* $A_\beta(N) \cap \rho_\beta = \emptyset$, *то существует луч* ℓ_β *такой, что* $A_\beta(N) \cap \ell_\beta = \emptyset$.

Условие 6.1. *Для любого луча* ℓ_1

$$A_1(I) \cap \ell_1 \neq \emptyset.$$

Т е о р е м а 6.1. *Пусть* $m = r = 1$ *и выполнено предположение 6.1. В игре* Γ *возможна поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие 6.1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнено условие 6.1. Для каждого единичного вектора a определим момент времени $T(a)$ и множество C следующим образом:

$$T(a) = \min\{t \geqslant 0 : Y_1^0 + \gamma a t \in A_1(I)\},$$

$$C = \{z : z = Y_1^0 + \gamma a t,\ t \in [0, T(a)),\ a : \|a\| = 1\}.$$

Так как $A_1(I)$ компакт, то существует момент $T = \max\limits_{a:\|a\|=1} T(a)$. Следовательно, множество

$$C_0 = \{z : z = Y_1^0 + \gamma a t,\ t \in [0, T],\ a : \|a\| = 1\}$$

ограничено. Отметим, что $C \subset C_0$. Так как множество C ограничено, то существует момент $T_0 > 0$ такой, что для любой точки $z \in C$ справедливо неравенство $\|z - X_1^0\| \leqslant T_0$.

Возможны два случая:

1) $y_1(t) \notin A_1(I)$ для всех $t \in [0, T_0]$. Тогда $y_1(t) \in C$ для всех $t \in [0, T_0]$.

Задаем управление преследователя P_1 следующим образом:

$$u_1(t) = \frac{y_1(T_0) - X_1^0}{T_0}, \quad t \in [0, T_0].$$

Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Тогда

$$\|u_1(t)\| \leqslant 1,\ t \in [0, T_0],\ x_1(T_0) = y_1(T_0).$$

2) Существует момент $\tau \in [0, T_0]$ такой, что $y_1(\tau) \in A_1(I)$. Следовательно $y_1(\tau) \in A_{\alpha 1}$ для некоторого $\alpha \in I$.

Задаем управление преследователя P_α следующим образом:

$$u_\alpha(t) = \frac{y_1(\tau) - X_1^0}{\tau},\ t \in [0, \tau].$$

Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Тогда

$$\|u_\alpha(t)\| \leqslant 1,\ t \in [0, \tau],\ x_\alpha(\tau) = y_1(\tau).$$

Доказано, что в игре Γ возможна поимка.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть в игре Γ возможна поимка. Предположим, что условие 6.1 не выполнено. Тогда существует луч ℓ_1 такой, что

$$A_1(I) \cap \ell_1 = \emptyset.$$

Если убегающий E_1 будет двигаться по лучу ℓ_1 со скоростью γ, то поимки не произойдет. Получили противоречие, значит условие 6.1 выполнено.

Теорема доказана.

Условие 6.2. *Для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ верно следующее: для любого множества $N \subset I, |N| = n-k$ найдется такое множество $M \subset J, |M| = r-k$, что для всех $\beta \in M$ и ℓ_β*

$$A_\beta(N) \cap \ell_\beta \neq \emptyset.$$

Т е о р е м а 6.2. *Пусть выполнено предположение 6.1. В игре Γ возможна поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие 6.2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнено условие 6.2. Докажем, что любые $n-k$ преследователей ловят не менее $r-k$ убегающих, где $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. При $k = 0$ получим утверждение теоремы.

Пусть $k=r-1$ и $N\subset I, |N|=n-k$. В силу условия 6.2 по N существует $\beta\in J$ такой, что $A_\beta(N)\cap\ell_\beta\neq\emptyset$ для всех ℓ_β. Из теоремы 6.1 следует, что преследователи $P_\alpha, \alpha\in N$ ловят убегающего E_β.

Дальнейшее доказательство достаточности совпадает с доказательством теоремы 3.2.

Необходимость. Пусть в игре Γ возможна поимка. Предположим, что условие 6.2 не выполнено. Тогда для некоторого $k\in\{0,1,\ldots,r-1\}$ существуют множества $N\subset I, |N|=n-k$ и $M\subset J, |M|\geqslant m-(r-k-1)$ такие, что для каждого $\beta\in M$ найдется луч ℓ_β, для которого

$$A_\beta(N)\cap\ell_\beta=\emptyset.$$

Пусть убегающий $E_\beta, \beta\in M$ движется по лучу ℓ_β со скоростью γ. Тогда ни один из преследователей $P_\alpha, \alpha\in N$ не может поймать данного убегающего. Поэтому преследователи $P_\alpha, \alpha\in N$ ловят не более чем

$$m-(m-(r-k-1))=r-k-1$$

убегающих. Оставшиеся k преследователей ловят не более k убегающих.

Значит, все преследователи ловят не более

$$(r-k-1)+k=r-1$$

убегающих, что противоречит тому, что в игре Γ возможна поимка, значит условие 6.2 выполнено.

Теорема доказана.

Замечание 6.1. *Пусть ограничения на управления имеют вид*

$$u_i\in U_i,\ v_j\in V_j,$$

где U_i, V_j *– выпуклые компакты такие, что* $U_i\subset \mathrm{Int}V_j\neq\emptyset$ *для всех* i,j. *Тогда множества* A_{ij} *– компакты и все утверждения остаются в силе.*

Пример 6.1. В R^2 рассмотрим дифференциальную игру Γ 13 лиц: 12 преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ и убегающего E_1, цель преследователей – "поймать" убегающего ($m = r = 1$). Пусть начальные позиции преследователей ($X_1^0, X_2^0, \ldots, X_{12}^0$) образуют правильный двенадцатиугольник, а начальная позиция убегающего (Y_1^0) совпадает с центром данного многоугольника. Здесь предположение 6.1 выполнено.

Утверждение 6.1. *В игре* Γ *возможна поимка тогда и только тогда, когда* $\gamma \in \left(1, 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$.

ГЛАВА 2

Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы преследователей

§2.1. Мягкое убегание жестко скоординированных убегающих от объектов с меньшей маневренностью

В пространстве R^ν ($\nu \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(n_i)} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \tag{1.1}$$

закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$y_j^{(m_j)} = v, \quad \|v\| \leqslant \gamma, \quad \gamma \in (0, 1), \tag{1.2}$$

$$\text{где } n_i > m_j \geqslant 1 \text{ для всех } i, j,$$

$x_i, y_j, u_i, v \in R^\nu$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(\alpha_i)}(0) = X_i^{\alpha_i}, \alpha_i \in N_i,\ y_j^{(\beta_j)}(0) = Y_j^{\beta_j}, \beta_j \in M_j,\ \text{причем}$$

$$X_i^{\beta_j} \neq Y_j^{\beta_j} \text{ для всех } i, j, \beta_j \in M_j.$$

Здесь и всюду далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\},\ j = 1, 2, \ldots, m,\ c = 1, 2,$$

$$N_i = \{0, 1, \ldots, n_i - 1\},\ M_j = \{0, 1, \ldots, m_j - 1\}.$$

Определение 1.1. *Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (1.1), (1.2) называются допустимыми.*

Определение 1.2. *В игре* Γ *возможно мягкое убегание, если для любых допустимых управлений* $u_i(t)$ *найдется допустимое управление*

$$v(t) = v\big(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(t), \alpha_i \in N_i,\ y_j^{(\beta_j)}(t), \beta_j \in M_j\big)$$

такое, что $x_i^{(\beta_j)}(t) \neq y_j^{(\beta_j)}(t),\ \beta_j \in M_j$ *для всех* $t \in [0, \infty)$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент времени $t \in [0, \infty)$ по величинам $\left\{x_i^{(\alpha_i)}(t), \alpha_i \in N_i,\ y_j^{(\beta_j)}(t), \beta_j \in M_j\right\}$ для всех убегающих E_j выбирает одно и тоже управление $v(t)$.

Случай $m = 1$. *Построим допустимое управление* $v(t)$, *обеспечивающее мягкое убегание в задаче с одним убегающим* E_1.

Фиксируем произвольный единичный вектор $e \in R^\nu$.

Из возможности мягкого убегания для $\nu = 2$, т.е. на плоскости, следует возможность мягкого убегания и при $\nu > 2$. Действительно, если $\nu > 2$, тогда выберем плоскость Π, включающую в себя вектор $Y_1^0 + e$ такую, что $\Pi(X_i^\beta) \neq \Pi(Y_1^\beta),\ \beta \in M_1$, где под $\Pi(z)$ понимается проекция точки $z \in R^\nu$ на плоскость Π. Такая плоскость найдется в силу конечности числа преследователей n. Если задача мягкого убегания от проекций разрешима, то тем самым разрешима и исходная задача. Далее в этом пункте считаем $\nu = 2$.

Выбираем единичный вектор $e_\perp$ перпендикулярный e против часовой стрелки. По $e, e_\perp$ как по орт-векторам получаем декартову систему координат. Решаем задачу в выбранной системе координат.

Обозначим через

$$z_c \text{ – } c \text{ координату вектора } z \in R^\nu,$$

$$l_c(t) = |L_c(t)|,\ \text{где } L_c(t) = \left\{\alpha \in I : x_{c\alpha}^{(m_1-1)}(t) < y_{c1}^{(m_1-1)}(t)\right\},$$

$$q_c(t) = |Q_c(t)|, \text{ где } Q_c(t) = \left\{\alpha \in I : x_{c\alpha}^{(m_1-1)}(t) = y_{c1}^{(m_1-1)}(t)\right\},$$

$\delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2$ – положительные константы такие, что

$$\delta_c - \rho_c/4 > 0 \text{ и } \sqrt{(\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4)^2 + (\delta_2 + 2\rho_2 n + \rho_2/4)^2} \leqslant \gamma, \qquad (1.3)$$

например: $\delta_c = 3\rho_c/4,\ \rho_c = \gamma/\sqrt{2}(2n+1)$.

