

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.977

НИКОЛАЕВ СЕРГЕЙ ФЁДОРОВИЧ

**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ И
ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —

доктор физико-математических наук,
профессор Е.Л. Тонков

Ижевск — 1998 г.

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Докритические системы	20
§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения	21
§ 2. Докритичность и неосцилляция	25
§ 3. Свойства функции $\sigma(t)$	36
§ 4. Численный алгоритм построения функции $\sigma(t)$	40
Глава 2. Структура множества управляемости докритических систем и вектор быстрогодействия	49
§ 5. Структура множества управляемости	50
§ 6. Структура расширенного множества управляемости	60
§ 7. Численное моделирование границы множества управляемости	70
§ 8. Вектор быстрогодействия	78
Глава 3. Позиционное управление докритической системой	85
§ 9. Постановка задачи и пример П. Бруновского	86
§ 10. Позиционное управление докритической системой, оптимальное в смысле быстрогодействия	90
§ 11. Уравнение Беллмана	97
§ 12. Позиционное управление нелинейной системой, близкой к докритической	103
Литература	114

Введение

Теория оптимального быстродействия, основу которой составляет принцип максимума Л.С. Понтрягина [1]–[4], предоставляет принципиальную возможность построения оптимальных процессов во многих прикладных задачах. Наиболее полно изучена задача быстродействия для линейных стационарных систем (см. [2]–[7] и библиографию в [8]), для которых в ряде случаев удастся построить позиционное управление [2, гл. 1, § 5], [5]. Если же изучаемая система оказывается нестационарной, то для таких систем, как правило, строится программное управление [9]–[12]. Вопросы существования и построения позиционного управления достаточно изучены для автономных систем [13] (в том числе для автономных систем с возмущением [14]), тогда как для неавтономных систем эти вопросы изучены достаточно мало [15, гл. 5, § 20], [16].

Рассмотрим задачу быстродействия для управляемой нестационарной системы

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U, \quad (0.1)$$

где U — компакт в \mathbb{R}^m , $0 \in U$ и $v(t, 0, 0) = 0$. Пусть $\mathfrak{D} = \mathbb{R} \times D(t)$ — некоторая фиксированная область в пространстве \mathbb{R}^{1+n} , $0 \in \text{int } D(t)$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Функцию $u(t, x)$, определенную в области \mathfrak{D} и принимающую значения в U будем называть *устойчивым к внешним возмущениям позиционным управлением, оптимальным в смысле быстродействия*, если выполнены следующие четыре условия.

1. Для всякой точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}$ решение $x(t; t_0, x_0)$ (понимаемое в смысле А.Ф. Филиппова [17, с. 40]) замкнутой системы

$$\dot{x} = v(t, x, u(t, x))$$

определено и единственно при всех $t \geq t_0$.

2. Найдется такой момент времени $\vartheta(t_0, x_0)$, что

$$x(t; t_0, x_0) \Big|_{t=t_0+\vartheta(t_0, x_0)} = 0.$$

3. Программное управление

$$u(t; t_0, x_0) = u(t, x(t; t_0, x_0))$$

является оптимальным для задачи быстрогодействия

$$\begin{aligned} \vartheta(u(\cdot)) &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= v(t, x, u), \quad u \in U, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(t_0 + \vartheta) = 0. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Время быстрогодействия для задачи (0.2) обозначим $\tau_n(t_0, x_0)$.

4. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что каждой функции $w(t, x) \in O_\delta^n(0)$, $(t, x) \in \mathfrak{D}$, и любому $\eta > 0$ отвечает функция $w_\eta(t, x) \in O_\eta^n(w(t, x))$, $(t, x) \in \mathfrak{D}$, для которой любое решение $x_\eta(t; t_0, x_0)$ (в смысле А.Ф. Филиппова) системы

$$\dot{x} = v(t, x, u(t, x)) + w_\eta(t, x), \quad (t, x) \in \mathfrak{D}, \quad (t_0, x_0) \in \mathfrak{D}, \tag{0.3}$$

удовлетворяет равенству $x_\eta(t; t_0, x_0) \Big|_{t=t_0+\vartheta_\eta} = 0$ при некотором $\vartheta_\eta = \vartheta_\eta(t_0, x_0) \geq 0$, причём $|\vartheta_\eta(t_0, x_0) - \tau_n(t_0, x_0)| \leq \varepsilon$.

Последнее условие обычно не включается в определение позиционного управления, оптимального в смысле быстрогодействия, но это условие является важным с точки зрения приложений, поскольку обеспечивает непрерывную зависимость времени быстрогодействия от возмущений основной системы (0.1). Это условие близко к требованию *универсальности стратегии* в теории дифференциальных игр, которое впервые введено Н.Н. Красовским [18] и подробно изучалось в работах Н.Н. Красовского и его учеников [19], [20].

З а м е ч а н и е 0.1. Поскольку всюду в этой работе рассматривается лишь устойчивое к внешним возмущениям позиционное управление, оптимальное в смысле быстрогодействия, то для краткости это управление будет называться позиционным управлением, оптимальным в смысле быстрогодействия или просто позиционным управлением.

З а м е ч а н и е 0.2. Для некоторых систем функция $w(t, x)$ может быть большой. Как следует из сформулированной ниже теоремы 0.10, для класса систем, рассматриваемых в данной работе, эта функция должна удовлетворять лишь односторонним ограничениям. Так, для скалярного уравнения

$$\dot{x} = u + w(x), \quad |u| \leq 1$$

управление

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

является позиционным управлением, оптимальным в смысле быстрого действия, если, например, $w(x) = -x^3 + \sin x$.

З а м е ч а н и е 0.3. Предположим, что для *нестационарной* возмущенной системы вида (0.3) существует позиционное управление $u(t, x)$, оптимальное в смысле быстрого действия. Сложность синтеза такого управления заключается в следующем. Для построения поверхностей переключения (которые обозначим \mathcal{N}^n) необходимо решить при каждом фиксированном t_0 задачу синтеза программного управления $u(t; t_0, x_0)$ для $x_0 \in D(t_0)$. Иными словами, для решения задачи синтеза необходима информация о состоянии системы в будущем, что не всегда возможно (например, в случае случайных возмущений $w(t, x)$). Если же для позиционного управления $u(t, x)$, оптимального в смысле быстрого действия, основной (невозмущенной) системой и для возмущений этой системы выполнено четвертое условие определения 0.1, то, решив один раз задачу синтеза для основной системы, можно обеспечить (под действием полученного управления) ε -оптимальное поведение возмущенной системы.

В этой работе изучен класс линейных нестационарных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leq 1 \quad (0.4)$$

с одним входом, для которых существует позиционное управление, оптимальное в смысле быстрого действия. Также изучается структура

множества управляемости и свойства функции быстродействия таких систем. Все результаты получены в предположении неосцилляции решений сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi A(t) \quad (0.5)$$

относительно гиперплоскости, определяемой нормальным вектором $b(t)$. Системы (0.4), для которых выполнено это условие, названы в [21] *докритическими*. Термин *докритичность* введен в 50-е годы Н.В. Азбелевым в работах, посвященных краевым задачам и дифференциальным неравенствам: так назывался максимальный интервал разрешимости фиксированного класса задач Валле-Пуссена. Оказалось, что вопрос о существовании оптимального в смысле быстродействия позиционного управления для системы (0.4) тесно связан с вопросом о разрешимости некоторого класса n -точечных задач.

