УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.934

ЧИРКОВА ЛЮБОВЬ СЕРГЕЕВНА

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УКЛОНЕНИЯ ОТ МНОГИХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
кандидат физико-математических наук,
доцент Н. Н. Петров

Ижевск 2006 г.

Оглавление

Основные обозначения

$\mathbb{R}^n$ – пространство n-мерных вектор-столбцов с евклидовой нормой

$\|x\|$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$

(x, y) – скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$

$\mathrm{Int}A$ – внутренность множества A

$\mathrm{co}A$ – выпуклая оболочка множества A

∂A – граница множества A

$|A|$ – число элементов множества A

S – единичный шар, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$

U_δ — δ-окрестность начала координат, $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < \delta\}$

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел

$\mathbb{N}_q$ – множество номеров, $\mathbb{N}_q = \{1, \ldots, q\}$

Q_m^r – множество номеров, $Q_m^r = \{r+1, \ldots, r+m\}$

$\mathrm{aff}X$ – аффинная оболочка множества X

$\dim X$ – размерность пространства X

$\mathrm{Lin}X$ – несущее подпространство множества X

$\mathrm{ri}X$ – относительная внутренность множества X

$K(\mathbb{R}^n)$ – множество всех конусов из $\mathbb{R}^n$

Введение

Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями. Динамические процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми.

Предлагаемая работа посвящена дифференциальным играм убегания с участием двух групп (преследователей и убегающих). Потребность изучения таких задач возникает при решении ряда прикладных задач механики, экономики, военного дела, радиоэлектроники, биологии и некоторых других областей.

Основополагающий вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли академики Н. Н. Красовский и Л. С. Понтрягин.

К настоящему времени теория дифференциальных игр получила существенное развитие.

В работе [116] Б. Н. Пшеничного рассматривалась задача простого преследования группой преследователей одного убегающего, при условии, что скорости убегающего и преследователей по норме не превосходят единицы. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

Ф. Л. Черноусько в работе [146] рассматривал задачу уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследующих точек, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Был построен способ управления, который обеспечивает уклонение от всех преследователей на конечное расстояние, причем движение уклоняющейся точки остается в фиксированной окрестности заданного движения.

Указанные работы были, по существу, первыми, посвященными задаче группового преследования группой преследователей одного убегающего.

Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх из любых начальных положений на полубесконечном интервале времени впервые была поставлена и решена в линейном случае Л.С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко [108, 109, 112, 113]. Если проводить параллель с задачей Калмана о полной управляемости, то для конфликтно управляемых процессов ее разрешимость означает, что траектория процесса может быть приведена на терминальное множество из любых начальных положений за конечное время при любых заранее оговоренных противодействиях или помехах. В традиционных терминах дифференциальных игр качества это означает, что все фазовое пространство есть область предпочтения преследователя, то есть он выигрывает игру при любых начальных положениях. Существуют достаточные условия [147, 166] разрешимости этой задачи, так называемой глобальной задачи преследования.

На сегодняшний день разработано достаточно много идейно различных методов и маневров уклонения от встречи: например, метод маневра обхода [108, 109, 112, 113] и его модификации [30-33, 74, 75, 118, 119], методы постоянных и переменных направлений [70, 122, 132, 149-154, 160, 163, 164], метод инвариантных подпространств [123, 133, 163], методы, использующие исчисление Микусинского [71, 72, 195], рекурсивные методы [29, 40, 145, 168, 185, 190-192, 202-204] и так далее. Между этими методами, безусловно, существуют глубокие связи, многие из которых до сих пор не выяснены.

В работе [24] Н. Л. Григоренко получены необходимые и достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от нескольких преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением, и множество управлений каждого из игроков – один и тот же выпуклый компакт.

В работе [49] Р. П. Иванов рассмотрел задачу простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий не покидает пределы выпуклого компакта с непустой внутренностью. Было доказано, что если число преследователей меньше размерности множества, то будет уклонение, иначе – поимка и получена оценка времени поимки.

Работа [89] Н. Н. Петрова обобщает результат Р. П. Иванова на случай, когда убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью.

«Мягкая» поимка одного убегающего группой преследователей для инерционных объектов рассматривалась Р. П. Ивановым в работе [47].

Задачи уклонения одного убегающего, обладающего большей маневренностью, от группы преследователей в примере Понтрягина рассматривались ранее Н. Ю. Сатимовым и Б. Б. Рихсиевым в [138]. При условии дискриминации преследователей были получены достаточные условия убегания.

Результаты, полученные в первой и второй главе, а также во втором параграфе третьей главы диссертации, опираются на ранее использованные методы, обзор которых привел А.А. Чикрий в статье [174]. Ниже приведен реферат этой статьи.

Использованные методы и результаты

Рассмотрим нелинейную конфликтно управляемую систему

$$\dot{z} = f(z,u,v),\ z \in \mathbb{R}^n,\ u \in U,\ v \in V, \tag{1}$$

где $f(z,u,v)$ – непрерывная по совокупности аргументов вектор-функция, u и v – управляющие параметры преследователя и убегающего, принадлежащие некоторым компактам U и V из пространства $\mathbb{R}^n$. Вектор скоростей удовлетворяет условию роста

$$\|f(z,u,v)\| \leqslant C(1+\|z\|),\ z \in \mathbb{R}^n,$$

с положительной постоянной C при любых $u \in U$, $v \in V$. Терминальное множество M – линейное подпространство.

Определим стратегии игроков. Поскольку игра (1) рассматривается с позиции убегающего, то определим стратегии убегания, предполагая, что преследователь в качестве управлений выбирает произвольные измеримые функции со значениями из множества U.

Определение 1. Будем говорить, что задана ϵ-стратегия убегающего, если для каждой точки z, $z \in \mathbb{R}^n$, определено число $\epsilon(z)$, $\epsilon(z) > 0$, и функция $v(t,z)$, $t \in [0,\epsilon(z)]$, удовлетворяющая условию $v(t) = v(t,z)$, есть измеримая функция по t, принимающая значения из множества V.

Если функция $v(t,z)$ постоянна для $t \in [0,\epsilon(z)]$, то говорят о кусочно-постоянной ϵ-стратегии.

Определение 2. Будем говорить, что задана ϵ-контрстратегия убегающего, если для каждой точки z, $z \in \mathbb{R}^n$, задано число $\epsilon(z)$, $\epsilon(z) > 0$, и функция $v(t,z,u)$, $t \in [0,\epsilon(z)]$, $u \in U$, удовлетворяющая условию суперпозиционной измеримости: если $u(t)$ – измеримая функция, то $v(t) = v(t, z, u(t))$, измерима и принимает значения из множества V.

Такие определения стратегий использовались во многих работах [29, 30-33, 40, 74, 75, 108, 109, 112, 113, 119, 122, 145, 168, 185, 190-192, 202-204].

Предполагается, что убегающий может выбрать функцию $\epsilon(z)$ такой, что для любого компакта Z из $\mathbb{R}^n$ существует константа ϵ_Z такая, что

$$\epsilon(z) \geqslant \epsilon_Z \text{ для всех } z \in Z.$$

Тем самым обеспечивается отсутствие конечных точек сгущения, то есть

$$\lim_{i\to\infty} t_i = +\infty,$$

где $t_i = t_{i-1} + \epsilon(z_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots$, а $z_i = z(t_i)$, $t_0 = 0$.

В этом случае любая ϵ-стратегия и ϵ-контрстратегия убегающего в паре с произвольной измеримой функцией преследователя определяют траекторию $z(t)$, $z(0) = z_0$, или пучок траекторий системы (1) на интервале $[0, +\infty)$.

Цель преследователя — привести траекторию системы (1) на множество M за конечное время, цель убегающего — прямо противоположна.

Определение 3. Будем говорить, что для конфликтно-управляемого процесса (1) возможно уклонения от встречи, если существует ϵ-стратегия или ϵ-контрстратегия убегающего такая, что при любом управлении преследователя соответствующие траектории $z(t)$, $z(0) = z_0$, не пересекают множество M на полуоси $[0, \infty)$ при любых начальных состояниях z_0, $z_0 \notin M$.

Сформулируем общие достаточные условия уклонения от встречи первого порядка в «грубом» случае. Пусть L – ортогональное дополнение к линейному подпространству M в $\mathbb{R}^n$, W – некоторое подпространство из L. И пусть

π_W – оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на W. Введем последовательность функций $\phi^{(i)}(z,u,v)$ с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned}&\phi^{(i)}(z,u,v) = (\nabla_z \phi^{(i-1)}(z,u,v), f(z,u,v)),\ i = 1,2,\ldots,\\&\phi^{(0)}(z,u,v) = \pi_W z,\end{aligned} \tag{2}$$

где $\nabla_z \phi^{(i)}(z,u,v)$ — матрица первых производных функции $\phi^{(i)}(z,u,v)$ по z. Единичную сферу в W обозначим

$$\Psi_W = \{p \mid p \in W,\ \|p\| = 1\},$$

$$\phi^{(i)}(z,U,V) = \bigcup_{u\in U,\ v\in V} \phi^{(i)}(z,u,v).$$

Рассмотрим условие уклонения от встречи первого порядка, то есть тот случай, когда о возможности уклонения делается вывод по соотношению ресурсов управления игроков в наименьшей из производных от πz вдоль траектории системы (1), которая зависит от параметров управления.

Пусть существует натуральное число k, подпространство W, $W \subset L$, $\dim W \geqslant 2$, и непрерывная функция $l(z) : \mathbb{R}^n \to W$ такие, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Множества $\phi^{(i)}(z,U,V)$, $i = 1,\ldots,k-1$, состоят из единственных точек $\phi^{(i)}(z)$ при всех $z \in \mathbb{R}^n$, причем функции $\phi^{(i)}(z)$ непрерывно дифференцируемы по z.

Это условие содержательно означает, что до некоторого порядка производные от πz не зависят от параметров управления. Оно отражает структуру динамической системы, ее инерционность.

Условие 2. Для всех $z \in M$ справедливо неравенство

$$\min_{p\in\Psi_W} \max_{v\in V} \min_{u\in U} (p, \phi^{(k)}(z,u,v) + l(z)) > 0. \tag{3}$$

Условие 3. Для всех $z \in M$ справедливо неравенство

$$\gamma(z) = \min_{p \in \Psi_W} \min_{u \in U} \max_{v \in V} (p, \phi^{(k)}(z, u, v) + l(z)) > 0. \tag{4}$$

Это неравенство эквивалентно следующему включению для многозначных отображений:

$$l(z) + \gamma(z) \mathrm{co} \Psi_W \subset \bigcap_{u \in U} \mathrm{co} \phi^{(k)}(z, u, V),$$

где симовол со обозначает овыпукление множества.

Две нижеследующие теоремы дают достаточные условия уклонения от встречи в «грубом» случае, когда есть преимущество убегающего на некотором двумерном подпространстве.

Теорема 1. Пусть для нелинейного конфликтно управляемого процесса (1) выполнены условия 1 и 2. Тогда задача об уклонении от встречи разрешима в классе ϵ-стратегий.

Эту теорему можно найти в [168, 203]. При дополнительных предположениях, связывающих размерность подпространства W и число k, достаточные условия уклонения от встречи в классе кусочно-постоянных ϵ-стратегий получены в [70, 132, 149, 164]. Несколько более жесткий вариант условия 2 рассмотрен в [75, 118].

Теорема 2. Пусть для нелинейного конфликтно управляемого процесса (1) выполнены условия 1 и 3. Тогда задача об уклонении от встречи разрешима в классе ϵ-стратегий.

Подавляющее большинство более ранних результатов по нелинейной теории уклонения от встречи [33, 71, 72, 74, 112, 113, 118, 152] содержатся в теореме 2, хотя при этом иногда используется различная методика доказательств. Чаще всего используется маневр обхода Понтрягина-Мищенко или его модификации.

Доказательство теоремы 1 и 2 основано на представлении решения системы (1) в виде

$$\pi_W z(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!}\phi^{(i)}(z_0) + \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\phi^{(k)}(z(\tau),u(\tau),v(\tau))d\tau,$$

которое может быть получено с помощью интегрирования по частям из системы (1) с учетом условия 1 [149].

Теперь сформулируем общие достаточные условия уклонения от встречи первого порядка в «тонком» случае.

Если в «грубом» случае для уклонения от встречи требовалось преимущество убегающего на двумерном подпространстве W (условия 2 и 3), то «тонкий» случай примечателен тем, что преимущества убегающего достаточно только на двух одномерных подпространствах.

Пусть W_1 и W_2 – одномерные пространства, $W_1 \subset L$, $W_2 \subset L$, $W_1 \neq W_2$. Введем последовательность функций аналогично (2):

$$\phi_j^{(i)}(z,u,v) = (\nabla_z \phi_j^{(i-1)}(z,u,v), f(z,u,v)),$$
$$\phi_j^{(0)}(z,u,v) = \pi_{W_j} z,\ i = 1,2,\dots,\ j = 1,2.$$

И пусть существуют натуральные числа k_1, k_2, $k_1 \neq k_2$, и непрерывные функции $l_j(z) : \mathbb{R}^n \to W_j$ такие, что выполнены следующие условия.

Условие 4. Множества $\phi_j^{(i)}(z,U,V)$, $i = 1,\dots,k_j-1$, $j = 1,2$, состоят из единственных точек $\phi_j^{(i)}(z)$ при всех $z \in \mathbb{R}^n$, причем функции $\phi_j^{(i)}(z)$ непрерывно дифференцируемы по z.

Условие 5. Для всех $z \in M$ справедливы неравенства

$$\min_{p\in\Psi_{W_j}} \max_{v\in V} \min_{u\in U}(p, \phi_j^{(k_j)}(z,u,v) + l_j(z)) > 0,\ j = 1,2.$$

Очевидно, эти неравенства эквивалентны следующим:

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U}\phi_j^{(k_j)}(z,u,v) > \min_{v\in V}\max_{u\in U}\phi_j^{(k_j)}(z,u,v),\ j=1,2.$$

Условие 6. Для всех $z\in M$ справедливы неравенства

$$\min_{p\in\Psi_{W_j}}\min_{u\in U}\max_{v\in V}(p,\phi_j^{(k_j)}(z,u,v)+l_j(z))>0,\ j=1,2.$$

Последнее эквивалентно неравенствам:

$$\min_{u\in U}\max_{v\in V}\phi_j^{(k_j)}(z,u,v) > \max_{u\in U}\min_{v\in V}\phi_j^{(k_j)}(z,u,v),\ j=1,2.$$

Теорема 3. Если для системы (1) выполнены условия 4 и 5, то возможно уклонение от встречи в классе ϵ-стратегий.

Данный результат содержится в [75, 118].

Теорема 4. Если для системы (1) выполнены условия 4 и 6, то возможно уклонение от встречи в классе ϵ-контрстратегий.

Последнее утверждение получено в работах П.Б. Гусятникова, а также в [75, 118].

Заметим, что «грубый» случай имеет место, например, в ситуации, когда в определении терминального множества участвуют лишь геометрические координаты объекта. «Тонкому» случаю соответствует уклонения от совпадения и геометрических координат, и скоростей. Этому случаю в дифференциальных играх соответствует термин «мягкая посадка» или «причаливание».

Хотя достаточные условия уклонения от встречи первого порядка, выраженные в теоремах 1-4, и не являются, вообще говоря, необходимыми, их существенное усиление (получение более тонких условий) в эффективно проверяемой форме вряд ли возможно без дополнительных предположений в общем случае. Ниже рассматривается один частный случай, когда для уклонения от встречи достаточно преимущества убегающего лишь на одномерном подпространстве либо преимущество вообще не нужно, а достаточно равенства по ресурсам управления в проекции на некоторое конечное число направлений из подпространства L.

Обозначим через e^{At} фундаментальную матрицу системы $\dot{z} = Az$, где A — квадратная матрица порядка n, и полагаем $\phi(z, u, v) = f(z, u, v) - Az$.

Теорема 5. Пусть существуют квадратная матрица A, одномерное подпространство W из L, непрерывная строго положительная функция $\sigma(z) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ и число $\delta > 0$ такие, что

1) $\pi_W A = A\pi_W$;

2) для $z \in M + \delta \mathrm{co}\Psi_L$ и $\tau \in (0, \sigma(z)]$ справедливо неравенство

$$\min_{p\in\Psi_W} \max_{v\in V} \min_{u\in U} (p, e^{-\tau A}\phi(z, u, v)) > 0, \tag{5}$$

либо неравенство

$$\min_{p\in\Psi_W} \min_{u\in U} \max_{v\in V} (p, e^{-\tau A}\phi(z, u, v)) > 0, \tag{6}$$

причем максимум по v в каждом случае достигается на единственных элементах.

Тогда, если выполнено неравенство (5), то возможно уклонение от встречи в классе позиционных стратегий, а если выполнено неравенство (6), то уклонение возможно в классе позиционных контрстратегий.

Заметим, что позиционные стратегии и контрстратегии понимаются в смысле Н.Н. Красовского [56].

Отдельно рассмотрим квазилинейный случай $(f(z, u, v) = Az + \phi(u, v))$.

Следствие 1. Пусть для квазилинейного конфликтно управляемого процесса (1) существует одномерное подпространство W из L и число $\sigma > 0$ такие, что $\pi_W A = A\pi_W$ и выполнено одно из условий

$$\min_{p\in\Psi_W} \max_{v\in V} \min_{u\in U}(p, e^{-\tau A}\phi(u,v)) > 0$$

или

$$\min_{p\in\Psi_W} \min_{u\in U} \max_{v\in V}(p, e^{-\tau A}\phi(u,v)) > 0$$

для $\tau \in (0, \sigma]$.

Тогда в первом случае уклонение от встречи возможно в классе ϵ-стратегий, во втором — в классе ϵ-контрстратегий.

Заметим, что условие $\pi_W A = A\pi_W$ заведомо выполняется, если M является инвариантным подпространством матрицы A. Последнее имеет место, например, если $M = 0$.

Пусть Ψ^s — набор векторов $(p_1, \ldots, p_s)$, $p_i \in L$, $\|p_i\| = 1$, $s \geqslant l+1$, $l = \dim L$, таких, что их выпуклая оболочка содержит начало координат в качестве внутренней точки. Такой набор векторов Ψ^s называют набором Каратеодори или положительным базисом [88, 116].

Теорема 6. Пусть существуют квадратная матрица A, набор Каратеодори Ψ^s, непрерывная строго положительная функция $\sigma(z) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ и число $\delta > 0$ такие, что выполнены следующие условия:

1) $\pi_L A = A\pi_L$;

2) для $z \in M + \delta \mathrm{co}\Psi_L$ и $\tau \in (0, \sigma(z)]$ справедливо неравенство

$$\min_{i=1,\ldots,s,(p_1,\ldots,p_s)\in\Psi^s} \max_{v\in V} \min_{u\in U}(p_i, e^{-\tau A}\phi(z,u,v)) > 0 \tag{7}$$

либо неравенство

$$\min_{i=1,\dots,s,(p_1,\dots,p_s)\in\Psi^s} \min_{u\in U} \max_{v\in V} (p_i, e^{-\tau A}\phi(z,u,v)) > 0, \tag{8}$$

причем максимум по v в каждом случае достигается на единственных элементах.

Тогда, если выполнено неравенство (7), то возможно уклонение от встречи в классе позиционных стратегий, а если выполнено неравенство (8), то уклонение возможно в классе позиционных контрстратегий.

Следствие 2. Пусть для квазилинейного конфликтно управляемого процесса (1) существует набор Каратеодори Ψ^s и число $\sigma > 0$ такие, что справедливо равенство $\pi_L A = A\pi_L$ и выполнено одно из условий:

$$\min_{i=1,\dots,s,(p_1,\dots,p_s)\in\Psi^s} \max_{v\in V} \min_{u\in U} (p_i, e^{-\tau A}\phi(u,v)) > 0$$

или

$$\min_{i=1,\dots,s,(p_1,\dots,p_s)\in\Psi^s} \min_{u\in U} \max_{v\in V} (p_i, e^{-\tau A}\phi(u,v)) > 0,$$

для $\tau \in [0,\sigma]$.

Тогда в первом случае возможно уклонение от встречи в классе ϵ-стратегий, во втором — в классе ϵ-контрстратегий.

Данные следствия можно найти в [123], на случай группы преследователей они перенесены в [163].

Сформулируем условия разрешимости глобальной задачи уклонения в ситуации, когда сравнение ресурсов управления игроков в наименьшей производной от πz, зависящей от параметров управления, не дает убегающему преимущества, достаточного для уклонения от встречи. Это преимущество выявляется только в некоторой производной более высокого порядка.

Пусть существуют натуральное число k и подпространство W, $W \subset L$, вектора l_i, $i = 1, \dots, k-1$, из W и непрерывная функция $l(z) : \mathbb{R}^n \to W$ такие, что выполнены следующие условия.

Условие 7. Существуют непрерывно дифференцируемые функции $g^{(i)}(z) : \mathbb{R}^n \to W$ и непрерывные по совокупности переменных функции $h^{(i)}(u, v) : U \times V \to W$, $i = 1, \dots, k-1$, такие, что

$$\nabla_z g^{(i-1)}(z) f(z, u, v) = g^{(i)}(z) + h^{(i)}(u, v),\ g^{(0)}(z) = \pi_W z.$$

Условие 8. Система линейных неравенств

$$(p, z) \geqslant 0,$$

$$(p, g^{(i)}(z) - l_i) \geqslant 0,\ i = 1, \dots, k-1,$$

$$-(p, l(z)) \geqslant 0,$$

разрешима относительно $p \in \Psi_W$ при любых $z \in \mathbb{R}^n$.

Введем многозначные отображения $V_i(p)$, $V_i(p, u)$,

$$V_i(p) : \Psi_W \to K(\mathbb{R}^n),\ V_i(p, u) : \Psi_W \times U \to K(\mathbb{R}^n),\ i = 1, \dots, k-1,$$

где $K(\mathbb{R}^n)$ — совокупность непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$, с помощью рекуррентных соотношений:

$$V_i(p) = \{v \in V_{i-1}(p) : \min_{u \in U}(p, h^{(i)}(u, v) + l_i) \geqslant 0\}, V_0(p) = V,$$

$$V_i(p, u) = \{v \in V_{i-1}(p, u) : (p, h^{(i)}(u, v) + l_i) \geqslant 0\}, V_0(p, u) = V.$$

Под непрерывностью многозначных отображений будем понимать непрерывность в метрике Хаусдорфа [58].

Условие 9. Многозначное отображение $V_{k-1}(p)$ непрерывно на множестве Ψ_W и

$$\min_{p\in\Psi_W}\max_{v\in V_{k-1}(p)}\min_{u\in U}(p, \nabla_z g^{(k-1)}(z)f(z,u,v)+l(z))>0$$

для всех $z\in M$.

Условие 10. Многозначное отображение $V_{k-1}(p,u)$ непрерывно на множестве $\Psi_W\times U$ и

$$\min_{p\in\Psi_W}\min_{u\in U}\max_{v\in V_{k-1}(p,u)}(p, \nabla_z g^{(k-1)}(z)f(z,u,v)+l(z))>0$$

для всех $z\in M$.

Теорема 7. Пусть для нелинейного конфликтно управляемого процесса (1) выполнены условия 7 и 8. Тогда, если выполнено условие 9, то глобальная задача уклонения разрешима в классе кусочно-постоянных ϵ-стратегий, если выполнено условие 10 — то в классе ϵ-контрстратегий.

Доказательство следует из метода уклонения по направлению и опирается на представление проекции решения в виде

$$(p,z(t))=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{i!}(p,g^{(i)}(z_0))+\int\limits_0^t\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(t-\tau)^i}{i!}(p,h^{(i+1)}(u(\tau),v(\tau)))d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}(p,\nabla_z g^{(k-1)}(z(\tau))f(z(\tau),u(\tau),v(\tau)))d\tau.$$

Условия уклонения от встречи высших порядков на основе рекурсивного маневра обхода содержатся в [168], другие результаты в этом направлении содержатся в [152, 164].

Сформулируем условия уклонения от встречи с несколькими преследователями. Предположим, что для конфликтно управляемого процесса (1) терминальное множество M представляет собой объединение конечного числа линейных подпространств $M_1, \ldots, M_\nu$ из $\mathbb{R}^n$. Тогда задача об уклонении от встречи с таким терминальным множеством охватывает случай нескольких управляемых объектов в качестве преследователей и одного управляемого объекта в качестве убегающего [29, 30, 32, 40, 70, 151, 153, 163, 164, 185, 190-192, 202-204].

Пусть L_j — ортогональное дополнение к M_j в $\mathbb{R}^n$. И пусть W_j — некоторое подпространство из L_j, а π_j — ортопроектор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в W_j. Образуем последовательность функций $\phi_j^{(i)}(z,u,v)$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$\phi_j^{(i)}(z,u,v) = \nabla_z \phi_j^{(i-1)}(z,u,v) f(z,u,v),\ i = 1,2,\ldots,\ j = 1,\ldots,\nu,$$

$$\phi_j^{(0)}(z,u,v) = \pi_j z.$$

Сформулируем условия уклонения от встречи с группой преследователей первого порядка в «грубом» случае.

Пусть существуют натуральные числа k_j, подпространства W_j, $W_j \subset L_j$, $\dim W_j \geqslant 2$, и непрерывные функции $l_j(z) : \mathbb{R}^n \to W_j$, $j = 1,\ldots,\nu$, такие, что выполнены следующие условия.

Условие 11. Множества $\phi_j^{(i)}(z,U,V)$, $i = 1,\ldots,k_j - 1$, $j = 1,\ldots,\nu$, состоят из единственных точек $\phi_j^{(i)}(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$, причем функции $\phi_j^{(i)}(z)$ непрерывно дифференцируемы по z.

Условие 12. Для всех $z \in M$ справедливы неравенства

$$\min_{p \in \Psi_{W_j}} \max_{v \in V} \min_{u \in U} (p, \phi_j^{(k_j)}(z,u,v) + l_j(z)) > 0,\ j = 1,\ldots,\nu.$$

Условие 13. Для всех $z \in M$ справедливы неравенства

$$\min_{p \in \Psi_{W_j}} \min_{u \in U} \max_{v \in V} (p, \phi_j^{(k_j)}(z,u,v) + l_j(z)) > 0,\ j = 1,\ldots,\nu.$$

Теорема 8. Пусть для процесса (1) выполнены условия 11 и 12. Тогда задача уклонения от встречи с группой преследователей разрешима в классе ϵ-стратегий. Если же выполнены условия 11 и 13 — то в классе ϵ-контрстратегий.

Результаты первой части теоремы содержатся в работах [29, 168, 185, 190-192, 202-204], а утверждение второй части вытекает из методики доказательств, используемых в этих работах. В теореме 8 не требуется «подавляющее» преимущество убегающего над каждым из преследователей, как это требовалось в более ранних работах [70, 132, 151, 153]. Например, для разделенных движений в $\mathbb{R}^n$ и линейных систем частного вида, если области управлений преследователей были шариками единичного радиуса, то у убегающего область управления должна быть шариком радиуса r, причем $r \cdot \omega(n, \nu) > 1$, где

$$\omega(n, \nu) = \min_{\|p_j\|=1} \max_{\|v\|=1} \min_{j=1,\ldots,\nu} |(p_j, v)|, \ p_j, v \in \mathbb{R}^n.$$

Вполне достаточно преимущества, оговоренного ранее, которое выражается условиями 12 и 13.

Аналогично могут быть сформулированы условия уклонения первого порядка в «тонком» случае в задаче с группой преследователей.

Сформулируем условия уклонения от встречи в случае взаимодействия групп управляемых объектов. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим игру, в которой участвуют ν преследователей и μ убегающих, причем движения игроков разделены. Задача группы убегающих состоит в том, что хотя бы один из них должен избежать поимки на интервале $[0, \infty)$ при любых начальных положениях [25, 88, 166, 169, 171, 189]. Закон движения преследователя P_i

имеет вид:

$$\dot{x}_i = Ax_i + u_i,\ u_i \in U_i, i = 1, \ldots, \nu, \tag{9}$$

закон движения убегающего E_j:

$$\dot{y}_j = Ay_j + v_j,\ v_j \in V, j = 1, \ldots, \mu,$$

где A — квадратная матрица порядка n, области управлений U_i, V являются компактами, причем $U_i \subset \mathrm{co}V$ для любого $i = 1, \ldots, \nu$.

Под поимкой понимается точное совпадение координат, то есть преследователь P_i поймал убегающего E_j, если $x_i = y_j$. Допустимыми управлениями игроков являются измеримые функции времени, при этом убегающие используют информацию о текущей позиции $(x_1, \ldots, x_\nu, y_1, \ldots, y_\mu)$.