Л е м м а 1.1. *Для любых* $\rho > 0, \sigma, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q \in R^1, q \geqslant 1$

$$\max_{\omega \in \Omega} \min\big\{|\omega - \xi_1|, \ldots, |\omega - \xi_q|\big\} \geqslant \rho, \text{ \textit{где} } \Omega = \{\sigma + 2\rho k, k = 0, 1, \ldots, q\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое $k \in \{0, 1, 2, \ldots, q\}$. Предположим, что найдется номер $r \in \{1, 2, \ldots, q\}$ такой, что $|(\sigma + 2\rho k) - \xi_r| < \rho$. Для всех $\omega \in \Omega \backslash \{\sigma + 2\rho k\}$, выполнено $|(\sigma + 2\rho k) - \omega| \geqslant 2\rho$, откуда $|\omega - \xi_r| > \rho$.

Пусть лемма неверна, значит выполнено следующее условие: существуют $\rho > 0, \sigma, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q \in R^1, q \geqslant 1$ такие, что

$$\max_{\omega \in \Omega} \min\big\{|\omega - \xi_1|, \ldots, |\omega - \xi_q|\big\} < \rho,$$

откуда следует, что для каждого $k \in \{0, 1, 2, \ldots, q\}$ найдется номер $r \in \{1, 2, \ldots, q\}$ такой, что $|(\sigma + 2\rho k) - \xi_r| < \rho$. Выше показано, что одному такому r может соответствовать не более одного k. При этом k принимает $q + 1$ значение, r – ровно q, поэтому существует по крайней мере одно значение $k^* \in \{0, 1, 2, \ldots, q\}$ такое, что $|(\sigma + 2\rho k^*) - \xi_r| \geqslant \rho$ для всех $r \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Лемма доказана.

Для каждого момента $t \in [0, \infty)$ определим множество

$$\Omega_c(t) = \left\{\delta_c + 2\rho_c l_c(t) + 2\rho_c k, k = 0, 1, \ldots, q_c(t)\right\}$$

и величину $\omega_c(t) \in \Omega_c(t)$ следующим образом:

если $q_c(t) = 0$, тогда $\omega_c(t) = \delta_c + 2\rho_c l_c(t)$;

если $q_c(t) \geqslant 1$, тогда $\omega_c(t)$ определяется из условия

$$\min_{\alpha \in Q_c(t)} \left\{ \left| \omega_c(t) - x_{c\alpha}^{(m_1)}(t) \right| \right\} = \max_{\omega \in \Omega_c(t)} \min_{\alpha \in Q_c(t)} \left\{ \left| \omega - x_{c\alpha}^{(m_1)}(t) \right| \right\} \geqslant \rho_c. \tag{1.4}$$

Неравенство в (1.4) следует из леммы 1.1. Для определенности: если существует несколько значений $\omega_c(t)$, то возьмем максимальное из них. Таким образом, для всех $t \geqslant 0$ величина $\omega_c(t)$ определена однозначно и

$$\omega_c(t) \in \Omega_c^* = \left\{ \delta_c + 2\rho_c k,\ k = 0, 1, \ldots, n \right\}. \tag{1.5}$$

Л е м м а 1.2 *Для всех $t \geqslant 0$, $T > 0$ и $r \in M_1$ справедливо:*

1) область достижимости $x_i^{(r)}$ в момент $t+T$ совпадает с множеством

$$\mathfrak{D} \left(\sum_{k=0}^{n_i - r - 1} \frac{x_i^{(r+k)}(t) T^k}{k!}, \frac{T^{n_i - r}}{(n_i - r)!} \right);$$

2) область достижимости $x_{ci}^{(r)}$ в момент $t + T$ совпадает с отрезком

$$\left[\sum_{k=0}^{n_i - r - 1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t) T^k}{k!} - \frac{T^{n_i - r}}{(n_i - r)!}, \sum_{k=0}^{n_i - r - 1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t) T^k}{k!} + \frac{T^{n_i - r}}{(n_i - r)!} \right];$$

3) пусть $v_c(\tau) = v_c(t)$ для всех $\tau \in [t, t+T]$, тогда

$$y_{c1}^{(r)}(t+T) = \sum_{k=0}^{m_1 - r - 1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t) T^k}{k!} + v_c(t) \frac{T^{m_1 - r}}{(m_1 - r)!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя (1.1) и (1.2) на интервале $[t, t+T]$ получим справедливость всех трех утверждений.

Лемма доказана.

Определим функции $T_{ci}^r(t) \geqslant 0, r \in M_1$ как время, через которое впервые могут совпасть c координаты $x_i^{(r)}(t)$ и $y_1^{(r)}(t)$, т.е. может выполнится

$$x_{ci}^{(r)}(t + T_{ci}^r(t)) = y_{c1}^{(r)}(t + T_{ci}^r(t)),$$

при условии, что $v_c(\tau) = v_c(t)$ для всех $\tau \in [t, \infty)$.

Возможны три случая:

1) $y_{c1}^{(r)}(t) < x_{ci}^{(r)}(t)$. Из (1.1), (1.2) и леммы 1.2, получим, что $T_{ci}^r(t)$ есть наименьшее положительное (относительно T) решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + v_c(t)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} = \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} - \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\ ;$$

2) $y_{c1}^{(r)}(t) = x_{ci}^{(r)}(t)$. Положим $T_{ci}^r(t) = 0$;

3) $y_{c1}^{(r)}(t) > x_{ci}^{(r)}(t)$. Тогда $T_{ci}^r(t)$ есть наименьшее положительное решение

$$\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + v_c(t)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} = \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}.$$

Таким образом, для всех $t \in [0,\infty)$ и $r \in M_1$ значение $T_{ci}^r(t)$ определяется как минимальный неотрицательный (относительно T) корень многочлена

$$\begin{gathered} -\operatorname{sign}\left(y_{c1}^{(r)}(t) - x_{ci}^{(r)}(t)\right)\frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!} - \sum_{k=m_1-r+1}^{n_i-r-1}\frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \\ + \left(v_c(t) - x_{ci}^{(m_1)}(t)\right)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} + \qquad (1.6) \\ + \sum_{k=1}^{m_1-r-1}\frac{\left(y_{c1}^{(r+k)}(t) - x_{ci}^{(r+k)}(t)\right)T^k}{k!} + \left(y_{c1}^{(r)}(t) - x_{ci}^{(r)}(t)\right) = 0, \end{gathered}$$

который существует, т.к. данное уравнение представимо в виде

$$T^{n_i-r} + a_1T^{n_i-r-1} + \cdots + a_{n_i-r-1}T = a_{n_i-r},\ \text{где } a_{n_i-r} \geqslant 0.$$

Для всех $t \in [0,\infty)$ и $r \in M_1$ определим функции

$$J_{ci}^r(t) = \min\Big\{T_{d\alpha}^p(t),\ (d,\alpha,p) \in \{1,2\}\times I\times M_1 \text{ и } (d,\alpha,p) \neq (c,i,r)\Big\}.$$

Иначе говоря, $J_{ci}^r(t) \geqslant 0$ при каждом $t \geqslant 0$ есть минимальное из всех определенных выше значений $T_{d\alpha}^p(t),\ (d,\alpha,p) \in \{1,2\}\times I\times M_1$ за исключением только одного $T_{ci}^r(t)$, т.е. минимум выбирается из $2nm_1 - 1$ чисел.

Для каждого $r \in M_1$ определим функции

$$K_{ci}^r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \; y_{c1}^{(r)}(t) < x_{ci}^{(r)}(t) \text{ и для } T = T_{ci}^r(t) \text{ выполнено} \\ & \displaystyle\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \Big(v_c(t) + \frac{\rho_c}{8}\Big)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} \geqslant \\ & \displaystyle\geqslant \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\;; \\ -1, & \text{если } \; y_{c1}^{(r)}(t) > x_{ci}^{(r)}(t) \text{ и для } T = T_{ci}^r(t) \text{ выполнено} \\ & \displaystyle\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \Big(v_c(t) - \frac{\rho_c}{8}\Big)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} \leqslant \\ & \displaystyle\leqslant \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} - \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\;; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Л е м м а 1.3 *Пусть убегающий E_1 использует произвольное постоянное управление. Тогда для любого допустимого управления $u_i(t)$ преследователя P_i и $r \in M_1$ справедливы следующие утверждения:*

1) если для $t > 0$ и некоторого $\sigma > 0$

$$y_{c1}^{(r)}(\tau) < x_{ci}^{(r)}(\tau)\ \Big\{y_{c1}^{(r)}(\tau) > x_{ci}^{(r)}(\tau)\Big\},\ \tau \in [t-\sigma, t),\ y_{c1}^{(r)}(t) = x_{ci}^{(r)}(t),$$
$$y_d^{(r)}(\tau) \neq x_{di}^{(r)}(\tau),\ \tau \in [t-\sigma, t],\ d \in \{1,2\}\backslash\{c\},$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$K_{ci}^r(\tau) = 1\ \Big\{K_{ci}^r(\tau) = -1\Big\},\ T_{di}^r(\tau) > T_{ci}^r(\tau),\ \tau \in [t-\varepsilon, t);$$

2) если для $t > 0$ и некоторого $\sigma > 0$

$$y_{11}^{(r)}(\tau) \neq x_{1i}^{(r)}(\tau),\ y_{21}^{(r)}(\tau) \neq x_{2i}^{(r)}(\tau),\ \tau \in [t-\sigma, t),\ y_1^{(r)}(t) = x_i^{(r)}(t),$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$K_{1i}^r(\tau) \neq 0,\ T_{2i}^r(\tau) \geqslant T_{1i}^r(\tau) > 0,\ \tau \in [t-\varepsilon, t) \text{ или}$$

$$K_{2i}^r(\tau) \neq 0,\ T_{1i}^r(\tau) \geqslant T_{2i}^r(\tau) > 0,\ \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.6) и условий леммы следует непрерывность функций $T_{1i}^r(\tau),\ T_{2i}^r(\tau)$ для всех $\tau \in [0, \infty)$.