Показано, что, независимо от гладкости A и b , в любой окрестности нуля пространства (t, x) -переменных существуют (отличные от нуля) точки, в которых функция быстродействия теряет гладкость, но таких точек достаточно мало. Более точно, в работе показано, что, в предположении докритичности, в расширенном фазовом пространстве (пространстве (t, x) -переменных) существует слабо инвариантное гладкое многообразие \mathcal{N}^n размерности n , содержащее нуль и обладающее тем свойством, что в каждой точке $(t, x) \in \mathcal{N}^n$ функция быстродействия не имеет производной. Далее, во всех точках (t, x) множества $\mathfrak{D} \doteq \{(t, x) : t \in \mathbb{R}, \tau_n(t, x) < \sigma(t)\}$ ($\sigma(t)$ определяет интервал докритичности), не лежащих на многообразии \mathcal{N}^n , функция быстродействия имеет гладкость на единицу больше гладкости функции $t \rightarrow (A(t), b(t))$, задающей систему (0.4).

Оказывается, что аналогичным образом функция быстродействия ведет себя на многообразии \mathcal{N}^n : во всех точках многообразия \mathcal{N}^n , за исключением точек, находящихся на некотором (слабо инвариантном) подмногообразии \mathcal{N}^{n-1} размерности $n - 1$, функция $\tau_n(t, x)$ непрерывно дифференцируема при $(t, x) \in D$ в направлении любого

вектора, лежащего в пространстве, касательном к \mathcal{N}^n в точке (t, x) .

Многообразия \mathcal{N}^k , $k = 1, \dots, n$, обладают тем свойством, что на них оптимальное в смысле быстрогодействия управление разрывно (управление переключается с $+1$ на -1 или с -1 на $+1$), а конус допустимых векторов скоростей (который направляет оптимальное движение, если понимать такое движение в смысле определения А.Ф. Филиппова) касается одного из многообразий \mathcal{N}^k (т. е. конус находится по одну сторону от касательного пространства и имеет с этим пространством общий вектор). Это обстоятельство позволяет корректно определить позиционное управление, оптимальное в смысле быстрогодействия. При этом позиционное управление достаточно задать только на многообразии \mathcal{N}^{1+n} максимальной размерности, так как движения $(t, x(t))$ (в смысле Филиппова) системы с разрывной по фазовым координатам правой частью не зависят от того, как определена правая часть на множествах, мера Лебега которых (в \mathbb{R}^{1+n}) равна нулю. Таким образом, наличие докритичности (факторизации Поля-Маммана) влечет существование позиционного управления, оптимального в смысле быстрогодействия.

В работе описан класс таких допустимых возмущений основной докритической системы (0.4), что оптимальное в смысле быстрогодействия позиционное управление $u(t, x)$ для основной системы доставляет в нуль каждое решение возмущенной системы (не обязательно за минимальное, но за конечное время), начинающееся в точках расширенного множества управляемости \mathfrak{D} .

Сконструированы и реализованы численные алгоритмы оценки интервала докритичности и моделирования многообразий N^k , $k = 1, \dots, n-1$ и \mathcal{N}^k , $k = 1, \dots, n$, приведены численные примеры и иллюстрации.

Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в работах [21]–[25].

Ниже приведены формулировки основных результатов работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, двенадцати параграфов

(нумерация параграфов сквозная), 31 рисунка и списка литературы. Объём диссертации 117 страниц.

В первом параграфе диссертации введены основные определения и понятия, используемые в работе.

Функцией быстрогодействия $(t, x) \rightarrow \tau_n(t, x)$ системы (0.4) называется функция, значение которой в каждой точке (t_0, x_0) определяется равенством

$$\tau_n(t_0, x_0) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \{ \vartheta \geq 0 : x(t_0 + \vartheta; t_0, x_0, u(\cdot)) = 0 \},$$

где \mathcal{U} — совокупность измеримых функций со значениями в $[-1, 1]$, $x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (0.4) при управлении $u = u(t)$ и начальном условии $x(t_0) = x_0$. Если для некоторой точки (t_0, x_0) не существует допустимого управления, переводящего решение в нуль за конечное время, то полагаем $\tau_n(t_0, x_0) = \infty$.

Множеством управляемости системы (0.4) *на отрезке* $[t_0, t_0 + \vartheta]$ называется множество $D_\vartheta(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \tau_n(t_0, x) \leq \vartheta\}$. *Множеством управляемости* системы (0.4) называется множество

$$D(t_0) \doteq \bigcup_{\vartheta \geq 0} D_\vartheta(t_0).$$

Пусть $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений сопряженной системы (0.5). Обозначим через $\sigma(t_0)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций

$$\xi_1(t) \doteq \psi_1(t)b(t), \dots, \xi_n(t) \doteq \psi_n(t)b(t)$$

является чебышевской системой (Т-системой).

О п р е д е л е н и е 0.2. Система (0.4) называется *докритической* на интервале J , если для всех $t \in J$ выполнено неравенство $\sigma(t) > 0$.

Второй параграф посвящен исследованию условий докритичности системы (0.4). Доказаны следующие утверждения.

Т е о р е м а 0.1. *Всякая система вида (0.4), приводимая невырожденным преобразованием $z(t) = L(t)x$ ($L(t)$ непрерывно дифференцируема и $\det L(t) \neq 0$, $t \in J$) к канонической системе*

$$\dot{z} = F(t)z + g(t)u,$$

докритична. Здесь

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n-1}(t) & f_{1n}(t) \\ -\beta_2(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n-1}(t) & f_{2n}(t) \\ 0 & -\beta_3(t) & \dots & f_{3n-1}(t) & f_{3n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_n(t) & f_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем функции $f_{ik}(t)$, $\beta_i(t)$ непрерывны и $\beta_i(t) > 0$ при всех $t \in J$ и $i = 1, \dots, n$.

Введем в рассмотрение следующие два условия.

У с л о в и е 0.1. Для каждого $i = 1, \dots, n+1$ функции $t \rightarrow q_i(t)$, определенные равенствами

$$q_1(t) = b(t), \dots, q_i(t) = \dot{q}_{i-1}(t) - A(t)q_{i-1}(t),$$

непрерывны, ограничены на некотором интервале J , и $\det Q(t) \neq 0$ при всех $t \in J$, где $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$.

У с л о в и е 0.2. Найдутся числа ν_1, \dots, ν_{n-1} такие, что $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_{n-1}$, и для корней $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ уравнения $\det(\lambda Q(t) - H(t)) = 0$, где $H(t) = (q_2(t), \dots, q_{n+1}(t))$, при всех t выполнены неравенства

$$\lambda_1(t) \leq \nu_1 \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \nu_{n-1} \leq \lambda_n(t). \quad (0.6)$$

Т е о р е м а 0.2. *Условие 0.1 достаточно (а в случае аналитичности функции $t \rightarrow (A(t), b(t))$, задающей систему (0.4) и необходимо) для докритичности системы (0.4) на интервале J .*

Формулируемая ниже теорема существенно использует результат работы [26].

Т е о р е м а 0.3. Если выполнены условие 0.1 на всей числовой оси и условие 0.2, то $\sigma(t) = \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Далее, если найдутся такие константы $\varepsilon > 0$ и $\delta \geq 0$, что дополнительно к (0.6) при всех достаточно больших t выполнены неравенства $\delta \leq \lambda_1(t)$, $\nu_{i-1} + \varepsilon \leq \lambda_i(t) \leq \nu_i - \varepsilon$, $i = 2, \dots, n-1$, то при всех $t \in \mathbb{R}$ множество управляемости $D(t)$ системы (0.4) совпадает с \mathbb{R}^n .