Определение 4. Будем говорить, что в игре (9) возможно уклонение от встречи (разрешима глобальная задача уклонения), если существует такая стратегия убегающих, что для каждого начального состояния существует хотя бы один индекс $s \in \{1, \ldots, \mu\}$ такой, что $x_i(t) \neq y_s(t)$ для $t \in [0, \infty)$, $i = 1, \ldots, \nu$, при любых управлениях преследователей.

Прежде чем формулировать результаты, введем необходимые в дальнейшем понятия о строго выпуклом компакте и компакте с гладкой границей [166, 169, 189].

Для произвольного компакта $X \in \mathbb{R}^n$ введем опорную функцию

$$C(X, p) = \max_{x \in X}(x, p)$$

и опорное множество

$$U(X, p) = \{x \in X \mid (p, x) = C(X, p)\},\ p \neq 0.$$

Если множество $U(X,p)$ состоит из нескольких точек при любом $p \in \mathbb{R}^n$, то множество X является строго выпуклым. Компакт X назовем компактом с гладкой границей, если

$$U(X,p_1) \cap U(X,p_2) = \emptyset \text{ для любых } p_1, p_2,\ p_1 \neq p_2,\ \|p_1\| = \|p_2\| = 1.$$

Теорема 9. Пусть в игре (9) множество V является строго выпуклым компактом. Тогда если выполнено хотя бы одно из условий:

1) $\nu \leqslant n+1$, $\mu \geqslant 2$,

2) $\nu \leqslant 2n-1$, $\mu \geqslant n$,

то разрешима глобальная задача уклонения.

Теорема 10. Пусть в игре (9) множество V является строго выпуклым компактом с гладкой границей. Тогда если выполнено хотя бы одно из условий:

1) $\nu \leqslant n+2$, $\mu \geqslant 2$,

2) $\nu \leqslant 2n$, $\mu \geqslant n$,

то разрешима глобальная задача уклонения.

Следующее утверждение дает грубую оценку сверху минимального количества убегающих, при котором в игре с ν преследователями разрешима глобальная задача убегания независимо от размерности пространства.

Теорема 11. Пусть в игре (9) множество V является строго выпуклым компактом с гладкой границей. Тогда если

$$\nu \geqslant 2,\ \mu \geqslant (q+1)2^{q+1}+2,\ q = [log_2(\nu-1)],$$

$[\cdot]$ - целая часть числа, то разрешима глобальная задача уклонения.

Теоремы 9-11 есть в [166, 169, 189], в более частных случаях аналогичные утверждения ранее получены в [25, 88].

Наиболее интересен случай простых движений игроков ($A = 0$) с областями управлений $U_i = V = S$ единичными шарами с центром в нуле.

Теорема 12. Пусть в игре (9) $A = 0$, $U_i = V = S$, $i = 1, \ldots, \nu$. Тогда при $\mu = 2$ для разрешимости глобальной задачи уклонения необходимо и достаточно, чтобы $\nu \leqslant 2n$.

Эта теорема доказана совместно с И.Матичным.

Следующая теорема носит частный характер, но не следует из приведенных выше теорем.

Теорема 13. Пусть в игре (9) $A = 0$, $U_i = V = S$, $i = 1, \ldots, \nu$. Тогда если при $\mu = 3$ выполнено хотя бы одно из условий:

1) $\nu \leqslant 6$, $\mu \geqslant 2$,

2) $\nu \leqslant 7$, $\mu \geqslant 3$,

то разрешима глобальная задача уклонения.

Следует особо отметить работу [170], в которой А. А. Чикрий и П. В. Прокопович рассмотрели задачу уклонения одного убегающего от группы преследователей в дифференциальной игре, закон движения каждого из участников в которой имеет вид

$$\ddot{z} = u, \quad \|u\| \leqslant 1.$$

При условии дискриминации преследователей были получены достаточные условия убегания.

Ниже приведен краткий обзор данной работы и список публикаций автора по теме диссертации.

Краткий обзор работы

Работа состоит из трех глав и шести параграфов. Все представленные в ней задачи — задачи уклонения от преследования со многими участниками, имеющими равные динамические возможности. Все дифференциальные игры рассматриваются в пространстве $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$.

Первая глава содержит два параграфа и посвящена нестационарной задаче простого преследования.

Первый параграф носит вспомогательный характер, в нем приведены леммы и определения из выпуклого анализа, которые используются для доказательства теорем и следствий второго параграфа.

Во втором параграфе рассматривается дифференциальная игра $\nu+\mu$ лиц: ν преследователей $P_1, \ldots, P_\nu$ и μ убегающих $E_1, \ldots, E_\mu$. Закон движения преследователя P_i и убегающего E_j имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = B(t)u_i, \;\; \|u_i\| \leqslant 1, \;\; x_i(0) = x_i^0, \;\; i = 1, \ldots, \nu, \\ &\dot{y}_j = B(t)v_j, \;\; \|v_j\| \leqslant 1, \;\; y_j(0) = y_j^0, \;\; j = 1, \ldots, \mu. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $B(t)$ — непрерывная для почти всех $t \geqslant 0$ матричная функция такая, что $\|B(t)\| \leqslant C$ для почти всех $t \geqslant 0$.

Определение 5. Для конфликтно управляемого процесса (10) из начального состояния $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_\nu^0, y_1^0, \ldots, y_\mu^0)$, где $x_i^0, y_j^0 \in \mathbb{R}^n$, на интервале $[0, +\infty)$ разрешима задача убегания, если существуют такие измеримые функции $v_j(t)$, $\|v_j(t)\| \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, \mu$, $t \geqslant 0$, что при любых измеримых функциях $u_i(t)$, $\|u_i(t)\| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, \nu$, $t \geqslant 0$, найдется номер j, при котором выполнены неравенства $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \geqslant 0$ и всех $i = 1, \ldots, \nu$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управления убегающих формируются на основе уже реализовавшейся позиции $z(t) = (x_1(t), \ldots, x_\nu(t), y_1(t), \ldots, y_\mu(t))$, где

$x_i(t), y_j(t) \in \mathbb{R}^n$, а управления преследователей — на основе любой мыслимой информации.

Пусть G — некоторое непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_\nu)$, $y = (y_1, \ldots, y_\mu)$, где $x_i, y_j \in \mathbb{R}^n$, и определим множества индексов

$$\begin{aligned} I(x, G) &= \{i : i \in \{1, \ldots, \nu\}, x_i \in G\}, \\ J(y, G) &= \{j : j \in \{1, \ldots, \mu\}, y_j \in G\}, \end{aligned} \tag{11}$$

причем, если существуют индексы $j_l \in J(y(t), \partial G)$, $l = 1, \ldots, s$, $s > 1$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_s$, такие, что $y_{j_1} = y_{j_2}(t) = \cdots = y_{j_s}(t)$, то полагаем $j_l \notin J(y(t), \partial G)$ для $l = 2, \ldots, s$.

Т е о р е м а 14. Пусть задан конфликтно управляемый процесс (10). Если существует непустое выпуклое множество G такое, что справедливо неравенство $|J(y(0), \partial G)| > |I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)|$, то для конфликтно управляемого процесса (10) из начального состояния z^0 возможно убегание.

С л е д с т в и е 3. Пусть задан конфликтно управляемый процесс (10). Если существует вектор $p \in \partial S$ и индекс $j \in \{1, \ldots, \mu\}$, такие, что $\max\limits_{i \in \{1, \ldots, \nu\}} (p, x_i^0 - y_j^0) \leqslant 0$. Тогда из начального состояния z^0 возможно убегание.

С л е д с т в и е 4. Пусть законы движения преследователя P_i и убегающего E_j имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + u_i, \;\; \|u_i\| \leqslant 1, \;\; x_i(0) = x_i^0, \;\; i = 1, \ldots, \nu, \\ \dot{y}_j &= Ay_j + v_j, \;\; \|v_j\| \leqslant 1, \;\; y_j(0) = y_j^0, \;\; j = 1, \ldots, \mu, \end{aligned} \tag{12}$$

где A — матрица порядка n, и пусть существует такое непустое выпуклое множество G, что $|J(y(0), \partial G)| > |I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)|$. Тогда из начального состояния z^0 в дифференциальной игре (12) для любого $T > 0$ на отрезке $[0, T]$ происходит уклонение от встречи.

Т е о р е м а 15. Пусть задан конфликтно управляемый процесс (10). И пусть существуют множества $G_1, G_2 \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$ такие, что $x_i^0 \in G_1 \cup G_2$ для любого $i \in \{1, \dots, \nu\}$, и

$$|J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))| + |J(y(0), \partial G_2)| > |I(x(0), G_1 \setminus G_2)|, \tag{13}$$

тогда из начального состояния z^0 возможно убегание.

С л е д с т в и е 5. Пусть задан конфликтно управляемый процесс (10). Существуют гиперплоскости

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p, x) = \alpha\},$$

$$H_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p, x) = \alpha + \epsilon,\ \epsilon > 0\},\ p \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

и множества $I_1 \subset \{1, \dots, \nu\}$, $J \subset \{1, \dots, \mu\}$, такие, что

1. $(p, x_i^0) \leqslant \alpha$, $i \in I_1$;

$$(p, x_i^0) \geqslant \alpha + \epsilon,\ i \in I_2 = \{1, \dots, \nu\} \setminus I_1;$$

2. $\alpha < (p, y_j^0) < \alpha + \epsilon$, $j \in J$;
3. $|J| > |I_1|$.

Тогда из начального состояния z^0 возможно убегание.

С л е д с т в и е 6. Пусть существуют множества $G_1, G_2 \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$ такие, что $x_i^0 \in G_1 \cup G_2$, для любого $i \in \{1, \dots, \nu\}$, и выполнено неравенство (13). Тогда для дифференциальной игры (12) из начального состояния z^0 для любого $T > 0$ на отрезке $[0, T]$ происходит уклонение от встречи.

Вторая глава также состоит из двух параграфов и посвящена задачам уклонения от группы инерционных объектов. В первом параграфе рассматривается дифференциальная игра второго порядка в которой участвуют k

преследователей $P_1, \dots, P_k$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей имеет вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_i = u_i, \qquad \|u_i\| \leqslant 1, \\ &x_i(0) = x_i^0, \;\; \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0. \end{aligned} \tag{14}$$

Закон движения убегающего имеет вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{y} = v, \qquad \|v\| \leqslant 1, \\ &y(0) = y^0, \;\; \dot{y}(0) = \dot{y}^0. \end{aligned} \tag{15}$$

Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы множества D вида $D = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, (q_j, y) \leqslant 0, j = 1, \dots, m\}$, где q_j — единичные векторы.

Вместо систем (14), (15) рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_i = u_i - v, \\ &z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \\ &\dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}^0. \end{aligned} \tag{16}$$

Определение 6. Из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \dots, z_k^0, \dot{z}_k^0)$ в дифференциальной игре (16) возможно убегание, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i \in \mathbb{N}_k$, можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $v(t) \in S$, что $\|z_i(t)\| \neq 0$ для всех $i \in \mathbb{N}_k$, $t \geqslant 0$, и $y(t) \in D$ для всех $t \geqslant 0$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации о состоянии $(z_1(s), \dot{z}_1(s), \dots, z_k(s), \dot{z}_k(s))$ при $s \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_k$, в тот же момент времени. Управление преследователей в момент $t \geqslant 0$ формируется на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры (16).

Т е о р е м а 16. Если $k \leqslant n-1$, $\dot{y}^0 \in D$, то в игре (16) из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0)$ возможно убегание.

Во втором параграфе рассматривается дифференциальная игра третьего порядка, в ней участвуют также, как и в первом параграфе, k преследователей $P_1, \ldots, P_k$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dddot{x}_i = u_i, \qquad \|u_i\| \leqslant 1, \\ &x_i(0) = x_i^0, \;\; \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \;\; \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0. \end{aligned} \tag{17}$$

Закон движения убегающего имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dddot{y} = v, \qquad \|v\| \leqslant 1, \\ &y(0) = y^0, \;\; \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \;\; \ddot{y}(0) = \ddot{y}^0. \end{aligned} \tag{18}$$

Вместо систем (17), (18) рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} &\dddot{z}_i = u_i - v, && z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \\ &\dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}^0, && \ddot{z}_i(0) = \ddot{z}_i^0 = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}^0. \end{aligned} \tag{19}$$

Определение 7. Говорят, из начального состояния

$$z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0, \ddot{z}_k^0)$$

в дифференциальной игре (19) возможно убегание, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i \in \mathbb{N}_k$, можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $v(t) \in S$, что $\|z_i(t)\| \neq 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_k$, $t \geqslant 0$. При этом в момент времени $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации о состоянии $(z_1(s), \dot{z}_1(s), \ddot{z}_1(s), \ldots, z_k(s), \dot{z}_k(s), \ddot{z}_k(s))$ при $s \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_k$, в тот же момент времени. Управление преследователей в момент

$t \geqslant 0$ формируется на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры (19).

Т е о р е м а 17. Если $0 \notin \mathrm{co}\{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ddot{z}_i^0\}$, то в игре (19) из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0, \ddot{z}_k^0)$ возможно убегание.

Третья глава состоит из двух параграфов и посвящена также, как и предыдущая, задачам уклонения от группы инерционных объектов, однако, определение убегания используется другое, доказывается уклонения от «мягкой поимки». В первом параграфе рассматривается дифференциальная игра второго порядка, в которой участвуют k преследователей $P_1, \ldots, P_k$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_i + a\dot{x}_i + bx_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \\ &x_i(0) = x_i^0, \\ &\dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0. \end{aligned} \tag{20}$$

Закон движения убегающего E имеет вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{y} + a\dot{y} + by = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \\ &y(0) = y^0, \qquad \dot{y}(0) = \dot{y}^0. \end{aligned} \tag{21}$$

Функции u_i, v — кусочно-постоянные. В уравнениях (20), (21) константы a, b такие, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1, λ_2 — отрицательные вещественные корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. И пусть для определенности $\lambda_1 < \lambda_2$.

Определение 8. Говорят, что в дифференциальной игре (20), (21) возможно убегание, если существует такая кусочно-постоянная функция $v(t)$, $\|v(t)\| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, что при любых кусочно-постоянных функциях $u_i(t)$,

$\|u_i(t)\| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$, $t \geqslant 0$, пара $(x_i(t), y(t))$ для $t \geqslant 0$ не попадает в терминальное множество $M = \{x_i(t) = y(t), \dot{x}_i(t) = \dot{y}(t), t \geqslant 0\}$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации $(y(s), \dot{y}(s), x_1^0, \dot{x}_1^0, \ldots, x_k^0, \dot{x}_k^0)$, $s \leqslant t$, и о значениях $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, в тот же момент времени. Управление преследователей формируется на основе информации о состоянии $(y(t), \dot{y}(t), x_1(t), \dot{x}_1(t), \ldots, x_k(t), \dot{x}_k(t))$ дифференциальной игры (20), (21).

Т е о р е м а 16. В дифференциальной игре (20), (21) возможно убегание.

Во втором параграфе рассматривается дифференциальная игра третьего порядка, в которой участвуют три преследователя P_1, P_2, P_3 и два убегающих E_1, E_2.

Закон движения преследователя P_i имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dddot{x}_i = u_i, \qquad \|u_i\| \leqslant 1, \\ &x_i(0) = x_i^0, \;\; \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \;\; \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0. \end{aligned} \tag{22}$$

Закон движения убегающего E_j имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dddot{y}_j = v_j, \qquad \|v_j\| \leqslant 1, \\ &y_j(0) = y_j^0, \;\; \dot{y}_j(0) = \dot{y}_j^0, \;\; \ddot{y}_j(0) = \ddot{y}_j{}^0. \end{aligned} \tag{23}$$

Вместо систем (22), (23) рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} &\dddot{z}_{ij} = u_i - v_j, \qquad\qquad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \\ &\dot{z}_{ij}(0) = \dot{z}_{ij}^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}_j^0, \;\; \ddot{z}_{ij}(0) = \ddot{z}_{ij}^0 = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}_j^0. \end{aligned} \tag{24}$$

Определение 9. Говорят, из начального состояния

$$z^0 \;=\; (z_{11}^0, \dot{z}_{11}^0, \ddot{z}_{11}^0, \ldots, z_{32}^0, \dot{z}_{32}^0, \ddot{z}_{32}^0)$$

в дифференциальной игре (24) возможно убегание, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i = 1, 2, 3$, можно построить такие измеримые функции $v_j(t) \in S$, $0 \leqslant t < +\infty$, $j = 1, 2$, что найдется номер $s \in \{1, 2\}$ такой, что для всех $i \in \{1, 2, 3\}$, $t \geqslant 0$, справедливо неравенство $\|z_{is}(t)\| + \|\dot{z}_{is}(t)\| > 0$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации о состоянии дифференциальной игры

$$(z_{11}(\tau), \dot{z}_{11}(\tau), \ddot{z}_{11}(\tau), \ldots, z_{32}(\tau), \dot{z}_{32}(\tau), \ddot{z}_{32}(\tau))$$

при $\tau \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, в тот же момент времени. Управление преследователей в момент $t \geqslant 0$ формируется на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры (24).

Т е о р е м а 18. В дифференциальной игре (24) из начального состояния z^0 возможно убегание.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Чиркова Л.С.* Уклонение от группы инерционных объектов в конусе// Известия ИМИ, №2(19), 2000, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 59-72.

2. *Vagin D.A., Chirkova L.S., Petrov N.N.* About some problems of group pursuit// Control Applications of Optimization 11th IFAC INTERNATIONAL WORKSHOP, 3-6 July, 2000. Abstracts, S-P. 2000, p. 197-198.

3. *Чиркова Л.С.* Нестационарная задача простого преследования со многими убегающими// Пятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция: Тезисы докладов. Часть 10, Изд-во Ижевск: УдГУ, 2001, с. 39.

4. *Чиркова Л.С.* Убегание в одной задаче о «мягкой поимке»// Известия ИМИ, №2(30), 2004, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 97-106.

5. *Чиркова Л.С.* Уклонение в задаче о «мягкой поимке»// Шестая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция: Материалы конференции. Часть !!!!2, Ижевск: УдГУ, 2004, с. !!!!77.

6. *Чиркова Л.С.* Уклонение от группы инерционных объектов// Известия ИМИ, №4(34), 2005, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 11-40.

7. *Чиркова Л.С.* Некоторые задачи уклонения от многих преследователей// Известия ИМИ, 2(36), 2006, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 105-108.

8. *Чиркова Л.С.* Уклонение от группы инерционных объектов// Известия ИМИ, 3(37), 2006, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 167-168.

ГЛАВА 1

Нестационарная задача простого преследования

§1.1. Вспомогательные рассуждения

В этом параграфе приведены известные факты и теоремы, которые далее будут использоваться при решении задачи.

Т е о р е м а 1.1. Для того, чтобы выпуклые конусы K_1 и K_2 из пространства $\mathbb{R}^n$ были неотделимы, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{ri}K_1 \cap \mathrm{ri}K_2 \neq \emptyset$ и $\mathrm{Lin}K_1 + \mathrm{Lin}K_2 = \mathbb{R}^n$.

Л е м м а 1.1. Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^n$, а Y — компакт с гладкой границей. Тогда множество $X + Y$ является компактом с гладкой границей.

Л е м м а 1.2. Пусть X — компакт с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, A — невырожденная матрица порядка n. Тогда множество AX является компактом с гладкой границей.

Л е м м а 1.3. Пусть $F(\tau)$, $F : [0, T] \to K(\mathbb{R}^n)$, — измеримое отображение, равномерно ограниченное на интервале $[0, T]$. Тогда $\int\limits_0^T F(\tau)d\tau$ — выпуклый компакт из пространства $\mathbb{R}^n$, причем $\int\limits_0^T F(\tau)d\tau = \int\limits_0^T \mathrm{co}F(\tau)d\tau$.

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор фазового состояния объекта, u — параметр управления, $U \in K(\mathbb{R}^n)$, A — постоянная матрица порядка n.

Если выбрано управление $u(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, в виде измеримой функции времени со значениями из U, то решение системы (1.1) с помощью формулы Коши можно представить в виде

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}u(\tau)d\tau,\ t \geqslant 0,$$

где $x(t_0) = x_0$ — начальное состояние процесса (1.1), e^{At} — фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x} = Ax$. При этом траектория $x(t)$ является абсолютно непрерывной функцией.

Будем обозначать через $X(t; t_0, M_0, U)$ множество достижимости управляемого объекта (1.1) в момент $t \geqslant t_0$ из множества M_0, $M_0 \in K(\mathbb{R}^n)$,

$$X(t; t_0, M_0, U) = e^{A(t-t_0)}M_0 + \int\limits_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Ud\tau.$$

Поскольку $X(t; t_0, M_0, U) = X(t - t_0; 0, M_0, U)$, можем считать, что $t_0 = 0$, и множество достижимости в момент $t \geqslant 0$ обозначим символами $X(t; M_0, U)$. Однако в дальнейшем удобнее пользоваться обозначением $X(t; t_0, M_0, U)$. Заметим, что при $t \geqslant t_0$ выполнено $X(t; t_0, M_0, U) \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.1. Опорной функцией множества U, $U \subset Y$, называется функция $C : Y^* \to \bar{\mathbb{R}}$, определяемая равенством: $C(U; y^*) = \sup\limits_{y \in U} < y^*, y >$.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1.1), соответствующее управлению $u(t)$ и начальному условию $x(t_0) \in M_0$, $M_0 \in K(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что пара $(u(t), x(t))$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_1]$ и условию трансверсальности на множестве M_0, если существует такое решение $\psi(t)$ сопряженной системы $\dot{\psi}(t) = -A^*\psi$ с начальным условием $\psi(t_0) \in \partial S$, что выполнены следующие условия:

1. $(u(t), \psi(t)) = C(U; \psi(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$,
2. $(x(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0; \psi(t_0))$.

Л е м м а 1.4. Пусть $M_0 \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$. Точка $x(t_1)$ принадлежит множеству $\partial X(t_1; t_0, M_0, U)$ при $t_1 > t_0$ тогда и только тогда, когда пара $(u(t), x(t))$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_1]$ и условию трансверсальности на множестве M_0.

Л е м м а 1.5. Пусть $M_0 \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$. Если $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$, каждая из пар $(u_i(t), x_i(t))$, $i = 1, 2$, удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$, и условию трансверсальности на множестве M_0, а кроме того, хотя бы при одном $i = 1, 2$ функция $C(U; \psi_i)$ дифференцируема по $\psi_i(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, то $x_1(t_1) \neq x_2(t_1)$.

Л е м м а 1.6. Пусть $F(t)$, $F : [t_0, t_1] \to K(\mathbb{R}^n)$, — измеримое отображение с гладкой границей, которое удовлетворяет оценке $\|F(t)\| \leqslant k(t)$,где $k(t)$ — интегрируемая на отрезке $[t_0, t_1]$ функция. Тогда $G = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)dt$ является выпуклым компактом с гладкой границей.

Л е м м а 1.7. Если множество U — компакт с гладкой границей, $M_0 \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$, то множество $X(t; t_0, M_0, U)$ при $t > t_0$ является выпуклым компактом с гладкой границей.

§1.2. Нестационарная задача простого преследования

В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\nu+\mu$ лиц: ν преследователей $P_1, \ldots, P_\nu$ и μ убегающих $E_1, \ldots, E_\mu$. Закон движения преследователя P_i и убегающего E_j имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = B(t)u_i, \ \ \|u_i\| \leqslant 1, \ \ x_i(0) = x_i^0, \ \ i = 1, \ldots, \nu, \\ &\dot{y}_j = B(t)v_j, \ \ \|v_j\| \leqslant 1, \ \ y_j(0) = y_j^0, \ \ j = 1, \ldots, \mu. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $B(t)$ — непрерывная для почти всех $t \geqslant 0$ матричная функция такая, что $\|B(t)\| \leqslant C$ для почти всех $t \geqslant 0$.

Определение 2.1. Для конфликтно управляемого процесса (2.1) из начального состояния $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_\nu^0, y_1^0, \ldots, y_\mu^0)$, где $x_i^0, y_j^0 \in \mathbb{R}^n$, на интервале $[0, +\infty)$ разрешима задача убегания, если существуют такие измеримые функции $v_j(t)$, $\|v_j(t)\| \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, \mu$, $t \geqslant 0$, что при любых измеримых функциях $u_i(t)$, $\|u_i(t)\| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, \nu$, $t \geqslant 0$, найдется номер j, при котором выполнены неравенства $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \geqslant 0$ и всех $i = 1, \ldots, \nu$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управления убегающих формируются на основе уже реализовавшейся позиции $z(t) = (x_1(t), \ldots, x_\nu(t), y_1(t), \ldots, y_\mu(t))$, где $x_i(t), y_j(t) \in \mathbb{R}^n$, а управления преследователей — на основе любой мыслимой информации.

Пусть G — некоторое непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_\nu)$, $y = (y_1, \ldots, y_\mu)$, где $x_i, y_j \in \mathbb{R}^n$, и определим множества индексов

$$I(x, G) = \{i : i \in \{1, \ldots, \nu\}, x_i \in G\},$$
$$J(y, G) = \{j : j \in \{1, \ldots, \mu\}, y_j \in G\},$$

причем, если существуют индексы $j_l \in J(y(t), \partial G)$, $l = 1, \ldots, s$, $s > 1$,

$j_1 < j_2 < \cdots < j_s$, такие, что $y_{j_1} = y_{j_2}(t) = \cdots = y_{j_s}(t)$, то полагаем $j_l \notin J(y(t), \partial G)$ для $l = 2, \ldots, s$.

Т е о р е м а 2.1. Пусть задан конфликтно управляемый процесс (2.1). Если существует непустое выпуклое множество G такое, что справедливо неравенство $|J(y(0), \partial G)| > |I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)|$, то для конфликтно управляемого процесса (2.1) из начального состояния z^0 возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве управления убегающего y_j, $j \in \ J(y(0), \partial G)$, выберем такую постоянную функцию $v_j(t)$, $\|v_j(t)\| \leqslant 1$, $t \geqslant \ 0$, чтобы она удовлетворяла условию

$$(v_j(t), \psi_j^0) = \max_{v \in S}(v, \psi_j^0), \ \ t \geqslant 0,$$

где ψ_j^0 — единичный опорный вектор к множеству G в граничной точке y_j^0, $\|\psi_j^0\| = 1$. Управление убегающих y_j, $j \notin J(y(0), \partial G)$, произвольны.

Покажем, что преследователь x_i, $i \in I(x(0), G)$, не может поймать ни одного убегающего. Рассмотрим сначала случай, когда $i \in I(x(0), \mathrm{Int}G)$. Пусть $x_i^0 \in \mathrm{Int}G$. Решение системы (2.1) можно представить в виде:

$$x_i(t) = x_i^0 + \int\limits_0^t B(\tau)u_i(\tau)d\tau, \ \ i = 1, \ldots, \nu, \ \ \ \|u_i(t)\| \leqslant 1,$$
$$y_j(t) = y_j^0 + \int\limits_0^t B(\tau)v_j(\tau)d\tau, \ \ j = 1, \ldots, \mu, \ \ \|v_j(t)\| \leqslant 1,$$

где $\|B(t)\| \leqslant C$. Тогда, соответственно,

$$X(t; 0, G, S) = G + \int\limits_0^t B(\tau)Sd\tau.$$

Леммы 1.4, 1.5 можно применить к этому случаю. Применим лемму 1.4, получим, что при любом управлении преследователя P_i $u_i(\tau)$, $\tau \in [0, t]$,

$\|u_i(t)\| \leqslant 1$, справедливо соотношение $x_i(t) \notin \partial X(t; 0, G, S)$. На самом деле, если $x_i^0 \in \mathrm{Int}G$, тогда не выполнено условие трансверсальности на множестве G; $y_j(t) \in \partial X(t; 0, G, S)$, $t \geqslant 0$, для любого $j \in J(y(0), \partial G)$. Следовательно, при $t \geqslant 0$ $x_i(t) \neq y_j(t)$ для любого $j \in J(y(0), \partial G)$, для любого $i \in I(x(0), \mathrm{Int}G)$.