1) Пусть

$$y_{c1}^{(r)}(\tau) < x_{ci}^{(r)}(\tau),\ y_d^{(r)}(\tau) \neq x_{di}^{(r)}(\tau),\ \tau \in [t-\sigma, t),$$

$$y_{c1}^{(r)}(t) = x_{ci}^{(r)}(t),\ y_d^{(r)}(t) \neq x_{di}^{(r)}(t).$$

В этом случае,

$$T_{ci}^r(t) = 0,\ T_{di}^r(t) > 0,$$

учитывая непрерывность, получаем, что существует $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$T_{di}^r(\tau) > T_{ci}^r(\tau),\ \frac{\rho_c}{8} \geqslant 2\frac{(m_1-r)!}{(n_i-r)!}(T_{ci}^r(\tau))^{n_i-m_1},\ \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Из (1.7) следует, что $K_{ci}^r(\tau) = 1$, $\tau \in [t-\varepsilon, t)$, если

$$\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(\tau)(T_{ci}^r(\tau))^k}{k!} + \left(v_c(\tau) + \frac{\rho_c}{8}\right)\frac{(T_{ci}^r(\tau))^{m_1-r}}{(m_1-r)!} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(\tau)(T_{ci}^r(\tau))^k}{k!} + \frac{(T_{ci}^r(\tau))^{n_i-r}}{(n_i-r)!},$$

что эквивалентно неравенству

$$\left[\left(\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(\tau)(T_{ci}^r(\tau))^k}{k!} + v_c(\tau)\frac{(T_{ci}^r(\tau))^{m_1-r}}{(m_1-r)!}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(\tau)(T_{ci}^r(\tau))^k}{k!} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(T_{ci}^r(\tau))^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\right)\right] + \left[\left(\frac{\rho_c}{8} - 2\frac{(m_1-r)!}{(n_i-r)!}(T_{ci}^r(\tau))^{n_i-m_1}\right)\frac{(T_{ci}^r(\tau))^{m_1-r}}{(m_1-r)!}\right] \geqslant 0,$$

которое выполнено, т.к. первое слагаемое равно нулю, в силу определения функции $T_{ci}^r(\tau)$, а второе неотрицательно по выбору ε. Оставшийся случай рассматривается аналогично. Утверждение 1 доказано.

2) Имеем

$$T_{1i}^r(\tau) > 0,\ T_{2i}^r(\tau) > 0,\ \tau \in [t-\sigma, t),\ T_{1i}^r(t) = T_{2i}^r(t) = 0,$$

учитывая непрерывность, получаем, что существует $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что для всех $\tau \in [t-\varepsilon, t)$

$$\left(\frac{\rho_c}{16}\frac{(n_i-r)!}{(m_1-r)!}\right)^{1/(n_i-m_1)} \geqslant T_{2i}^r(\tau) \geqslant T_{1i}^r(\tau) > 0 \text{ или}$$

$$\left(\frac{\rho_c}{16}\frac{(n_i-r)!}{(m_1-r)!}\right)^{1/(n_i-m_1)} \geqslant T_{1i}^r(\tau) \geqslant T_{2i}^r(\tau) > 0.$$

Аналогично утверждению 1, для таких ε, доказывается, что

$$K_{1i}^r(\tau) \neq 0 \text{ и } K_{2i}^r(\tau) \neq 0, \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Утверждение 2 доказано.

Лемма доказана.

Для всех $t \geqslant 0$ и $r \in M_1$ определим функции

$$B_{1i}^r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_{1i}^r(t) \neq 0,\ J_{1i}^r(t) \geqslant T_{1i}^r(t), \\ & B_{1\alpha}^p(t) = B_{2\alpha}^p(t) = 0 \\ & \text{для всех } \alpha \in I \text{ и } p = r+1, r+2, \ldots, m_1 - 1, \\ & B_{11}^r(t) = B_{12}^r(t) = \cdots = B_{1i-1}^r(t) = 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1.8}$$

$$B_{2i}^r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_{2i}^r(t) \neq 0,\ J_{2i}^r(t) \geqslant T_{2i}^r(t), \\ & B_{1\alpha}^p(t) = B_{2\alpha}^p(t) = B_{1\alpha}^r(t) = 0 \\ & \text{для всех } \alpha \in I \text{ и } p = r+1, r+2, \ldots, m_1 - 1, \\ & B_{21}^r(t) = B_{22}^r(t) = \cdots = B_{2i-1}^r(t) = 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.9}$$

Из (1.8), (1.9) следует, что в каждый момент $t \geqslant 0$ из $2nm_1$ функций B_{ci}^r не более чем одна обращается в 1.

Вычисление функций B^r_{ci} можно проводить в таком порядке

$$B^{m_1-1}_{11}, B^{m_1-1}_{12}, \ldots, B^{m_1-1}_{1n},\ B^{m_1-1}_{21}, B^{m_1-1}_{22}, \ldots, B^{m_1-1}_{2n},$$

$$B^{m_1-2}_{11}, B^{m_1-2}_{12}, \ldots, B^{m_1-2}_{1n},\ B^{m_1-2}_{21}, B^{m_1-2}_{22}, \ldots, B^{m_1-2}_{2n}, \ldots$$

так дойдем до функции равной 1 или до B^0_{2n}. Если использовать эту схему, то из (1.8), (1.9) следует, что для каждой функций B^r_{ci} достаточно проверять условия $K^r_{ci}(t) \neq 0,\ J^r_{ci}(t) \geqslant T^r_{ci}(t)$ (если они выполняются, то $B^r_{ci}(t) = 1$, иначе $B^r_{ci}(t) = 0$).

Определяем $v_c(t)$ следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} v_c(t) = \omega_c(\tau^c_{2b}),\ t \in [\tau^c_{2b}, \tau^c_{2b+1}), \\ \text{где } \tau^c_{2b+1} \geqslant \tau^c_{2b} - \text{момент, когда впервые найдутся} \\ \alpha \in I, r \in M_1:\ B^r_{c\alpha}(\tau^c_{2b+1}) = 1 \text{ и } v_d(\tau^c_{2b+1}) \in \Omega^*_d; \\ \\ v_c(t) = \omega_c(\tau^c_{2b+1}) + K^r_{c\alpha}(\tau^c_{2b+1})\dfrac{\rho_c}{4},\ t \in [\tau^c_{2b+1}, \tau^c_{2b+2}), \\ \text{где } \tau^c_{2b+2} > \tau^c_{2b+1} - \text{момент, когда впервые найдется} \\ \beta \in I:\ y^{(r)}_{c1}(\tau^c_{2b+2}) = x^{(r)}_{c\beta}(\tau^c_{2b+2}). \end{array}\right\} \quad (1.10)$$

В формуле (1.10)

$$\tau^c_0 = 0,\ d \in \{1, 2\}\backslash\{c\},\ b = 0, 1, 2, \ldots.$$

Определим числовую последовательность $t^c_b : t^c_0 = 0;\ \tau^c_{2k+1} > t^c_{b-1}-$ момент, когда впервые в (1.10) $r = m_1 - 1$, тогда $t^c_b = \tau^c_{2k+2},\ b = 1, 2, \ldots$

Везде далее считаем, что управление $v(t)$ и $\{\tau^c_b\}^{b_c}_{b=0}$ определены согласно (1.10), при этом, либо $b_c < \infty$, либо $b_c = \infty$, а $\{t^c_b\}^{b^*_c}_{b=0} \subset \{\tau^c_b\}^{b_c}_{b=0}$ определена как описано выше, при этом, либо $b^*_c < \infty$, либо $b^*_c = \infty$.

Л е м м а 1.4. *Для любых допустимых управлений $u_i(t)$ выполнено:*

1) если $b_1 \geqslant 2$ и $b_2 \geqslant 2$, тогда

$$\{\tau^1_{2b}\}_{b=1}^{b_1 \div 2} \bigcap \{\tau^2_{2b}\}_{b=1}^{b_2 \div 2} = \emptyset, \text{ где } \div \text{ – операция деления нацело};$$

2) если $b_c \geqslant 2$, тогда

$$y^{(r)}_{c1}(t) \neq x^{(r)}_{ci}(t) \text{ для всех } r \in M_1 \text{ и } t \in \bigcup_{b=0}^{b_c \div 2 - 1} (\tau^c_{2b}, \tau^c_{2b+2});$$

3) $v_c(\tau) \in [\delta_c - \rho_c/4, \delta_c + 2\rho_c n + \rho_c/4]$ для всех $\tau \in \{\tau^c_b\}_{b=0}^{b_c}$;

4) если $b_c = \infty$, тогда и $b^*_c = \infty$;

5) $v_c(t^c_b) - \rho_c/4 \leqslant v_c(t) \leqslant v_c(t^c_b) + \rho_c/4$ для всех $t \in [t^c_b, t^c_{b+1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Из формулы (1.10) следует, что

$$\tau^1_{2p+1} \neq \tau^2_{2q+1} \text{ для всех } p, q \geqslant 0,$$

при которых $\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2q+1}$ определены, т.к., как было отмечено выше, при каждом $t \geqslant 0$ из $2nm_1$ функций B^r_{ci} не более чем одна обращается в 1.

Пусть наступил момент τ^1_{2p+1}, тогда, следуя (1.10), (1.8), (1.7), (1.5),

$$v_1(t) = v_1(\tau^1_{2p+1}) + K^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})\frac{\rho_1}{4} \notin \Omega^1_*, \ t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}),$$

отсюда и из сказанного выше,

$$\tau^2_{2q+1} \notin [\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}), \ v_2(t) = v_2(\tau^1_{2p+1}), \ t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}).$$

Объединяя

$$\begin{cases} v_1(t) = v_1(\tau^1_{2p+1}) + K^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})\dfrac{\rho_1}{4} \\ v_2(t) = v_2(\tau^1_{2p+1}) \end{cases}, \ t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}),$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} \tau^1_{2p+2} \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+1} + T^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})) \\ J^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1}) \geqslant T^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1}) \end{cases}$$

из которой следует, что

$$y_{21}^{(r)}(t) \neq x_{2i}^{(r)}(t) \text{ для всех } r \in M_1,\ t \in [\tau_{2p+1}^1, \tau_{2p+2}^1] \text{ и } \tau_{2q}^2 \notin [\tau_{2p+1}^1, \tau_{2p+2}^1].$$

Пусть наступил момент времени τ_{2q+1}^2, аналогично получим, что

$$y_{11}^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t) \text{ для всех } r \in M_1,\ t \in [\tau_{2q+1}^2, \tau_{2q+2}^2] \text{ и } \tau_{2p}^1 \notin [\tau_{2q+1}^2, \tau_{2q+2}^2].$$

Утверждение 1 доказано.