В третьем параграфе исследованы некоторые свойства функции $t_0 \rightarrow \sigma(t_0)$, введено понятие минимальной линейной комбинации функций $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ (см. стр. 37) и приведены численные примеры, иллюстрирующие различные варианты поведения функции $t_0 \rightarrow \sigma(t_0)$.

В четвертом параграфе диссертации сформулированы два алгоритма численной оценки функции $\sigma(t)$. Приведены некоторые результаты использования этих алгоритмов и иллюстрации.

Пятый параграф посвящен описанию структуры множества управляемости $D_{\vartheta}(t_0)$ докритической системы (0.4). В формулируемой ниже теореме показано, что в предположении докритичности граница множества управляемости есть объединение непересекающихся гладких многообразий $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$ (гладкость на единицу выше гладкости функции $t \rightarrow (A(t), b(t))$), размерность k которых понижается с $n-1$ до нуля, причём объединение многообразий, размерность которых повышается от нуля до $k-1$, является общим краем замыкания объединения многообразий, размерность которых понижается с $n-1$ до k . Многообразия $N_{\pm}^k(t_0, \vartheta)$ определены следующим образом: $N_+^k(t_0, \vartheta)$ состоит из всех таких точек $x_0 \in D_{\vartheta}(t_0)$, для каждой из которых найдётся такая точка $\tau(t_0, x_0) \in M^k(\vartheta)$, где

$$M^0(\vartheta) \doteq \{0\},$$

$$M^1(\vartheta) \doteq \{\tau = (\tau_{n-1}) \in \mathbb{R} : 0 < \tau_{n-1} < \vartheta\},$$

...

$$M^k(\vartheta) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k}, \dots, \tau_{n-1}) \in \mathbb{R}^k : 0 < \tau_{n-k} < \dots < \tau_{n-1} < \vartheta\},$$

$k = 1, \dots, n-1$, что оптимальное управление $u(t, x_0)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta$,

переводит точку $x(t_0) = x_0$ в точку $x(t_0 + \vartheta) = 0$, имеет переключения только в моменты времени $t = t_0 + \tau_i(t_0, x_0)$ и до первого момента переключения $u(t, x_0) = +1$ (для многообразия $N_-^k(t_0, \vartheta)$ до первого момента переключения $u(t, x_0) = -1$).

Пусть функция $t \rightarrow (A(t), b(t))$, задающая систему (0.4), является функцией класса C^r .

Т е о р е м а 0.4. Пусть система (0.4) докритическая на \mathbb{R} . Тогда для каждого $\vartheta \leq \sigma(t_0)$ множество управляемости $D_\vartheta(t_0)$ является строго выпуклым телом в \mathbb{R}^n (т. е. $\text{int } D_\vartheta(t_0) \neq \emptyset$ и для любых $x, x_0 \in \partial D_\vartheta(t_0)$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ точка $\lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in \text{int } D_\vartheta(t_0)$). Граница $\partial D_\vartheta(t_0)$ множества $D_\vartheta(t_0)$ есть объединение непересекающихся гладких (класса C^{r+1}) многообразий $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, и объединение

$$\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} N_-^i(t_0, \vartheta) \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} N_+^i(t_0, \vartheta) \right)$$

является общим краем многообразий $\text{cl } N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $\text{cl } N_-^k(t_0, \vartheta)$. Далее, всякой точке $x_0 \in N_+^k(t_0, \vartheta)$ отвечает единственное управление, переводящее точку $x(t_0) = x_0$ в точку $x(t_0 + \vartheta) = 0$, причем программное управление $u(t; t_0, x_0)$ имеет ровно k переключений на интервале $(t_0, t_0 + \vartheta)$.

В шестом параграфе диссертации доказана теорема о представимости расширенного множества управляемости $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ в виде замыкания объединения слабо инвариантных многообразий \mathfrak{N}_+^{1+n} и \mathfrak{N}_-^{1+n} (которые, в свою очередь, являются объединениями слабо инвариантных гладких многообразий \mathcal{N}_\pm^k , размерность k которых понижается от $n + 1$ до единицы, причём многообразие размерности k служит краем замыкания многообразия размерности $k + 1$), описаны свойства этих многообразий, приведены примеры и иллюстрации.

Для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообра-

зия $\mathcal{M}^k(t)$, где

$$\mathcal{M}^0(t) \doteq \{0\},$$

...

$$\mathcal{M}^k(t) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) : 0 < \tau_{n-k+1} < \dots < \tau_n < \sigma(t)\}$$

и многообразия $\mathcal{M}^{1+k} \doteq \mathbb{R} \times \mathcal{M}^k(t)$. Всякой точке $(t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$ поставим в соответствие точку (t, x) , где $x = 0$ при $k = 0$, а при $k \geq 1$

$$x = x(p) = - \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}} X(t, s) b(s) ds, \quad \tau_{n-k} = 0.$$

Таким образом, для каждого $k = 0, \dots, n$ задана функция $(t, \tau) \rightarrow F(t, \tau) = (t, x)$ с областью определения \mathcal{M}^{1+k} и областью значений $\mathcal{N}_+^{1+k} \doteq F(\mathcal{M}^{1+k})$ (аналогично $\mathcal{N}_-^{1+k} \doteq -F(\mathcal{M}^{1+k})$). Кроме того, в силу построения имеет место представление $\mathcal{N}_\pm^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{N}_\pm^k(t)$.

Т е о р е м а 0.5. Пусть система (0.4) докритическая. Тогда расширенное множество управляемости $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ представимо в виде $\mathfrak{D} = \text{cl}(\mathfrak{N}_+^{1+n} \cup \mathfrak{N}_-^{1+n})$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_+^{1+k} &= \mathcal{N}_+^{1+k} \cup \mathcal{N}_-^k \cup \mathcal{N}_+^{k-1} \cup \dots \cup \mathcal{N}^1, \\ \mathfrak{N}_-^{1+k} &= \mathcal{N}_-^{1+k} \cup \mathcal{N}_+^k \cup \mathcal{N}_-^{k-1} \cup \dots \cup \mathcal{N}^1, \end{aligned}$$

$k = 0, \dots, n$. Многообразия \mathfrak{N}_+^{1+k} , \mathfrak{N}_-^{1+k} слабо инвариантны, и для каждого $k = 0, \dots, n$, многообразие $\mathfrak{N}_+^k \cup \mathfrak{N}_-^k$ является общим краем многообразий $\text{cl} \mathfrak{N}_+^{1+k}$ и $\text{cl} \mathfrak{N}_-^{1+k}$.

В седьмом параграфе сформулированы два алгоритма численного моделирования границы множества управляемости и алгоритм численного моделирования границы расширенного множества управляемости. Приведены численные примеры и иллюстрации.

Восьмой параграф. Обозначим вектор

$$\tau(t, x) = (\tau_1(t, x), \dots, \tau_n(t, x)), \quad (0.7)$$

где $t + \tau_i(t, x)$ — моменты переключения программного управления, оптимального в смысле быстродействия для задачи управления в нуль системой (0.4).

В следующей теореме показано, что для каждого $i = 1, \dots, n$, число $\tau_i(t_0, x_0)$ является временем быстродействия в задаче о переводе точки $x_0 \in \mathcal{N}_+^n(t_0)$ на многообразии $\mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}(t_0 + \vartheta)$:

$$\vartheta(u(\cdot)) \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (0.8)$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta, \quad (0.9)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + \vartheta) \in \mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}(t_0 + \vartheta), \quad (0.10)$$

где вместо $\nu(i)$ надо поставить знак плюс, если i — четное и знак минус, если i — нечетное число. Поэтому вектор (0.7) естественно называть *вектором быстродействия*.