Теперь покажем, что если в момент времени $t_0 \geqslant 0$ для некоторого индекса $i_1 \in \{1, \ldots, \nu\}$ выполнено $x_{i_1}(t_0) \in \partial X(t_0; 0, G, S)$ и $x_{i_1}(t_0) \neq y_{j_1}(t_0)$, $j_1 \in J(y(0), \partial G)$, то

$$x_{i_1}(t_0 + t_1) \neq y_{j_1}(t_0 + t_1) \text{ при } t_1 \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Предположим противное: пусть существует число $t_1 > 0$, управление $u_{i_1}(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_0 + t_1]$ такие, что $x_{i_1}(t_0 + t_1) = y_{j_1}(t_0 + t_1)$. Тогда, учитывая включение $y_{j_1}(t) \in \partial X(t; 0, G, S)$, $t \geqslant 0$, получим $x_{i_1}(t_0 + t_1) \in \partial X(t_0 + t_1; 0, G, S)$, а также $\partial X(t_0 + t_1; 0, G, S) = \partial X(t_1; t_0, X(t_0; 0, G, S), S)$. Поэтому пара $(u_{i_1}(t), x_{i_1}(t))$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_0 + t_1]$ и условию трансверсальности на множестве $X(t_0; 0, G, S)$ (лемма 1.4). Понятно, что пара $(v_{j_1}(t), y_{j_1}(t))$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_0 + t_1]$ и условию трансверсальности на множестве $X(t_0; 0, G, S)$. В силу леммы 1.5 заключаем, что $x_{i_1}(t_0 + t_1) \neq y_{j_1}(t_0 + t_1)$. Получили противоречие. Отсюда следует, что если $i \in I(x(0), \partial G)$, то $x_i(t) \neq y_j(t)$ для любого $j \in J(y(0), \partial G)$, $t \geqslant 0$. Преследователь x_i, $i \in I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)$, может поймать не более одного убегающего y_j, $j \in J(y(0), \partial G)$.

Действительно, на основании леммы 1.5 заключаем, что

$$y_{j_0}(t) \neq y_{j_1}(t) \quad \text{для любых } j_0, j_1 \in J(y(0), \partial G), \;\; j_0 \neq j_1, \;\; t \geqslant 0, \tag{2.3}$$

(обе пары $(v_{j_0}(t), y_{j_0}(t))$, $(v_{j_1}(t), y_{j_1}(t))$ удовлетворяют условию максимума на отрезке $[0,t]$ и условию трансверсальности на множестве G), то есть одновременная поимка преследователем x_i, $i \in I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)$, двух убегающих y_{j_0}, y_{j_1}, $j_0, j_1 \in J(y(0), \partial G)$, $j_0 \neq j_1$, невозможна. Предположим теперь, что в момент $t_0 > 0$ преследователь x_i, $i \in I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)$, ловит убегающего y_{j_0}, $j_0 \in J(y(0), \partial G)$, то есть $x_i(t_0) = y_{j_0}(t_0)$. Из формул (2.2), (2.3) получаем, что $x_i(t_0 + t_1) \neq y_{j_1}(t_0 + t_1)$ для любого $j_1 \in J(y(0), \partial G) \setminus \{j_0\}$, $t_1 \geqslant 0$. Следовательно, преследователи могут поймать не более $|I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)|$ убегающих y_j, $j \in J(y(0), \partial G)$. Поскольку $|J(y(0), \partial G)| > |I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)|$, то теорема доказана.

С л е д с т в и е 2.1. Пусть задан конфликтно управляемый процесс (2.1). Если существует вектор $p \in \partial S$ и индекс $j \in \{1, \ldots, \mu\}$, такие, что $\max\limits_{i \in \{1,\ldots,\nu\}} (p, x_i^0 - y_j^0) \leqslant 0$. Тогда из начального состояния z^0 возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U(G,p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p,x) = C(G,p)\}$, где (p,x) – скалярное произведение векторов p, x, $C(G,p)$ – значение опорной функции множества G в точке p. В качестве множества G, фигурирующего в теореме 2.1, возьмем такой n-мерный выпуклый многогранник, чтобы точка y_j^0 принадлежала его $(n-1)$-мерной грани $U(G,p)$ и $x_i^0 \in G$, $i = 1, \ldots, \nu$. Применяя теорему 2.1, завершаем доказательство.

С л е д с т в и е 2.2. Пусть законы движения преследователя P_i и убегающего E_j имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_i = Ax_i + u_i, \;\; \|u_i\| \leqslant 1, \;\; x_i(0) = x_i^0, \;\; i = 1, \ldots, \nu, \\
&\dot{y}_j = Ay_j + v_j, \;\; \|v_j\| \leqslant 1, \;\; y_j(0) = y_j^0, \;\; j = 1, \ldots, \mu,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где A — матрица порядка n, и пусть существует такое непустое выпуклое множество G, что $|J(y(0), \partial G)| > |I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G)|$. Тогда из начального состояния z^0 в дифференциальной игре (2.4) для любого $T > 0$ на отрезке

$[0, T]$ происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В дифференциальном уравнении

$$\dot{x}_i = Ax_i + u_i, \;\; i = 1, \ldots, \nu, \tag{2.5}$$

сделаем замену переменных:

$$x_i(t) = e^{A(t-T)} z_i(t), \;\; i = 1, \ldots, \nu. \tag{2.6}$$

Тогда $Ax_i + u_i = Ae^{A(t-T)} z_i(t) + u_i$. Продифференцируем равенство (2.6). Левые части полученного от дифференцирования (2.6) равенства и уравнения (2.5) равны. Соответственно, можно приравнять правые части:

$$Ae^{A(t-T)} z_i(t) + u_i = e^{A(t-T)} \dot{z}_i(t) + Ae^{A(t-T)} z_i(t).$$

Преобразуем полученное равенство, произведем замену: $u_i = e^{A(t-T)} \dot{z}_i(t)$, тогда $e^{A(T-t)} u_i = \dot{z}_i(t)$. Для дифференциального уравнения, описывающего движение преследователя E_j,

$$\dot{y}_j(t) = Ay_j + v_j, \;\; j = 1, \ldots, \mu,$$

сделаем замену переменных

$$y_j(t) = e^{A(t-T)} w_j(t), \;\; j = 1, \ldots, \mu,$$

и произведем аналогичные преобразования. Получим $e^{A(T-t)} v_j = \dot{w}_j(t)$.

Пусть $B(t) = e^{A(T-t)}$. Тогда выполнено

$$\|B(t)\| = \|e^{A(T-t)}\| \leqslant e^{\|A\|(T-t)} \leqslant C, \; t \geqslant 0, \; t \leqslant T.$$

Дифференциальная игра (12) примет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{z}_i = e^{A(T-t)} u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \;\; z_i(0) = e^{AT} x_i^0 = z_i^0, \quad i = 1, \ldots, \nu, \\ &\dot{w}_j = e^{A(T-t)} v_j, \;\; \|v_j\| \leqslant 1, \;\; w_j(0) = e^{AT} y_j^0 = w_j^0, \;\; j = 1, \ldots, \mu. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Кроме того, в формулировке следствия есть условие: существует такое непустое выпуклое множество G, что $|J(y(0), \partial G)| > |I(x(0), \mathbb{R}^n \backslash G)|$. К системам (2.7) и этому условию применим теорему 2.1. Следствие доказано.

Т е о р е м а 2.2. Пусть задан конфликтно управляемый процесс (2.1). И пусть существуют множества $G_1, G_2 \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$ такие, что $x_i^0 \in G_1 \cup G_2$ для любого $i \in \{1, \ldots, \nu\}$, и

$$|J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))| + |J(y(0), \partial G_2)| > |I(x(0), G_1 \setminus G_2)|, \tag{2.8}$$

тогда из начального состояния z^0 возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим управление $v_j(t)$, $t \geqslant 0$, для любого $j \in J(y(0), \partial G_2)$ из условия

$$(v_j(t), \psi_j^0) = \max_{v \in S}(v, \psi_j^0), \quad t \geqslant 0, \tag{2.9}$$

где ψ_j^0 — единичный опорный вектор к множеству G_2 в граничной точке y_j^0. Можно считать, что множество G_2 имеет гладкую границу. В противном случае возьмем достаточно малое число $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялись соотношения

$$X(\delta; 0, y_j^0, S) \cap (X(\delta; 0, G_1, S) \cup X(\delta; 0, G_2, S)) = \emptyset \tag{2.10}$$

при любом $j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))$;

$$X(\delta; 0, G_2, S) \cap X(\delta; 0, x_i^0, S) = \emptyset \tag{2.11}$$

при любом $i \in I(x(0), G_1 \setminus G_2)$, и зададим управление $v_j(t)$ для любого $j \in \{1, \ldots, \mu\} \setminus J(y(0), \partial G_2)$ на полуинтервале $[0, \delta)$ произвольным образом.

Из соотношений (2.10), (2.11), лемм 1.4, 1.5, 1.7, получим, что в момент $t = \delta$ при любых управлениях преследователей

$$|I(x(0), G_1 \setminus G_2)| = |I(x(\delta), X(\delta; 0, G_1, S) \setminus X(\delta; 0, G_2, S))|,$$

$$|J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))| = |J(y(\delta), \mathbb{R}^n \setminus (X(\delta; 0, G_1, S) \cup X(\delta; 0, G_2, S)))|,$$

$$|J(y(0), \partial G_2)| \leqslant |J(y(\delta), \partial X(\delta; 0, G_2, S))|,$$

и что $X(\delta; 0, G_2, S)$ — компакт с гладкой границей.

Для любого номера $i \in I(x(0), \partial G_2)$ определим траекторию $\bar{x}_i(t)$, $t \geqslant 0$, которая исходит из точки x_i^0 и соответствует управлению $\bar{u}_i(t)$, выбираемому из равенства

$$(\bar{u}_i(t), \overline{\psi_i^0}) = \max_{u \in S} (u, \overline{\psi_i^0}),$$

где $\overline{\psi_i^0}$ — единичный опорный вектор к множеству G_2 в граничной точке x_i^0. Так как S — строго выпуклое множество и G_2 — компакт с гладкой границей, то траектории $y_j(t)$, $j \in J(y(0), \partial G_2)$, $\bar{x}_i(t)$, $i \in I(x(0), \partial G_2)$, $t \geqslant 0$, определяются единственным образом. Поэтому, если $x_i(t) \in \partial X(t; 0, G_2, S)$ при некотором управлении $u_i(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, $i \in I(x(0), \partial G_2)$, то $x_i(t) = \bar{x}_i(t)$. Зададим управления убегающих y_j, $j \in \{1, \ldots, \mu\} \setminus [J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2)) \cup J(y(0), \partial G_2)]$, при $t \geqslant 0$ произвольным образом. Доказательство теоремы проведем по индукции относительно числа убегающих, начальные положения которых принадлежат множеству $\mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2)$.

Пусть $|J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))| = l$.

Если $l = 0$, то из условий теоремы следует существование такого выпуклого компакта G_2, что $|J_0(y(0), \partial G_2)| > |I(x(0), \mathbb{R}^n \setminus G_2)|$. Осталось применить теорему 2.1.

Рассмотрим случай $l = 1$. Для произвольного множества $G \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$ определим функцию

$$\phi(x, p, G) = (x, p) - C(G, p), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; p \in \mathbb{R}^n,$$

и многозначное отображение

$$P(x,G) = \{p \in \partial S \mid \phi(x,p,G) \geqslant 0\} \tag{2.12}$$

на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Int} G$. Нетрудно видеть, что если $x \in \mathbb{R}^n \setminus G$, то множество $P(x,G)$ — выпуклый конус.

Управление $v_j(t)$, $t \in [0, t(\psi_j^0))$, $j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))$, определим из условия (2.9), в котором ψ_j^0 — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = 0$, соответствующее начальному условию

$$\psi_j(0) = \psi_j^0, \;\; \psi_j^0 \in P(y_j^0, G_1),$$

причем, вектор ψ_j^0 такой, что справедливы соотношения

$$y_j(t(\psi_j^0), \psi_j^0) \neq \bar{x}_i(t(\psi_j^0)), \;\; i \in I(x(0), \partial G_2), \tag{2.13}$$

$$y_j(t(\psi_j^0), \psi_j^0) \neq y_s(t(\psi_j^0)), \;\; s \in J(y(0), \partial G_2), \tag{2.14}$$

где $t(\psi_j^0)$ — момент времени, в который впервые выполнено соотношение $y_j(t, \psi_j^0) \in X(t; 0, G_2, S)$. Здесь через $y_j(t, \psi_j^0)$, $t \geqslant 0$, обозначена траектория игрока y_j, $j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))$, соответствующая управлению $v_j(t)$, выбираемому из равенства (2.9). Если такой момент $t(\psi_j^0)$ не существует, то полагаем $t(\psi_j^0) = +\infty$. В силу лемм 1.4, 1.5 и условия (2.12) игрок y_j, $j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))$, при так выбранном управлении избежит поимки. Поэтому считаем, что $t(\psi_j^0) < +\infty$.

Покажем, что если $p_j^1, p_j^2 \in P(y_j^0, G_1)$, $p_j^1 \neq p_j^2$, то

$$y_j(t, p_j^1) \neq y_j(t, p_j^2) \tag{2.15}$$

при $t > 0$. Допустим противное: существует такой момент $t > 0$, что выполнено $y_j(t,p_j^1) = y_j(t,p_j^2)$. Тогда $(y_j(t,p_j^1),p_j^1) = (y_j(t,p_j^2),p_j^1)$, и, следовательно,

$$\int\limits_0^t B(t)(v_j^1(s) - v_j^2(s), p_j^1)ds = 0. \tag{2.16}$$

Так как S — это компакт с гладкой границей, то справедливо неравенство $(v_j^1(s), p_j^1(s)) > (v_j^2, p_j^1)$ при любом $s \in [0,t]$. Поэтому интеграл в равенстве (2.16) положителен. Получим противоречие. Тем самым соотношение (2.15) доказано.

Если при некотором $p_j^1 \in P(y_j^0, G_1)$, $j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))$, выполнено равенство

$$y_j(t(p_j^1), p_j^1) = \bar{x}_{i_1}(t(p_j^1)) \tag{2.17}$$

для некоторого $i_1 \in I(x(0), \partial G_2)$, то при любом векторе $p_j^2 \in P(y_j^0, G_1)$, $p_j^1 \neq p_j^2$ (предполагаем, что $t(p_j^2) < +\infty$), справедливо соотношение

$$y_j(t(p_j^2), p_j^2) \neq \bar{x}_{i_1}(t(p_j^2)).$$

Докажем это. Предположим противное:

$$y_j(t(p_j^2), p_j^2) = \bar{x}_{i_1}(t(p_j^2)). \tag{2.18}$$

Из соотношений (2.15), (2.17), (2.18) следует, что $t(p_j^1) \neq t(p_j^2)$ (этот факт доказывается также от противного). Не ограничивая общности, можно считать, что $t(p_j^1) < t(p_j^2)$. Так как

$$\bar{x}_{i_1}(t(p_j^1)) \in \partial X(t(p_j^1); 0, y_j^0, S),$$

$$\bar{x}_{i_1}(t(p_j^2)) \in \partial X(t(p_j^2); 0, y_j^0, S),$$

и выполнено равенство (2.17), то в силу лемм 1.4, 1.5, 1.7 справедливо равенство $\bar{x}_{i_1}(t(p_j^2)) = y_j(t(p_j^2), p_j^1)$, что противоречит соотношению (2.15).

Таким образом, убегающий y_j, $j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))$, зная начальное положение игроков x_i, $i \in I(x(0), \partial G_2)$, y_s, $s \in J(y(0), \partial G_2)$, выбирает в качестве ψ_j^0 такой вектор $p_j \in P(y_j^0, G_1)$, что для соответствующей траектории $y_j(t, p_j^1)$, $t \geqslant 0$, в момент $t = t(p_j)$ справедливы соотношения (2.13), (2.14).

Итак, пусть в момент $t = t(p_j)$ впервые выполнено включение

$$y_j(t) \ \in \ X(t; 0, G_2, S), \ j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2)).$$

Теперь если $x_{i_1}(\tau) \in X(\tau; 0, G_2, S)$, $i_1 \in I(x(0), G_1 \setminus G_2)$, при $\tau \in (0, t(p_j))$, то в силу лемм 1.4, 1.5 преследователь не может поймать на интервале $(\tau, +\infty)$ ни одного убегающего y_s, $s \in J(y(0), \partial G_2)$, то есть на отрезке $[0, t(p_j)]$ каждый преследователь x_i, $i \in I(x(0), G_1 \setminus G_2)$, может поймать не более одного убегающего y_s, $s \in J(y(0), \partial G_2)$.

Учитывая то, что $y_j(t(p_j)) \in \partial X(t(p_j); 0, G_2, S)$ и соотношения (2.8), (2.13), (2.14), получим

$$\begin{aligned} &|J(y(t(p_j)), \partial X(t(p_j); 0, G_2, S))| > \\ &\qquad |I(x(t(p_j)), X(t(p_j); 0, G_1, S) \setminus X(t(p_j); 0, G_2, S))|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Управление $v_j(t)$ при $t \geqslant t(p_j)$ будем выбирать из условия (2.9), взяв в качестве $\psi_j(t)$ решения сопряженной системы $\dot{\psi} = 0$ при $\psi_j(t(p_j)) = \bar{p}_j$, где $\bar{p}_j$ — единичный опорный вектор к множеству $X(t(p_j); 0, G_2, S)$ в граничной точке $y(t(p_j))$. Из неравенства (2.19) получаем, что хотя бы один из убегающих избежит поимки.

Пусть выполнены условия теоремы и при $l \leqslant r$ для конфликтно управляемого процесса (2.1) из начального состояния z^0 разрешима задача убегания. Покажем, что теорема верна и при $l = r + 1$. Зафиксируем некоторое множество $F \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$, такое, что $0 \in \mathrm{Int}F$. Можно считать, что выполнено равенство $J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2)) = \{1, \dots, r+1\}$ и $y_s^0 \in \partial(G_1 + \epsilon_s F)$, $\epsilon_s > 0$, $s = 1, \dots, r+1$, причем $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_{r+1}$. Действительно, для любого $j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))$ найдется число ϵ_j, при котором $y_j^0 \in \partial(G_1 + \epsilon_j F)$.

Предположим, что существуют такие j_1, $j_2 \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))$, $j_1 \neq j_2$, что $\epsilon_{j_1} = \epsilon_{j_2}$. Применим следующий маневр. Выберем число $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялись соотношения (2.10), (2.11).

Пусть p^1, $-p^2$ — единичные векторы, опорные к $G_1 + \epsilon_{j_1} F$ соответственно в точках $y_{j_1}^0$, $y_{j_2}^0$. Управление игрока y_{j_i} на $[0, \delta)$ будем выбирать из равенства $(v_{j_i}(t), \psi_{j_i}(t)) = \max\limits_{v \in S}(v, \psi_{j_i}^0)$, где $\psi_{j_i}^0$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = 0$ с начальными условиями $\psi_{j_i}(0) = \psi_{j_i}^0 = p^i$, $i = 1, 2$. Тогда $y_{j_1}(\delta) \in \partial(X(\delta; 0, G_1, S) + \epsilon_{j_1} B(\delta) F)$, $y_{j_2}(\delta) \in \mathrm{Int}(X(\delta; 0, G_1, S) + \epsilon_1 B(\delta) F)$, $0 < \epsilon_1 < \epsilon_{j_1}$.

Управление игрока y_j для любого $j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2)) \setminus \{j_1, j_2\}$ выберем на $[0, \delta)$ из условия (2.9), в котором $\psi_j(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = 0$ при $\psi_j(0) = p_j$, где p_j — единичный, опорный к множеству $G_1 + \epsilon_j B(\delta) F$ в граничной точке y_j^0, вектор. В момент $t = \delta$ в качестве множеств G_1, G_2, фигурирующих в условии теоремы, возьмем множества $X(\delta; 0, G_1, S)$, $X(\delta; 0, G_2, S)$, в качестве множества F — множество $B(\delta) F$. Если это необходимо, применяем маневр повторно. Затем производим перенумерацию убегающих.

Подведем итог. В момент времени $t = 0$ мы зафиксировали множество $F \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$, $0 \in \mathrm{Int}F$, такое, что $y_s^0 \in \partial(G_1 + \epsilon_s F)$, $s = 1, \dots, r+1$, $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_{r+1} > 0$. До момента $t = t(p_j)$, в который убегающий y_1 впервые попадает на множество $X(t; 0, G_2, S)$, управление v_1 находим из условия максимума

$$(v_1(t), \psi_1(t)) = \max_{v \in S}(v, p_1), \tag{2.20}$$

где $\psi_1(t)$ — решение системы $\dot{\psi} = 0$ при $\psi_1(0) = p_1$, $p_1 \in P(y_1^0, G_1 + \epsilon_2 F)$, причем, для любого $l \in I(x(0), \partial G_2)$, $y_1(t(p_1)) \neq y_l(t(p_1))$. Если такой момент $t(p_1)$ не существует, то полагаем, что $t(p_1) = +\infty$. Понятно, что убегающий y_1 при так выбранном управлении избежит поимки. На интервале $[t(p_1), +\infty)$ управление $v_1(t)$ выбирается из условия (2.20), в котором $\psi_1(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = 0$ при $\psi_1(t(p_1)) = \bar{p}_1$, где $\bar{p}_1$ — единичный опорный к множеству $X(t(p_1); 0, G_2, S)$ в граничной точке $y_1(t(p_1))$ вектор.

Считая управления игроков $y_1, \ldots, y_{j-1}$, $j \leqslant r+1$ заданным, построим управление игрока y_j. Управление $v_j(t)$ при $t \in [0, t(p_j))$ находим из равенства (2.9), в котором $\psi_j(t)$ — решение системы $\dot{\psi} = 0$ при $\psi_j(0) = p_j$, где вектор $p_j \in P(y_j^0, G_1 + \epsilon_{j+1} F)$, если $j < r+1$, $p_{r+1} \in P(y_{r+1}^0, G_1)$, причем,

$$y_j(t(p_j)) \neq \bar{x}_l(t(p_j)),\ l \in I(x(0), \partial G_2),$$

$$y_j(t(p_j)) \neq y_l(t(p_j)),\ l \in J_0(y(0), \partial G_2),$$

$$y_j(t(p_j)) \neq y_l(t(p_j)),\ l = 1, \ldots, j-1,$$

где $t(p_j)$ — момент времени, когда впервые выполнено $y_j(t) \in X(t; 0, G_2, S)$. Предполагаем, что такой момент $t(p_j)$ существует. При $t \geqslant t(p_j)$ управление $v_j(t)$ определим из равенства (2.9), где $\psi_j(t)$ — решение системы $\dot{\psi} = 0$ при $\psi_j(t(p_j)) = p_j^1$, а p_j^1 — единичный опорный к множеству $X(t(p_j); 0, G_2, S)$ в граничной точке $y_j(t(p_j))$ вектор.

Обозначим

$$t^* = \min_{j \in J(y(0), \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2))} t(p_j),$$

$$X_1 = X(t^*; 0, G_1, S) \setminus X(t^*; 0, G_2, S),$$

$$X_2 = X(t^*; 0, G_1, S) \cup X(t^*; 0, G_2, S).$$

Учитывая способ построения управлений, леммы 1.4, 1.5, получим

$$|I(x(t^*), X_1)| < |J(y(t^*), \mathbb{R}^n \setminus X_2)| + |J_0(y(t^*), \partial X(t^*; 0, G_2, S))|,$$

$$|J(y(t^*), \mathbb{R}^n \setminus X_2)| \leqslant r.$$

Согласно предположению индукции, для процесса (2.1) из начального состояния $z(t^*)$ разрешима задача убегания. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 2.3. Пусть задан конфликтно управляемый процесс (2.1). Существуют гиперплоскости

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p, x) = \alpha\},$$

$$H_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p, x) = \alpha + \epsilon,\ \epsilon > 0\},\ p \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

и множества $I_1 \subset \{1, \ldots, \nu\}$, $J \subset \{1, \ldots, \mu\}$, такие, что

1. $(p, x_i^0) \leqslant \alpha$, $i \in I_1$;

$$(p, x_i^0) \geqslant \alpha + \epsilon,\ i \in I_2 = \{1, \ldots, \nu\} \setminus I_1;$$

2. $\alpha < (p, y_j^0) < \alpha + \epsilon$, $j \in J$;
3. $|J| > |I_1|$.

Тогда из начального состояния z^0 возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве множества G_1, фигурирующего в теореме 2.2, возьмем такой n-мерный выпуклый многогранник, что $x_i^0 \in G_1$ для любого $i \in I_1$ и опорное множество $U(G_1, p) \subset H_1$. В качестве множества G_2 также возьмем n-мерный выпуклый многогранник, такой, что $x_i^0 \in G_2$

для любого $i \in I_2$ и опорное множество $U(G_2, -p) \subset H_2$. Применив теорему 2.2, получим требуемый результат.

С л е д с т в и е 2.4. Пусть существуют множества $G_1, G_2 \in \mathrm{co}K(\mathbb{R}^n)$ такие, что $x_i^0 \in G_1 \cup G_2$, для любого $i \in \{1, \ldots, \nu\}$, и выполнено неравенство (2.8). Тогда для дифференциальной игры (2.4) из начального состояния z^0 для любого $T > 0$ на отрезке $[0, T]$ происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим замену, используемую в следствии 2.2, а затем - теорему 2.2, получим необходимый результат.

ГЛАВА 2

Уклонение от группы инерционных объектов

§2.1. Уклонение от группы инерционных объектов в конусе

В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $k+1$ лиц: k преследователей $P_1, \ldots, P_k$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей имеет вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_i = u_i, \qquad \|u_i\| \leqslant 1, \\ &x_i(0) = x_i^0, \;\; \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего имеет вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{y} = v, \qquad \|v\| \leqslant 1, \\ &y(0) = y^0, \;\; \dot{y}(0) = \dot{y}^0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы множества D вида $D = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, (q_j, y) \leqslant 0, j = 1, \ldots, m\}$, где q_j — единичные векторы.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_i = u_i - v, \\ &z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \\ &\dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}^0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Определение 1.1. Из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0)$ в дифференциальной игре (1.3) возможно убегание, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i \in \mathbb{N}_k$, можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $v(t) \in S$, что $\|z_i(t)\| \neq 0$ для всех $i \in \mathbb{N}_k$, $t \geqslant 0$, и $y(t) \in D$ для всех $t \geqslant 0$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации о состоянии $(z_1(s), \dot{z}_1(s), \ldots, z_k(s), \dot{z}_k(s))$ при $s \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_k$, в тот же момент времени. Управление преследователей в момент $t \geqslant 0$ формируется на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры (1.3).

Т е о р е м а 1.1. Если $k \leqslant n-1$, $\dot{y}^0 \in D$, то в игре (1.3) из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0)$ возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $k \leqslant n-1$, то можно считать, что $0 \notin \mathrm{co}\{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \dot{z}_i^0\}$. В противном случае убегающий добивается этого условия за сколь угодно малое время. На основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существует вектор $p \in \partial S$ и число $\epsilon > 0$ такие, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant k} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant -2\epsilon.$$

Введем обозначения:

$$\eta(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} (\|z_i(t)\|),$$
$$\delta = \min\{1, \epsilon, \sqrt{\eta(0)}, \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \sqrt{\|(y^0, q_j)\|}\}.$$

Пусть l_{evader} — луч, выходящий из начала координат и проходящий через точку y_0 — начальное положение убегающего.

Введем убывающие последовательности $\tau_j, \delta_j \in \mathbb{R}$, $\tau_j, \delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что, если $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(z_l(t'+\tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на $[t', t'+\tau_j]$.

Момент времени t_i, в который впервые выполняется равенство $\eta(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_k$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-го сближения.

Полагаем $v(t) = 0$, $t \in [0, +\infty) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [t_i, t_i + \tau_i)$. При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}},\ \delta_1^i = \delta\tau_1^i - (\tau_1^i)^2.$$

Числа τ_i, $i = 1, 2, \ldots$ будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, 2, \ldots$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tau_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+2}} = \frac{\delta}{4} < \xi_1$. Если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_k$ $\|z_l(t')\| = \delta_1^i$, $(z_l(t'), p) > 0$, $(\dot{z}_l(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_l(t' + \tau_1^i), p) = (z_l(t'), p) + \tau_1^i \cdot (\dot{z}_l(t'), p) + \int\limits_{t'}^{t'+\tau_1^i} (t' + \tau_1^i - s) \cdot (u_l(s), p) ds < 0.$$

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$.

Случай 1. Предположим, что

$$(z_l(t_i), \dot{z}_l(t_i)) \neq -\|z_l(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i)\|. \tag{1.4}$$

Управление убегающего на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ полагаем равным $u_l(s)$, если на всем полуинтервале он не встречает ни одного из преследователей. Если на $[t_i, t_i + \tau_i)$ происходят сближения с преследователями P_r, $r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, то $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{\infty} [t_j, t_j + \tau_j)$.