2) Докажем, что для всех $r \in M_1$ и произвольного $p \in \{0, 1, \dots, b_1 \div 2 - 1\}$

$$y_{11}^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t) \text{ для всех } t \in (\tau_{2p}^1, \tau_{2p+2}^1).$$

Из леммы 1.3 следует, что

$$y_{11}^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t),\ t \in (\tau_{2p}^1, \min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2q+1}^2\}).$$

Если $\min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2q+1}^2\} = \tau_{2p+1}^1$, тогда утверждение выполнено.

Пусть $\min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2q+1}^2\} = \tau_{2q+1}^2$, в доказательстве первого утверждения этой леммы показано, что в этом случае

$$y_{11}^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t),\ t \in [\tau_{2q+1}^2, \tau_{2(q+1)}^2].$$

Теперь, снова применяя лемму 1.3,

$$y_{11}^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t),\ t \in (\tau_{2(q+1)}^2, \min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2(q+1)+1}^2\}).$$

Продолжая далее получим, что для некоторого l $\min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2(q+l)+1}^2\} = \tau_{2p+1}^1$ и утверждение выполнено.

Аналогично доказывается, что

$$y_{21}^{(r)}(t) \neq x_{2i}^{(r)}(t) \text{ для всех } t \in (\tau_{2q}^2, \tau_{2q+2}^2).$$

Утверждение 2 доказано.

3) Из (1.5) и (1.10) получим, что $v_c(\tau^c_{2b}) \in \Omega^*_c \subset [\delta_c, \delta_c + 2\rho_c n]$ и

$$v_c(\tau^c_{2b+1}) = v_c(\tau^c_{2b}) \pm \rho_c/4 \in [\delta_c - \rho_c/4, \delta_c + 2\rho_c n + \rho_c/4].$$

4) Если $m_1 = 1$, тогда $\{t^c_b\}_{b=0}^{b^*_c} = \{\tau^c_{2b}\}_{b=0}^{\infty}$, откуда $b^*_c = \infty$.

Пусть $m_1 = 2$. Предположим, что утверждение не выполнено, т.е. $b_c = \infty,\ b^*_c < \infty$, следовательно найдется номер p, что при любом $b \geqslant p$

$$B^1_{ci}(\tau^c_{2b+1}) = 0 \text{ для всех } i \text{ и, для некоторого } \alpha \in I,\ B^0_{c\alpha}(\tau^c_{2b+1}) = 0.$$

Из утверждения 2 данной леммы, следует, без потери общности, что найдется номер $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ такой, что для всех $t \geqslant \tau^c_{2(p+1)}$ выполнено

$$\dot{x}_{c1}(t),\ \dot{x}_{c2}(t), \ldots, \dot{x}_{ck}(t) < \dot{y}_{c1}(t) < \dot{x}_{ck+1}(t), \dot{x}_{ck+2}(t), \ldots, \dot{x}_{cn}(t).$$

Из последнего следует существование номера q, что для всех $t \geqslant \tau^c_{2(p+q)}$

$$x_{c1}(t),\ x_{c2}(t), \ldots, x_{ck}(t) < y_{c1}(t) < x_{ck+1}(t), x_{ck+2}(t), \ldots, x_{cn}(t).$$

Объединяя два неравенства для $t \geqslant \tau^c_{2(p+q)}$, получим, что $b_c < \infty$. Получили противоречие. Случай $m_1 \geqslant 3$ рассматривается аналогично. Утверждение 4 леммы доказано.

5) Пусть $t^c_b = \tau^c_{2p} \leqslant \tau^c_{2p+1} < \tau^c_{2(p+1)} \leqslant \tau^c_{2(p+1)+1} < \cdots < \tau^c_{2(p+q)} = t^c_{b+1}$, тогда, применяя утверждение 2 этой леммы и (1.10), получим, что

$$v_c(t^c_b) = v_c(\tau^c_{2p}),\ v_c(\tau^c_{2p+1}) = v_c(t^c_b) \pm \rho_c/4,\ v_c(\tau^c_{2(p+1)}) = v_c(t^c_b), \ldots,$$

$$v_c(\tau^c_{2(p+q-1)}) = v_c(t^c_b),\ v_c(\tau^c_{2(p+q-1)+1}) = v_c(t^c_b) \pm \rho_c/4.$$

Из последнего следует справедливость утверждения 5.

Лемма доказана.

Докажем, что формула (1.10) определяет $v(t)$ для всех $t \in [0, \infty)$. Для этого достаточно показать, что имеет место следующая

Л е м м а 1.5. *Для любого набора допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i либо значение b_c конечно, либо $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^c = \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $c = 1$. Для каждого набора допустимых управлений $u_i(t)$ возможен один из двух случаев:

I. (1.10) применяется конечное число раз, поэтому значение b_1 конечно;

II. (1.10) применяется бесконечное число раз. Требуется доказать, что полученная по этой формуле последовательность $\{\tau_b^1\}_{b=0}^{\infty} : \lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1 = \infty$. Предположим противное, т.е.: существует набор допустимых управлений

$$u_i^*(t) : \lim_{b\to\infty} \tau_b^1 = \tau^* < \infty.$$

II.1. Рассмотрим числа $x_{1i}^{(m_1-1)}(\tau^*)$. Пусть они принимают $r \in I$ различных значений $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_r$. Не теряя общности, считаем, что

$$x_{1s}^{(m_1-1)}(\tau^*) = \xi_k, \ s \in S_k,$$

где $S_k = \{s_{k-1}+1, s_{k-1}+2, \ldots, s_k\}, \ k = 1, 2, \ldots, r \ (s_0 = 0, s_r = n)$.

Для каждого $\varepsilon \in [0, \tau^*]$ определим множества

$$H_k(\varepsilon) = \bigcup_{s\in S_k} \Big\{ z \in R^1 : z = x_{1s}^{(m_1-1)}(t), \ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*] \Big\}, \ k = 1, 2, \ldots, r.$$

Пусть $G_1, G_2 \subset R^1$, обозначим $\mathrm{dist}(G_1, G_2) = \inf\limits_{g_1\in G_1, \ g_2\in G_2} |g_1 - g_2|$,

$$h(\varepsilon) = \min\Big\{ \mathrm{dist}\big(H_k(\varepsilon), H_{k+1}(\varepsilon)\big), \ k = 1, 2, \ldots, r-1 \Big\},$$

$$H(\varepsilon) = h(\varepsilon) - 2(\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4)\varepsilon, \varepsilon \in [0, \tau^*].$$

В силу непрерывности функции H и условия $h(0) > 0$ получаем, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $H(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$. Отсюда

$$\frac{h(\varepsilon)}{\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4} > 2\varepsilon \text{ для всех } \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]. \qquad (1.11)$$

II.2. Если $|S_k| = 1$, тогда полагаем $\varepsilon_2^k = \infty$. Пусть $|S_k| \geqslant 2$ и $\alpha, \beta \in S_k$. Рассмотрим значения $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}, x_{1\beta}^{(m_1-1)}, x_{1\alpha}^{(m_1)}, x_{1\beta}^{(m_1)}$. Отметим, что

$$x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(\tau^*) = x_{1\beta}^{(m_1-1)}(\tau^*) = \xi_k. \tag{1.12}$$

Разберем всевозможные случаи их взаимного расположения:

1) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(\tau^*) > x_{1\beta}^{(m_1)}(\tau^*)$. В силу непрерывности этих функций, существует $\varepsilon > 0$, что $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*]$. Кроме того, учитывая (1.12), $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) < x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$;

2) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(\tau^*) < x_{1\beta}^{(m_1)}(\tau^*)$. Аналогично случаю 1, существует $\varepsilon > 0$, что $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) < x_{1\beta}^{(m_1)}(t)$, $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$;

3) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(\tau^*) = x_{1\beta}^{(m_1)}(\tau^*)$. Этот случай имеет несколько вариантов:

   3.1) существует $\varepsilon > 0$, что $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) = x_{1\beta}^{(m_1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*]$, тогда и $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) = x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*]$;

   3.2) существует $\varepsilon > 0$, что $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$, тогда, подобно случаю 1, $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) < x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$;

   3.3) существует $\varepsilon > 0$, что $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) < x_{1\beta}^{(m_1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$, тогда, подобно случаю 2, $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$.

Теперь, перебирая все $x_{1s}^{(m_1-1)}, x_{1s}^{(m_1)},\ s \in S_k$ попарно, как $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}, x_{1\beta}^{(m_1-1)}$, $x_{1\alpha}^{(m_1)}, x_{1\beta}^{(m_1)}$, получим, что существует $\varepsilon_2^k > 0$ такое, что расположение $x_{1s}^{(m_1-1)}, x_{1s}^{(m_1)},\ s \in S_k$ друг относительно друга не изменяется на $[\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*)$. Последнее, без потери общности, означает:

$$\begin{matrix} x_{1s_{k-1}+1}^{(m_1-1)}(t) \leqq x_{1s_{k-1}+2}^{(m_1-1)}(t) \leqq \cdots \leqq x_{1s_k}^{(m_1-1)}(t) \\ x_{1s_{k-1}+1}^{(m_1)}(t) \geqq x_{1s_{k-1}+2}^{(m_1)}(t) \geqq \cdots \geqq x_{1s_k}^{(m_1)}(t) \end{matrix},\ t \in [\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*). \tag{1.13}$$

В (1.13) $\leqq$, $\geqq$ – означает, что на всем промежутке $[\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*)$, в первой строке формулы, знак либо $<$, либо $=$, во второй строке, знак $>$ соответствует знаку $<$ первой строки, знак $=$ соответствует $=$.