Т е о р е м а 0.6. Пусть система (0.4) докритическая. Обозначим $(u^0(\cdot), \vartheta^0, x^0(\cdot))$ — оптимальный процесс задачи (0.8)–(0.10) при некотором фиксированном $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\vartheta^0 = \tau_i(t_0, x_0)$ и на интервале $(t_0, t_0 + \tau_i(t_0, x_0))$ оптимальное управление $u^0(t)$ и отвечающее ему оптимальное решение $x^0(t)$ системы (0.9) совпадают с оптимальными управлением и решением задачи быстродействия в нуль (т. е. задачи (0.8)–(0.10) при $i = n$).

Производной $d\tau(q_0)$ функции $\tau: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ на многообразии \mathcal{N} в точке $q_0 \in \mathcal{N}$ вдоль направления, заданного вектором $w \in T_{q_0}\mathcal{N}$, называется линейное отображение $d\tau(q_0): T_{q_0}\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством

$$d\tau(q_0)w \doteq \left. \frac{d\tau(q(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

где $q(\varepsilon)$ — класс эквивалентности гладких кривых $q: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{N}$, обладающих следующими свойствами:

$$q(0) = q_0, \quad \left. \frac{dq(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = w.$$

Аналогично определяется производная $d^s\tau$, $s \geq 2$:

$$d^s\tau(q_0)(w_1, \dots, w_s) \doteq \left. \frac{d^s\tau(q(\varepsilon))}{d\varepsilon^s} \right|_{\varepsilon=0},$$

где $q: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{N}$ — класс эквивалентности гладких кривых вида

$$q(\varepsilon) = q_0 + \varepsilon w_1 + \frac{\varepsilon^2 w_2}{2!} + \cdots + \frac{\varepsilon^s w_s}{s!} + o(\varepsilon^s).$$

Функция $q \rightarrow \tau(q)$ является функцией класса C^s на многообразии \mathcal{N} , если для всякой C^s -кривой $q: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{N}$ функция $\varepsilon \rightarrow \tau(q(\varepsilon))$ является функцией класса C^s .

Т е о р е м а 0.7. Пусть система (0.4) докритическая, и функции $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежат классу C^r . Тогда для каждого $k = 0, \dots, n$ функции $\tau_i: \mathcal{N}_+^{1+k} \cup \mathcal{N}_-^{1+k} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, принадлежат классу C^{r+1} на многообразиях $\mathcal{N}_+^{1+k} \cup \mathcal{N}_-^{1+k}$. В частности, τ_i непрерывно дифференцируемы $r + 1$ раз на $\mathcal{N}_+^{1+n} \cup \mathcal{N}_-^{1+n}$.

В девятом параграфе работы сформулирована проблема построения позиционного управления $u(t, x)$ (управления по принципу обратной связи) в задаче быстрогодействия для динамической системы, поведение которой описывается уравнением (0.1). Приведен пример линейной по фазовым координатам и управлению стационарной системы на плоскости (построенный впервые П. Бруновским [27], [28]), у которой отсутствует внутренняя устойчивость по отношению к изменениям $u(t, x)$ на множестве нулевой меры. Также сформулирована проблема построения позиционного управления в нуль (не обязательно за минимальное, но за конечное время) семейства \mathcal{W} уравнений близких к основному уравнению (0.4).

В десятом параграфе доказано существование позиционного управления для докритической системы (0.4) и построено такое управление. Суперпозиционно измеримую функцию $u_{\mathcal{C}}: \mathfrak{D} \rightarrow U$ будем называть *оптимальным в смысле быстрогодействия позиционным \mathcal{C} -управлением* (сокращенно оптимальным \mathcal{C} -управлением), если для любой точки $(t_0, x_0) \in \text{int } \mathfrak{D}$, \mathcal{C} -решение (решение в смысле Каратеодори) $x(t; t_0, x_0)$ задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (0.11)$$

при $u = u_c(t, x)$, существует на полуоси $[t_0, \infty)$, единственно, обращается в нуль в точке $t = t_0 + \tau_n(t_0, x_0)$ и $x(t; t_0, x_0) \equiv 0$ для $t > t_0 + \tau_n(t_0, x_0)$.

Аналогично определяется *оптимальное в смысле быстрогодействия позиционное \mathcal{F} -управление* (сокращенно оптимальное \mathcal{F} -управление). В этом случае функция $(t, x) \rightarrow u_{\mathcal{F}}(t, x)$ должна быть определена для почти всех (в смысле меры Лебега в \mathbb{R}^{1+n}) точек $(t, x) \in \text{int } \mathfrak{D}$ и обеспечивать следующее свойство: каждому $(t_0, x_0) \in \text{int } \mathfrak{D}$ отвечает единственное \mathcal{F} -решение (решение в смысле А.Ф. Филиппова) $x(t; t_0, x_0)$ задачи (0.11) с управлением $u = u_{\mathcal{F}}(t, x)$ и $x(t; t_0, x_0) \equiv 0$ для $t \geq t_0 + \tau_n(t_0, x_0)$.

Т е о р е м а 0.8. *Функция*

$$u_c(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_+^{1+k} \text{ при некотором } k \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{если } k = 0 \\ -1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_-^{1+k} \text{ при некотором } k \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

доставляет оптимальное \mathcal{C} -управление, а функция

$$u_{\mathcal{F}}(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_+^{1+n} \\ -1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_-^{1+n} \end{cases}$$

— оптимальное \mathcal{F} -управление для докритической системы (0.4).

В одиннадцатом параграфе диссертации доказана теорема о том, что координаты $\tau_i(t_0, x_0)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ вектора быстрогодействия являются решениями соответствующих уравнений Беллмана.

Т е о р е м а 0.9. *Пусть система (0.4) докритическая, и функции $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежат классу C^r . Тогда каждая координата $\tau_i(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, вектора быстрогодействия:*

- (a) *непрерывна в $\text{int } \mathfrak{D}$;*
- (b) *непрерывно дифференцируема $r + 1$ раз в \mathcal{N}^{1+n} ;*
- (c) *является функцией класса C^{r+1} на многообразиях \mathcal{N}^{1+k} , $k \in \{1, \dots, n - 1\}$;*

(d) является решением задачи

$$d\theta(t, x)h(t, x) = -1, \quad \theta(t, x) \Big|_{(t, x) \in \mathfrak{N}^{1+n-i}} = 0,$$

где $d\theta(t, x)h(t, x)$ — производная функции $\theta(t, x)$ на многообразиях \mathcal{N}^{1+k} , $k = 1+n-i, \dots, n$, в точке (t, x) вдоль направления, заданного вектором $h(t, x) = (1, A(t)x + \nu(t, x)b(t))$,

$$\nu(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_+^2 \bigcup \dots \bigcup \mathcal{N}_+^{1+n}, \\ 0, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}^1, \\ -1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_-^2 \bigcup \dots \bigcup \mathcal{N}_-^{1+n}; \end{cases}$$

(е) в частности, при $(t, x) \in \mathcal{N}_+^{1+n}$ функция $\tau_i(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} (A(t)x + b(t)) = -1,$$

а при $(t, x) \in \mathcal{N}_-^{1+n}$ — уравнению

$$\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} (A(t)x - b(t)) = -1.$$

Двенадцатый параграф работы посвящен описанию класса таких допустимых возмущений основной докритической системы (0.4), что оптимальное в смысле быстрогодействия позиционное управление $u(t, x)$ для основной системы переводит в нуль каждое решение возмущенной системы (не обязательно за минимальное, но за конечное время), начинающееся в точках расширенного множества управляемости \mathfrak{D} .