Убегающий будет сближаться с преследователями P_r, $r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, настолько близко и «обходить» их за столь малое время, чтобы для траектории $z_l(t)$ на отрезке $[t_i, t_i + \tau_i]$ при любых управлениях $u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i]$, выполнялись следующие соотношения:

$$(z_l(t_i + \tau), \dot{z}_l(t_i + \tau)) \neq -\|z_l(t_i + \tau)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i + \tau)\|$$

для любого $\tau \in [0, \tau_i]$,

$$\min_{t \in [t_i, t_i + \tau_i]} \|z_l(t)\| > \delta_{i+1}. \tag{1.5}$$

Обозначим через $l_i(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, прямую, проходящую через две точки: $x(\tau) = z_l(t_i) + \dot{z}_l(t_i)\tau$ и $y(\tau) = \dot{z}_l(t_i)$. На основании линейной независимости векторов $z_l(t_i)$ и $\dot{z}_l(t_i)$ и из предположения (1.4) заключаем, что при любом $\tau \geqslant 0$ векторы $x(\tau)$, $y(\tau)$ линейно независимы. Тогда функция $f(\tau)$, $f(\tau) = \min\limits_{x \in l_i(\tau)} \|x\| > 0$.

Функция $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ непрерывна. В момент $t = t_i$ определим число

$$\beta_i = \min\{\delta_i^{i+1}, \min_{\tau \in [0, \tau_i]} f(\tau)\}. \tag{1.6}$$

Если $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i]$, то соответствующая траектория при $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ имеет вид: $z_l^0(t) = x(t - t_i)$, $\dot{z}_l^0(t) = y(t - t_i)$. Тогда

$$\|z_l^0(t)\| \geqslant \beta_i, \ \|\dot{z}_l^0(t)\| \geqslant \beta_i$$

для всех $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$.

Теперь предположим, что на множестве $[t_i, t_i + \tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^q, t^q + \tau^q)$, $q = 1, 2, \ldots$, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \tau^q < \xi_{i+1}, \ \xi_{i+1} = \min\left\{-\tau_i + \sqrt{\tau_i^2 + \frac{\beta_i}{2}}, \ \frac{\beta_i}{4}\right\}. \tag{1.7}$$

Покажем, что если $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} [t^q, t^q + \tau^q)$, управление $v(s)$ на множестве $\bigcup\limits_{q=1}^{\infty} [t^q, t^q + \tau^q)$ произвольно, то соответствующая траектория $z_l^r(t)$, $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ такова, что

$$\|z_l^r(t) - z_l^0(t)\| < \frac{\beta_i}{2}, \tag{1.8}$$

и, кроме того,

$$\|\dot{z}_l^r(t) - \dot{z}_l^0(t)\| \leqslant \frac{\beta_i}{2}, \tag{1.9}$$

для любого управления $u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i]$.

Пусть $r = 1$. Понятно, что $z_l^1(t^1) = z_l^0(t^1)$. В точке $t = t^1 + \tau^1$ справедливо неравенство $\|z_l^1(t^1 + \tau^1) - z_l^0(t^1 + \tau^1)\| \leqslant (\tau^1)^2$. Тогда при $t \in [t^1 + \tau^1, t_i + \tau_i]$ $\|z_l^1(t) - z_l^0(t)\| \leqslant (\tau^1)^2 + 2\tau^1\tau_i$. Поэтому для всех t из $[t_i, t_i + \tau_i]$ выполнено $\|z_l^1(t) - z_l^0(t)\| < (\tau^1)^2 + 2\tau^1\tau_i$.

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться, что для $r \in \mathbb{N}$, $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ $\|z_l^r(t) - z_l^0(t)\| < (\xi_{i+1})^2 + 2\xi_{i+1}\tau_i \leqslant \frac{\beta_i}{2}$. Неравенство (1.9) сразу следует из определения числа ξ_{i+1}.

Покажем теперь, что для любого $\tau \in [0, \tau_i]$

$$(z_l^r(t_i + \tau), \dot{z}_l^r(t_i + \tau)) \neq -\|z_l^r(t_i + \tau)\| \cdot \|\dot{z}_l^r(t_i + \tau)\|. \tag{1.10}$$

Предположим противное: пусть существуют числа $\tau_0 \in [0, \tau_i]$, $b > 0$ такие, что справедливо $z_l^r(t_i + \tau_0) = -b\dot{z}_l^r(t_i + \tau_0)$. В силу неравенств (1.8), (1.9) векторы $z_l^0(t_i + \tau_0)$, $\dot{z}_l^0(t_i + \tau_0)$ представимы в виде $z_l^0(t_i + \tau_0) = z_l^r(t_i + \tau_0) + x$, $\dot{z}_l^0(t_i + \tau_0) = \dot{z}_l^r(t_i + \tau_0) + y$, где $x, y \in \frac{\beta_i S}{2}$.

Пусть $L = \{\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2) | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$. Согласно (1.6) выполнено $\min\limits_{\alpha \in L} \|\alpha_1 \cdot (z_l^r(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2 \cdot (\dot{z}_l^r(t_i + \tau_0) + y)\| \geqslant \beta_i$. С другой стороны, если подставить $\alpha_1^* = \frac{1}{1+b}$, $\alpha_2^* = \frac{b}{1+b}$, то справедливо неравенство $\|\alpha_1^* \cdot (z_l^r(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2^* \cdot (\dot{z}_l^r(t_i + \tau_0) + y)\| < \frac{\beta_i}{2}$. Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (1.10) выполняется при любом τ из $[0, \tau_i]$.

В момент $t = t_i$ по формулам (1.6),(1.7) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+r}\}_{r=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+r}\}_{r=1}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_{i+1}^{i+r} = \frac{\xi_{i+1}}{2^r}$, $\delta_{i+1}^{i+r} = \delta\tau_{i+1}^{i+r} - (\tau_{i+1}^{i+r})^2$. $\tau_{i+1}^{i+1} < \tau_i^{i+1}$, $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tau_{i+1}^{i+r} = \xi_{i+1}$.

Определим
$$\delta_{i+1}=\min\left\{\delta_{i+1}^{i+1},\min_{1\leqslant j\leqslant m}\sqrt{|(q_j,y(t_i+\tau_i))|}\right\},\ \tau_{i+1}=\frac{\delta_{i+1}}{2}.$$
Если на $(t_i,t_i+\tau_i)$ происходят сближения с преследователями P_q, $q\in\mathbb{N}_k\setminus\{l\}$, то убегающий «обходит» их за столь малое время, что $\min\limits_{t\in[t_i,t_i+\tau_i]}\|z_l(t)\|\geqslant\frac{\beta_i}{2}$. Поскольку $\delta_{i+1}<\tau_{i+1}^{i+1}=\frac{\xi_{i+1}}{2}\leqslant\frac{\beta_i}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\beta_i}{8}$, то справедливо неравенство (1.5).

Теперь покажем, что убегающий не выходит за границы множества D. Предположим, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[t_i,t_i+\tau_i]=\emptyset$. Тогда на любом полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ убегающий E «обходит» только одного преследователя. Такое предположение можно сделать в силу неравенств (1.8), (1.9) (β_i мало).

В начальный момент времени $y_0\in D$. Докажем, что убегающий не покидает конуса D, по индукции. Пусть $\overline{k}=1$, $t\in[0,t_1]$. Тогда для любого $j\in\mathbb{N}_m$ выполнено $(y(t),q_j)=(y_0,q_j)+t(\dot{y}_0,q_j)\leqslant-\delta^2+t(\dot{y}_0,q_j)\leqslant 0$. Из определения множества D $(y_0,q_j)<0$, а неравенство $(\dot{y}_0,q_j)<0$ справедливо, так как $\dot{y}_0\in D$ (см. условия теоремы). Пусть $t\in[t_1,t_1+\tau_1]$. Тогда $(y(t),q_j)=-\delta^2+\frac{\tau_1^2}{2}\leqslant-\delta^2+\left(\frac{\delta}{8}\right)^2\frac{1}{2}<0$ для всех $j\in\mathbb{N}_m$.

Индукционное предположение. Пусть при $\overline{k}=i-1$ выполнены следующие неравенства: $(y(t),q_j)<0$, $(\dot{y}(t),q_j)<0$ для всех $t\in[t_{i-2}+\tau_{i-2},t_{i-1}+\tau_{i-1}]$ и $j\in\mathbb{N}_m$. На $[t_{i-2}+\tau_{i-2},t_{i-1}]$ убегающий E движется параллельно лучу l_{evader} и $v(t)=0$. Отсюда $(\dot{y}(t),q_j)<0$ для любого $t\in[t_{i-2}+\tau_{i-2},t_{i-1})$. Функция $g(t)=(\dot{y}(t),q_j)$ непрерывная, как композиция непрерывных отображений. $\tau_{i-1}<\delta_{i-1}<\delta<\epsilon$, тогда $g(t)$ сохраняет свой знак при малых ϵ.

Докажем для $\overline{k}=i$. Пусть $t\in[t_{i-1}+\tau_{i-1},t_i]$. Тогда справедливо неравенство $(y(t),q_j)=(y(t_{i-1}+\tau_{i-1}),q_j)+(t-t_{i-1}-\tau_{i-1})(\dot{y}(t_{i-1}+\tau_{i-1}),q_j)<-\delta_i^2<0$ для любого $j\in\mathbb{N}_m$. Неравенство $(\dot{y}(t_{i-1}+\tau_{i-1}),q_j)<0$ выполнено в силу индукционного предположения, а $(y(t_{i-1}+\tau_{i-1}), q_j) < -\delta_i^2$ по определению числа δ_i и индукционному предположению. Пусть $t \in (t_i, t_i+\tau_i]$. Тогда $(y(t), q_j)$ можно представить через $(y(t_{i-1}+\tau_{i-1}), q_j)$ и $(\dot{y}(t_{i-1}+\tau_{i-1}), q_j)$, из чего следует $(y(t), q_j) \leqslant -\delta_i^2+\frac{\tau_i^2}{2} \leqslant -\delta_i^2+\left(\frac{\delta_i}{2}\right)^2\frac{1}{2} < 0$ для всех $j \in \mathbb{N}_m$. Таким образом, мы доказали, что для любого $\overline{k} = 1, 2, \ldots$ убегающий не покидает конуса D.

Случай 2. Рассмотрим ситуацию, когда условие (1.4) не выполнено, то есть

$$(z_l(t_i), \dot{z}_l(t_i)) = -\|z_l(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i)\| \tag{1.11}$$

для некоторых l, i. Существует число ϵ_i, $\epsilon_i \in (0, \tau_i)$, такое, что при произвольных управлениях $u_r(s)$, $r = 1, \ldots, k$, $r \neq l$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i+\epsilon_i]$, справедливы неравенства $\min\limits_{\tau\in[0,\epsilon_i]} \|z_r(t_i+\tau)\| > \delta_i^{i+1}$ для любого $r \in \mathbb{N}_k \backslash \{l\}$, $(z_l(t_i+\epsilon_i), p) > 0$, и $y(t) \in D$ для любого $t \in [t_i, t_i+\epsilon_i]$. Векторы $z_l(t_i)$, $\dot{z}_l(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_l(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_l(t_i), \psi_i) = 0$.

На полуинтервале $[t_i, t_i+\gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(v(s), \psi_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) > 0. \end{cases}$$

Здесь $t_i+\gamma_i$ — некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i+\epsilon_i]$, в который

$$(z_l(t_i+\gamma_i), \dot{z}_l(t_i+\gamma_i)) \neq -\|z_l(t_i+\gamma_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i+\gamma_i)\|. \tag{1.12}$$

Покажем, что такое число γ_i существует. При $t \geqslant t_i$ введем в рассмотрение функции:

$$f_1^i(t) = (z_l(t), \psi_i) = \int\limits_{t_i}^{t}(t-s)(u_l(s)-v(s), \psi_i)ds,$$
$$f_2^i(t) = (\dot{z}_l(t), \psi_i) = \int\limits_{t_i}^{t}(u_l(s)-v(s), \psi_i)ds.$$

Функции $f_1^i(t),\ \ f_2^i(t)$, $t_i \leqslant t \leqslant t_i + \epsilon_i$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1^i(t) &= f_2^i(t), \\ \dot{f}_2^i(t) &= (u_l(t) - v(t), \psi_i). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Причем $f_1^i(t_i) = f_2^i(t_i) = 0$. Из уравнений (1.13) следует, что $f_2^i(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[t_i, t_i + \epsilon_i]$. Действительно, пусть $f_2^i(t) \equiv 0$, $t \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$. Тогда $f_1^i(t) = const$, а $u_l(t) \equiv v(t)$ для любого $t \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$. Если $f_1^i(t) = const$ на $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, то $f_1^i(t) \equiv 0$. Тогда вектора $z_l(t)$, $\dot{z}_l(t)$ линейно зависимы на всем отрезке $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, а $u_l(t) \equiv v(t)$ на $[t_i, t_i + \epsilon_i]$. Но все это противоречит выбранному управлению: если $(u_l(t) - v(t), \psi_i) = 0$, то $(u_l(t), \psi_i) = (v(t), \psi_i)$ для всех $t \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, а это невозможно.

Множество $G^i = \{t \in (t_i, t_i + \epsilon_i),\ \ f_2^i(t) \neq 0\}$ непусто и открыто, поэтому представимо в виде $G^i = \bigcup\limits_j (\alpha_j^i, \beta_j^i)$, где $\{(\alpha_j^i, \beta_j^i)\}$ — взаимно непересекающаяся не более чем счетная система интервалов. Пусть (α_j^i, β_j^i) — некоторый интервал из этой системы. Тогда $f_2^i(\alpha_j^i) = f_2^i(\beta_j^i) = 0$, $f_2^i(t) \neq 0$ на (α_j^i, β_j^i). Если $f_1^i(\alpha_j^i) \neq 0$, то соотношение (1.12) выполнено при $t_i + \gamma_i = \alpha_j^i$. Если же $f_1^i(\alpha_j^i) = 0$, то $\dot{f}_1^i(\alpha_j^i) \neq 0$ на (α_j^i, β_j^i) и $f_1^i(\beta_j^i) \neq 0$. Следовательно, соотношение (1.2) имеет место при $t_i + \gamma_i = \beta_j^i$. Таким образом, можно добиться того, чтобы векторы $z_l(t_i + \gamma_i)$ и $\dot{z}_l(t_i + \gamma_i)$ стали линейно независимыми. Если же $(z_l(t_i), \dot{z}_l(t_i)) \neq -\|z_l(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Управление убегающего на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ полагаем равным $u_l(s)$. Но из-за возможности сближения с преследователями $P_r,\ r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, управление $v(s)$ примет вид:

$$v(s) = u_l(s),\ \ s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{j=i+1}^{\infty} [t_j, t_j + \tau_j).$$

Убегание на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ доказывается подобно тому, как это делается в первом случае. Для доказательства достаточно вместо момента t_i, где по предположению случая 1 выполняется соотношение (1.4), подставить момент $t_i + \gamma_i$, в котором мы только что добились выполнения такого условия.

Осталось показать, что в данном случае убегающий не покинет множества D. Для доказательства воспользуемся той же цепочкой рассуждений, что и в первом случае. Предположим, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [t_i, t_i + \tau_i] = \emptyset$, тогда на любом полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ убегающий E «обходит» только одного преследователя. Такое предположение можно сделать, так как при маневрах, позволяющих убежать от остальных $k - 1$ преследователей, встречающихся на $[t_i, t_i + \tau_i)$, траектория убегающего будет столь мало отличаться от основной траектории $(v(s) = u_l(s))$, что, учитывая положение луча l_{evader} и определение чисел τ_i, ξ_i и последовательностей $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, не повлияет на то, пересечет убегающий границу множества D или нет.

По условию задачи $y_0 \in D$. Докажем по индукции. Пусть $\overline{k} = 1$, $t \in [0, t_1]$. Тогда $(y(t), q_j) = (y_0, q_j) + t(\dot{y}_0, q_j) \leqslant -\delta^2 + t(\dot{y}_0, q_j) \leqslant 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_m$. Если $t \in (t_1, t_1 + \gamma_1]$, то $(y(t), q_j) < 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_m$ в силу выбора числа ϵ_1. Если $t \in (t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1]$, то $(y(t), q_j) = -\delta^2 + \frac{\tau_1^2}{2} \leqslant -\delta^2 + \left(\frac{\delta}{8}\right)^2 \frac{1}{2} < 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_m$.

Индукционное предположение. Пусть при $\overline{k} = i - 1$ выполнены неравенства: $(y(t), q_j) < 0$, $(\dot{y}(t), q_j) < 0$ для всех $t \in [t_{i-2} + \tau_{i-2}, t_{i-1} + \tau_{i-1}]$ и $j \in \mathbb{N}_m$. Индукционный переход. Докажем для $\overline{k} = i$. Пусть $t \in [t_{i-1} + \tau_{i-1}, t_i]$. Тогда $(y(t), q_j) = (y(t_{i-1} + \tau_{i-1}), q_j) + (t - t_{i-1} - \tau_{i-1})(\dot{y}(t_{i-1} + \tau_{i-1}), q_j) < -\delta_i^2 < 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_m$. Цепочка неравенств справедлива в силу индукционного предположения и определения числа δ_i.

При $t \in (t_i, t_i + \gamma_i]$ неравенство $(y(t), q_j) < 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_m$ выполняется в силу выбора числа ϵ_i. При $t \in (t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ функцию $y(t)$ можно представить через $y(t_{i-1} + \tau_{i-1})$ и $\dot{y}(t_{i-1} + \tau_{i-1})$, из чего следует $(y(t), q_j) \leqslant -\delta_i^2 + \frac{\tau_i^2}{2} \leqslant -\delta_i^2 + \left(\frac{\delta_i}{2}\right)^2 \frac{1}{2} < 0$ для всех $j \in \mathbb{N}_m$. Индукционный переход доказан. Поэтому справедливо неравенство $(y(t), q_j) < 0$ для всех $t \in [0, +\infty)$ и $j \in \mathbb{N}_m$.

Случай 3. Подведем итог. Управление убегающего на полубесконечном интервале времени формируется следующим образом:

$$v(s) = 0,\ s \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, t_i + \tau_i).$$

Если выполнено равенство (1.11), то на $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, как это сделано в случае 2.

Иначе $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{\infty} [t_j, t_j + \tau_j)$, на $[t_j, t_j + \tau_j)$ управление $v(s)$ выбирается так, как показано в случае 1. Теорема доказана.

§2.2. Уклонение от группы инерционных объектов в дифференциальной игре третьего порядка

В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $k+1$ лиц: k преследователей $P_1, \ldots, P_k$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dddot{x}_i = u_i, \qquad \|u_i\| \leqslant 1, \\ &x_i(0) = x_i^0, \;\; \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \;\; \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dddot{y} = v, \qquad \|v\| \leqslant 1, \\ &y(0) = y^0, \;\; \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \;\; \ddot{y}(0) = \ddot{y}^0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вместо систем (2.1), (2.2) рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} &\dddot{z}_i = u_i - v, \qquad\qquad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \\ &\dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}^0, \;\; \ddot{z}_i(0) = \ddot{z}_i^0 = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}^0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Определение 2.1. Говорят, из начального состояния

$$z^0 \; = \; (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0, \ddot{z}_k^0)$$

в дифференциальной игре (2.3) возможно убегание, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i \in \mathbb{N}_k$, можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $v(t) \in S$, что $\|z_i(t)\| \neq 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_k$, $t \geqslant 0$. При этом в момент времени $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации о состоянии $(z_1(s), \dot{z}_1(s), \ddot{z}_1(s), \ldots, z_k(s), \dot{z}_k(s), \ddot{z}_k(s))$ при $s \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_k$, в тот же момент времени. Управление преследователей в момент

$t \geqslant 0$ формируется на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры (2.3).

Т е о р е м а 2.1. Если $0 \notin \mathrm{co}\{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ddot{z}_i^0\}$, то в игре (2.3) из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0, \ddot{z}_k^0)$ возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 \notin \mathrm{co}\{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ddot{z}_i^0\}$.

На основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существуют вектор $p \in \partial S$ и число $\epsilon > 0$ такие, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant k} (\ddot{z}_i^0, p) \leqslant -2\epsilon. \tag{2.4}$$

Введем обозначения:

$$\eta_1(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} (\|z_i(t)\|), \quad \eta_2(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} (\|\dot{z}_i(t)\|),$$
$$\delta = \min\{1, \epsilon, \sqrt{\eta_1(0)}, \sqrt{\eta_2(0)}\}.$$

Случай 1. Пусть $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (z_i^0, p) \leqslant 0$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Зададим управление убегающего следующим образом $v(t) = p$, $t \in [0, +\infty)$. Тогда

$$(z_i(t), p) = (z_i^0, p) + t(\dot{z}_i^0, p) + \tfrac{t^2}{2}(\ddot{z}_i^0, p) + \int\limits_0^t \tfrac{(t-\tau)^3}{3!}(u_i(\tau) - p, p)d\tau < 0.$$

$(z_i^0, p) \leqslant 0$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ в силу предположения, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant -2\epsilon$ из неравенства (2.4), $(u_i(\tau) - p, p) \leqslant 0$ из определения вектора p. В случае 1 убегание доказано.

Случай 2. Предположим, что $(\dot{z}_l^0, p) > 0$ для некоторого $l \in N_k$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_k \setminus \{l\}$. При этом $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (z_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{2^2}, \ \delta_1 = \delta\frac{\tau_1}{2} + \frac{(\tau_1)^3}{2 \cdot 3!}.$$

Тогда справедливы неравенства $\eta_1(0) > \delta_1$, $\eta_2(0) > \delta_1$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, t_1 — либо момент, в который $\|\dot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\dot{z}_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом, а при $t \geqslant t_1 + \tau_1$ опять зададим равным p. При так выбранном управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in N_k \setminus \{l\}$, по существу не влияет на исход игры. Действительно, из определения числа τ_1 и неравенства (2.4) следует, что

$$(z_i(t), p) = (z_i^0, p) + t(\dot{z}_i^0, p) + \frac{t^2}{2}(\ddot{z}_i^0, p) + \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^3}{3!}(u_i(\tau) - p, p)d\tau < 0$$

при любом $t \geqslant 0$ и любых управлениях $u_i(s)$, $s \in [0, +\infty)$, $v(s)$, $s \in [t_1, t_1+\tau_1)$. На основе рассуждений, приведенных в случае 1, заключаем, что $\|z_i(t)\| \neq 0$ при $t \geqslant 0$, $i \in N_k \setminus \{l\}$.

Так как $(\dot{z}_l(t_1), p) > 0$, $(\ddot{z}_l(t_1), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t_1, t_1 + \tau_1]$:

$$(z_l(t_1 + \tau_1), p) = (z_l(t_1), p) + \tau_1(\dot{z}_l(t_1), p) + \frac{\tau_1^2}{2} \cdot (\ddot{z}_l(t_1), p) +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1} \frac{(t_1 + \tau_1 - \tau)^3}{3!}(u_l(\tau) - v(\tau), p)d\tau < \delta_1\tau_1 - \delta\frac{\tau_1^2}{2} - \frac{(t_1 + \tau_1 - t_1)^4}{2 \cdot 3!} = 0.$$

Следовательно, в момент $t = t_1 + \tau_1$ состояние дифференциальной игры (2.3) соответствует рассмотренному выше случаю 1. Таким образом, если по любому управлению $u_l(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, такое, что $\|z_l(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$, то разрешимость задачи убегания из начального состояния z^0 будет доказана.

Предположим, что

$$(z_l(t_1), \dot{z}_l(t_1)) = -\|z_l(t_1)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_1)\|.$$

Векторы $z_l(t_1)$, $\dot{z}_l(t_1)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi \in \partial S$ такой, что $(z_l(t_1), \psi) = (\dot{z}_l(t_1), \psi) = 0$. Пусть $\epsilon_1 \in (0, \tau_1)$ — некоторое число такое, что при произвольных управлениях $u_l(s)$, $v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \epsilon_1]$, справедливо неравенство $(\dot{z}_l(t_1 + \epsilon_1), p) > 0$. Покажем, что если на отрезке $[t_1, t_1 + \epsilon_1]$ управление $v(s)$ выбирать так, чтобы

$$(v(s), \psi) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_l(s), \psi) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi) > 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

то существует такое число $\gamma_1 \in [0, \epsilon_1)$, что

$$(z_l(t_1 + \gamma_1), \dot{z}_l(t_1 + \gamma_1)) \neq -\|z_l(t_1 + \gamma_1)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_1 + \gamma_1)\|. \tag{2.6}$$

При $t \geqslant t_1$ введем в рассмотрение функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и

$$f_3(t) = (\ddot{z}_l(t), \psi) = \int_{t_1}^{t} (u_l(s) - v(s), \psi) ds.$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \epsilon_1$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{f}_1(t) = f_2(t), \quad \dot{f}_2(t) = f_3(t), \\ \dot{f}_3(t) = (u_l(t) - v(t), \psi). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Причем $f_1(t_1) = f_2(t_1) = f_3(t_1) = 0$. Из уравнений (2.7) следует, что $f_3(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[t_1, t_1 + \epsilon_1]$. Множество $G = \{t \in (t_1, t_1 + \epsilon_1)\ f_3(t) \neq 0\}$ непусто и открыто, поэтому представимо в виде $G = \bigcup\limits_j (\alpha_j, \beta_j)$, где $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ — взаимно непересекающаяся не более чем счетная система интервалов. Пусть (α_j, β_j) — некоторый интервал из этой системы. Тогда на (α_j, β_j) выполнено равенство $f_3(\alpha_j) = f_3(\beta_j) = 0$, $f_3(t) \neq 0$. Если $f_2(\alpha_j) \neq 0$, то $\dot{f}_2(t) = f_3(t) \neq 0$ (в силу определения управления v) на (α_j, β_j) и $f_2(\beta_j) \neq 0$.

Следовательно, соотношение (2.6) выполнено при $t_1 + \gamma_1 = \beta_j$.

Если $(z_l(t_1), \dot{z}_l(t_1)) \neq -\|z_l(t_1)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_1)\|$, то полагаем $\gamma_1 = 0$.

Итак, управление $v(s)$ убегающего E на $[t_1, t_1 + \gamma_1)$ выбираем в соответствии с правилом (2.5) и в момент $t_1 + \gamma_1$ выполнено (2.6). Далее полагаем $v(s) = u_l(s)$ при $s \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1)$. Тогда

$$z_l(t) = z_l(t_1 + \gamma_1) + \int\limits_0^{t - t_1 - \gamma_1} \dot{z}_l(t_1 + \gamma_1) ds.$$

при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_1$, следовательно, $\|z_l(t)\| \neq 0$.

Таким образом, по любой измеримой функции $u_l(s) \in S$, можно построить такую измеримую функцию $v(s) \in S$, что $\|z_l(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$. Возможность убегания в случае 2 доказана.

Случай 3. Предположим, что $(z_l^0, p) > 0$ для некоторого $l \in N_k$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_k \setminus \{l\}$. При этом $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{2^2},\ \delta_1 = \delta \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{(\tau_1)^4}{2 \cdot 3!}.$$

Тогда справедливы неравенства $\eta_1(0) > \delta_1$, $\eta_2(0) > \delta_1$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом, а при $t \geqslant t_1 + \tau_1$ опять зададим равным p. При так выбранном управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in N_k \setminus \{l\}$, по существу не влияет на исход игры. Это показано в случае 2.

Так как $(z_l(t_1), p) > 0$, $(\dot{z}_l(t_1), p) < 0$, то при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t_1, t_1 + \tau_1]$ справедливо неравенство

$$(z_l(t_1+\tau_1),p)=(z_l(t_1),p)+\tau_1(\dot z_l(t_1),p)+\frac{\tau_1^2}{2}(\ddot z_l(t_1),p)+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1}\frac{(t_1+\tau_1-\tau)^3}{3!}(u_l(\tau)-v(\tau),p)d\tau<\delta_1-\delta\cdot\frac{\tau_1^2}{2}-\frac{\tau_1^4}{2\cdot 3!}=0.$$

Следовательно, в момент $t=t_1+\tau_1$ состояние дифференциальной игры (2.3) соответствует рассмотренному выше случаю 1. Таким образом, если по любому управлению $u_l(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\tau_1)$, такое, что $\|z_l(t)\|\neq 0$ при $t\in[t_1,t_1+\tau_1]$, то разрешимость задачи убегания из начального состояния z^0 будет доказана.

Построим управление $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\tau_1)$, так же, как в случае 2. Все рассуждения при построении управления убегающего E в данном случае аналогичны.