Выбираем $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \ldots, \varepsilon_2^r\} > 0$.

II.3. Из непрерывности $x_{1i}^{(m_1)}(t)$ следует существование $\varepsilon_3^i > 0$, что

$$\left| x_{1i}^{(m_1)}(\tau^* - \varepsilon') - x_{1i}^{(m_1)}(\tau^* - \varepsilon'') \right| < \rho_1/4 \text{ для всех } \varepsilon', \varepsilon'' \in [0, \varepsilon_3^i). \tag{1.14}$$

Возьмем $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2, \ldots, \varepsilon_3^n\} > 0$.

II.4. Определим

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} > 0. \tag{1.15}$$

Из предположения, что $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1 = \tau^*$ следует, что до момента $\tau^* - \varepsilon^* < \tau^*$ управление $v_1(t)$ определенно и существует номер p такой, что $t_p^1, t_{p+1}^1, t_{p+2}^1, \dots \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$, где, согласно лемме 1.4, $\{t_b^1\}_{b=0}^\infty \subset \{\tau_b^1\}_{b=0}^\infty$.

Рассмотрим игру Γ начиная с момента $\tau^* - \varepsilon^*$ и докажем, что найдется номер $q : t_{(p+q)}^1 > \tau^*$, этим получим противоречие предположению о конечном значении $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1$, тем самым лемма будет доказана полностью.

Итак, момент $t_p^1 \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$. Необходимо $y_{11}^{(m_1-1)}(t_p^1) \in H_k(\varepsilon^*)$ при некотором $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Напомним, что

$$x_{1s}^{(m_1-1)}(t) \in H_k(\varepsilon^*),\ t \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*],\ s \in S_k.$$

Существует, хотя бы одно, $\alpha \in S_k$ такое, что $y_{11}^{(m_1-1)}(t_p^1) = x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t_p^1)$.

Из (1.4) следует, что возможны два случая:

1) $v_1(t_p^1) \geqslant x_{1\alpha}^{(m_1)}(t_p^1) + \rho_1$ (α – это один или несколько последовательных индексов из S_k). Из леммы 1.4 следует, что

$$v_1(t_p^1) - \rho_1/4 \leqslant v_1(t) \leqslant v_1(t_p^1) + \rho_1/4,\ t \in [t_p^1, t_{p+1}^1).$$

отсюда, учитывая (1.14), (1.15),

$$v_1(t) > x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) + \rho_1/2 \text{ для всех } t \in [t_p^1, t_{p+1}^1). \tag{1.16}$$

Следуя (1.13) в момент t^1_{p+1} должно выполнится одно из двух:
а) $y^{(m_1-1)}_{11}(t^1_{p+1}) = x^{(m_1-1)}_{1\alpha}(t^1_{p+1})$, этот случай невозможен в силу (1.16);
б) $y^{(m_1-1)}_{11}(t^1_{p+1}) = x^{(m_1-1)}_{1\beta}(t^1_{p+1}),\ \beta > \alpha$ (β – один или несколько последовательных индексов из S_k). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \left| x^{(m_1)}_{1\beta}(t^1_{p+1}) - x^{(m_1)}_{1\beta}(t) \right| < \rho_1/4 \\ v_1(t) - \rho_1/2 > x^{(m_1)}_{1\alpha}(t) > x^{(m_1)}_{1\beta}(t) \end{cases},\ t \in [t_p, t_{p+1}), \tag{1.17}$$

справедливость первого неравенства следует из (1.14) и (1.15), второй цепочки неравенств – из (1.16), (1.13). Из (1.17) получим, что

$$v_1(t) > x^{(m_1)}_{1\beta}(t^1_{p+1}) + \rho_1/4,\ t \in [t_p, t_{p+1}).$$

Поэтому $v_1(t^1_{p+1})$ по (1.10) будет определено так, что

$$v_1(t^1_{p+1}) \geqslant x^{(m_1)}_{1\beta}(t^1_{p+1}) + \rho_1.$$

Продолжая далее, получим, что существует момент t^1_{p+l} такой, что

$$y^{(m_1-1)}_{11}(t^1_{p+l}) = x^{(m_1-1)}_{1s_k}(t^1_{p+l}), \quad v_1(t^1_{p+l}) \geqslant x^{(m_1)}_{1s_k}(t^1_{p+l}) + \rho_1. \tag{1.18}$$

Из (1.18) получаем, что $x^{(m_1-1)}_{1s}(t) < y^{(m_1-1)}_{11}(t),\ t \in (t^1_{p+l}, \tau^*], s \in S_k$. Значит, чтобы $t^1_{p+l+1} \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$ необходимо выполнение равенства

$$y^{(m_1-1)}_{11}(t^1_{p+l+1}) = x^{(m_1-1)}_{1\eta}(t^1_{p+l+1}),\ \eta \in I \backslash S_k,$$

это означает, что $y^{(m_1-1)}_{11}$ из множества $H_k(\varepsilon^*)$ должен попасть в множество $H_{k+1}(\varepsilon^*)$. Из (1.11) на это потребуется времени, даже при максимальном v_1, которое по лемме 1.4 равно $\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4$, больше чем $2\varepsilon^*$, откуда $t^1_{p+l+1} - t^1_{p+l} > 2\varepsilon^*$. Итак, существует номер $q = l + 1 : t^1_{p+q} > \tau^*$.
2) $v_1(t^1_p) \leqslant x^{(m_1)}_{1\alpha}(t^1_p) - \rho_1$. Аналогично доказывается существование q.

Случай $c = 2$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Из лемм 1.4 и 1.5 следует, что определенные по формуле (1.10) функции v_c таковы, что

$$v_c(t) \in [\delta_c - \rho_c/4, \delta_c + 2\rho_c n + \rho_c/4] \text{ для всех } t \in [0, \infty). \tag{1.19}$$

Таким образом, полностью определена стратегия убегающего E_1: в каждый момент времени $t \geqslant 0$ убегающий E_1 по (1.10) определяет $v_1(t)$ и $v_2(t)$, тем самым полностью задает свое управление $v(t)$.

Т е о р е м а 1.1. *В игре* Γ *при* $m = 1$ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что стратегия убегающего, определяемая (1.10) является стратегией мягкого убегания.

1) Управление $v(t),\ t \in [0, \infty)$ из класса кусочно-постоянных функций и меняет значение в моменты $\tau \in \{\tau_b^1\}_{b=0}^{b_1} \bigcup \{\tau_b^2\}_{b=0}^{b_2}$. В силу (1.19), (1.3)

$$\|v(t)\| \leqslant \sqrt{(\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4)^2 + (\delta_2 + 2\rho_2 n + \rho_2/4)^2} \leqslant \gamma.$$

2) Выполнение условия $x_i^{(r)}(t) \neq y_1^{(r)}(t)$ для всех $r \in M_1$ и $t \geqslant 0$ следует из лемм 1.4 и 1.5. Эти два утверждения полностью доказывают теорему.

Теорема доказана.

Случай $m \geqslant 2$. *Определим стратегию мягкого убегания для группы жестко скоординированных убегающих* E_j.

Т е о р е м а 1.2. *В игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$l = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_m\},\ l_j = l - m_j.$$

В R^ν определим вспомогательную дифференциальную игру Γ_1 $nm+1$ лиц: nm преследователей P_{ij} и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t=0$)

$$x_{ij}^{(l_j+n_i)} = u_{ij}, \quad \|u_i\| \leqslant 1,$$

$$y^{(l)} = w, \quad \|v\| \leqslant \gamma,$$

$$x_{ij}(0) = X_{ij}^0 \neq 0,\ \dot{x}_{ij}(0) = X_{ij}^1 \neq 0, \ldots, x_{ij}^{(l_j-1)}(0) = X_{ij}^{l_j-1} \neq 0,$$

$$x_{ij}^{(l_j)}(0) = X_i^0 - Y_j^0, x_{ij}^{(l_j+1)}(0) = X_i^1 - Y_j^1, \ldots, x_{ij}^{(l-1)}(0) = X_i^{m_j-1} - Y_j^{m_j-1},$$

$$x_{ij}^{(l_j+m_j)}(0) = X_i^{m_j},\ x_{ij}^{(l_j+m_j+1)}(0) = X_i^{m_j+1}, \ldots, x_{ij}^{(l_j+n_i-1)}(0) = X_i^{n_i-1},$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = \cdots = y^{(l-1)}(0) = 0.$$

Отметим, что

$$x_{ij}(0) \neq y(0),\ \dot{x}_{ij}(0) \neq \dot{y}(0), \ldots, x_{ij}^{(l-1)}(0) \neq y^{(l-1)}(0) \text{ для всех } i, j.$$

Для всех допустимых управлений $u_{ij}(t), w(t)$, номера $p \in \{0, 1, \ldots, m_j - 1\}$ и момента времени $t \geqslant 0$

$$x_{ij}^{(l_j+p)}(t) = \sum_{r=0}^{n_i-p-1} \frac{x_{ij}^{(l_j+p+r)}(0)t^r}{r!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n_i-p-1}}{(n_i-p-1)!} u_{ij}(s)ds =$$

$$= (X_i^p - Y_j^p) + (X_i^{p+1} - Y_j^{p+1})t + \cdots + (X_i^{m_j-1} - Y_j^{m_j-1}) \frac{t^{m_j-p-1}}{(m_j-p-1)!} +$$

$$+ X_i^{m_j} \frac{t^{m_j-p}}{(m_j-p)!} + \cdots + X_i^{n_i-1} \frac{t^{n_i-p-1}}{(n_i-p-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n_i-p-1}}{(n_i-p-1)!} u_{ij}(s)ds,$$

$$y^{(l_j+p)}(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m_j-p-1}}{(m_j-p-1)!} w(s)ds\ .$$

Пусть в игре Γ_1 каждый из преследователей P_{ij} использует одно и то же управление, выбранное преследователем P_i в игре Γ, т.е.