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad |u| \leq 1, \quad (0.12)$$

где функции $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны, функция $w: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $w(t, 0) \equiv 0$, и существует такое $r > 0$, что для линейной системы (0.4) при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\sigma(t) \geq r$.

Обозначим

$$\mathfrak{D}_r \doteq \mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < r\},$$

$\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ — расширенное множество управляемости системы (0.4). Построим многозначные функции

$$U(t, x) = \begin{cases} \hat{u}(t, x), & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}^{1+n}, \\ [-1, +1], & \text{если } (t, x) \in \mathfrak{N}^n, \end{cases}$$

и $\mathcal{F}(t, x) = A(t)x + b(t)U(t, x) + w(t, x)$. Тогда решения задачи

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \mathfrak{D},$$

называются решениями (в смысле А.Ф. Филиппова [17]) задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\hat{u}(t, x) + w(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Здесь $\mathcal{N}^{1+n} \doteq \mathcal{N}_+^{1+n} \cup \mathcal{N}_-^{1+n}$ и

$$\hat{u}(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_+^{1+n} \\ -1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_-^{1+n}. \end{cases} \quad (0.13)$$

Обозначим $O_\varepsilon(\mathfrak{N}^n) = \{q \in \mathfrak{D}: \rho_0(q, \mathfrak{N}^n) < \varepsilon\}$.

Т е о р е м а 0.10. Пусть существует открытое множество \mathfrak{D}_0 такое, что $\mathfrak{D}_r \subseteq \mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$ и при некотором $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$\sup_{(t,x) \in \mathfrak{D}_0 \setminus \mathfrak{N}^n} \frac{\partial \tau_n(t, x)}{\partial x} w(t, x) < 1 - \alpha.$$

Тогда для всякого $\eta > 0$ найдется непрерывная функция $w_\eta(t, x)$, $(t, x) \in \mathfrak{D}_0$, такая, что:

- 1) $w_\eta(t, x) = w(t, x)$ при $(t, x) \in \mathfrak{D}_0 \setminus O_\eta(\mathfrak{N}^n)$;
- 2) $|w_\eta(t, x) - w(t, x)| < \eta$ при $(t, x) \in O_\eta(\mathfrak{N}^n)$;

3) управление $\hat{u}(t, x)$, определенное равенством (0.13), служит позиционным управлением для системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w_\eta(t, x) \quad (0.14)$$

в области \mathfrak{D}_0 , т.е. для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_0$ найдется момент времени $\vartheta_\eta(t_0, x_0) < \infty$ такой, что любое решение $x_\eta(t; t_0, x_0)$ системы (0.14) существует и $x_\eta(t_0 + \vartheta_\eta(t_0, x_0); t_0, x_0) = 0$. Далее, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|w(t, x)| \leq \delta$ при $(t, x) \in \mathfrak{D}_0$, то $|\tau_n(t, x) - \vartheta_\eta(t, x)| \leq \varepsilon$.

На протяжении всей работы в качестве модельной рассматривается задача об остановке маятника с подвижной точкой подвеса, для которого уравнение движения имеет следующий вид

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{1}{\ell} \ddot{q}(t) \right) \sin \varphi = -\frac{1}{\ell} \ddot{p}(t) \cos \varphi.$$

В работе построено позиционное управление, оптимальное в смысле быстродействия, для маятника, на который не действуют неучтённые внешние возмущения и показано, что если маятник возмущается неизвестными малыми случайными колебаниями, то выбранное позиционное управление по-прежнему успокаивает маятник за конечное время.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00413), Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант 97-0-1.9), Конкурсным центром Удмуртского госуниверситета (грант 97-04).

Список основных обозначений

В работе используются следующие обозначения:

\mathbb{R}^n — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$.

$S^{n-1} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\}$.

$O_\varepsilon^n(x) \doteq \{y \in \mathbb{R}^n: |x - y| < \varepsilon\}$ — шар радиуса ε размерности n с центром в точке x .

$*$ — операция транспонирования.

$\text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — вектор-столбец с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x).

$\text{End}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений в \mathbb{R}^n с нормой $|A| = \max\{|Ax|: |x| \leq 1\}$.

$\text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n с естественной нормой.

$\text{int } D$ — внутренность множества D относительно \mathbb{R}^n .

∂D — граница множества D .

$\text{cl } D$ — замыкание D в \mathbb{R}^n .

$c(\xi, D) = \sup_x \{\xi x: x \in D\}$ — опорная функция множества D .

$T_q \mathcal{N}$ — пространство, касательное к многообразию \mathcal{N} в точке q .

Производной $d\tau(q_0)$ функции $\tau: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ на многообразии \mathcal{N} в точке $q_0 \in \mathcal{N}$ вдоль направления, заданного вектором $w \in T_{q_0} \mathcal{N}$, называется линейное отображение $d\tau(q_0): T_{q_0} \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством

$$d\tau(q_0)w \doteq \left. \frac{d\tau(q(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

где $q(\varepsilon)$ — класс эквивалентности гладких кривых $q: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{N}$, обладающих следующими свойствами:

$$q(0) = q_0, \quad \left. \frac{dq(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = w.$$

Глава 1. Докритические системы

Эта глава посвящена изучению свойств докритических систем. Дано определение докритичности и доказаны достаточные условия докритичности системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leq 1.$$

Определена функция $t_0 \rightarrow \sigma(t_0)$ как точная верхняя грань таких σ , что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ данная система является докритической. Доказаны некоторые свойства функции $t \rightarrow \sigma(t)$ и построены численные алгоритмы, позволяющие вычислять значения этой функции в точках. Приведены примеры и иллюстрации.

§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения

В этом параграфе изложены основные понятия и определения, используемые в диссертации.

Опорной функцией $\xi \rightarrow c(\xi, D)$ множества D называется функция, определенная равенством $c(\xi, D) = \sup_x \{\xi x : x \in D\}$. Свойства опорной функции см. [29, с. 121]. Здесь важно, что включение $0 \in \text{int } D$ для выпуклого множества D эквивалентно неравенству $c(\xi, D) > 0$ для всех $\xi \in S^{n-1}$, где $S^{n-1} \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$.

Пусть M и N — многообразия класса C^r , $r \geq 1$ (терминология и обозначения заимствованы из [30]), вложенные в конечномерные пространства, и f — отображение из M в N . Тогда f принадлежит классу C^k , $k \leq r$, в точке $p \in M$, если для любой k раз непрерывно дифференцируемой кривой $p : (-1, 1) \rightarrow M$, проходящей через точку p ($p = p(0)$), функция $\varepsilon \rightarrow f(p(\varepsilon))$ из $(-1, 1)$ в N принадлежит классу C^k в точке $\varepsilon = 0$. Далее, отображение $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$, действующее из пространства $T_p M$, касательного к M в точке p в пространство $T_q N$, касательное к N в точке $q = f(p)$ и определенное равенством

$$df(p)v = \left. \frac{df(p(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

для всякой C^k -кривой $p : (-1, 1) \rightarrow M$, называется производной отображения f в точке p вдоль направления v , касательного к M в точке p (т.е. $v = \left. \frac{dp(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$). Аналогично определяется производная $d^s f(p)$, $s \geq 2$:

$$d^s f(p)(v_1, \dots, v_s) \doteq \left. \frac{d^s f(p(\varepsilon))}{d\varepsilon^s} \right|_{\varepsilon=0},$$

где $p : (-1, 1) \rightarrow M$ — класс эквивалентности гладких кривых вида

$$p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon v_1 + \frac{\varepsilon^2 v_2}{2!} + \dots + \frac{\varepsilon^s v_s}{s!} + \omega(\varepsilon^s).$$

Отображение $f : M \rightarrow N$ называется C^k -диффеоморфизмом, если оно принадлежит классу C^k и имеет обратное того же класса. Если

$f: M \rightarrow N$ — отображение класса C^k и $df(p)$ — изоморфизм для каждого $p \in M$, то f — диффеоморфизм класса C^k .