Случай 4а. Предположим, что $(z_l^0,p)>0$ для некоторого $l\in N_k$ и $(z_i^0,p)\leqslant 0$ для любого $i\in N_k\setminus\{l\}$. При этом $(\dot z_j^0,p)>0$ для некоторого $j\in N_k\setminus\{l\}$ и $(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$ для любого $i\in N_k\setminus\{j\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1=\frac{\delta}{2^2},\ \delta_1=\delta\frac{\tau_1^2}{2}+\frac{(\tau_1)^4}{2\cdot 3!},\tau_2=\frac{\delta}{2^4},\ \delta_2=\delta\frac{\tau_1}{2}+\frac{(\tau_1)^3}{2\cdot 3!}.$$

Справедливы неравенства $\eta_{1,2}(0)>\delta_1$, $\eta_{1,2}(0)>\delta_2$.

Полагаем $v(t)=p$, $t\in[0,t_1)$, где t_1 — либо момент, в который $\|z_l(t_1)\|=\delta_1$ и $(z_l(t_1),p)>0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1<+\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1,t_1+\tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_j. Если на полуинтервале $[t_1,t_1+\tau_1)$ не выполнено равенство $\|\dot z_j(t)\|=\delta_2$, то управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3. Затем полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, здесь t_2 — момент, в который выполнено равенство $\|\dot{z}_j(t_2)\| = \delta_2$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, что и в случае 2. Только вместо δ_1 нужно взять δ_2. Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$.

Рассмотрим ситуацию, когда сближение с j-тым преследователем происходит раньше, чем с l-тым. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — либо момент, в который $\|\dot{z}_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_l. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|z_l(t)\| = \delta_1$, то управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 2. Затем полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено равенство $\|z_l(t_2)\| = \delta_1$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, что и в случае 3. Только вместо δ_1 нужно взять δ_2. Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$.

Пусть $t_2 \in (t_1, t_1 + \tau_1)$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — либо момент, в который $\|z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Если $t_1 < +\infty$, тогда на $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_j. На полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3, до тех пор, пока $s < t_2$, здесь t_2 — момент, в который выполнено равенство $\|\dot{z}_j(t_2)\| = \delta_3$, $t_2 < +\infty$ и $(\dot{z}_j(t_2), p) > 0$. Управление v после того, как настал момент t_2 нужно выбирать таким же образом, что и в случае 2. Только вместо δ_1 нужно взять δ_3, $\delta_3 = \delta\frac{\tau_2}{2} + \frac{{\tau_2}^3}{2\cdot 3!}$. Далее, когда встречи с j-м преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 3, что позволит избежать поимки l-тым преследователем. Затем $v(t)$ полагаем равным p.

Если j и l поменяем местами, то все маневры по обходу j-того преследователя нужно делать сначала в соответствии со случаем 2. Затем за период τ_2 нужно «обойти» l-того преследователя. Для этого надо поступать в соответствии со случаем 3, но вместо δ_1 взять $\delta_4 = \delta\frac{{\tau_2}^2}{2} + \frac{{\tau_2}^4}{2\cdot 3!}$. А после того, как маневр с l-преследователем будет завершен, выбирать управление как в случае 3. Затем $v(t)$ полагаем равным p.

Покажем маневр уклонения в случае $t_1 = t_2$. Выберем сначала $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_l(t_1), p) > 0$. На полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3, до тех пор, пока не наступит момент t_2', такой, что $\|\dot{z}_j(t_2')\| = \delta_5$. Управление v после того, как настал момент t_2' нужно выбирать так же, как в случае 2. Только вместо δ_1 нужно взять δ_5, $\delta_5 = \delta \cdot \frac{\tau_2'}{2} + \frac{\tau_2'^3}{2\cdot 3!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau_2' = \frac{\tau_2}{4}$. Далее, когда встречи с j-м преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 3, что позволит избежать поимки l-тым преследователем. Затем $v(t)$ полагаем равным p.

Остальные преследователи, кроме l-того и j-того, при так выбранном управлении не влияют на исход игры.

Случай 4б. Начальные условия здесь такие же, что и в предыдущем случае, только $l = j$. Пусть вначале управление $v(t) = p$, $t < t_1 = t_2$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{2^2},\ \delta_1 = \frac{1}{2}(\delta\frac{\tau_1^2}{2} + \frac{(\tau_1)^4}{2\cdot 3!}),\ \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta\frac{\tau_1}{2} + \frac{(\tau_1)^3}{2\cdot 3!}).$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ выполнено

$$(z_l(t_1+\tau_1),p)=(z_l(t_1),p)+\tau_1(\dot z_l(t_1),p)+\frac{\tau_1^2}{2}(\ddot z_l(t_1),p)+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1}\frac{(t_1+\tau_1-\tau)^3}{3!}(u_l(\tau)-v(\tau),p)d\tau<\delta_1+\delta_2\tau_1-\delta\frac{\tau_1^2}{2}-2\frac{\tau_1^4}{4!}=$$
$$=\frac{1}{2}(\delta\frac{\tau_1^2}{2}+\frac{\tau_1^4}{2\cdot 3!}+(\delta\frac{\tau_1^2}{2}+\frac{\tau_1^3}{2\cdot 3!})\tau_1)-\delta\frac{\tau_1^2}{2}-\frac{\tau_1^4}{2\cdot 3!}=0.$$

В случае $t_1\neq t_2$ применим маневр, описанный в случае 2 или 3, в зависимости от того, какой момент наступит раньше, t_1 или t_2. Доказательство убегания здесь будет такое же, как в случае 4a.

При так выбранном управлении преследователь P_i, $i\in N_k\setminus\{l\}$, по существу не влияет на исход игры. Это показано в случае 2.

Для упрощения записи и обобщения определений δ_i^j далее введем функции:

$$\Delta_1(\tau)=\delta\cdot\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^4}{2\cdot 3!},\quad \Delta_2(\tau)=\delta\cdot\frac{\tau}{2}+\frac{\tau^3}{2\cdot 3!}.$$

Случай 5. Пусть $(z_i^0,p)>0$ для некоторого $i\in N_r$, $1<r\leqslant k$ и $(z_i^0,p)\leqslant 0$ для любого $i\in N_k\setminus N_r$. При этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j=1,\ldots,q$, $q\leqslant r$, что $\tau_j>\tau_{j+1}$, $\delta_j>\delta_{j+1}$, $j=1,\ldots,q-1$, причем, если в момент $t'>0$ для некоторого $l\in N_r$ выполнено $\|z_l(t')\|=\delta_j$, $(z_l(t'),p)>0$, то $(z_l(t'+\tau_j),p)\ \leqslant 0$, при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_j]$.

Момент времени t_i, $t_i>0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_1(t)=\delta_i$ и существует номер $l\in N_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\|=\delta_i$, $(z_l(t_i),p)>0$, назовем моментом i-того сближения.

Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено равенство $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и неравенство $(z_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Полагаем

$$v(t) = p,\ t \in [0, +\infty)\ \setminus\ \bigcup_{i=1}^{q}[t_i, t_i + \tau_i).$$

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \quad \delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i).$$

Числа $\tau_i,\ i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i,\ \ i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 = \sum_{i=1}^{q}\Big(\frac{\delta \cdot (\tau_1^i)^2}{2} + \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!}\Big) < \frac{\delta^3}{8} + \frac{\delta^4}{192}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, k$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{q}[t_i, t_i + \tau_i))$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, k$, следовательно, сближение с преследователем P_i, $i \in N_k \setminus N_r$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q = k$, то есть сближение наступает с каждым преследователем. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_k$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ выполнено $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} = 0$.

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого осуществим маневр «обхода» преследователей $P_i, \ldots, P_k$.

Допустим, что $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) = -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$. Очевидно, существует число $0 < \epsilon_i < \tau_i$ такое, что при произвольных $u_l(s)$, $l = i, \ldots, n$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, справедливы неравенства $\min\limits_{\tau \in [0, \epsilon_i]} \|z_l(t_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1}$ для всех $l \in N_k \setminus N_r$, $(z_i(t_i + \epsilon_i), p) > 0$. Векторы $z_i(t_i)$, $\dot{z}_i(t)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_i(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_i(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(v(s), \psi_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) > 0. \end{cases}$$

Здесь $t_i + \gamma_i$ — некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, в который выполнено неравенство $(z_i(t_i + \gamma_i), \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)) \neq -\|z_i(t_i + \gamma_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)\|$. Если же $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) \neq -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако если $i < k$, то на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ возможны сближения с преследователями P_l, $l = i+1, \ldots, k$. Поэтому

$$v(s) = u_l(s), \;\; s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{j=i+1}^{k} [t_j, t_j + \tau_j),$$

если $i < k$, и $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, если $i = k$.

Предположим, что $i < k$ и $t_l \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, $l = i+1, \ldots, k$. Убегающий будет сближаться с преследователями P_l, $l = i+1, \ldots, k$, настолько близко и «обходить» их за столь малое время, чтобы для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, выполнялись следующие соотношения:

$$(z_i(t_i+\tau), \dot{z}_i(t_i+\tau)) \neq -\|z_i(t_i+\tau)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i+\tau)\|$$

для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$,

$$\min_{t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]} \|z_i(t)\| > \delta_{i+1}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что сближение убегающего с каждым преследователем может наступать не более одного раза.

Обозначим через $H_i(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, параболу, заданную параметрически

$$x(\tau) = z_i(t_i+\gamma_i) + \dot{z}_i(t_i+\gamma_i)\tau + \ddot{z}_i(t_i+\gamma_i)\frac{\tau^2}{2},$$

$$y(\tau) = \dot{z}_i(t_i+\gamma_i) + \ddot{z}_i(t_i+\gamma_i)\tau.$$

Можно считать, что функция $f(\tau) = \min\limits_{x\in H_i(\tau)} \|x\| > 0$.

Функция $f(\tau) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ непрерывна. В момент $t = t_i + \gamma_i$ определим число

$$\beta_i = \min\{\delta_i^{i+1}, \min_{\tau\in[0,\tau_i]} f(\tau)\}. \tag{2.9}$$

Если $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, то соответствующая траектория при $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ задается как $z_i^0(t) = x(t-t_i-\gamma_i)$, $\dot{z}_i^0(t) = y(t-t_i-\gamma_i)$. Для любого $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ справедливы неравенства

$$\|z_l^0(t)\| \geqslant \beta_i,\ \|\dot{z}_l^0(t)\| \geqslant \beta_i. \tag{2.10}$$

Теперь предположим, что на множестве $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^r, t^r + \tau^r)$, $r = 1, 2, \ldots$, что

$$
\begin{gathered}
\sum_{r=1}^{\infty} \tau^r < \xi_{i+1}, \\
\Lambda_i = \left(\tfrac{\tau_i^3}{27} + \tfrac{\beta_i}{4} + \sqrt{\tfrac{\tau_i^3 \beta_i}{108} + \tfrac{(\beta_i)^2}{16}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\
\Omega_i = \left(\tfrac{\tau_i^3}{27} + \tfrac{\beta_i}{4} - \sqrt{\tfrac{\tau_i^3 \beta_i}{108} + \tfrac{(\beta_i)^2}{16}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\
\xi_{i+1} = \min\left\{\Lambda_i + \Omega_i + \tfrac{2\tau_i}{3},\ -\tau_i + \sqrt{\tau_i^2 + \tfrac{\beta_i}{2}},\ \tfrac{\beta_i}{4}\right\}.
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Далее покажем, что если управление $v(s)$ задано так:

$$
v(s) = u_l(s),\ s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{r=1}^{\infty} [t^r, t^r + \ \tau^r),
$$

а на множестве $\bigcup\limits_{r=1}^{\infty} [t^r, t^r + \tau^r)$ управление убегающего произвольно, то соответствующая траектория $z_i^l(t)$, $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ такова, что

$$
\|z_i^l(t) - z_i^0(t)\| < \frac{\beta_i}{2}, \tag{2.12}
$$

и, кроме того,

$$
\|\dot{z}_i^l(t) - \dot{z}_i^0(t)\| \leqslant \frac{\beta_i}{2}, \tag{2.13}
$$

для любого управления $u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$.

Пусть $l = 1$. Понятно, что $z_i^1(t^1) = z_i^0(t^1)$. В точке $t = t^1 + \tau^1$ выполняется $\|z_i^1(t^1 + \tau^1) - z_i^0(t^1 + \tau^1)\| \leqslant (\tau^1)^3$. Тогда при $t \in [t^1 + \tau^1, t_i + \tau_i]$ выполнено $\|z_i^1(t) - z_i^0(t)\| \leqslant (\tau^1)^3 + 2(\tau^1)^2 \tau_i + \tau^1 \tau_i^2$. Поэтому для всех t из $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ справедливо неравенство

$$
\|z_i^1(t) - z_i^0(t)\| < (\tau^1)^3 + 2(\tau^1)^2 \tau_i + \tau^1 \tau_i^2.
$$

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться, что для натурального l, $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, справедливо неравенство

$$
\|z_i^l(t) - z_i^0(t)\| < (\xi_{i+1})^3 + 2\xi_{i+1}^2 \tau_i + \xi_{i+1}(\tau_i)^2 \leqslant \frac{\beta_i}{2}.
$$

Таким образом, неравенство (2.12) доказано. Неравенство (2.13) сразу следует из определения числа ξ_{i+1}.

Покажем теперь, что для всех $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$

$$(z_i^l(t_i+\tau), \dot{z}_i^l(t_i+\tau)) \neq -\|z_i^l(t_i+\tau)\| \cdot \|\dot{z}_i^l(t_i+\tau)\|.$$

Предположим противное: пусть существуют $\tau_0 \in [\gamma_i, \tau_i]$, $q > 0$ такие, что $z_i^l(t_i+\tau_0) = -q\dot{z}_i^l(t_i+\tau_0)$. В силу неравенств (2.12), (2.13) векторы $z_i^0(t_i+\tau_0)$, $\dot{z}_i^0(t_i+\tau_0)$ представимы в виде

$$z_i^0(t_i+\tau_0) = z_i^l(t_i+\tau_0) + x,\ \dot{z}_i^0(t_i+\tau_0) = \dot{z}_i^l(t_i+\tau_0) + y,$$

где $x, y \in \frac{\beta_i \cdot S}{2}$.

Пусть $L = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2),\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}^1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$. Согласно (2.9),

$$\min_{\alpha \in L} \|\alpha_1 \cdot (z_i^l(t_i+\tau_0) + x) + \alpha_2 \cdot (\dot{z}_i^l(t_i+\tau_0) + y)\| \geqslant \beta_i.$$

С другой стороны, при $\alpha_1^* = \frac{1}{1+q}$, $\alpha_2^* = \frac{q}{1+q}$ справедливо неравенство

$$\|\alpha_1^* \cdot (z_i^l(t_i+\tau_0) + x) + \alpha_2^* \cdot (\dot{z}_i^l(t_i+\tau_0) + y)\| < \frac{\beta_i}{2}.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (2.12) выполняется при любом τ из $[\gamma_i, \tau_i]$. В момент $t = t_i$ по формулам (2.9), (2.11) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+l} = \frac{\xi_{i+1}}{2^l},\ \delta_{i+1}^{i+l} = \Delta_1(\tau_{i+1}^{i+l}).$$

Понятно, что $\tau_{i+1}^{i+1} < \tau_i^{i+1}$, $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \tau_{i+1}^{i+l} = \xi_{i+1}$.

Определим $\delta_{i+1} = \delta_{i+1}^{i+1}$, $\tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{i+1}$. Если на интервале $(t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$ происходят сближения с преследователями $P_{i+1}, \ldots, P_n$, то убегающий «обходит» их за столь малое время, что

$$\min_{t\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i]}\|z_i(t)\|\geqslant\frac{\beta_i}{2}.$$

Поскольку $\delta_{i+1}<\tau_{i+1}^{i+1}\leqslant\frac{\beta_i}{8}$, то справедливо неравенство (2.8).

Итак, управление убегающего на полубесконечном интервале времени формируется следующим образом:

$$v(s)=p,\ s\in[0,+\infty)\setminus\bigcup_{l=1}^{k}[t_l,t_l+\tau_l),$$

$$v(s)=u_i(s),\ s\in[t_i,t_i+\tau_i)\setminus\bigcup_{l=1}^{k}[t_l,t_l+\tau_l),$$

если $i<k$, $v(s)=u_i(s)$, $s\in[t_i,t_i+\tau_i)$, если $i=k$. Убегание в случае 5 доказано.

Случай 6. Предположим, что $(\dot z_i^0,p)>0$ для некоторого номера $i\in N_r$, $1<r\leqslant k$, и $(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$ для любого $i\in N_k\setminus N_r$. При этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(z_i^0,p)\leqslant 0$. В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j=1,\ldots,q$, $q\leqslant r$, что $\tau_j>\tau_{j+1}$, $\delta_j>\delta_{j+1}$, $j=1,\ldots,q-1$, причем, если в момент $t'>0$ для некоторого $l\in N_r$ выполнено $\|\dot z_l(t')\|=\delta_j$, $(\dot z_l(t'),p)>0$, то $(\dot z_l(t'+\tau_j),p)\ \leqslant 0$, при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_j]$.

Момент времени t_i, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t)=\delta_i$ и существует номер $l\in N_r$ такой, что $\|\dot z_l(t_i)\|=\delta_i$, $(\dot z_l(t_i),p)>0$, назовем моментом i-того сближения.

Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t=t_i$ выполнены соотношения $\|\dot z_i(t_i)\|=\delta_i$ и $(\dot z_i(t_i),p)>0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Полагаем

$$v(t) = p,\ t \in [0, +\infty) \ \setminus \ \bigcup_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i).$$

В начальный момент времени построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \quad \delta_1^i = \Delta_2(\tau_1^i).$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 = \sum_{i=1}^{q} \Big(\frac{\delta \cdot \tau_1^i}{2} + \frac{(\tau_1^i)^3}{2 \cdot 3!} \Big) < \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{16}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, k$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i))$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, k$, следовательно, сближение с преследователем P_i, $i \in N_k \setminus N_r$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q = k$, то есть сближение наступает с каждым преследователем. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_k$ выполняются соотношения $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \cdot \tau_1^i - \delta \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} = 0$.

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будем осуществлять маневр «обхода» преследователей $P_i, \ldots, P_k$.

Допустим, что $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) = -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$. Очевидно, существует число $0 < \epsilon_i < \tau_i$ такое, что при произвольных $u_l(s)$, $l = i, \ldots, k$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, справедливы неравенства $\min\limits_{\tau \in [0, \epsilon_i]} \|\dot{z}_l(t_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1}$ для всех $l \in N_k \setminus N_r$, $(\dot{z}_i(t_i + \epsilon_i), p) > 0$. Векторы $z_i(t_i)$, $\dot{z}_i(t)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_i(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_i(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(v(s), \psi_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) > 0. \end{cases}$$

Здесь $t_i + \gamma_i$ — некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, в который выполнено неравенство $(z_i(t_i + \gamma_i), \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)) \neq -\|z_i(t_i + \gamma_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)\|$. Если же $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) \neq -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако если $i < k$, то на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ возможны сближения с преследователями P_l, $l = i + 1, \ldots, k$. Поэтому

$$v(s) = u_l(s), \ s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{j=i+1}^{k} [t_j, t_j + \tau_j),$$

если $i < k$, и $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, если $i = k$.

Предположим, что $i < k$ и $t_l \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, $l = i + 1, \ldots, k$. Убегающий будет сближаться с преследователями P_l, $l = i + 1, \ldots, k$ настолько близко и «обходить» их за столь малое время, чтобы для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, выполнялись следующие соотношения:

$$(z_i(t_i + \tau), \dot{z}_i(t_i + \tau)) \neq -\|z_i(t_i + \tau)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \tau)\|$$

для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$,

$$\min_{t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]} \|z_i(t)\| > \delta_{i+1}. \tag{2.13}$$

Из (2.13) следует, что сближение убегающего с каждым преследователем может наступать не более одного раза.

Обозначим через $H_i(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, параболу, заданную параметрически

$$x(\tau) = z_i(t_i+\gamma_i) + \dot{z}_i(t_i+\gamma_i)\tau + \ddot{z}_i(t_i+\gamma_i)\frac{\tau^2}{2},$$

$$y(\tau) = \dot{z}_i(t_i+\gamma_i) + \ddot{z}_i(t_i+\gamma_i)\tau.$$

Можно считать, что функция $f(\tau) = \min\limits_{x \in H_i(\tau)} \|x\| > 0$.

Функция $f(\tau) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ непрерывна. В момент $t = t_i + \gamma_i$ определим число

$$\beta_i = \min\{\delta_i^{i+1}, \min_{\tau \in [0, \tau_i]} f(\tau)\}. \tag{2.14}$$

Если управление задано так: $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, то соответствующую траекторию при $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ можно задать через координаты параболы: $z_i^0(t) = x(t-t_i-\gamma_i)$ и $\dot{z}_i^0(t) = y(t-t_i-\gamma_i)$. Для любого $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ справедливы неравенства (2.10).

Теперь предположим, что на множестве $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^r, t^r+\tau^r)$, $r = 1, 2, \ldots$, что

$$\begin{gathered}
\sum_{r=1}^{\infty} \tau^r < \xi_{i+1}, \\
\Lambda_i = \left(\tfrac{\tau_i^3}{27} + \tfrac{\beta_i}{4} + \sqrt{\tfrac{\tau_i^3\beta_i}{108} + \tfrac{(\beta_i)^2}{16}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\
\Omega_i = \left(\tfrac{\tau_i^3}{27} + \tfrac{\beta_i}{4} - \sqrt{\tfrac{\tau_i^3\beta_i}{108} + \tfrac{(\beta_i)^2}{16}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\
\xi_{i+1} = \min\left\{\Lambda_i + \Omega_i + \tfrac{2\tau_i}{3},\ -\tau_i + \sqrt{\tau_i^2 + \tfrac{\beta_i}{2}},\ \tfrac{\beta_i}{4}\right\}.
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Далее покажем, что если управление на $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i) \setminus \bigcup\limits_{r=1}^{\infty}[t^r, t^r+\ \tau^r)$ задано так: $v(s)=u_l(s)$, а на множестве $\bigcup\limits_{r=1}^{\infty}[t^r, t^r+\tau^r)$ управление убегающего произвольно, то соответствующая траектория $z_i^l(t)$, $t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, такова, что справедливо неравенство (2.12), и, кроме того, выполнено (2.13) для любого управления $u_i(s)$, $s\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$.

Пусть $l=1$. Понятно, что $z_i^1(t^1)=z_i^0(t^1)$. В точке $t=t^1+\tau^1$ справедливо неравенство $\|z_i^1(t^1+\tau^1)-z_i^0(t^1+\tau^1)\|\leqslant(\tau^1)^3$. Тогда при $t\in[t^1+\tau^1, t_i+\tau_i]$ выполнено $\|z_i^1(t)-z_i^0(t)\|\leqslant(\tau^1)^3+2(\tau^1)^2\tau_i+\tau^1\tau_i^2$. Поэтому для всех t из $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ справедливо неравенство

$$\|z_i^1(t)-z_i^0(t)\|<(\tau^1)^3+2(\tau^1)^2\tau_i+\tau^1\tau_i^2.$$

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться, что для натурального l, $t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, справедливо неравенство

$$\|z_i^l(t)-z_i^0(t)\|<(\xi_{i+1})^3+2\xi_{i+1}^2\tau_i+\xi_{i+1}(\tau_i)^2\leqslant\frac{\beta_i}{2}.$$

Таким образом, неравенство (2.12) доказано. Неравенство (2.13) сразу следует из определения числа ξ_{i+1}.

Покажем теперь, что для любого $\tau\in[\gamma_i, \tau_i]$

$$(z_i^l(t_i+\tau), \dot z_i^l(t_i+\tau))\neq-\|z_i^l(t_i+\tau)\|\cdot\|\dot z_i^l(t_i+\tau)\|.$$

Предположим противное: пусть существуют $\tau_0\in[\gamma_i, \tau_i]$, $q>0$ такие, что $z_i^l(t_i+\tau_0)=-q\dot z_i^l(t_i+\tau_0)$. В силу неравенств (2.12), (2.13) векторы $z_i^0(t_i+\tau_0)$, $\dot z_i^0(t_i+\tau_0)$ представимы в виде

$$z_i^0(t_i+\tau_0)=z_i^l(t_i+\tau_0)+x,\ \dot z_i^0(t_i+\tau_0)=\dot z_i^l(t_i+\tau_0)+y,$$

где $x, y \in \frac{\beta_i \cdot S}{2}$.

Пусть $L = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2),\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}^1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$. Согласно (2.14)

$$\min_{\alpha \in L} \|\alpha_1 \cdot (z_i^l(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2 \cdot (\dot{z}_i^l(t_i + \tau_0) + y)\| \geqslant \beta_i.$$

С другой стороны, при $\alpha_1^* = \frac{1}{1+q},\ \ \alpha_2^* = \frac{q}{1+q}$

$$\|\alpha_1^* \cdot (z_i^l(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2^* \cdot (\dot{z}_i^l(t_i + \tau_0) + y)\| < \frac{\beta_i}{2}.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (2.12) выполняется при любом τ из $[\gamma_i, \tau_i]$. В момент $t = t_i$ по формулам (2.14), (2.15) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+l} = \frac{\xi_{i+1}}{2^l},\ \delta_{i+1}^{i+l} = \Delta_2(\tau_{i+1}^{i+l}).$$

Понятно, что $\tau_{i+1}^{i+1} < \tau_i^{i+1}$, $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \tau_{i+1}^{i+l} = \xi_{i+1}$. Выбираем $\delta_{i+1} = \delta_{i+1}^{i+1}$, $\tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{i+1}$. Если на интервале $(t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ происходят сближения с преследователями $P_{i+1}, \ldots, P_k$, то убегающий «обходит» их за столь малое время, что

$$\min_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i(t)\| \geqslant \frac{\beta_i}{2}.$$

Поскольку $\delta_{i+1} < \tau_{i+1}^{i+1} \leqslant \frac{\beta_i}{8}$, то справедливо неравенство (2.13).

Итак, управление убегающего на полубесконечном интервале времени формируется следующим образом:

$$v(s) = p,\ s \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{l=1}^{k} [t_l, t_l + \tau_l),$$

$$v(s) = u_i(s),\ s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{l=1}^{k} [t_l, t_l + \tau_l),$$

если $i < k$, $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i)$, если $i = k$. Убегание в случае 6 доказано.

Случай 7а. Пусть $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in N_r$, $1 < r \leqslant k$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_k \setminus N_r$. При этом $(\dot{z}_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in N_k \setminus N_r$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_k \setminus \{m\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния.

В процессе построения маневра уклонения определим числа $\tau_j > 0$, $\delta_j > 0$, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + 1$, такие, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем, если в момент $t' > 0$ выполняется $\|\dot{z}_m(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in N_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_m(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — в первом случае, или $(z_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и $\|\dot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_m(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in N_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения.

Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ справедливы соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$. А если $\|\dot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_m(t_i), p) > 0$, то полагаем $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Полагаем, что

$$v(t) = p,\ t \in [0, +\infty)\ \setminus\ \bigcup_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i). \tag{2.16}$$

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\widehat{\delta_1^i}\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \quad \delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i), \quad \widehat{\delta_1^i} = \Delta_2(\tau_1^i). \tag{2.17}$$

Числа $\tau_i,\ i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i,\ \ i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=2}^{q} \Delta_1(\tau_1^i) + \Delta_2(\tau_1^1) = \frac{\delta^2}{16} + \frac{673\delta^3}{6144} + \frac{\delta^4}{192}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, k$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i))$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, k$, следовательно, сближение с преследователем P_i, $i \in N_k \setminus (N_r \cup \{m\})$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2\cdot 3!} = 0$. А если в момент $t = t'$ выполнено $\|\dot{z}_i(t')\| = \widehat{\delta_1^i}$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \widehat{\delta_1^i} \cdot \tau_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2\cdot 3!} = 0$.

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \widehat{\delta_1^1}$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \widehat{\delta_1^1}$. Отметим, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\widehat{\delta_i^l}\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществляться маневр «обхода» преследователей $P_i, \ldots, P_{r+1}$.

Управление убегающего на $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m. Если на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выполнено $\|\dot{z}_m(t)\| = \delta_m$, то управление $v(t)$, $t \in [t_i, t_i + \tau_i)$, до момента $t = t_m$ нужно выбирать так, как это сделано в случае 5, а затем управление должно быть выбрано в соответствии со случаем 6. Маневр «обхода» преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 5. Если же сближение с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 5.