$$u_{ij}(t) = u_i(t) \text{ для всех } t \geqslant 0.$$

В этом случае имеет место равенство

$$x_i^{(p)}(t) = x_{ij}^{(l_j+p)}(t) + Y_j^p + Y_j^{p+1}t + \cdots + Y_j^{m_j-1}\frac{t^{m_j-p-1}}{(m_j-p-1)!}. \tag{1.20}$$

Пусть $w(t)$ – допустимое управление, обеспечивающее уклонение от встречи в игре Γ_1, выбранное убегающим E, откуда

$$x_{ij}^{(l_j+p)}(t) \neq y^{(l_j+p)}(t) \text{ для всех } t \geqslant 0. \tag{1.21}$$

Определяем управление убегающих E_j в игре Γ следующим образом:

$$v(t) = w(t) \text{ для всех } t \geqslant 0,$$

тогда

$$y_j^{(p)}(t) = y^{(l_j+p)}(t) + Y_j^p + Y_j^{p+1}t + \cdots + Y_j^{m_j-1}\frac{t^{m_j-p-1}}{(m_j-p-1)!}. \tag{1.22}$$

Объединяя (1.20), (1.21), (1.22) получим, что

$$x_i^{(p)}(t) \neq y_j^{(p)}(t) \text{ для всех } t \geqslant 0.$$

Из построения управления $v(t)$ и теоремы 1.1 следует справедливость данной теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1.1. *Пусть ограничения на управления имеют вид*

$$u_i \in U_i,\ \ v \in V,$$

где U_i, V – выпуклые компакты R^ν, причем $\mathrm{Int}V \neq \emptyset$. Тогда в игре Γ возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.

Считаем, что $U_i \subset \mathfrak{D}(0,1)$, ибо если это не так, то можно перейти к другой системе координат, в которой указанное условие выполняется. Далее, не уменьшая возможностей преследователей, считаем, что выполнены ограничения на управления вида (1.1).

Покажем, как нужно изменить управление $v(t)$ для случая $m = 1$:

1. Если $0 \in \mathrm{Int}V \neq \emptyset$, то найдется число $\gamma \in (0,1)$ такое, что $\mathfrak{D}(0,\gamma) \subset V$ и, не увеличивая возможности убегающих, считаем, что выполнено ограничение (1.2). Получили задачу рассмотренную выше;

2. Пусть $0 \notin \mathrm{Int}V \neq \emptyset$, поэтому найдутся $z \in R^\nu$ и $\gamma > 0$, что $\mathfrak{D}(z,\gamma) \subset V$. Пусть вектор $e = z/\|z\|$ (ранее он выбирался произвольно) и положительные константы δ_c, ρ_c выбираются из условия (вместо (1.3))

$$\delta_c - \rho_c/4 > 0,\ [\delta_1 - \rho_1/4, \delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4] \times [\delta_2 - \rho_2/4, \delta_2 + 2\rho_2 n + \rho_2/4] \subset \mathfrak{D}(z,\gamma).$$

Указанное включение обеспечит выполнение условия $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant 0$ (смотрите (1.19)).

В остальном решение задачи о мягком убегании совпадает с ранее приведенным.

§2.2. Уклонение жестко скоординированных убегающих в шаре от группы инерционных преследователей

В пространстве R^ν ($\nu \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(n_i)} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \quad n_i \geqslant 2, \tag{2.1}$$

закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v, \quad \|v\| \leqslant \gamma, \quad \gamma \in (0,1), \tag{2.2}$$

где $x_i, y_j, u_i, v \in R^\nu$. При $t=0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(\alpha_i)}(0) = X_i^{\alpha_i},\ y_j(0) = Y_j^0,\ \text{причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i,j.$$

Здесь и всюду далее

$$i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,m,\ \alpha_i = 0,1,\ldots,n_i - 1.$$

Дополнительно предполагается, что убегающий E_j не покидает пределы шара $\mathfrak{D}(Y_j^0, r_0)$, где r_0 положительное число.

Определение 2.1. *Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (2.1), (2.2) называются допустимыми.*

Определение 2.2. *В игре Γ возможно уклонение от встречи в шаре, если для любых допустимых управлений $u_i(t)$ найдется допустимое управление*

$$v(t) = v\big(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(t),\ y_j(t)\big)$$

такое, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ и $y_j(t) \in \mathfrak{D}(Y_j^0, r_0)$ для всех $t \in [0,\infty)$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент $t \geqslant 0$ по величинам $\bigl\{x_i^{(\alpha_i)}(t),\ y_j(t)\bigr\}$ для всех убегающих E_j выбирает одно и тоже управление $v(t)$.

В R^ν определим вспомогательную дифференциальную игру $\widehat{\Gamma}$ $n+m$ лиц: n преследователей $\widehat{P}_i$ и m убегающих $\widehat{E}_j$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0 \geqslant 0$)

$$x_i^{(n_i)} = \widehat{u}_i, \quad \|\widehat{u}_i\| \leqslant 1,$$

$$\dot{y}_j = \widehat{v}, \quad \|\widehat{v}\| \leqslant \gamma,$$

$$x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = \widehat{X}_i^{\alpha_i},\ y_j(t_0) = \widehat{Y}_j^0,\ \text{причем}\ \widehat{X}_i^0 \neq \widehat{Y}_j^0\ \text{для всех}\ i, j.$$

Кроме того, требуется найти постоянную $h > 0$ такую, что для любого единичного вектора $\widehat{e} \in R^\nu$ убегающий $\widehat{E}_j$ не покидает пределы конуса

$$C_j = \bigl\{z \in R^\nu : \langle z - z_j, \widehat{e}\rangle = 0, \|z - z_j\| \leqslant ah, z_j = \widehat{Y}_j^0 + a\widehat{e}, a \geqslant 0\bigr\}.$$

Определение 2.3. *В игре $\widehat{\Gamma}$ возможно уклонение от встречи в конусе, если существует $h > 0$, что для любых допустимых управлений $\widehat{u}_i(t)$ и единичного вектора $\widehat{e} \in R^\nu$ найдется допустимое управление*

$$\widehat{v}(t) = \widehat{v}\bigl(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(t),\ y_j(t)\bigr)$$

такое, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ и $y_j(t) \in C_j$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Т е о р е м а 2.1. *В игре $\widehat{\Gamma}$ возможно уклонение от встречи в конусе из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим управление $\widehat{v}(t)$ для всех $t \geqslant t_0$ как в предыдущем параграфе, где положим $e = \widehat{e}$. Тогда из теоремы 1.2 следует выполнение неравенства $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Выбираем $h \geqslant (\delta_2 + 2\rho_2 n + \rho_2/4)/(\delta_1 - \rho_1/4)$. Отметим, что значения δ_c и ρ_c не зависят от выбора e, а следовательно h не зависит от $\widehat{e}$.

Применяя (1.19) и (1.3) получим, что

$$\frac{\widehat{v}_2(t)}{\widehat{v}_1(t)} \leqslant \frac{\delta_2 + 2\rho_2 n + \rho_2/4}{\delta_1 - \rho_1/4} \leqslant h,\ h > 0,$$

откуда $\widehat{v}_2(t) \leqslant \widehat{v}_1(t)h$ для всех $t \in [t_0, \infty)$. Из последнего неравенства следует, что $y_j(t) \in C_j$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.2. *В игре* Γ *возможно уклонение от встречи в шаре из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в игре $\widehat{\Gamma}$ преследователь $\widehat{P}_i$ в каждый момент времени использует управление выбранное преследователем P_i в игре Γ, т.е. $\widehat{u}_i(t) = u_i(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Обозначим через $\widehat{v}(t) = \widehat{v}\big(t, t_0, \widehat{X}_i^{\alpha_i}, \widehat{Y}_j^0, \widehat{e}\big)$ – управление, обеспечивающее уклонение в конусе в игре $\widehat{\Gamma}$, выбранное убегающими $\widehat{E}_j$ в момент $t \geqslant t_0$.

Определяем управление $v(t)$ убегающих E_j в игре Γ :

$$\left.\begin{array}{ll}
0) & v(t) = \widehat{v}\left(t, 0, X_i^{\alpha_i}, Y_j^0, \dfrac{Y_1^0 - X_1^0}{\|Y_1^0 - X_1^0\|}\right),\ t \in [0, t_1), \\
 & t_1 > 0 - \text{момент, когда впервые } y_1(t_1) \in \partial\mathfrak{D}(Y_1^0, r_0); \\
p) & v(t) = \widehat{v}\left(t, t_p, x_i^{(\alpha_i)}(t_p), y_j(t_p), \dfrac{Y_1^0 - y_1(t_p)}{\|Y_1^0 - y_1(t_p)\|}\right), t \in [t_p, t_{p+1}) \\
 & t_{p+1} > t_p - \text{момент, когда впервые } y_1(t_{p+1}) \in \partial\mathfrak{D}(Y_1^0, r_0), \\
 & \text{здесь } p = 1, 2, 3, \ldots
\end{array}\right\}$$

Из построения управления $v(t)$ и теоремы 2.1 следует справедливость данной теоремы.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Азамов А.О.* О задаче убегания по заданной кривой// Прикладная математика и механика. 1982. вып. 4. С. 694-697.

2. *Азамов А.О.* Об альтернативе для игр преследования на бесконечном интервале времени// Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. вып. 4. С. 561-570.

3. *Азамов А.О.* О существовании стратегии с кусочно-постоянными реализациями// Математические заметки. 1987. Т. 41. № 5. С. 718-723.

4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967.

5. *Альбус Дж., Мейстел А., Чикрий А.А., Белоусов А.А., Козлов А.И.* Об игровой задаче «мягкой посадки» для движущихся объектов// Искусственный интеллект. 2000. № 3. С. 404-411.

6. *Бардадым Т.А.* Задача преследования с простым движением и разнотипными ограничениями на управления// Кибернетика. 1982. № 2. С. 80-84.

7. *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц. М.: ИФМЛ. 1961.

8. *Благодатских А.И.* Две задачи группового преследования// Известия ИМИ, №1(21), 2001, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-14.