Функцией быстродействия $(t, x) \rightarrow \tau_n(t, x)$ системы (2.1) (см. стр. 25) называется функция, значение которой в каждой точке (t_0, x_0) определяется равенством

$$\tau_n(t_0, x_0) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \{ \vartheta \geq 0: x(t_0 + \vartheta; t_0, x_0, u(\cdot)) = 0 \},$$

где \mathcal{U} — совокупность измеримых функций со значениями в $[-1, 1]$, $x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (2.1) при управлении $u = u(t)$ и начальном условии $x(t_0) = x_0$. Если для некоторой точки (t_0, x_0) не существует допустимого управления, переводящего решение в нуль за конечное время, будем полагать, что $\tau_n(t_0, x_0) = \infty$.

Множеством управляемости системы (2.1) на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$ называется множество

$$D_\vartheta(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \tau_n(t_0, x) \leq \vartheta\}.$$

Для $D_\vartheta(t_0)$ имеет место равенство (см., например, [31, с. 103])

$$D_\vartheta(t_0) = - \int_{t_0}^{t_0 + \vartheta} X(t_0, t) b(t) U dt, \quad (1.1)$$

где $U = [-1, 1]$, $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$, а интеграл понимается в смысле А.А. Ляпунова [32, с. 229]. Непосредственно из (1.1) следуют выпуклость множества $D_\vartheta(t_0)$ и равенства

$$D_{\vartheta+\tau}(t_0) = D_\vartheta(t_0) + X(t_0, t_0 + \vartheta) D_\tau(t_0 + \vartheta), \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} c(\psi, D_{\vartheta+\tau}(t_0)) &= c(\psi, D_\vartheta(t_0)) + c(\chi, D_\tau(t_0 + \vartheta)), \\ \chi &= \psi X(t_0, t_0 + \vartheta), \quad \forall \psi \in S^{n-1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Система (2.1) называется дифференциально управляемой в точке t_0 , если для всех $\vartheta > 0$ имеет место включение $0 \in \text{int } D_\vartheta(t_0)$.

Система (2.1) называется дифференциально управляемой на интервале $J \subset \mathbb{R}$, если она дифференциально управляема в каждой точке этого интервала.

Понятие дифференциальной управляемости введено в связи с исследованиями свойств функции быстродействия. В [31] показано, что дифференциальная управляемость системы (2.1) эквивалентна непрерывности функции быстродействия в каждой точке $(t_0, x_0) \in J \times D(t_0)$. Там же показано, что если система (2.1) дифференциально управляема на интервале J , то для любого $t_0 \in J$ множество управляемости

$$D(t_0) \doteq \bigcup_{\vartheta \geq 0} D_{\vartheta}(t_0)$$

открыто в \mathbb{R}^n .

Доказательство следующей леммы следует из равенства (1.3).

Л е м м а 1.1. *Пусть система (0.4) дифференциально управляема на интервале J . Тогда для любых $\vartheta_0 \geq 0$ и $\vartheta \geq 0$, $\vartheta_0 \neq \vartheta$ и любого $t_0 \in J$ множества $\partial D_{\vartheta_0}(t_0)$ и $\partial D_{\vartheta}(t_0)$ не имеют общих точек.*

Множество \mathfrak{N} в расширенном фазовом пространстве \mathbb{R}^{1+n} системы (1) называется *слабо инвариантным*, если для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{N}$ существует управление $u_0 \in \mathcal{U}$ такое, что решение $x_0(t)$ системы (2.1) при $u = u_0(t)$ и начальном условии $x_0(t_0) = x_0$, удовлетворяет включению $(t, x_0(t)) \in \mathfrak{N}$ для всех $t \geq t_0$. В частности, *расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ слабо инвариантно (для любой функции $\sigma(t)$, удовлетворяющей неравенству $\sigma(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

Совокупность непрерывных ограниченных функций

$$\xi_1(t), \dots, \xi_n(t) \tag{1.4}$$

называется *чебышевской системой* (Т-системой) на некотором интервале $[t_0, t_0 + \sigma)$, если всякая нетривиальная линейная комбинация этих функций имеет на $[t_0, t_0 + \sigma)$ не более $n - 1$ геометрически различных (т.е. без учета кратностей) нулей.

Основное свойство Т-систем, необходимое для дальнейшего, известно под названием теоремы С.Н. Бернштейна [33, с. 53]: *если совокупность (1.4) является Т-системой на $[t_0, t_0 + \sigma)$, то для любого*

набора точек t_1, \dots, t_{n-1} таких, что $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_0 + \sigma$, найдется линейная комбинация функций (1.4), имеющая простые нули в точках t_i и не имеющая других нулей на $[t_0, t_0 + \sigma)$.

Кроме того, совокупность (1.4) является T -системой на $[t_0, t_0 + \sigma)$ в том и только в том случае, если для любого набора точек t_1, \dots, t_n таких, что $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_0 + \sigma$, определитель $\det(\xi_i(t_j))_{i,j=1}^n$ отличен от нуля (см. [33, с. 51]).

§ 2. Докритичность и неосцилляция

В этом параграфе введено понятие докритичности для системы (2.1) и показано, что если система (2.1) докритическая на некотором интервале, то она дифференциально управляема на этом интервале. В теоремах 2.1 и 2.3 сформулированы и доказаны достаточные условия докритичности и приведены численные примеры.

В первых двух главах работы изучается структура множества управляемости и свойства функции быстрого действия линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, функциональная матрица $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и вектор $b: \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ непрерывны на \mathbb{R} , а управление $u \in \mathcal{U}$, где \mathcal{U} — совокупность измеримых функций со значениями в $[-1, 1]$.

Пусть $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений уравнения

$$\dot{\psi} = -\psi A(t), \quad (2.2)$$

сопряженного к (2.1).

Обозначим через $\sigma(t_0)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций

$$\xi_1(t) \doteq \psi_1(t)b(t), \dots, \xi_n(t) \doteq \psi_n(t)b(t) \quad (2.3)$$

является чебышевской системой (Т-системой). Это означает, что всякая нетривиальная линейная комбинация функций (2.3) имеет на $[t_0, t_0 + \sigma)$ не более $n - 1$ геометрически различных (т. е. без учета кратностей) нулей. Из определения $\sigma(t_0)$ следует, что для любого $\vartheta \in [0, \sigma(t_0)]$ всякое нетривиальное решение системы (2.2) пересекает гиперплоскость $\gamma(t) \doteq \{\psi \in \mathbb{R}^n: \psi b(t) = 0\}$ не более $n - 1$ раз, когда t пробегает интервал $[t_0, t_0 + \vartheta)$. Это свойство названо в [9] свойством *неосцилляции* системы (2.2) на интервале $[t_0, t_0 + \vartheta)$ относительно гиперплоскости $\gamma(t)$. Простые примеры показывают, что функция $t \rightarrow \sigma(t)$

(принимая неотрицательные конечные значения или $+\infty$) может быть разрывной, и верно следующее утверждение: *если t_0 — точка разрыва, то $\sigma(t_0 - 0) \leq \sigma(t_0) \leq \sigma(t_0 + 0)$* . Это и некоторые другие свойства функции $\sigma(t)$ доказаны в параграфе 3.