Когда при осуществлении маневра «обхода» преследователя P_m, происходит сближение с преследователем P_j, $j \in N_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j, необходимо осуществить маневр «обхода» преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 5. И вернуться к управлению для маневра «обхода» преследователя P_m. В случае, если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in N_r$, тогда нужно осуществлять маневр «обхода» в соответствии со случаем 6 за время τ_m, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 5.

Если же $t_m = t_i$, то выбираем управление как в случае 5, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\dot{z}_m(t_i')\| = \Delta_2(\frac{\tau_m^m}{2})$. Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\frac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 6. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 5, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i.

Таким образом, убегание в этом случае построено.

Случай 7б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 7а, только $m \in N_r$. Тогда $(z_m^0, p) > 0$ и $(\dot{z}_m^0, p) > 0$, $m \in N_r$, а $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи производится аналогично доказательству в случае 7а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|z_m(t)\| = \delta_m^m$ и $\|\dot{z}_m(t)\| = \widehat{\delta_m^m}$. Возьмем $\Delta_m^m = \frac{\Delta_1(\tau_m^m)}{2}$, $\widehat{\Delta_m^m} = \frac{\Delta_2(\tau_m^m)}{2}$. Убегание доказывается так же, как в случае 4б, только вместо δ_1 возьмем Δ_m^m, вместо δ_2 возьмем $\widehat{\Delta_m^m}$, а вместо τ_1 из случая 4б — τ_m.

Случай 8а. Предположим, что $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in N_r$, $1 < r \leqslant k$, и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_k \setminus N_r$. При этом $(z_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in N_k \setminus N_r$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для всех $i \in N_k \setminus \{m\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа $\tau_j, \delta_j, j = 1, \ldots, q, q \leqslant r+1$, что $\tau_j > \tau_{j+1}, \delta_j > \delta_{j+1}, j = 1, \ldots, q-1$, причем, если в момент $t' > 0$ выполняется $\|z_m(t')\| = \delta_j$, $(z_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in N_r$ $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(z_m(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — в первом случае, или $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и $\|z_m(t_i)\| = \delta_i$, $(z_m(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in N_r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$. А если $\|z_m(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_m(t_i), p) > 0$, то полагаем $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Пусть выполнено (2.16). При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\widehat{\delta_1^i}\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \quad \delta_1^i = \Delta_2(\tau_1^i), \quad \widehat{\delta_1^i} = \Delta_1(\tau_1^i).$$

Числа $\tau_i,\ i=1,\ldots,q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i,\ \ i=1,\ldots,q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q}\tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=1}^{q-1}\Delta_2(\tau_1^i)+\Delta_1(\tau_1^1)=\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^3}{16}+\frac{\delta^4}{8192\cdot 3!}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i=1,\ldots,k$, на отрезке $[0,t]$ и $v(s)$ на множестве $[0,t]\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{q}[t_i,t_i+\tau_i))$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t),p)<-\delta$, $t\in[0,+\infty)$, $i=1,\ldots,k$, следовательно, сближение с преследователем P_i, $i\in N_k\setminus(N_r\cup\{m\})$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t=t'$ для некоторого $i\in N_r$ выполняются соотношения $\|\dot{z}_i(t')\|=\delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'),p)>0$, $(\ddot{z}_i(t'),p)<-\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$ $(z_i(t'+\tau_1^i),p)<\delta_1^i\tau_1^i-\delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2}-\frac{(\tau_1^i)^4}{2\cdot 3!}=0$. А если в момент $t=t'$ выполнено $\|z_i(t')\|=\delta_1^i$, $(z_i(t'),p)>0$, $(\ddot{z}_i(t'),p)<-\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$ $(z_i(t'+\tau_1^i),p)<\widehat{\delta}_1^i-\delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2}-\frac{(\tau_1^i)^4}{2\cdot 3!}=0$.

Полагаем $\tau_1=\tau_1^1$, $\delta_1=\delta_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\|=\delta_1^1$, и $\delta_1=\widehat{\delta}_1^1$, если $\|z_1(t_1)\|=\widehat{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1>0$. Итак, пусть в момент $t=t_i$ выполнены следующие соотношения $\|\dot{z}_i(t_i)\|=\delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i),p)>0$, или $\|z_i(t_i)\|=\delta_i$, $(z_i(t_i),p)>0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\widehat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будут «обходиться» преследователи $P_i,\ldots,P_{r+1}$.

Управление убегающего на $[t_i,t_i+\tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m. Если на полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ выполнено $\|z_m(t)\|=\delta_m$, то управление $v(t)$ убегающего E, $t\in[t_i,t_i+\tau_i)$, до момента $t=t_m$ нужно выбирать так, как это сделано в случае 6, а затем управление должно быть выбрано в соответствии со случаем 5. Маневр «обхода» преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 6. Если же сближение с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 6.

Когда при осуществлении маневра «обхода» преследователя P_m, происходит сближение с преследователем P_j, $j \in N_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр «обхода» преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 6. И вернуться к управлению для маневра «обхода» преследователя P_m (случай 5).

В случае, если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in N_r$, тогда нужно осуществлять маневр «обхода» в соответствии со случаем 5 за время τ_m, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 6.

Если же $t_m = t_i$, то выбираем управление как в случае 6, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|z_m(t_i')\| = \Delta_1(\frac{\tau_m^m}{2})$. Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\frac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 5. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 6, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i.

Таким образом убегание в этом случае построено.

Случай 8б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 8а, только $m \in N_r$. Тогда $(z_m^0, p) > 0$ и $(\dot{z}_m^0, p) > 0$, $m \in N_r$, а $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи производится аналогично доказательству в случае 8а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|z_m(t)\| = \widehat{\delta_m^m}$ и $\|\dot{z}_m(t)\| = \delta_m^m$. Пусть $\Delta_m^m = \frac{\Delta_1(\tau_m^m)}{2}$, $\widehat{\Delta_m^m} = \frac{\Delta_2(\tau_m^m)}{2}$. Тогда убегание будет доказываться так же, как в случае 4б, только вместо δ_1 возьмем Δ_m^m, вместо δ_2

возьмем $\widehat{\Delta_m^m}$, а вместо τ_1 из случая 4б — τ_m.

Случай 9а. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in N_r$, $1 < r \leqslant k$, и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_k \setminus N_r$. При этом $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in Q_m^r$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_k \setminus Q_m^r$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + m$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем, если в момент $t' > 0$ выполняется для некоторого $l \in Q_m^r$ $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in N_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in Q_m^r$ — в первом случае, или $(z_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in N_r$ — во втором.

Момент времени $t = t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in Q_m^r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in N_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнены одновременно условия: $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$; или два других условия: $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Пусть выполнено (2.16). При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\widehat{\delta_1^i}\}_{i=1}^{\infty}$ при помощи правил (2.17).

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q}\tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=1}^{r}\Delta_2(\tau_1^i) + \sum_{i=1}^{m}\Delta_1(\tau_1^i) < \frac{\delta^2}{4} + \frac{3\delta^3}{16} + \frac{\delta^4}{192}.$$

Тогда сближение с преследователем P_i, $i \in N_k \setminus (N_r \cup Q_m^r)$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых $u_i(s)$, $v(s)$ на $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2\cdot 3!} = 0$. А если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in Q_m^r$ выполнено $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ выполнено $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \widehat{\delta}_1^i \cdot \tau_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2\cdot 3!} = 0$.

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \widehat{\delta}_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \widehat{\delta}_1^1$. Нетрудно видеть, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\widehat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществляться маневр «обхода» преследователей $P_i, \ldots, P_{r+m}$.

Управление убегающего на $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим, исходя из информации о том, какое равенство в момент $t = t_i$ выполнено: $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$. В первом случае нужно руководствоваться по правилам случая 5, во втором — случая 6.

Если существуют номера $i, j \in N_k$, $i \neq j$, такие, что $t_i = t_j$, то сначала «обходим» i-того преследователя, а затем, подпустив j-того на расстояние $\Delta_1(\frac{\tau_j^j}{2})$, применяем управление для «обхода» преследователя P_j за время $\frac{\tau_j}{2}$.

Случай 9б. Пусть начальные условия такие же, что и в случае 9а, только существует номер $i \in N_r$ такой, что $(z_i^0, p) > 0$ и $(\dot{z}_i^0, p) > 0$.

Доказательство уклонения от встречи производится аналогично доказательству в случае 9а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_i$ такой, что $\|z_i(t)\| = \delta_i^i$ и $\|\dot{z}_i(t)\| = \widehat{\delta_i^i}$. Пусть $\Delta_i^i = \frac{\Delta_1(\tau_i^i)}{2}$, $\widehat{\Delta_i^i} = \frac{\Delta_2(\tau_i^i)}{2}$. Тогда убегание будет доказываться так же, как в случае 4б, только вместо δ_1 возьмем Δ_i^i, вместо δ_2 возьмем $\widehat{\Delta_i^i}$, а вместо τ_1 из случая 4б — τ_i.

Теорема доказана.

ГЛАВА 3

Задачи о «мягкой поимке»

§3.1. Убегание в дифференциальной игре второго порядка

В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $k+1$ лиц: k преследователей $P_1, \ldots, P_k$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_i + a\dot{x}_i + bx_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \\
&x_i(0) = x_i^0, \\
&\dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot{y} + a\dot{y} + by = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \\
&y(0) = y^0, \qquad \dot{y}(0) = \dot{y}^0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Функции u_i, v — кусочно-постоянные. В уравнениях (1.1), (1.2) константы a, b такие, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1, λ_2 — отрицательные вещественные корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. И пусть для определенности $\lambda_1 < \lambda_2$.

Определение 1.1. Говорят, что в дифференциальной игре (1.1), (1.2) возможно убегание, если существует такая кусочно-постоянная функция $v(t)$, $\|v(t)\| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, что при любых кусочно-постоянных функциях $u_i(t)$, $\|u_i(t)\| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$, $t \geqslant 0$, пара $(x_i(t), y(t))$ для $t \geqslant 0$ не попадает в терминальное множество $M = \{x_i(t) = y(t), \dot{x}_i(t) = \dot{y}(t), t \geqslant 0\}$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации $(y(s), \dot{y}(s), x_1^0, \dot{x}_1^0, \ldots, x_k^0, \dot{x}_k^0)$, $s \leqslant t$, и о значениях $u_i(t)$,

$i = 1, \ldots, k$, в тот же момент времени. Управление преследователей формируется на основе информации о состоянии $(y(t), \dot{y}(t), x_1(t), \dot{x}_1(t), \ldots, x_k(t), \dot{x}_k(t))$ дифференциальной игры (1.1), (1.2).

Перейдем от систем (1.1), (1.2) к системе:

$$\begin{cases} \dot{z}_i^1 = z_i^2, & z_i^1(0) = z_i^{10}, \\ \dot{z}_i^2 = -az_i^2 - bz_i^1 + u_i - v, & z_i^2(0) = z_i^{20}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Обозначим через $z^0 = (z_1^{10}, z_1^{20}, \ldots, z_k^{10}, z_k^{20})$ начальное состояние дифференциальной игры (1.3).

Т е о р е м а 1.1. В дифференциальной игре (1.1), (1.2) возможно убегание.

Доказательство: Поскольку начальная позиция уклоняющегося игрока не совпадает с начальной позицией любого из догоняющих, то из-за конечности числа игроков всегда можно найти такое двумерное многообразие пространства $\mathbb{R}^{2n}$, что оно содержит начальную позицию уклоняющегося игрока и что проекции начальных позиций догоняющих на это многообразие не совпадали с начальной позицией уклоняющегося. Тогда $z_i^1, z_i^2 \in \mathbb{R}^1$. Поэтому далее все построения будем проводить в $\mathbb{R}^2$.

Вспомогательные рассуждения. Функция $(u_i - v)(t)$ как разность кусочно- постоянных функций также является кусочно-постоянной функцией:

$$(u_i - v)(t) = \begin{cases} K_1, & t \in [0, t_1), \\ K_2, & t \in [t_1, t_2), \\ \ldots \\ K_m, & t \in [t_{m-1}, +\infty), \end{cases}$$

где $K_s \in \mathbb{R}^1$, $\|K_s\| \leqslant 2$, $s \in \{1, \ldots, m\}$. Исследуем систему дифференциальных уравнений (1.3) при $(u_i - v)(t) = K$, $t \in [0, +\infty)$. Она эквивалентна уравнению:

$$\frac{dz^2}{dz^1} = \frac{-az^2 - bz^1 + K}{z^2},$$

общее решение которого представлено формулой:

$$(z^2 - \lambda_2(z^1 - \frac{K}{b}))^{\lambda_2} = C(z^2 - \lambda_1(z^1 - \frac{K}{b}))^{\lambda_1}. \tag{1.4}$$

Прямая $\tilde{a}$, заданная уравнением $z^2 = \lambda_2 z^1 - \frac{\lambda_2 K}{b}$, является наклонной асимптотой для функции (1.4).

Вид кривой можно определить, исходя из вида характеристических чисел. По условию характеристические числа — попарно различные вещественные и отрицательные, следовательно, существует особая точка(«узел») с координатами $z^1 = \frac{K}{b}$, $z^2 = 0$.

Исследуем знак производных $\dot{z}^2$, $\dot{z}^1$. Производная $\dot{z}^2$ меняет знак при пересечении с прямой l, заданной уравнением $-az^2 - bz^1 + K = 0$. Точка $(\frac{K}{b}, 0)$ — точка пересечения прямой l и асимптоты $\tilde{a}$. Используя направления $\dot{z}^2$, $\dot{z}^1$, схематически изобразим траекторию системы (1.3).

Каково поведение кривой при $K \geqslant 0$, если начальное положение достаточно большое и принадлежит первой четверти? Учитывая, что $a, b \geqslant 0$, $\|K\| \leqslant 2$, $-az^2 - bz^1 + K \leqslant 0$, получим, что функция $z^2(t)$ в первой четверти на бесконечности убывает, а $z^1(t)$, напротив, возрастает (рис. 1.1).

Функция $z^1(t)$ возрастает до тех пор, пока не пересечет ось $0z^1$. После этого $z^2 \leqslant 0$, следовательно, функция $z^1(t)$ убывает. Функция $z^2(t)$ убывает до тех пор, пока траектория не пересечет прямую l. В точке пересечения $\dot{z}^2$ равна нулю (рис. 1.2).

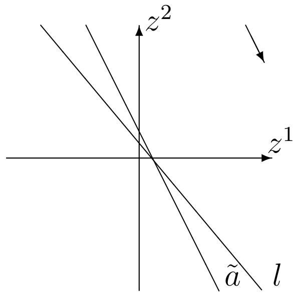

Рис. 1.1.

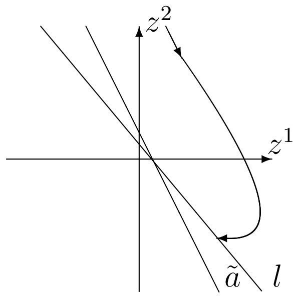

Рис. 1.2.

Далее функция $z^2(t)$ возрастает вдоль асимптоты $\tilde{a}$. Функция $z^1(t)$ убывает до тех пор, пока траектория не попадет в «узел» (рис. 1.3).

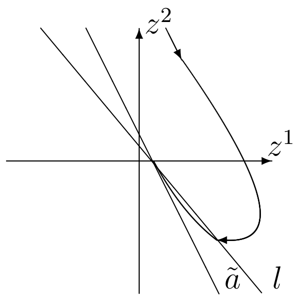

Рис. 1.3.

Затем $z^2(t)$ меняет знак на противоположный, а, следовательно, меняется знак производной $\dot{z}^1(t)$.

В первой четверти есть еще одна ветка неявной функции — решения системы (1.3). Она располагается справа от прямой l и от асимптоты $\tilde{a}$. Эта траектория «ведет» точку с плюс бесконечности (начальное положение находится во второй четверти), где, как было ранее указано, $z^2(t)$ убывает, а $z^1(t)$, напротив, возрастает, в «узел» (рис. 1.4).

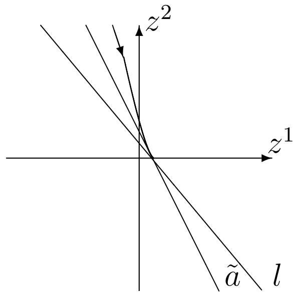

Рис. 1.4.

Каково поведение кривой, если начальной положение достаточно большое и принадлежит третьей четверти? Функция $z^2(t)$ в третьей четверти на бесконечности возрастает. Функция $z^1(t)$ имеет отрицательную производную $\dot{z}^1 = z^2$, $z^2 \leqslant 0$, поэтому она в третьей четверти убывает (рис. 1.5).

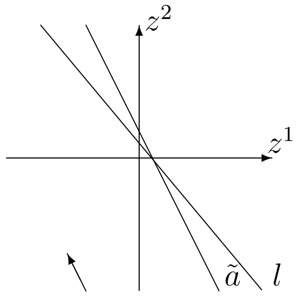

Рис. 1.5.

После пересечения траектории с осью $0z^1$ производная $\dot{z}^1(t)$ меняет знак, следовательно, функция $z^1(t)$ будет убывать. Функция $z^2(t)$ не меняет характера убывания-возрастания до тех пор, пока траектория не пересечет прямую l. В точке пересечения прямой l и исследуемой кривой выполнено равенство $\dot{z}^2(t) = 0$. Далее $z^2(t)$ и $z^1(t)$ ведут себя как убывающие функции. Таким образом, траектория попадает в «узел» (рис. 1.6).

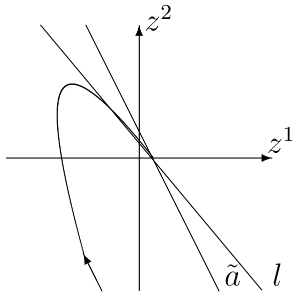

Рис. 1.6.

Вдоль асимптоты $\tilde{a}$ слева располагается траектория, которая не меняет характера возрастания-убывания и целиком находится в четвертой четверти: начиная с минус бесконечности, $z^2(t)$ возрастает, а $z^1(t)$ убывает (рис. 1.7).

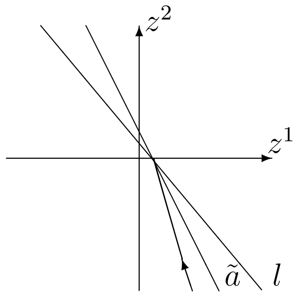

Рис. 1.7.

Исследуя знак функции и ее производной и проводя аналогичные рассуждения, получим вид кривой при $K \leqslant 0$ (рис. 1.8).

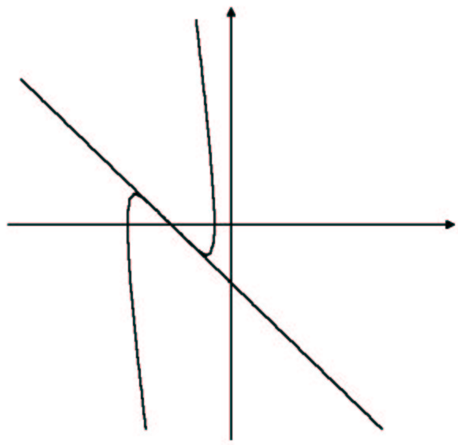

Рис. 1.8.

Пусть теперь $z^0 = (z_1^{10}, z_1^{20}, \ldots, z_k^{10}, z_k^{20})$ — начальное состояние дифференциальной игры (1.3). Рассмотрим возможные «передвижения» точки, траектория движения которой задана системой (1.3). Выберем некоторое управление убегающего $v(t)$ такое, что при этом выполнялось бы неравенство $K_s \geqslant 0$, $s \in \{1, \ldots, m\}$. Обратимся к схематическому графику траектории системы. Если точка (z^1, z^2) из первой четверти, то она, двигаясь по траектории, заданной системой (1.3), может попасть в «узел» или в четвертую четверть. Из четвертой четверти можно попасть в первую или третью четверть, а также в «узел». Из третьей четверти можно попасть во вторую, из второй — в первую. Отобразим возможные «передвижения» точки (z^1, z^2) при $K \geqslant 0$ диаграммой (1.5).

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & Node \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ 3 & \longleftarrow & 4 & \longrightarrow & Node \\ & & \downarrow & & \\ & & 1 & & \end{array} \tag{1.5}$$

Пусть теперь $K_s \leqslant 0$, $s \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда из первой четверти можно попасть в четвертую, из четвертой — в третью, из третьей — во вторую или в «узел», из второй — в первую, третью четверть или в «узел». Соответственно, получим диаграмму (1.6).

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longleftarrow & 2 & \longrightarrow & Node \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 4 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & Node \\ & & \downarrow & & \\ & & 2 & & \end{array} \tag{1.6}$$

При $K_s = 0$, $s \in \{1, \ldots, m\}$, система (1.3) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = z^2, \\ \dot{z}^2 = 0. \end{cases}$$

Траекториями системы (1.3) в случае, если разность управлений равна нулю, являются параллельные прямые (рис. 1.9).

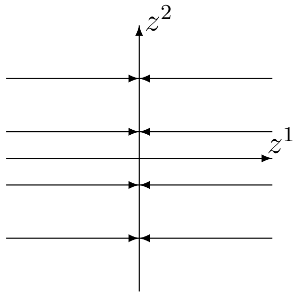

Рис. 1.9.

Если разность управлений равна нулю, то в начало координат попасть нельзя. Если разность управлений положительная, то в начало координат можно попасть из четвертой четверти (рис. 1.10).

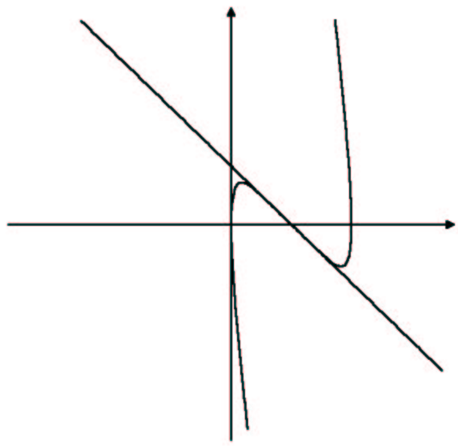

Рис. 1.10.

При положительной разности управлений также существует траектория, проходящая через начало координат. Она начинается во второй четверти (рис. 1.11).

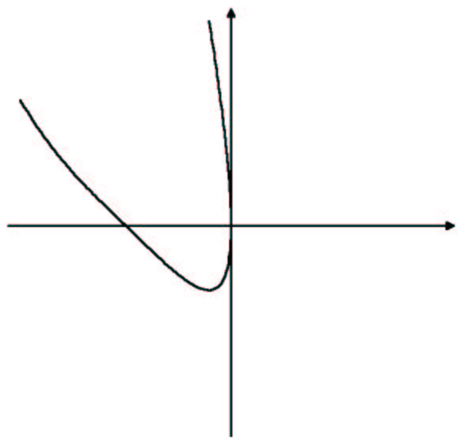

Рис. 1.11.

Пусть δ — малое положительное число, $\delta \leqslant \min\{\min\limits_{i=1,\ldots,k} r(z_i^{10}, z_i^{20}), |\frac{K}{b}|\}$, $K = \min\limits_{i=1,\ldots,k}(u_i(0)+1)$.

Стратегию убегания определим следующим образом (номера $i_1, i_2, i_3, \ldots$ и малые положительные $\delta_1, \delta_2, \ldots$ будут определены далее):

$$v(t) = -1,\ t \in [0, t_1),\ t_1 :\ (z^1_{i_1}(t_1), z^2_{i_1}(t_1)) \in \partial U_\delta,\ i_1 \in \{1, \ldots, k\},$$

$$v(t) = 1,\ t \in [t_1, t_2),\ t_2 :\ (z^1_{i_2}(t_2), z^2_{i_2}(t_2)) \in \partial U_{\delta_1},\ i_2 \in \{1, \ldots, k\},$$

$$v(t) = -1,\ t \in [t_2, t_3),\ t_3 :\ (z^1_{i_3}(t_3), z^2_{i_3}(t_3)) \in \partial U_{\delta_2},\ i_3 \in \{1, \ldots, k\},$$

$$\ldots$$

На полуинтервале $[0, t_1)$ полагаем управление убегающего $v(t) = -1$. Тогда $u_i(t) - v(t) \geqslant 0$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $t \in [0, t_1)$. Диаграмма (1.5) отражает возможные «передвижения» точки (z^1, z^2) при $K \geqslant 0$. Траектория системы для $K \geqslant 0$ в общем виде описана на рисунках 1.1-1.7. В начало координат при $K \geqslant 0$ можно попасть только из четвертой четверти (рис. 1.10). Пусть в момент $t = t_1$ преследователь P_{i_1} сблизился с убегающим E настолько, что точка $(z^1_{i_1}(t_1), z^2_{i_1}(t_1))$ попала на границу δ-окрестности начала координат. Чтобы не допустить попадания точки $(z^1_i(t), z^2_i(t))$ для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $t \geqslant 0$ в начало координат, в момент времени $t = t_1$ переключим управление $v(t)$ с -1 на $+1$. Тогда при $t \geqslant t_1$ управление убегающего $v(t) = 1$, $u_i(t) - v(t) \leqslant 0$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $t \in [t_1, t_2)$. Точка $(z^1_{i_1}(t), z^2_{i_1}(t))$ согласно диаграмме (1.6) и виду траектории при неположительной разности управлений (рис. 1.8) покинет δ-окрестность начала координат и начнет двигаться в обратную сторону.

Через промежуток времени $\tau_1 = t_2 - t_1$ возможно сближение с другим преследователем, что в плоскости $z^1 0 z^2$ будет выглядеть как приближение к началу координат. При $K \leqslant 0$ в начало координат можно попасть только из второй четверти (рис. 1.11). Выберем малое положительное δ_1 такое, что $\delta_1 \leqslant \min\{\min\limits_{i=1,\ldots,k} r(z_i^1(t_1), z_i^2(t_1)), |\frac{K}{b}|\}$, $K = \min\limits_{i=1,\ldots,k}(u_i(t_1)+1)$. И пусть в момент $t = t_2$ преследователь P_{i_2} сблизился с убегающим E настолько, что точка $(z_{i_2}^1(t_2), z_{i_2}^2(t_2))$ попала на границу δ_1-окрестности начала координат. В момент времени $t = t_2$ преключим управление убегающего E с $+1$ на -1. Точка $(z^1(t), z^2(t))_{i_2}$ согласно диаграмме (1.5) и виду траектории при неотрицательной разности управлений (см. рис. 1.1-1.7) покинет δ_1-окрестность начала координат и начнет двигаться в обратную сторону.

Теперь $u_i(t) - v(t) = u_i(t) + 1 \geqslant 0$, для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $t \in [t_2, t_3)$. Поступаем так же, как описано выше при неотрицательном K. Выберем малое положительное $\delta_2 \leqslant \min\{\min\limits_{i=1,\ldots,k}(r(z_i^1(t_2), z_i^2(t_2)), |\frac{K}{b}|)\}$, $K = \min\limits_{i=1,\ldots,k}(u_i(t_2)+1)$. Пусть в момент $t = t_3$ преследователь P_{i_3} сблизился с убегающим E настолько, что точка $(z_{i_3}^1(t_3), z_{i_3}^2(t_3))$ попала на границу δ_2-окрестности начала координат. И в момент времени $t = t_3$ переключим управление $v(t)$ с -1 на $+1$. Тогда разность управлений снова становится неположительной. И тем самым мы «откидываем» точку $(z_{i_3}^1(t), z_{i_3}^2(t))$, $t \geqslant t_3$, от начала координат.

Таким образом, мы переключаем управление с минимального на максимальное или, наоборот, с максимального на минимальное, если существует номер I такой, что точка $(z_I^1(t), z_I^2(t))$, $I \in \{1, \ldots, k\}$, принадлежит границе некоторой δ_r-окрестности начала координат, $\delta \geqslant \delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_r$. Таких переключений будет счетное множество, так как преследователей конечное число. В итоге все номера из множества $\{1, \ldots, k\}$ разделятся на три группы. Одна из которых состоит из номеров i таких, что $(z_i^1(t), z_i^2(t))$ принадлежит второй четверти, другая — из номеров j таких, что $(z_j^1(t), z_j^2(t))$ принадлежит четвертой четверти. Третья группа нам неинтересна, так как из третьей и первой четверти нельзя попасть в начало координат.

Так как одновременно из второй и четвертой четвертей при выбранной стратегии убегания невозможно двигаться к началу координат, то тем самым мы будем «уводить» от начала координат то одну, то другую группу.

Теорема доказана.

§3.2. Убегание в дифференциальной игре третьего порядка

В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра третьего порядка, в которой участвуют три преследователя P_1, P_2, P_3 и два убегающих E_1, E_2.