9. *Благодатских А.И.* Пример Понтрягина со многими убегающими// Известия ИМИ, №2(25), 2002, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 23-26.

10. *Благодатских А.И.* Уклонение от группы инерционных объектов// Шестая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция: Материалы конференции. Ч. 2, Ижевск: УдГУ, 2004, с. 77.

11. *Благодатских А.И.* Уклонение жестко скоординированных убегающих в одной задаче группового преследования// Известия ИМИ, №2(30), 2004, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-24.

12. *Благодатских А.И.* Одна задача уклонения жестко скоординированных убегающих// Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тезисы докладов, Екатеринбург: УрО РАН, 2004, с. 147-148.

13. *Благодатских А.И.* Об одной задаче уклонения от многих преследователей// Проблемы современного математического образования в ВУЗах и школах России: Тезисы докладов, Киров: ВятГГУ, 2004, с. 137-138.

14. *Благодатских А.И.* Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы инерционных объектов// Известия РАН. Теория и системы управления, 2004, №6, с. 143-149.

15. *Благодатских А.И.* О некоторых задачах группового преследования// Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной конференции. Т.2, Узбекистан, Ташкент, 2004, с. 33-36.

16. *Благодатских А.И.* О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками// Известия ИМИ, №2(32), 2005, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-22.

17. *Благодатских А.И.* Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками// Известия РАН. Теория и системы управления, 2005, №2, с. 43-45.

18. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих// Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75-79.

19. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями// Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. вып. 2. С. 234-241.

20. *Вайсборд Э.М., Жуковский В.И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Сов. радио. 1980.

21. *Васильева Л.Г.* Об одной дифференциальной игре убегания// Дифференциальные, бескоалиционные, кооперативные и статистические игры. Калинин.: Изд-во Калининск. ун-та. 1979. С. 26-33.

22. *Вшиневицкий Л.С., Меликян А.А.* Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия// Прикладная математика и механика, 1982. вып. 4. С. 613-621.

23. *Габриэлян М.С., Субботин А.И.* Игровые задачи о встречи с m целевыми множествами// Прикладная математика и механика. 1979. вып. 2. С. 204-208.

24. *Григоренко Н.Л.* Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего// Вестник МГУ. Серия вычисл. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41-47.

25. *Григоренко Н.Л.* Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих// ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051-1054.

26. *Григоренко Н.Л.* Задача преследования несколькими объектами// Труды математического ин-та АН СССР. 1984. Т. 166. С. 61-75.

27. *Григоренко Н.Л.* О квазилинейной задаче преследования несколькими объектами// ДАН СССР. 1977. Т. 259. № 5. С. 1040-1043.

28. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Московского ун-та. 1990.

29. *Гусятников П.Б.* Дифференциальная игра убегания m лиц// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 22-32.

30. *Гусятников П.Б.* Теория дифференциальных игр. М.: МФТИ. 1982.

31. *Гусятников П.Б., Половинкин Е.С.* Простая квазилинейная задача преследования// Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44. вып. 5. С. 771-782.

32. *Демидов К.В.* Об одной задаче группового преследования с r-кратной поимкой// Вопросы вычислительной математики и программирования. М.: МГУ. 1984. С. 73-75.

33. *Демидов К.В.* Дифференциальные игры с переменной структурой группы преследующих и одного убегающего// Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. вып. 1. С. 155-159.

34. *Железнов В.С., Иванов М.Н., Маслов Е.П.* Об одной задаче уклонения в пространстве// Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 11-22.

35. *Жимовский В.* Два следствия решения одной задачи уклонения от многих преследователей// Bull. Acad. Sci. Ser. math. 1980. Т. 28. № 3-4. С. 155-159.

36. *Жуковский В.И., Чикрий А.А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1994.

37. *Зак В.Л.* Задача уклонения от многих преследователей// ДАН СССР. 1982. Т. 265. № 5. С. 1051-1053.

38. *Зак В.Л.* Кусочно-программная стратегия уклонения от многих преследователей// Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт. 1982. №199.

39. *Зак В.Л.* Построение стратегии уклонения от нескольких преследователей для динамических систем// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 4. С. 143-147.

40. *Зонневенд Д.* Об одном методе преследования// ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 6. С. 1296-1299.

41. *Зонневенд Д.* Об одном типе превосходства игрока// ДАН СССР. 1973. Т. 208. № 3. С. 520-523.

42. *Ибрагимов Г.И.* Об одной задаче оптимального преследования несколькими объектами одного// Прикладная математика и механика. 1998. Т.62. вып. 2. С. 199-205.

43. *Иванов Р.П.* К вопросу о мягкой поимке в дифференциальных играх со многими догоняющими и одним уклоняющимся игроком// Труды Математического института АН СССР. 1988. Т. 185. С. 74-83.

44. *Иванов Р.П., Маслов Е.П.* О сравнении двух методов преследования в задаче о поочередной встрече// Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 38-43.

45. *Иванов Р.П.* Простое преследование-убегание на компакте// ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1318-1321.

46. *Иванов Р.П.* Измеримые стратегии в дифференциальных играх// Математический сборник. 1989. Т. 180. № 1. С. 119-135.

47. *Иванов Р.П., Ледяев Ю.С.* Оптимальность времени преследования в диффернциальной игре многих объектов с простым движением// Труды математическ. ин-та АН СССР. 1981. Т. 158. С. 87-97.

48. *Исаичкина Л.Ю.* Об одном классе дифференциальных игр многих лиц// Некоторые вопросы прикл. мат. и программ. обесп. ЭВМ. М.: МГУ. 1982. С. 52-55.

49. *Ковшов А.М.* Параллельные стратегии в играх преследования на сфере// Автореферат дисс. на соиск. уч. ст. канд. наук. СПб. 1996. 12с.

50. *Константинов Р.В.* О квазилинейной дифференциальной игре преследования с простой динамиков при наличии фазового ограничения// Математические заметки. 2001. Т. 69. вып. 4. С. 581-590.

51. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встречи движений. М.: Наука. 1970.

52. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

53. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой: задаче о минимуме гарантированного результата. М.: Наука. 1985.

54. *Кучкаров А.Ш., Рихсиев Б.Б.* О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями// Автоматика и телемеханика. 2001. № 8. С. 41-45.

55. *Лагунов В.Н.* Введение в дифференциальные игры. Вильнюс. 1979.

56. *Лагунова Н.В.* Задача убегания от четырех преследователей// Вестник МГУ. Серия 15. 1992. № 3. С. 57-63.

57. *Малофеев О.А., Петросян Л.А.* Игра простого преследования на плоскости с препятствием// Сб. трудов ин-та математики Сиб. отд. АН СССР. 1971. вып. 9. С. 31-42.

58. *Малофеев О.А.* Дифференциальные игры простого преследования на многообразиях// Математические методы организации и управления в сложных системах. Калинин: Изд-во Калинин. ун-та. 1982. С. 69-74.

59. *Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Дифференциальные игры преследования-уклонения с групповой целью// Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ. 1991. Т. 32. С. 32-59.

60. *Мезенцев А.В.* О некоторых классах дифференциальных игр// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 6. С. 3-7.

61. *Мезенцев А.В.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями. М.: МГУ. 1988.

62. *Меликян А.А.* Оптимальное взаимодействие двух преследователей в игровой задаче// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №2. С. 49-56.

63. *Меликян А.А., Овакимян Н.В.* Игровая задача простого преследования на многообразиях// Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. вып. 1. С. 54-62.

64. *Меликян А.А., Овакимян Н.В.* Игровая задача простого преследования на двумерном конусе// Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. вып. 5. С. 741-750.

65. *Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц// Труды математич. ин-та АН СССР. 1977. Т. 143. С. 105-128.

66. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С.Понтрягина в дифференциальных играх. М.: МГУ. 1984.

67. *Патланжоглу О.М.* О потенциале игрока в обобщенном контрольном примере Л.С.Понтрягина// Автоматика. 1992. № 6. С. 17-26.

68. *Пацко В.С.* Дифференциальная игра уклонения на плоскости// Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. вып. 4. С. 604-608.

69. *Пацко В.С.* Дифференциальная игра качества второго порядка// Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. вып. 4. С. 596-605.

70. *Пашков А.Г., Терехов С.Д.* Дифференциальные игры сближения двух динамических объектов с третьим// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 3. С. 66-71.

71. *Петров Н.Н.* Теория игр. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1997.

72. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем// Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606-617.

73. *Петров Н.Н.* Доказательство существования значения игры преследования с ограниченным временем// Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 5. С. 784-797.

74. *Петров Н.Н.* Существование значения игры преследования// Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 5. С. 827-839.

75. *Петров Н.Н.* О существовании значения игры преследования// ДАН СССР. 1970. Т. 190. № 6. С. 1289-1291.

76. *Петров Н.Н.* Некоторые экстремальные задачи поиска на графах// Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 5. С. 821-827.

77. *Петров Н.Н.* Преследование невидимого подвижного объекта// Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 11. С. 1563-1565.

78. *Петров Н.Н., Прокопенко В.А.* Об одной задаче преследования группы убегающих// Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724-726.

79. *Петров Н.Н., Петров Н.Никандр.* О дифференциальной игре «казаки-разбойники»// Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366-1374.

80. *Петров Н.Н.* Простое преследование при наличии фазовых ограничений// Деп. в ВИНИТИ 20 марта 1984г. № 1684. 14с.

81. *Петров Н.Н.* Одна оценка в дифференциальной игре со многими убегающими// Вестник Ленинград. ун-та. 1985. № 22. С. 107-109.

82. *Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями// Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. вып. 6. С. 1030-1033.

83. *Петров Н.Н.* Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями// Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22-26.

84. *Петров Н.Н.* Квазилинейные конфликтно-управляемые процессы с дополнительными ограничениями// Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. вып. 6. С. 61-68.

85. *Петров Н.Н.* Об одном классе задач группового преследования с фазовыми ограничениями// Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 42-49.

86. *Петров Н.Н.* Существование значения игры преследования со многими участниками// Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. вып. 4. С. 22-29.

87. *Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями// Математика. Изв. вузов. 1994. № 4(383). С. 24-29.