Основное свойство T -систем, необходимое для дальнейшего, известно под названием теоремы С. Н. Бернштейна [33, с. 53]: *если совокупность (2.3) является T -системой на $[t_0, t_0 + \vartheta)$, то для любого набора точек t_1, \dots, t_{n-1} таких, что $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_0 + \vartheta$, найдется линейная комбинация функций (2.3), имеющая простые нули в точках t_i и не имеющая других нулей на $[t_0, t_0 + \vartheta)$* .

О п р е д е л е н и е 2.1. Система (2.1) называется *докритической* на интервале J , если для всех $t \in J$ выполнено неравенство $\sigma(t) > 0$.

Л е м м а 2.1. *Если система (2.1) докритическая на J , то она дифференциально управляема для всех $t \in J$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi(t, \psi) = \psi(t)b(t)$, где $\psi(t)$ — решение системы (2.2) с начальным условием $\psi(t_0) = -\psi$. Тогда для каждого $t_0 \in J$ и любого $\vartheta \in (0, \sigma(t_0))$ опорная функция $\psi \rightarrow c(\psi, D_\vartheta(t_0))$ множества $D_\vartheta(t_0)$ определяется следующим образом (см. (1.1)):

$$\begin{aligned} c(\psi, D_\vartheta(t_0)) &= -\psi \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t)b(t)U dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \psi(t)b(t)U dt = \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} |\xi(t, \psi)| dt. \end{aligned}$$

Здесь $U = [-1, 1]$, $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$. Далее, поскольку $\vartheta > 0$, то справедливо неравенство

$$\min_{\psi \in S^{n-1}} c(\psi, D_\vartheta(t_0)) > 0,$$

что и доказывает лемму.

Т е о р е м а 2.1. *Всякая система вида (2.1), приводимая невырожденным преобразованием $z(t) = L(t)x$ ($L(t)$ непрерывно дифферен-*

цируема и $\det L(t) \neq 0$, $t \in J$) к канонической системе

$$\dot{z} = F(t)z + g(t)u, \quad (2.4)$$

докритична. Здесь

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n-1}(t) & f_{1n}(t) \\ -\beta_2(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n-1}(t) & f_{2n}(t) \\ 0 & -\beta_3(t) & \dots & f_{3n-1}(t) & f_{3n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_n(t) & f_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем функции $f_{ik}(t)$, $\beta_i(t)$ непрерывны и $\beta_i(t) > 0$ при всех $t \in J$ и $i = 1, \dots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\sigma(t; A, b)$ функцию $\sigma(t)$, построенную по системе (2.1). Покажем, что $\sigma(t; A, b)$ инвариантна относительно невырожденного преобразования $z = L(t)x$ (т. е. $\sigma(t; A, b) = \sigma(t; F, g)$, где $F = (\dot{L} + LA)L^{-1}$, $g = Lb$). Действительно, решения системы (2.2) и системы

$$\dot{\eta} = -\eta F(t), \quad (2.5)$$

сопряженной к системе $\dot{z} = F(t)z$, связаны равенством

$$\psi(t) = \eta(t)L(t),$$

поэтому (см. (2.3))

$$\xi_i(t) = \psi_i(t)b(t) = \eta_i(t)L(t)b(t) = \eta_i(t)g(t).$$

Пусть F и g определены равенствами (2.1). Покажем, что

$$\sigma(t; F, g) > 0$$

для всех $t \in J$. Отметим во-первых, что из условия $\beta_1(t) > 0$ следует равенство $\sigma(t; F, g) = \sigma(t; F, e_1)$, где $e_1 = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$, поэтому будем далее предполагать, что $g = e_1$. Во-вторых, можно считать, что

все функции на главной диагонали матрицы F равны нулю. Действительно, невырожденное преобразование

$$\xi^{(i)} = \eta^{(i)} \exp \int_0^t f_{ii}(s) ds, \quad i = 1, \dots, n$$

(верхний индекс в круглых скобках означает соответствующую координату вектора) приводит (2.5) к виду $\dot{\xi} = -\xi F^0(t)$, где главная диагональ матрицы F^0 состоит из нулей.

Для каждого $k = 3, \dots, n$ введём в рассмотрение матрицы

$$U_k(t) = \begin{pmatrix} \mu^{(1)}(t) & \dots & \mu^{(k)}(t) \\ 0 & & \\ \vdots & I_{k-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$F_{k-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ -\beta_{n-k+3}(t) & 0 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\beta_n(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где I_{k-1} — единичная матрица размера $(k-1) \times (k-1)$, а звёздочкой обозначены элементы, не играющие роли в дальнейших построениях (остальные обозначения пояснены ниже).

Пусть $\mu(t)$ — решение системы (2.5) с начальным условием $\mu(t_0) = e_1$, $t_0 \in J$, а число ε_1 таково, что $\mu^{(1)}(t) > 0$ для всех $t \in J_1 \doteq [t_0, t_0 + \varepsilon_1]$. Выполним на J_1 невырожденное преобразование $\eta = \xi U_n(t)$; тогда

$$\eta^{(1)} = \mu^{(1)}(t)\xi^{(1)}, \quad \eta^{(i)} = \mu^{(i)}(t)\xi^{(1)} + \xi^{(i)}, \quad i = 2, \dots, n,$$

и система (2.5) относительно ξ примет вид

$$\dot{\xi}^{(1)} = \xi^{(2)} \frac{\beta_2(t)}{\mu^{(1)}(t)}, \quad \dot{\eta}_1 = -\eta_1 F_{n-1}(t), \quad \eta_1 = (\xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (2.6)$$

(преобразование $\eta = \xi U_n(t)$ не обеспечивает нулевую диагональ матрицы $F_{n-1}(t)$, но, как отмечалось, её можно сделать нулевой).

Данное преобразование обладает следующим свойством. Если (2.5) имеет такое нетривиальное решение $\eta(t)$, что на некотором интервале $[t_0, t_0 + \delta)$, $\delta \leq \varepsilon$ первая координата $\eta^{(1)}(t)$ обращается в нуль по крайней мере n раз, то, в силу (2.6), существует нетривиальное решение $\eta_1(t)$ системы $\dot{\eta}_1 = -\eta_1 F_{n-1}(t)$ такое, что первая координата этого решения имеет на $[t_0, t_0 + \delta)$ по крайней мере $n - 1$ нуль.

Продолжая этот процесс канонизации, по системе $\dot{\eta}_1 = -\eta_1 F_{n-1}(t)$ и решению $\mu_1(t)$ этой системы, удовлетворяющему условию $\mu_1(t_0) = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$, построим на отрезке $J_2 \doteq [t_0, t_0 + \varepsilon_2]$, где $\mu_1^{(1)}(t) > 0$, новую систему $\dot{\eta}_2 = -\eta_2 F_{n-2}(t)$, $\eta_2 \in \mathbb{R}^{n-2}$. Эта система обладает тем свойством, что если у системы (2.5) есть решение, первая координата которого имеет не менее n нулей на $[t_0, t_0 + \delta)$, $\delta \leq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, то найдется решение системы $\dot{\eta}_2 = -\eta_2 F_{n-2}(t)$ первая координата которого $[t_0, t_0 + \delta)$ имеет по крайней мере $n - 2$ нуля.