Закон движения преследователя P_i имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dddot{x}_i = u_i, \qquad \|u_i\| \leqslant 1, \\ &x_i(0) = x_i^0, \;\; \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \;\; \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E_j имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dddot{y}_j = v_j, \qquad \|v_j\| \leqslant 1, \\ &y_j(0) = y_j^0, \;\; \dot{y}_j(0) = \dot{y}_j^0, \;\; \ddot{y}_j(0) = \ddot{y}_j{}^0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вместо систем (2.1), (2.2) рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} &\dddot{z}_{ij} = u_i - v_j, \qquad\qquad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \\ &\dot{z}_{ij}(0) = \dot{z}_{ij}^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}_j^0, \;\; \ddot{z}_{ij}(0) = \ddot{z}_{ij}^0 = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}_j^0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Определение 2.1. Говорят, из начального состояния

$$z^0 \;=\; (z_{11}^0, \dot{z}_{11}^0, \ddot{z}_{11}^0, \ldots, z_{32}^0, \dot{z}_{32}^0, \ddot{z}_{32}^0)$$

в дифференциальной игре (2.3) возможно убегание, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i = 1, 2, 3$, можно построить такие измеримые функции $v_j(t) \in S$, $0 \leqslant t < +\infty$, $j = 1, 2$, что найдется номер $s \in \{1, 2\}$ такой, что для всех $i \in \{1, 2, 3\}$, $t \geqslant 0$, справедливо неравенство $\|z_{is}(t)\| + \|\dot{z}_{is}(t)\| > 0$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации о состоянии дифференциальной игры

$$(z_{11}(\tau), \dot{z}_{11}(\tau), \ddot{z}_{11}(\tau), \ldots, z_{32}(\tau), \dot{z}_{32}(\tau), \ddot{z}_{32}(\tau))$$

при $\tau \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \{1,2,3\}$, в тот же момент времени. Управление преследователей в момент $t \geqslant 0$ формируется на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры (2.3).

Т е о р е м а 2.1. В дифференциальной игре (2.3) из начального состояния z^0 возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть произвольное начальное состояние игры (2.3) задано условием z^0. Если найдется номер $j \in \{1,2\}$ такой, что $0 \notin \operatorname{co}\{\bigcup\limits_{i=1,2,3} \ddot{z}_{ij}^0\}$, то в силу теоремы 2.1 главы 2 убегающий может избежать поимки в обычном смысле, а значит, может избежать и «мягкой» поимки.

Предположим, что

$$0 \in \operatorname{co}\{\bigcup_{i=1,2,3} \ddot{z}_{ij}^0\}, \quad j = 1,2. \tag{2.4}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\eta_j(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} \|z_{ij}(t)\|, \ t \geqslant 0, \ j = 1,2,$$

$$\tilde{\eta}_j(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} \|\dot{z}_{ij}(t)\|, \ t \geqslant 0, \ j = 1,2.$$

Без нарушения общности можно считать, что $n = 2$. Действительно, если $n > 2$, то проведем в пространстве $\mathbb{R}^n$ через начало координат двумерную плоскость H такую, чтобы $\|\pi z_{ij}^0\| \neq 0$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$, π — оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на H. Игра (2.3) для проекции на плоскость H задается уравнениями

$$\tfrac{d^3(\pi z_{ij}(t))}{dt^3} = u_i' - v_j', \ \ u_i', v_j' \in \pi S, \ \ i = 1,2,3, \ \ j = 1,2, \tag{2.5}$$

причем, $\pi z_{ij}(0) = \pi z_{ij}^0$, $\frac{d(\pi z_{ij}(0))}{dt} = \pi \dot{z}_{ij}^0$, $\frac{d^2(\pi z_{ij}(0))}{dt^2} = \pi \ddot{z}_{ij}^0$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$.

Допустим, что в игре (2.5) разрешима задача убегания, то есть при любом начальном состоянии πz^0, $\|\pi z^0_{ij}\| \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, можно построить такие управления v'_j, $0 \leqslant t < +\infty$, $j = 1, 2$, что найдется номер $j_1 \in \{1, 2\}$, для которого

$$\eta_{j_1}(t) \geqslant \eta'_{j_1}(t) > 0 \ \text{ или } \ \tilde{\eta}_{j_1}(t) \geqslant \tilde{\eta}'_{j_1}(t) > 0.$$

Таким образом, достаточно показать разрешимость задачи убегания при $n = 2$. Поэтому везде в дальнейшем будем считать, что $n = 2$.

Не уменьшая общности, предполагаем, что $\ddot{y}^0_1 \neq \ddot{y}^0_2$ и $\ddot{x}^0_i \notin G$, $i = 1, 2, 3$, где $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (p', x) = \alpha\}$, $p' \in \partial S$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, — прямая, проходящая через точки $\ddot{y}^0_1$, $\ddot{y}^0_2$. Допустим, что для некоторого индекса $i \in \{1, 2, 3\}$ точка $\ddot{x}^0_i \in G$. Выберем $\delta > 0$ такое, что $\tilde{\eta}_j(t) > 0$, $t \in [0, \delta]$, $j = 1, 2$, при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, $v_j(s)$, $j = 1, 2$, на $[0, \delta]$.

Управления $v_j(s)$, $j = 1, 2$, на $[0, \delta]$ будем выбирать так, чтобы

$$(p', v_j(s)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_i(s), p') \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_i(s), p') > 0. \end{cases}$$

Покажем, что существует такой момент $\gamma_1 \in (0, \delta)$, $\delta > 0$, что выполнено $\ddot{x}_i(\gamma_1) \notin G(\gamma_1)$, где $G(\gamma_1)$ — прямая, проходящая через точки $\ddot{y}_1(\gamma_1)$, $\ddot{y}_2(\gamma_1)$. При $t \geqslant 0$ рассмотрим функцию

$$f(t) = (p', \ddot{z}_i(t)) = \int\limits_0^t (p', u_i(s) - v_1(s))ds.$$

Функция $f(t)$, $0 \leqslant t < \delta$, удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{f}(t) = (p', u_i(s) - v_1(s)), \ \ f(0) = 0.$$

Поэтому на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [0, \delta]$, $\alpha < \beta$, имеет место соотношение $f(t) \neq 0$. Следовательно, существует такое число $\gamma_1 \in (0, \delta)$, что $f(\gamma_1) \neq 0$, то есть $(p', \ddot{x}_i(\gamma_1)) \neq (p', \ddot{y}_1(\gamma_1))$. Так как $G(\gamma_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (p', x) = \alpha_1\}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}^1$, — новая прямая, то $\ddot{x}_i(\gamma_1) \notin G(\gamma_1)$.

Далее считаем, что $\ddot{x}_i^0 \notin G$, $i = 1, 2, 3$. Обозначим через G^+, G^- открытые полуплоскости, определяемые прямой G.

Пусть $\ddot{x}_1^0, \ddot{x}_2^0 \in G^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (p', x) < \alpha\}$, $\ddot{x}_3^0 \in G^+$. Соотношения $\ddot{y}_1^0 \notin \mathrm{co}\{\ddot{y}_2^0, \ddot{x}_1^0, \ddot{x}_2^0\}$, $\ddot{y}_2^0 \notin \mathrm{co}\{\ddot{y}_1^0, \ddot{x}_1^0, \ddot{x}_2^0\}$ запишем в виде

$$0 \notin A_1 = \mathrm{co}\{\ddot{z}_{31}^0 - \ddot{z}_{32}^0, \ddot{z}_{11}^0, \ddot{z}_{21}^0\},$$
$$0 \notin A_2 = \mathrm{co}\{\ddot{z}_{32}^0 - \ddot{z}_{31}^0, \ddot{z}_{12}^0, \ddot{z}_{22}^0\}. \tag{2.6}$$

и выберем такие векторы p_1, $p_2 \in \partial S$, числа ϵ_1, $\epsilon_2 > 0$, что

$$C(A_j, p_j) \leqslant -2\epsilon_j, \;\; j = 1, 2. \tag{2.7}$$

Случай 1. Пусть для некоторого $j \in \{1, 2\}$ выполнено соотношение $(p_j, z_{3j}^0) \geqslant 0$. Не ограничивая общности, $j = 1$. Управление второго убегающего зададим на $[0, +\infty)$ произвольным образом. И пусть $(p_1, \dot{z}_{31}^0) \geqslant 0$. Укажем способ построения управления $v_1(s)$, $s \in [0, +\infty)$, при котором первый убегающий избежит поимки на полубесконечном интервале времени. Заметим, что в силу (2.4), (2.6), (2.7) справедливо неравенство $(p_1, \ddot{z}_{31}^0) > 0$. Следовательно, если $(p_1, \dot{z}_{31}^0) = 0$, то через произвольно малое время $\tau > 0$ при любых управлениях игроков x_3 и y_1 на $[0, \tau]$ имеет место неравенство $(p_1, \dot{z}_{31}(\tau)) > 0$. Поэтому считаем, что

$$(p_1, \dot{z}_{31}^0) > 0.$$

Из соотношений (2.7) получаем $\max\limits_{l=1,2}(p_1, \ddot{z}_{l1}^0) \leqslant -2\epsilon_1$. В момент $t = 0$ определим число $\delta^1 = \min\{1, \epsilon_1, \sqrt{\eta_1(0)}, \sqrt{\tilde{\eta}_1(0)}\}$ и на множестве $[0, t')$ строим управление $v_1(s)$ согласно маневру уклонения, предложенному при доказательстве теоремы 2.1 второй главы (соответствующему заданным начальным условиям), не учитывая преследователя x_3.

Через t' обозначим момент времени, в который впервые выполнено равенство $\|z_{31}(t')\| = \frac{1}{2}(p_1, z_{31}^0)$. Если такой момент $t' > 0$ не существует, то полагаем $t' = +\infty$. В этом случае $\|z_{31}(t)\| > 0$ при $t \geqslant 0$, следовательно, $\eta_1(t) > 0$ при $t \geqslant 0$. И все доказано.

Пусть в некоторый момент $t' < +\infty$ выполнено $\|z_{31}(t')\| = \frac{1}{2}(p_1, z_{31}^0)$. Покажем, что существует момент $\gamma' \in [0, t')$, в который $(p_1, \ddot{z}_{31}(\gamma')) < 0$. Предположим противное: при любом $\tau \in (0, t')$ справедливо неравенство $(p_1, \ddot{z}_{31}(\tau)) \geqslant 0$. Тогда

$$\|z_{31}(t')\| \geqslant (p_1, z_{31}^0) + \int\limits_0^{t'} (p_1, \dot{z}_{31}(\tau))d\tau > (p_1, z_{31}^0),$$

что противоречит определению момента t'. Таким образом, в некоторый момент $\gamma' \in (0, t')$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 3} (p_1, \ddot{z}_{i1}(\gamma')) = \xi < 0.$$

На основании теоремы 2.1 главы 2 заключаем, что в игре (2.3) для состояния

$$z(\gamma') = (z_{11}(\gamma'), \dot{z}_{11}(\gamma'), \ddot{z}_{11}(\gamma'), \dots, z_{32}(\gamma'), \dot{z}_{32}(\gamma'), \ddot{z}_{32}(\gamma'))$$

разрешима задача убегания. Используя приведенный в доказательстве теоремы 2.1 второй главы маневр уклонения, определим управление игрока y_1 на полуинтервале $[\gamma', +\infty)$.

Случай 2. Теперь нам безразличен знак скалярного произведения (p_j, z_{ij}^0), $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$. Пусть для некоторого $j \in \{1, 2\}$ выполнено соотношение

$$(p_j, \dot{z}_{3j}^0) \geqslant 0.$$

Не ограничивая общности, $j = 1$. Управление второго убегающего зададим на $[0, +\infty)$ произвольным образом. Укажем способ построения управления $v_1(s)$, $s \in [0, +\infty)$, при котором первый убегающий избежит поимки на полубесконечном интервале времени. Как и раньше заметим, что в силу (2.4), (2.6), (2.7) справедливо неравенство $(p_1, \ddot{z}^0_{31}) > 0$. Следовательно, если $(p_1, \dot{z}^0_{31}) = 0$, то через произвольно малое время $\tau > 0$ при любых управлениях игроков x_3 и y_1 на $[0, \tau]$ имеет место неравенство $(p_1, \dot{z}_{31}(\tau)) > 0$. Поэтому считаем, что

$$(p_1, \dot{z}^0_{31}) > 0.$$

Из соотношений (2.7) получаем $\max\limits_{l=1,2}(p_1, \ddot{z}^0_{l1}) \leqslant -2\epsilon_1$. В момент $t = 0$ определим число $\delta^1 = \min\{1, \epsilon_1, \sqrt{\tilde{\eta}_1(0)}\}$ и на множестве $[0, t')$ строим управление $v_1(s)$ согласно маневру уклонения, предложенному при доказательстве теоремы 2.1 второй главы (соответствующему заданным начальным условиям), не учитывая преследователя x_3. Через t' обозначим момент времени, в который впервые выполнено равенство $\|\dot{z}_{31}(t')\| = \frac{1}{2}(p_1, \dot{z}^0_{31})$. Если такой момент $t' > 0$ не существует, то полагаем $t' = +\infty$. В этом случае $\|\dot{z}_{31}(t)\| > 0$ при $t \geqslant 0$, следовательно, $\tilde{\eta}_1(t) > 0$ при $t \geqslant 0$. И все доказано.

Пусть в некоторый момент $t' < +\infty$ выполнено $\|\dot{z}_{31}(t')\| = \frac{1}{2}(p_1, \dot{z}^0_{31})$. Покажем, что существует момент $\gamma' \in [0, t')$, в который $(p_1, \ddot{z}_{31}(\gamma')) < 0$. Предположим противное: при любом $\tau \in (0, t')$ справедливо неравенство $(p_1, \ddot{z}_{31}(\tau)) \geqslant 0$. Тогда

$$\|\dot{z}_{31}(t')\| \geqslant (p_1, \dot{z}^0_{31}) + \int\limits_0^{t'} (p_1, \ddot{z}_{31}(\tau)) d\tau > (p_1, \dot{z}^0_{31}),$$

что противоречит определению момента t'. Таким образом, в некоторый момент $\gamma' \in (0, t')$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 3} (p_1, \ddot{z}_{i1}(\gamma')) = \xi < 0.$$

На основании теоремы 2.1 второй главы заключаем, что в игре (2.3) для состояния

$$z(\gamma') = (z_{11}(\gamma'), \dot{z}_{11}(\gamma'), \ddot{z}_{11}(\gamma'), \ldots, z_{32}(\gamma'), \dot{z}_{32}(\gamma'), \ddot{z}_{32}(\gamma'))$$

разрешима задача убегания. Используя приведенный в доказательстве теоремы 2.1 второй главы маневр уклонения, определим управление игрока y_1 на полуинтервале $[\gamma', +\infty)$.

Случай 3. Предположим, что для начального состояния z^0 дифференциальной игры (2.3) выполнены неравенства

$$(p_j, \dot{z}^0_{3j}) < 0, \;\; j = 1, 2.$$

Определим число

$$\delta = \min\{1, \epsilon_1, \epsilon_2, \sqrt{\tilde{\eta}_1(0)}, \sqrt{\tilde{\eta}_2(0)}\}.$$

Зададим управления игроков y_1, y_2. Пусть j — некоторый индекс из множества $\{1, 2\}$. Полагаем

$$v_j(s) = p_j, \;\; s \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{l=1,\ldots,N_j} [t_{lj}, t_{lj} + \tau_{lj}).$$

Числа $N_j \leqslant 3$, t_{lj}, τ_{lj}, $l = 1, \ldots, N_j$, определяются в процессе игры.

В начальный момент $t = 0$ определим последовательности $\{\tau_1^{jr}\}_{r=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^{jr}\}_{r=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^{jr} = \tfrac{\delta}{2^{r+1}}, \;\; \delta_1^{jr} = \tau_1^{jr}(\delta\tau_1^{jr} - (\tau_1^{jr})^2).$$

Полагаем $\tau_{1j} = \tau_1^{j1}$, $\delta_{1j} = \delta_1^{j1}$. Маневр уклонения убегающего y_j определим рекуррентным образом. Итак, в момент сближения $t = t_{lj}$ определены числа τ_{lj}, δ_{lj}, такие, что

$$\sqrt{\delta_{lj}} < \tau_{lj}, \tag{2.8}$$

последовательности $\{\tau_l^{jr}\}_{r=l}^{\infty}$, $\{\delta_l^{jr}\}_{r=l}^{\infty}$ и впервые выполнены либо соотношения

$$\begin{aligned} &0 < \|\dot{z}_{3j}(t)\| \leqslant \delta_{lj}, \\ &(p_j, \ddot{z}_{3j}(t)) \geqslant 3\sqrt{\|\dot{z}_{3j}(t)\|}, \\ &(p_j, \dot{z}_{3j}(t)) < 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

либо

$$\|\dot{z}_{qj}(t)\| = \delta_{lj}, \quad (p_j, \dot{z}_{qj}(t)) > 0 \tag{2.10}$$

для некоторого $q \in \{1, 2\}$. Если в момент t_{lj} в плоскости первых производных происходит сближение убегающего $\dot{y}_j$ одновременно с преследователями $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, то полагаем $q = 1$ и строим маневр уклонения от преследователя $\dot{x}_1$. В случае одновременного сближения убегающего с преследователями $\dot{x}_3$, $\dot{x}_s$, $s \in \{1, 2\}$, в той же самой плоскости считаем, что произошло сближение с преследователем $\dot{x}_3$, и соответствующим образом выбираем управление игрока y_j.

Предположим, что в момент $t = t_{lj}$ выполнены неравенства (2.9). Тогда при $t = t_{lj} + \sqrt{\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\|}$

$$(p_j, \ddot{z}_{3j}(t)) \geqslant \sqrt{\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\|}, \tag{2.11}$$

$$(p_j, \dot{z}_{3j}(t)) \geqslant \|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\|, \tag{2.12}$$

при любых управлениях $u_3(s)$, $v_j(s)$ на $[t_{lj}, t_{lj} + \sqrt{\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\|}]$.

Из неравенства (2.8) получаем, что

$$\sqrt{\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\|} < \tau_{lj},$$

поэтому переопределим последовательности $\{\tau_l^{jr}\}_{r=l}^{\infty}$, $\{\delta_l^{jr}\}_{r=l}^{\infty}$ следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \tau_l^{jl} = \sqrt{\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\|}, & \tau_l^{jr} = \frac{\tau_l^{jl}}{2^{r-l}}, \\ \delta_l^{jr} = \tau_l^{jr}(\delta\tau_l^{jr} - (\tau_l^{jr})^2), & r \geqslant l+1, \end{array}$$

и полагаем $\tau_{lj} = \tau_l^{jl}$. Понятно, что $\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\| > \delta_l^{jl+1}$. Для того, чтобы задать управление $v_j(s)$ на полуинтервале $[t_{lj}, t_{lj} + \tau_{lj})$, воспользуемся маневром, подобным тому, что описан при доказательстве теоремы 2.1 второй главы.

Если

$$(\dot{z}_{3j}(t_{lj}), \ddot{z}_{3j}(t_{lj})) = -\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\|\|\ddot{z}_{3j}(t_{lj})\|,$$

то выберем такое число $\epsilon_{lj} \in (0, \tau_{lj})$, чтобы при произвольных управлениях $u_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, $v_1(s)$, $v_2(s)$, $s \in [t_{lj}, t_{lj} + \epsilon_{lj}]$, для любого $\tau \in [0, \epsilon_{lj}]$ выполнялись соотношения

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant 3} \|\dot{z}_{ij}(t_{lj} + \tau)\| > \delta_l^{jl+1},$$

$$(p_j, \dot{z}_{3j}(t_{lj} + \epsilon_{lj})) < 0.$$

В силу линейной зависимости векторов $\dot{z}_{3j}(t_{lj})$, $\ddot{z}_{3j}(t_{lj})$ существует такой вектор $\psi_{lj} \in \partial S$, что

$$(\psi_{lj}, \dot{z}_{3j}(t_{lj})) = (\psi_{lj}, \ddot{z}_{3j}(t_{lj})) = 0.$$

На отрезке $[t_{lj}, t_{lj} + \epsilon_{lj}]$ управление $v_j(s)$ выбираем так, чтобы

$$(\psi_{lj}, v_j(s)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_3(s), \psi_{lj}) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_3(s), \psi_{lj}) > 0. \end{cases}$$

Тогда существует число $\gamma_{lj} \in (0, \epsilon_{lj})$ такое, что

$$(\dot{z}_{3j}(t_{lj} + \gamma_{lj}), \ddot{z}_{3j}(t_{lj} + \gamma_{lj})) \neq -\|\dot{z}_{3j}(t_{lj} + \gamma_{lj})\| \|\ddot{z}_{3j}(t_{lj} + \gamma_{lj})\|.$$

Если же

$$(\dot{z}_{3j}(t_{lj}), \ddot{z}_{3j}(t_{lj})) \neq -\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\| \|\ddot{z}_{3j}(t_{lj})\|,$$

то полагаем $\gamma_{lj} = 0$. На полуинтервале $[t_{lj} + \gamma_{lj}, t_{lj} + \tau_{lj})$ управление $v_j(s)$ выбирается точно также, как и в случае сближения в плоскости первых производных в момент t_{lj} с преследователем $\dot{x}_1$ или $\dot{x}_2$, поэтому сначала опишем управление игрока y_j на $[t_{lj}, t_{lj} + \gamma_{lj})$, если при $t = t_{lj}$ выполняется соотношение (2.10).

Итак, пусть при $t = t_{lj}$ для некоторого $q \in \{1, 2\}$ справедливы соотношения (2.10). Так как в момент t_{lj} в плоскости первых производных не происходит сближение убегающего $\dot{y}_j$ с преследователем $\dot{x}_3$, то выполнено хотя бы одно из неравенств:

$$\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\| > \delta_{lj}; \tag{2.13}$$

$$(p_j, \ddot{z}_{3j}(t_{lj})) < 3\sqrt{\|\dot{z}_{3j}(t_{lj})\|}. \tag{2.14}$$

Предположим, что

$$(\dot{z}_{qj}(t_{lj}), \ddot{z}_{qj}(t_{lj})) = -\|\dot{z}_{qj}(t_{lj})\| \|\ddot{z}_{qj}(t_{lj})\|.$$

Тогда существует такое число $\epsilon_{lj} \in (0, \tau_{lj})$, что при любых управлениях $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $v_1(s)$, $v_2(s)$, $s \in [t_{lj}, t_{lj} + \epsilon_{lj}]$, для любого $\tau \in [0, \epsilon_{lj}]$ выполнены соотношения:

1) $(p_j, \dot{z}_{qj}(t_{lj} + \epsilon_{lj})) > 0$;

2) $\|\dot{z}_{rj}(t_{lj} + \tau)\| > \delta_l^{jl+1}$, если $(\dot{z}_{rj}(t_{lj}), p_j) > 0$, $r \in \{1, 2\} \setminus \{q\}$;

3) $\|\dot{z}_{3j}(t_{lj}+\tau)\| > \delta_{lj}$, если имеет место неравенство (2.13) или одновременно оба неравенства (2.13), (2.14);

4) $(p_j, \ddot{z}_{3j}(t_{lj}+\tau)) < 3\sqrt{\|\dot{z}_{3j}(t_{lj}+\tau)\|}$ в случае (2.14).

Найдется вектор $\psi_{lj} \in \partial S$, для которого

$$(\psi_{lj}, \dot{z}_{qj}(t_{lj})) = (\psi_{lj}, \ddot{z}_{qj}(t_{lj})) = 0.$$

Управление $v_j(s)$ на отрезке $[t_{lj}, t_{lj}+\epsilon_{lj}]$ выбираем согласно правилу

$$(\psi_{lj}, v_j(s)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_q(s), \psi_{lj}) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_q(s), \psi_{lj}) > 0, \end{cases}$$

тогда существует $\gamma_{lj} \in (0, \epsilon_{lj})$ такое, что

$$(\dot{z}_{qj}(t_{lj}+\gamma_{lj}), \ddot{z}_{qj}(t_{lj}+\gamma_{lj})) \neq -\|\dot{z}_{qj}(t_{lj}+\gamma_{lj})\|\|\ddot{z}_{qj}(t_{lj}+\gamma_{lj})\|.$$

Если же

$$(\dot{z}_{qj}(t_{lj}), \ddot{z}_{qj}(t_{lj})) \neq -\|\dot{z}_{qj}(t_{lj})\|\|\ddot{z}_{qj}(t_{lj})\|,$$

то полагаем $\gamma_{lj} = 0$.

Зададим теперь управление $v_j(s)$ на $[t_{lj}+\gamma_{lj}, t_{lj}+\tau_{lj})$. В момент $t = t_{lj}+\gamma_{lj}$ определим числа

$$\beta_{lj} = \min_{\tau \in [0, \tau_{lj}-\gamma_{lj}]} \min_{x \in H_{lj}(t_{lj}+\gamma_{lj}+\tau)} \|\dot{x}\|,$$

$$\xi_{lj} = \min\{-\tau_{lj} + \sqrt{\tau_{lj}^2 + \frac{\beta_{lj}}{2}}, \frac{\beta_{lj}}{4}\},$$

где $H_{lj}(t_{lj}+\gamma_{lj}+\tau)$ — это прямая, которая проходит через две точки: $\dot{z}_{qj}(t_{lj}+\gamma_{lj}) + \tau\ddot{z}_{qj}(t_{lj}+\gamma_{lj})$ и $\ddot{z}_{qj}(t_{lj}+\gamma_{lj})$.

По ξ_{lj} построим последовательности $\{\tau_{l+1}^{jr}\}_{r=l+1}^{\infty}$, $\{\delta_{l+1}^{jr}\}_{r=l+1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_{l+1}^{jl+1} = \min\{\tau_l^{jl+1}, \frac{\xi_{lj}}{2}\},\ \tau_{l+1}^{jl+r+1} = \frac{\tau_{l+1}^{jl+1}}{2^r},$$

$$\delta_{l+1}^{jl+r+1} = \tau_{l+1}^{jl+r+1}(\delta\tau_{l+1}^{jl+r+1} - (\tau_{l+1}^{jl+r+1})^2),\ r \geqslant 1,$$

и полагаем $\tau_{l+1j} = \tau_{l+1}^{jl+1}$, $\delta_{l+1j} = \delta_{l+1}^{jl+1}$. Пусть t_{lj} — момент сближения убегающего $\dot{y}_j$ с преследователем $\dot{x}_i$, $i \in \{1,2,3\}$, в плоскости первых производных, тогда полагаем $v_j(s) = u_i(s)$, $s \in [t_{lj}+\gamma_{lj}, t_{lj}+\tau_{lj})$, если на $[t_{lj}+\gamma_{lj}, t_{lj}+\tau_{lj})$ не происходит сближение убегающего $\dot{y}_j$ с преследователем $\dot{x}_r$, $r \in \{1,2,3\}\setminus\{i\}$, и полагаем $v_j(s) = u_i(s)$, $s \in [t_{lj}+\gamma_{lj}, t_{lj}+\tau_{lj}) \setminus \bigcup\limits_{p=l+1,N_l} [t_{pj}, t_{pj}+\tau_{pj})$ — в противном случае.

Покажем, что при построенных таким образом управлениях убегающих y_1, y_2, любых управлениях преследователей x_i, i из $\{1,2,3\}$, или $\tilde{\eta}_j(t) > 0$, $j = 1,2$, при $t \geqslant 0$, или в некоторый момент $t^* > 0$ существует $j \in \{1,2\}$, для которого $\tilde{\eta}_j(t) > 0$ при $t \in [0,t^*]$ и выполнено одно из условий:

$$1.\ 0 \notin \mathrm{co}\{\ddot{z}_{1j}(t^*), \ddot{z}_{2j}(t^*), \ddot{z}_{3j}(t^*)\}; \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} 2.\ &(p_j, \ddot{z}_{rj}(t^*)) < -\delta,\ r = 1,2,\\ &(p_j, \ddot{z}_{3j}(t^*)) > 0,\\ &(p_j, \dot{z}_{3j}(t^*)) > 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Выполнение каждого из условий (2.15), (2.16) влечет за собой разрешимость задачи убегания в дифференциальной игре (2.3) для состояния $z(t^*)$.

На полуинтервале $[t^*, +\infty)$ управление $v_j(s)$ выбирается согласно маневру уклонения, описанному при доказательстве теоремы 2.1 главы 2 или в случае 2. Управление $v_r(s)$, $r \in \{1,2\} \setminus \{j\}$, $s \in [t^*, +\infty)$, задается произвольным образом.