88. *Петров Н.Н.* Об одной задаче преследования группы убегающих// Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 48-54.

89. *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Л.С.Понтрягина с фазовыми ограничениями// Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. вып. 5. С. 747-754.

90. *Петров Н.Н.* Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 89-95.

91. *Петров Н.Н.* Одна задача уклонения от многих преследователей// Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1. С. 41-43.

92. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ. 1977.

93. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука. 1983.

94. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Динамические игры и их приложения. Л.: ЛГУ. 1982.

95. *Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А.* Колебательные конфликтно-управляемые процессы// Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. вып. 3. С. 3-14.

96. *Питцык М.В., Чикрий А.А.* О задаче группового преследования// Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. вып. 5. С. 730-736.

97. *Питцык М.В.* О методе группового преследования// Математические методы исследования оптимизационных задач. Киев: Изд-во ин-та Кибернетики АН УССР. 1984.

98. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т.2. М.: Наука. 1988.

99. *Понтрягин Л.С.* Линейная дифференциальная игра убегания// Труды математического ин-та АН СССР. 1971. Т. 112. С. 30-63.

100. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх I// ДАН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278-1280.

101. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх II// ДАН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764-766.

102. *Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх// Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 436-445.

103. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1969.

104. *Прокопович П.В., Чикрий А.А.* Одна дифференциальная игра убегания// ДАН УССР. Серия А. 1989. № 1. С. 71-74.

105. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами// Кибернетика. 1976. № 3. С. 145-146.

106. *Пшеничный Б.Н.* О линейных дифференциальных играх// Кибернетика. 1968. № 1. С. 47-53.

107. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка. 1992.

108. *Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С.* К решению задачи простого преследования несколькими управляемыми объектами// Ин-т Кибернетики АН УССР. Препринт 79-47. 1979. С. 3-6.

109. *Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С.* Об одной задаче группового преследования// Кибернетика. 1979. № 6. С. 145-146.

110. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии ограничений// ДАН СССР. 1981. Т. 259. № 4. С. 785-789.

111. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Групповое преследование в дифференциальных играх// Wiss. Z. Jechn. Hochsch. Leipzig. 1982. Т. 6. № 1. С. 13-27.

112. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими участниками// ДАН СССР. 1981. Т. 256. № 3. С. 530-535.

113. *Рихсиев Б.Б.* Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх многих лиц с простым движением// Известия АН УзбССР. Серия физ-мат наук. 1984. № 4. С. 37-39.

114. *Рихсиев Б.Б.* Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент: Фан. 1989.

115. *Рихсиев Б.Б., Ибрагимов Г.И.* Простое преследование в кубе// Изв. АН УзбССР. Серия физ-мат наук. 1990. № 2. С. 42-45.

116. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973.

117. *Савинов В.Б.* Дифференциальная игра преследования одним преследователем нескольких убегающих// Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 1995. Т. 3. С. 147-171.

118. *Сатимов Н.Ю.* Задача преследования и убегания для одного класса линейных дифференциальных игр многих лиц// Прикл. мат. и механика. Ташкент: Изд-во Ташкент. ун-та. 1981. № 670. С. 64-75.

119. *Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш.* О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих// ДАН Узб.ССР. 1983. № 4. С. 3-6.

120. *Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш.* Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих// Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 7. С. 1208-1214.

121. *Сатимов Н.Ю., Азамов А.О., Хайдаров Б.К.* Простое преследование многими объектами одного убегающего// ДАН Узб.ССР. 1981. № 12. С. 3-5.

122. *Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б.* Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан. 2000.

123. *Сатимов Н.Ю.* О задачах избежания взаимных столкновений// ДАН Узб.ССР. 1981. № 2. С. 3-5.

124. *Синицын А.В.* Построение функции цены в игре преследования несколькими объектами// Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. вып. 1. С. 52-57.

125. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981.

126. *Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.* Алгоритм построения стабильного моста в линейной задаче сближения с выпуклой целью// Исследования задач минимаксного управления. Свердловск: Изд УНЦ АН СССР. 1985. С. 82-90.

127. *Ухоботов В.Н.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями общего вида. Челябинск: Изд-во Челябинск. ун-та. 1998.

128. *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 4. С. 29-36.

129. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука. 1978.

130. *Черноусько Ф.Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей// Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. вып. 1. С. 14-24.

131. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Линейная задача преследования несколькими объектами// Кибернетика. 1978. № 3. С. 86-92.

132. *Чикрий А.А.* Линейная задача убегания от многих преследователей// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 4. С. 46-50.

133. *Чикрий А.А.* Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего// Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. вып. 6. С. 906-913.

134. *Чикрий А.А.* Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками// ДАН СССР. 1979. Т. 246. № 6. С. 1306-1309.

135. *Чикрий А.А.* Квазилинейная задача сближения с участием нескольких лиц// Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. вып. 3. С. 451-455.

136. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Квазилинейные конфликтно управляемые процессы с переменной структурой// Проблемы управления и информатики. 1998. № 6. С. 31-41.

137. *Чикрий А.А., Питцык М.В.* Сочетание усилий преследователей с различными динамическими возможностями// ДАН УССР. 1984. А. № 1. С. 73-76.

138. *Чикрий А.А.* О задаче уклонения в линейной дифференциальной игре// Автоматика и телемеханика. 1977. № 9. С. 24-29.

139. *Чикрий А.А.* О задачах убегания при ограниченных фазовых координатах// Кибернетика. 1977. № 4. С. 40-45.

140. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры нескольких лиц// Кибернетика. 1976. № 4. С. 99-101.

141. *Чикрий А.А., Шишкина Н.Б.* О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений// Автоматика и телемеханика. 1985. № 2. С. 59-69.

142. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка. 1992.

143. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями// Mathematical Control Theory. Banach Center Publications. 1985. V.14. С. 81-107.

144. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* Линейная задача убегания при взаимодействии групп управляемых объектов// Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. вып. 4. С. 12-21.

145. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов// Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 998-1004.

146. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов// Кибернетика. 1989. № 5. С. 59-63,78.

147. *Чикрий А.А.* Задача убегания при взаимодействии групп линейных объектов// ДАН СССР. 1993. Т. 333. № 5. С. 591-593.

148. *Чикрий А.А., Калашникова С.Ф.* Преследование управляемым объектом группы убегающих// Кибернетика. 1987. № 4. С. 1-8.

149. *Чхартишвили А.Г.* Об одном геометрическом свойстве следящей области в задаче поиска// Вестник МГУ. Серия 1. 1992. № 3. С. 7-10.

150. *Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В.* О простых играх поиска на бесконечном круглом цилиндре// Математические заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 762-772.

151. *Хайдаров Б.К.* Позиционная l-поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей// Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. вып. 4. С. 574-579.

152. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир. 1970.

153. *Шевченко И.И.* Простейшая модель поочередного преследования// Автоматика и телемеханика. 1982. № 4. С. 38-42.

154. *Шевченко И.И.* Поочередное преследование трех убегающих// Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 70-75.

155. *Шевченко И.И.* О сближении с коалицией// Автоматика и телемеханика, 1986. № 1. С. 47-55.

156. *Фазылов А.З.* К задаче избежания столкновений// Изв. АН УзбССР. Серия физ-мат наук. 1987. № 3. С. 30-36.

157. *Югай Л.П.* Об l-уклонении в линейной дифференциальной игре многих лиц// Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 5. С. 840-845.

158. *Югай Л.П.* Об одном достаточном условии уклонения по направлению// Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1291-1292.

159. *Berkovitz L.D.* Differential game of generalized pursuit and evasion// SIAM J. Contr. and Optimiz. 1986. V. 24. № 3. p. 361-373.

160. *Borowko P., Rzymowski W., Stachura A.* Evasion from many pursuers in the simple case// J. Math. Anal. and Appl. 1988. V. 135. № 1. p. 75-80.

161. *Chikrii A.A.* On a method of pursuit in «trachs». Доп. Нац. АН Укр. 2000. № 6. p. 109-113.

162. *Chikrii A.A.* The problem of avoidance for controlled dynamic objects// Game Theory and Appl. 1997. V. III. p. 7-20.

163. *Chodun W.* Differential games of evasion with many pursuers// J. Math. Anal. and Appl. 1989. V. 142. № 2. p.370-389.

164. *Flynn J.O.* Lion and Mann: the boundary constraint// SIAM. J. Control. 1971. V 11. № 3. p.397-411.

165. *Friedman A.* Differential Games. New York: Wiley Intersci. 1971.

166. *Hajek O.* Pursuit Games. New York: Acad. Press. 1975.

167. *Leitman G., Lin H.S.* Evasion in the plane// Lect. Notes Contr. Inform. Sci. 1978. № 6. p. 255-263.

168. *Melikyan A.A.* Structure of the value function in pursuit-evasion games on the surfaces of revolution// Кибернетика и системный анализ. 2002. № 3. C. 155-162.

169. *Petrov N.N.* Group pursuit with phase restrictions// International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra. 1998. V 7. № 2/3. p.179-187.

170. *Petrov N.N.* About one Pursuit Problem with many Evaders// Game Theory and Applications. 2001. V. VI. p. 82-88.

171. *Rzymowski W.* Method of construction of the evasion strategy for differential game with many evaders// Roszpr. mat. 1986. № 247. 48p.

172. *Vagin D.A., Chirkova L.S., Petrov N.N.* About some problems of group pursuit// Control Applications of Optimization 11th IFAC INTERNATIONAL WORKSHOP, 3-6 July, 2000. Abstracts, S-P. 2000, p. 197-198.

173. *Vagin D.A., Petrov N.N.* On One Problem of Pursuit of a Group of Evaders// International Conference Logic, Game Theory and Social Choice, S-P. 2001, p. 204-205.

174. *Vagin D.A., Petrov N.N.* The Two Problems of Group Pursuit// The Tenth International Symposium of Dynamic Games and Applications. Proceedings, V2, S-P. 2002, p. 691-695.

175. *Yong J.* On differential evasion games// SIAM J. Contr. and Optimiz. 1988. V. 26. № 1. p. 1-22.