Заметим, что если в плоскости первых производных в некоторый момент $t = t_{lj}$ происходит сближение игрока y_j, $j \in \{1,2\}$, с преследователем x_3, то $\|\dot{z}_{3j}(\tau)\| > 0$ при $\tau \in [t_{lj}, t_{lj}+\tau_{lj}]$. Более того, из неравенств (2.11), (2.12) следует, что в качестве момента t^* можно взять $t_{lj} + \tau_{lj}$.

Предположим, что в некоторый момент $t' > 0$ в плоскости первых производных происходит поимка преследователем $\dot{x}_3$ убегающего $\dot{y}_1$ и при любом $t \in [0, t')$ имеет место соотношение

$$0 \in \mathrm{co}\{\ddot{z}_{11}(t), \ddot{z}_{21}(t), \ddot{z}_{31}(t)\}. \tag{2.17}$$

Значит, на $[0, t')$ момента сближения игрока $\dot{y}_1$ с преследователем $\dot{x}_3$ в плоскости первых производных не было. Поэтому для достаточно малых $\tau > 0$ выполнены неравенства

$$0 \leqslant (p_1, \ddot{z}_{31}(t' - \tau)) < 3\sqrt{\|\dot{z}_{31}(t' - \tau)\|}.$$

Устремляя τ к нулю получаем

$$(p_1, \ddot{z}_{31}(t')) = 0. \tag{2.18}$$

Многозначное отображение $\mathrm{co}\{\ddot{z}_{11}(t), \ddot{z}_{21}(t), \ddot{z}_{31}(t)\}$ непрерывно, следовательно, соотношение (2.17) справедливо и при $t = t'$, иными словами, существуют такие неотрицательные числа α_i, $\sum\limits_{i=1,2,3} \alpha_i = 1$, что справедливо равенство $\alpha_1 \ddot{z}_{11}(t') + \alpha_2 \ddot{z}_{21}(t') + \alpha_3 \ddot{z}_{31}(t') = 0$. Из равенства (2.18) и неравенств $(p_1, \ddot{z}_{i1}(t')) < -\delta$, $i = 1, 2$, получаем, что выполнены равенства $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, то есть

$$\ddot{z}_{31}(t') = 0. \tag{2.19}$$

Так как $0 \notin \mathrm{co}\{\ddot{y}_1(t') - \ddot{y}_2(t'), \ddot{z}_{12}(t'), \ddot{z}_{22}(t')\}$, то

$$\ddot{z}_{31}(t') \neq \ddot{z}_{32}(t'), \tag{2.20}$$

поэтому одновременно поимка преследователем $\dot{x}_3$ в момент t' убегающих $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$ в плоскости первых производных невозможна. Учитывая (2.19), (2.20), получаем $0 \notin \mathrm{co}\{\ddot{z}_{32}(t'), \ddot{z}_{12}(t'), \ddot{z}_{22}(t')\}$, что равносильно утверждению о разрешимости в игре (2.3) для состояния $z(t')$ задачи убегания.

Таким образом, мы показали, что если преследователю $\dot{x}_3$ удалось в момент $t' > 0$ в плоскости первых производных поймать одного убегающего, то второй убегающий при $t \geqslant t'$ может избежать поимки. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Азамов А.О.* О задаче убегания по заданной кривой// Прикладная математика и механика. 1982. вып. 4. С. 694-697.

2. *Азамов А.О.* Об альтернативе для игр преследования на бесконечном интервале времени// Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. вып. 4. С. 561-570.

3. *Азамов А.О.* О существовании стратегии с кусочно-постоянными реализациями// Математические заметки. 1987. Т. 41. № 5. С. 718-723.

4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967.

5. *Альбус Дж., Мейстел А., Чикрий А.А., Белоусов А.А., Козлов А.И.* Об игровой задаче «мягкой посадки» для движущихся объектов// Искусственный интеллект. 2000. № 3. С. 404-411.

6. *Бардадым Т.А.* Задача преследования с простым движением и разнотипными ограничениями на управления// Кибернетика. 1982. № 2. С. 80-84.

7. *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц. М.: ИФМЛ. 1961.

8. *Благодатских А.И.* Две задачи группового преследования// Известия ИМИ, №1(21), 2001, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-14.

9. *Благодатских А.И.* Пример Понтрягина со многими убегающими// Известия ИМИ, №2(25), 2002, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 23-26.

10. *Благодатских А.И.* Уклонение от группы инерционных объектов// Шестая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция: Материалы конференции. Ч. 2, Ижевск: УдГУ, 2004, с. 77.

11. *Благодатских А.И.* Уклонение жестко скоординированных убегающих в одной задаче группового преследования// Известия ИМИ, №2(30), 2004, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-24.

12. *Благодатских А.И.* Одна задача уклонения жестко скоординированных убегающих// Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тезисы докладов, Екатеринбург: УрО РАН, 2004, с. 147-148.

13. *Благодатских А.И.* Об одной задаче уклонения от многих преследователей// Проблемы современного математического образования в ВУЗах и школах России: Тезисы докладов, Киров: ВятГГУ, 2004, с. 137-138.

14. *Благодатских А.И.* Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы инерционных объектов// Известия РАН. Теория и системы управления, 2004, №6, с. 143-149.

15. *Благодатских А.И.* О некоторых задачах группового преследования// Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной конференции. Т.2, Узбекистан, Ташкент, 2004, с. 33-36.

16. *Благодатских А.И.* О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками// Известия ИМИ, №2(32), 2005, Ижевск: Изд-во УдГУ, с. 3-22.

17. *Благодатских А.И.* Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками// Известия РАН. Теория и системы управления, 2005, №2, с. 43-45.

18. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих// Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75-79.

19. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями// Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. вып. 2. С. 234-241.

20. *Вайсборд Э.М., Жуковский В.И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Сов. радио. 1980.

21. *Васильева Л.Г.* Об одной дифференциальной игре убегания// Дифференциальные, бескоалиционные, кооперативные и статистические игры. Калинин.: Изд-во Калининск. ун-та. 1979. С. 26-33.

22. *Вшиневицкий Л.С., Меликян А.А.* Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия// Прикладная математика и механика, 1982. вып. 4. С. 613-621.

23. *Габриэлян М.С., Субботин А.И.* Игровые задачи о встречи с m целевыми множествами// Прикладная математика и механика. 1979. вып. 2. С. 204-208.

24. *Григоренко Н.Л.* Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего// Вестник МГУ. Серия вычисл. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41-47.

25. *Григоренко Н.Л.* Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих// ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051-1054.

26. *Григоренко Н.Л.* Задача преследования несколькими объектами// Труды математического ин-та АН СССР. 1984. Т. 166. С. 61-75.

27. *Григоренко Н.Л.* О квазилинейной задаче преследования несколькими объектами// ДАН СССР. 1977. Т. 259. № 5. С. 1040-1043.

28. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Московского ун-та. 1990.

29. *Губарев Е.В.* Убегание от группы преследователей// Автоматика. 1992. № 5. С. 66-70.

30. *Гусятников П.Б.* Дифференциальная игра убегания m лиц// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 22-32.

31. *Гусятников П.Б.* Теория дифференциальных игр. М.: МФТИ. 1982.

32. *Гусятников П.Б.* Убегание одного нелинейного объекта от нескольких более инертных преследователей// Дифференциальные уравнения. 1976. Т.12. № 2. С. 1316-1324.

33. *Гусятников П.Б.* Дифференциальная игра убегания// Кибернетика. 1978. № 4. С. 72-77.

34. *Гусятников П.Б., Половинкин Е.С.* Простая квазилинейная задача преследования// Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44. вып. 5. С. 771-782.

35. *Демидов К.В.* Об одной задаче группового преследования с r-кратной поимкой// Вопросы вычислительной математики и программирования. М.: МГУ. 1984. С. 73-75.

36. *Демидов К.В.* Дифференциальные игры с переменной структурой группы преследующих и одного убегающего// Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. вып. 1. С. 155-159.

37. *Железнов В.С., Иванов М.Н., Маслов Е.П.* Об одной задаче уклонения в пространстве// Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 11-22.

38. *Жимовский В.* Два следствия решения одной задачи уклонения от многих преследователей// Bull. Acad. Sci. Ser. math. 1980. Т. 28. № 3-4. С. 155-159.

39. *Жуковский В.И., Чикрий А.А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1994.

40. *Зак В.Л.* Об одной задаче уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1979. 43. № 3. С. 57-71.

41. *Зак В.Л.* Задача уклонения от многих преследователей// ДАН СССР. 1982. Т. 265. № 5. С. 1051-1053.

42. *Зак В.Л.* Кусочно-программная стратегия уклонения от многих преследователей// Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт. 1982. №199.

43. *Зак В.Л.* Построение стратегии уклонения от нескольких преследователей для динамических систем// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 4. С. 143-147.

44. *Зонневенд Д.* Об одном методе преследования// ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 6. С. 1296-1299.

45. *Зонневенд Д.* Об одном типе превосходства игрока// ДАН СССР. 1973. Т. 208. № 3. С. 520-523.

46. *Ибрагимов Г.И.* Об одной задаче оптимального преследования несколькими объектами одного// Прикладная математика и механика. 1998. Т.62. вып. 2. С. 199-205.

47. *Иванов Р.П.* К вопросу о мягкой поимке в дифференциальных играх со многими догоняющими и одним уклоняющимся игроком// Труды Математического института АН СССР. 1988. Т. 185. С. 74-83.

48. *Иванов Р.П., Маслов Е.П.* О сравнении двух методов преследования в задаче о поочередной встрече// Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 38-43.

49. *Иванов Р.П.* Простое преследование-убегание на компакте// ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1318-1321.

50. *Иванов Р.П.* Измеримые стратегии в дифференциальных играх// Математический сборник. 1989. Т. 180. № 1. С. 119-135.

51. *Иванов Р.П., Ледяев Ю.С.* Оптимальность времени преследования в диффернциальной игре многих объектов с простым движением// Труды математическ. ин-та АН СССР. 1981. Т. 158. С. 87-97.

52. *Исаичкина Л.Ю.* Об одном классе дифференциальных игр многих лиц// Некоторые вопросы прикл. мат. и программ. обесп. ЭВМ. М.: МГУ. 1982. С. 52-55.

53. *Ковшов А.М.* Параллельные стратегии в играх преследования на сфере// Автореферат дисс. на соиск. уч. ст. канд. наук. СПб. 1996. 12с.

54. *Константинов Р.В.* О квазилинейной дифференциальной игре преследования с простой динамиков при наличии фазового ограничения// Математические заметки. 2001. Т. 69. вып. 4. С. 581-590.

55. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встречи движений. М.: Наука. 1970.

56. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

57. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой: задаче о минимуме гарантированного результата. М.: Наука. 1985.

58. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир. 1966.

59. *Кучкаров А.Ш., Рихсиев Б.Б.* О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями// Автоматика и телемеханика. 2001. № 8. С. 41-45.

60. *Лагунов В.Н.* Введение в дифференциальные игры. Вильнюс. 1979.

61. *Лагунова Н.В.* Задача убегания от четырех преследователей// Вестник МГУ. Серия 15. 1992. № 3. С. 57-63.

62. *Малофеев О.А., Петросян Л.А.* Игра простого преследования на плоскости с препятствием// Сб. трудов ин-та математики Сиб. отд. АН СССР. 1971. вып. 9. С. 31-42.

63. *Малофеев О.А.* Дифференциальные игры простого преследования на многообразиях// Математические методы организации и управления в сложных системах. Калинин: Изд-во Калинин. ун-та. 1982. С. 69-74.

64. *Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Дифференциальные игры преследования-уклонения с групповой целью// Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ. 1991. Т. 32. С. 32-59.

65. *Мезенцев А.В.* О некоторых классах дифференциальных игр// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 6. С. 3-7.

66. *Мезенцев А.В.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями. М.: МГУ. 1988.

67. *Меликян А.А.* Оптимальное взаимодействие двух преследователей в игровой задаче// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №2. С. 49-56.

68. *Меликян А.А., Овакимян Н.В.* Игровая задача простого преследования на многообразиях// Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. вып. 1. С. 54-62.

69. *Меликян А.А., Овакимян Н.В.* Игровая задача простого преследования на двумерном конусе// Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. вып. 5. С. 741-750.

70. *Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц// Труды математич. ин-та АН СССР. 1977. Т. 143. С. 105-128.

71. *Никольский М.С.* О линейной задаче убегания// ДАН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1024-1027.

72. *Никольский М.С.* О квазилинейной задаче убегания// ДАН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 539-542.

73. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С.Понтрягина в дифференциальных играх. М.: МГУ. 1984.

74. *Остапенко В.В.* О нелинейной задаче убегания// Кибернетика. 1978. № 3. С. 106-112.

75. *Остапенко В.В.* Задача уклонения от встречи// Автоматика и телемеханика. 1980. № 4. С. 16-23.

76. *Патланжоглу О.М.* О потенциале игрока в обобщенном контрольном примере Л.С.Понтрягина// Автоматика. 1992. № 6. С. 17-26.

77. *Пацко В.С.* Дифференциальная игра уклонения на плоскости// Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. вып. 4. С. 604-608.

78. *Пацко В.С.* Дифференциальная игра качества второго порядка// Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. вып. 4. С. 596-605.

79. *Пашков А.Г., Терехов С.Д.* Дифференциальные игры сближения двух динамических объектов с третьим// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 3. С. 66-71.

80. *Петров Н.Н.* Теория игр. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1997.

81. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем// Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606-617.

82. *Петров Н.Н.* Доказательство существования значения игры преследования с ограниченным временем// Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 5. С. 784-797.

83. *Петров Н.Н.* Существование значения игры преследования// Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 5. С. 827-839.

84. *Петров Н.Н.* О существовании значения игры преследования// ДАН СССР. 1970. Т. 190. № 6. С. 1289-1291.

85. *Петров Н.Н.* Некоторые экстремальные задачи поиска на графах// Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 5. С. 821-827.

86. *Петров Н.Н.* Преследование невидимого подвижного объекта// Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 11. С. 1563-1565.

87. *Петров Н.Н., Прокопенко В.А.* Об одной задаче преследования группы убегающих// Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724-726.

88. *Петров Н.Н., Петров Н.Никандр.* О дифференциальной игре «казаки-разбойники»// Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366-1374.

89. *Петров Н.Н.* Простое преследование при наличии фазовых ограничений// Деп. в ВИНИТИ 20 марта 1984г. № 1684. 14с.

90. *Петров Н.Н.* Одна оценка в дифференциальной игре со многими убегающими// Вестник Лениград. ун-та. 1985. № 22. С. 107-109.

91. *Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями// Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. вып. 6. С. 1030-1033.

92. *Петров Н.Н.* Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями// Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22-26.

93. *Петров Н.Н.* Квазилинейные конфликтно-управляемые процессы с дополнительными ограничениями// Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. вып. 6. С. 61-68.

94. *Петров Н.Н.* Об одном классе задач группового преследования с фазовыми ограничениями// Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 42-49.

95. *Петров Н.Н.* Существование значения игры преследования со многими участниками// Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. вып. 4. С. 22-29.

96. *Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями// Математика. Изв. вузов. 1994. № 4(383). С. 24-29.

97. *Петров Н.Н.* Об одной задаче преследования группы убегающих// Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 48-54.

98. *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Л.С.Понтрягина с фазовыми ограничениями// Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. вып. 5. С. 747-754.

99. *Петров Н.Н.* Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 89-95.

100. *Петров Н.Н.* Нестационарный пример Понтрягина с фазовыми ограничениями// Проблемы управления и информатики. 2000. № 4. С. 18-24.

101. *Петров Н.Н.* Одна задача уклонения от многих преследователей// Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1. С. 41-43.

102. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ. 1977.

103. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука. 1983.

104. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Динамические игры и их приложения. Л.: ЛГУ. 1982.

105. *Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А.* Колебательные конфликтно-управляемые процессы// Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. вып. 3. С. 3-14.

106. *Питцык М.В., Чикрий А.А.* О задаче группового преследования// Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. вып. 5. С. 730-736.

107. *Питцык М.В.* О методе группового преследования// Математические методы исследования оптимизационных задач. Киев: Изд-во ин-та Кибернетики АН УССР. 1984.

108. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т.2. М.: Наука. 1988.

109. *Понтрягин Л.С.* Линейная дифференциальная игра убегания// Труды математического ин-та АН СССР. 1971. Т. 112. С. 30-63.

110. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх I// ДАН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278-1280.

111. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх II// ДАН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764-766.

112. *Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.* Задача об убегании одного управляемого объекта от другого// ДАН СССР. 1969. Т. 189. № 4. С. 721-723.

113. *Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх// Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 436-445.

114. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1969.

115. *Прокопович П.В., Чикрий А.А.* Одна дифференциальная игра убегания// ДАН УССР. Серия А. 1989. № 1. С. 71-74.

116. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами// Кибернетика. 1976. № 3. С. 145-146.

117. *Пшеничный Б.Н.* О линейных дифференциальных играх// Кибернетика. 1968. № 1. С. 47-53.

118. *Пшеничный Б.Н.* О задаче убегания// Кибернетика. 1975. № 4. С. 120-127.

119. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка. 1992.

120. *Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С.* К решению задачи простого преследования несколькими управляемыми объектами// Ин-т Кибернетики АН УССР. Препринт 79-47. 1979. С. 3-6.

121. *Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С.* Об одной задаче группового преследования// Кибернетика. 1979. № 6. С. 145-146.

122. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх// ЖВМ И МФ. 1974. Т. 14. № 6. С. 416-427.

123. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А.* Дифференциальная игра уклонения// Известия АН СССР. Техническая кибернентика. 1977. № 1. С. 3-9.

124. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии ограничений// ДАН СССР. 1981. Т. 259. № 4. С. 785-789.

125. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Групповое преследование в дифференциальных играх// Wiss. Z. Jechn. Hochsch. Leipzig. 1982. Т. 6. № 1. С. 13-27.

126. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими участниками// ДАН СССР. 1981. Т. 256. № 3. С. 530-535.

127. *Рихсиев Б.Б.* Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх многих лиц с простым движением// Известия АН УзбССР. Серия физ-мат наук. 1984. № 4. С. 37-39.

128. *Рихсиев Б.Б.* Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент: Фан. 1989.

129. *Рихсиев Б.Б., Ибрагимов Г.И.* Простое преследование в кубе// Изв. АН УзбССР. Серия физ-мат наук. 1990. № 2. С. 42-45.

130. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973.

131. *Савинов В.Б.* Дифференциальная игра преследования одним преследователем нескольких убегающих// Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 1995. Т. 3. С. 147-171.

132. *Сатимов Н.Ю.* Об одном способе уклонения в дифференциальных играх// Мат. сб. 1976. 99(141). № 3. С. 432-444.

133. *Сатимов Н.Ю.* Задача убегания в дифференциальных играх с нелинейными управлениями// Автоматика и телемеханика. 1974. № 5. С. 26-33.

134. *Сатимов Н.Ю.* Задача преследования и убегания для одного класса линейных дифференциальных игр многих лиц// Прикл. мат. и механика. Ташкент: Изд-во Ташкент. ун-та. 1981. № 670. С. 64-75.

135. *Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш.* О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих// ДАН Узб.ССР. 1983. № 4. С. 3-6.

136. *Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш.* Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих// Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 7. С. 1208-1214.

137. *Сатимов Н.Ю., Азамов А.О., Хайдаров Б.К.* Простое преследование многими объектами одного убегающего// ДАН Узб.ССР. 1981. № 12. С. 3-5.

138. *Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б.* Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан. 2000.

139. *Сатимов Н.Ю.* О задачах избежания взаимных столкновений// ДАН Узб.ССР. 1981. № 2. С. 3-5.

140. *Синицын А.В.* Построение функции цены в игре преследования несколькими объектами// Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. вып. 1. С. 52-57.

141. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981.

142. *Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.* Алгоритм построения стабильного моста в линейной задаче сближения с выпуклой целью// Исследования задач минимаксного управления. Свердловск: Изд УНЦ АН СССР. 1985. С. 82-90.

143. *Ухоботов В.Н.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями общего вида. Челябинск: Изд-во Челябинск. ун-та. 1998.

144. *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 4. С. 29-36.

145. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука. 1978.

146. *Черноусько Ф.Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей// Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. вып. 1. С. 14-24.

147. *Чикрий А.А., Белоусов А.В.* Проблема управляемости для конфликтно управляемых процессов// ДАН СССР. 1990. Т. 321. № 6. С. 1330-1335.

148. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Линейная задача преследования несколькими объектами// Кибернетика. 1978. № 3. С. 86-92.

149. *Чикрий А.А.* Задача уклонения в нелинейных дифференциальных играх// Кибернетика. 1975. № 3. С. 65-69.

150. *Чикрий А.А.* Задача уклонения в нестацонарных дифференциальных играх// Прикладная математика и механика. 1975. № 5. С. 780-787.

151. *Чикрий А.А.* Линейная задача убегания от многих преследователей// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 4. С. 46-50.

152. *Чикрий А.А.* Достаточные условия в нелинейных дифференциальных играх// ДАН СССР. 1978. Т. 241. № 3. С. 547-551.

153. *Чикрий А.А.* Достаточные условия в нелинейных дифференциальных играх нескольких лиц// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 14-21.

154. *Чикрий А.А.* Нелинейные дифференциальные игры убегания// ДАН СССР. 1979. Т. 246. № 5. С. 1051-1055.

155. *Чикрий А.А.* Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего// Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. вып. 6. С. 906-913.

156. *Чикрий А.А.* Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками// ДАН СССР. 1979. Т. 246. № 6. С. 1306-1309.

157. *Чикрий А.А.* Квазилинейная задача сближения с участием нескольких лиц// Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. вып. 3. С. 451-455.

158. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Квазилинейные конфликтно управляемые процессы с переменной структурой// Проблемы управления и информатики. 1998. № 6. С. 31-41.

159. *Чикрий А.А., Питцык М.В.* Сочетание усилий преследователей с различными динамическими возможностями// ДАН УССР. 1984. А. № 1. С. 73-76.

160. *Чикрий А.А.* О задаче уклонения в линейной дифференциальной игре// Автоматика и телемеханика. 1977. № 9. С. 24-29.

161. *Чикрий А.А.* О задачах убегания при ограниченных фазовых координатах// Кибернетика. 1977. № 4. С. 40-45.

162. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры нескольких лиц// Кибернетика. 1976. № 4. С. 99-101.

163. *Чикрий А.А.* Об одном способе убегания от нескольких преследователей// Автоматика и телемеханика. 1978. № 8. С. 33-38.

164. *Чикрий А.А.* Метод переменных направлений в нелинейных дифференциальных играх нескольких лиц// Кибернетика. 1984. № 1. С. 48-54.

165. *Чикрий А.А., Шишкина Н.Б.* О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений// Автоматика и телемеханика. 1985. № 2. С. 59-69.

166. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка. 1992.

167. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями// Mathematical Control Theory. Banach Center Publications. 1985. V.14. С. 81-107.

168. *Чикрий А.А., Губарев Е.В.* Достаточные условия разрешимости глобальной задачи убегания для нелинейных дифференциальных игр// Киев. 1992. 38 с.

169. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* Линейная задача убегания при взаимодействии групп управляемых объектов// Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. вып. 4. С. 12-21.

170. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов// Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 998-1004.

171. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов// Кибернетика. 1989. № 5. С. 59-63,78.

172. *Чикрий А.А.* Задача убегания при взаимодействии групп линейных объектов// ДАН СССР. 1993. Т. 333. № 5. С. 591-593.

173. *Чикрий А.А., Калашникова С.Ф.* Преследование управляемым объектом группы убегающих// Кибернетика. 1987. № 4. С. 1-8.

174. *Чикрий А.А.* Проблема уклонения от встречи для управляемых динамических объектов// Проблемы управления и информатики. 1996. № 1-2. С. 120-132.

174. *Чхартишвили А.Г.* Об одном геометрическом свойстве следящей области в задаче поиска// Вестник МГУ. Серия 1. 1992. № 3. С. 7-10.

175. *Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В.* О простых играх поиска на бесконечном круглом цилиндре// Математические заметки. 1995. Т. 58. № 5.

С. 762-772.

176. *Хайдаров Б.К.* Позиционная l-поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей// Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. вып. 4. С. 574-579.

177. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир. 1970.

178. *Шевченко И.И.* Простейшая модель поочередного преследования// Автоматика и телемеханика. 1982. № 4. С. 38-42.

179. *Шевченко И.И.* Поочередное преследование трех убегающих// Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 70-75.

180. *Шевченко И.И.* О сближении с коалицией// Автоматика и телемеханика, 1986. № 1. С. 47-55.

181. *Фазылов А.З.* К задаче избежания столкновений// Изв. АН УзбССР. Серия физ-мат наук. 1987. № 3. С. 30-36.

182. *Югай Л.П.* Об l-уклонении в линейной дифференциальной игре многих лиц// Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 5. С. 840-845.

183. *Югай Л.П.* Об одном достаточном условии уклонения по направлению// Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1291-1292.

184. *Berkovitz L.D.* Differential game of generalized pursuit and evasion// SIAM J. Contr. and Optimiz. 1986. V. 24. № 3. p. 361-373.

184. *Borowko P., Rzymowski W.* Avoidance of many pursuers in the simple motion case// J. Math. Analys. Appl. 1985. P. 111.

186. *Borowko P., Rzymowski W., Stachura A.* Evasion from many pursuers in the simple case// J. Math. Anal. and Appl. 1988. V. 135. № 1. p. 75-80.

187. *Chikrii A.A.* On a method of pursuit in «trachs». Доп. Нац. АН Укр. 2000. № 6. p. 109-113.

188. *Chikrii A.A.* The problem of avoidance for controlled dynamic objects// Game Theory and Appl. 1997. V. III. p. 7-20.

189. *Chikrii A.A., Prokopovich P.V.* Linear Avoidance in the case of interaction of controlled objects groups// Annals of the International Society of Dynamic Games, New Trends in Dynamics Games and Applications, Birkhauser. 1995. № 3. P. 259-269.

190. *Chodun W.* Differential games of evasion with many pursuers// J. Math. Anal. and Appl. 1989. V. 142. № 2. p.370-389.

191. *Chodun W.* Avoidance of many pursuers in differential games described by differential inclusions// J. Math. Anal. and Appl. 1988. p.135.

192. *Chodun W.* Avoidance of many pursuers in differential games described by k-order differential equations// J. Math. Anal. and Appl. 1988. p.76.

193. *Flynn J.O.* Lion and Mann: the boundary constraint// SIAM. J. Control. 1971. V 11. № 3. p.397-411.

194. *Friedman A.* Differential Games. New York: Wiley Intersci. 1971.

195. *Gamkrelidze R.V., Kharatishvili G.L.* A differential game of evasion with nonlinear control// SIAM J. Control. 1974. V 12. № 2. P. 332-349.

196. *Hajek O.* Pursuit Games. New York: Acad. Press. 1975.

197. *Kaskosz B.* On a nonlinear evasion problem// SIAM J. Control. 1977. V 15. № 4. P. 661-673.

198. *Leitman G., Lin H.S.* Evasion in the plane// Lect. Notes Contr. Inform. Sci. 1978. № 6. p. 255-263.

199. *Melikyan A.A.* Structure of the value function in pursuit-evasion games on the surfaces of revolution// Кибернетика и системный анализ. 2002. № 3. С. 155-162.

200. *Petrov N.N.* Group pursuit with phase restrictions// International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra. 1998. V 7. № 2/3. p.179-187.

201. *Petrov N.N.* About one Pursuit Problem with many Evaders// Game Theory and Applications. 2001. V. VI. p. 82-88.

202. *Rzymowski W.* On the game of n+1 cars// J. Math. Analys. Appl. 1984. P. 99.

203. *Rzymowski W.* Method of construction of the evasion strategy for differential games with many pursuers// Dissertationes Math. CCXLVII. 1986. P. 3-44.

204. *Rzymowski W.* Avoidence of one pursuer// J. Math. Analys. Appl. 1986. P. 120.

205. *Rzymowski W.* Method of construction of the evasion strategy for differential game with many evaders// Roszpr. mat. 1986. № 247. 48p.

206. *Vagin D.A., Chirkova L.S., Petrov N.N.* About some problems of group pursuit// Control Applications of Optimization 11th IFAC INTERNATIONAL WORKSHOP, 3-6 July, 2000. Abstracts, S-P. 2000, p. 197-198.

207. *Vagin D.A., Petrov N.N.* On One Problem of Pursuit of a Group of Evaders// International Conference Logic, Game Theory and Social Choice, S-P. 2001, p. 204-205.

208. *Vagin D.A., Petrov N.N.* The Two Problems of Group Pursuit// The Tenth International Symposium of Dynamic Games and Applications. Proceedings, V2, S-P. 2002, p. 691-695.

209. *Yong J.* On differential evasion games// SIAM J. Contr. and Optimiz. 1988. V. 26. № 1. p. 1-22.