На последнем шаге каноническая система превращается в уравнение $\dot{\eta} = 0$, любое нетривиальное решение которого не имеет нулей. Теорема доказана.

Введем в рассмотрение следующие два условия.

У с л о в и е 2.1. Для каждого $i = 1, \dots, n + 1$ функции $t \rightarrow q_i(t)$, определенные равенствами

$$q_1(t) = b(t), \dots, q_i(t) = \dot{q}_{i-1}(t) - A(t)q_{i-1}(t),$$

непрерывны, ограничены на некотором интервале J , и $\det Q(t) \neq 0$ при всех $t \in J$, где $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$.

У с л о в и е 2.2. Найдутся числа ν_1, \dots, ν_{n-1} такие, что $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_{n-1}$, и для корней $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ уравнения $\det(\lambda Q(t) - H(t)) = 0$, где $H(t) = (q_2(t), \dots, q_{n+1}(t))$, при всех t выполнены неравенства

$$\lambda_1(t) \leq \nu_1 \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \nu_{n-1} \leq \lambda_n(t). \quad (2.7)$$

Т е о р е м а 2.2. Условие 2.1 достаточно (а в случае аналитичности функции $t \rightarrow (A(t), b(t))$, задающей систему (2.1) и необходимо) для докритичности системы (2.1) на интервале J .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r(t) = \text{col}(r_1(t), \dots, r_n(t))$ — решение алгебраической системы $Q(t)r = q_{n+1}(t)$. Используя методику Н.Н. Красовского [34, с. 148] покажем, что замена $z = L(t)x$, где $L(t) = Q^{-1}(t)$, приводит систему (2.1) к виду (2.4), где

$$\begin{aligned}\beta_i(t) &\equiv 1, \\ f_{in}(t) &= -r_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \\ f_{ik}(t) &\equiv 0, \quad i \leq k, \quad i, k = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

В самом деле, выполнив подстановки $Q(t)z = x$ и $Q(t)g(t) = b(t)$ в системе (2.1), получим:

$$\begin{aligned}(Q(t)z)' &= A(t)Q(t)z + Q(t)g(t)u, \\ \dot{Q}(t)z + Q(t)\dot{z} &= A(t)Q(t)z + Q(t)g(t)u, \\ Q^{-1}(t)\dot{Q}(t)z + \dot{z} &= Q^{-1}(t)A(t)Q(t)z + g(t)u, \\ \dot{z} &= (Q^{-1}(t)A(t)Q(t) - Q^{-1}(t)\dot{Q}(t))z + g(t)u,\end{aligned}$$

откуда $Q(t)F(t) = A(t)Q(t) - \dot{Q}(t)$. Покажем истинность этого равенства:

$$\begin{aligned}Q(t)F(t) &= (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -r_1(t) \\ -1 & 0 & \dots & -r_2(t) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -1 & -r_n(t) \end{pmatrix} = \\ &= (-q_2(t), -q_3(t), \dots, -q_n(t), -Q(t)r(t)) = (-q_2(t), \dots, -q_{n+1}(t)) = \\ &= (-(\dot{q}_1(t) - A(t)q_1(t)), \dots, -(\dot{q}_n(t) - A(t)q_n(t))) = A(t)Q(t) - \dot{Q}(t).\end{aligned}$$

Таким образом, в силу теоремы 2.1, для докритичности системы (2.1) на некотором интервале J достаточно невырожденности матрицы $Q(t)$ на интервале J .

Покажем необходимость. Из теоремы Чанга [35] следует, что в случае аналитичности функции $t \rightarrow (A(t), b(t))$ условие $\det(Q(t)) \neq 0$, $t \in J$ необходимо для дифференциальной управляемости системы (2.1) на интервале J , откуда, в силу леммы 2.1, следует, что это условие необходимо для докритичности системы (2.1) на интервале J . Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.3. Если выполнены условие 2.1 на всей числовой оси и условие 2.2, то $\sigma(t) = \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Далее, если найдутся такие константы $\varepsilon > 0$ и $\delta \geq 0$, что дополнительно к (2.7) при всех достаточно больших t выполнены неравенства $\delta \leq \lambda_1(t)$, $\nu_{i-1} + \varepsilon \leq \lambda_i(t) \leq \nu_i - \varepsilon$, $i = 2, \dots, n-1$, то при всех $t \in \mathbb{R}$ множество управляемости $D(t)$ системы (2.1) совпадает с \mathbb{R}^n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как показано в теореме 2.2, из выполнения условия 2.1 следует $\sigma(t) > 0$. Далее, легко видеть, что система (2.5) эквивалентна уравнению

$$\xi^{(n)} = r_1(t)\xi + \dots + r_n(t)\xi^{(n-1)}. \quad (2.8)$$

Покажем, что $\sigma(t) = \infty$. В силу следствия 5.3 работы [26], если найдутся такие числа ν_0, \dots, ν_{n-1} , что $\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_{n-1}$ и корни $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ характеристического уравнения

$$\mu^n = r_1(t) + r_2(t)\mu + \dots + r_n(t)\mu^{n-1} \quad (2.9)$$

удовлетворяют неравенствам (2.7) (с заменой μ_i на λ_i) и неравенству $\nu_0 \leq \mu_1(t)$, то для уравнения (2.8) $\sigma(t) = \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Более того, существует такая фундаментальная система $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ уравнения (2.8), что $c_i \exp(\nu_{i-1}t) \leq \xi_i(t) \leq d_i \exp(\nu_i t)$, $i = 1, \dots, n-1$, $c_n \exp(\nu_{n-1}t) \leq \xi_n(t)$, $t \in [0, \infty)$, где c_i, d_i — некоторые положительные константы.

Покажем, что $\mu_i(t) = \lambda_i(t)$. Действительно, корни уравнения (2.9) являются собственными значениями матрицы $\hat{H}(t) \doteq (e_2, \dots, e_n, r(t))$, где e_i — i -ый орт, поэтому $\det(\mu(t)I - \hat{H}(t)) = 0$ для каждого корня $\mu(t)$ уравнения (2.9). Следовательно,

$$\det Q(t)(\mu(t)I - \hat{H}(t)) = \det(\mu(t)Q(t) - Q(t)\hat{H}(t)).$$

Так как $Q(t)\hat{H}(t) = H(t)$, то $\det(\mu(t)Q(t) - H(t)) = 0$. Следовательно, всякий корень уравнения (2.9) является одновременно решением уравнения $\det(\lambda Q(t) - H(t)) = 0$, поэтому $\sigma(t) = \infty$.

Покажем, что $D(t) = \mathbb{R}^n$. Так как функция $\xi(t) = -\psi X(t_0, t)b(t)$ является решением уравнения (2.8), то опорная функция $s(\psi, D_\vartheta(t))$

множества $D_{\vartheta}(t)$ имеет вид $c(\psi, D_{\vartheta}(t)) = \int_t^{t+\vartheta} |\xi(s)| ds$. В силу неравенства $\delta \leq \lambda_1(t)$, из условия теоремы 2 и уже цитированного следствия 5.3 работы [26], найдётся $\alpha > 0$, что $|\xi(t)| \geq \alpha$, поэтому $c(\psi, D_{\vartheta}(t)) \rightarrow \infty$ при $\vartheta \rightarrow \infty$ и любом $\psi \neq 0$. Теорема доказана.

Пример 2.1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(t)x_1 + a_2(t)x_3 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 + a_3(t)x_3, \end{cases} \quad (2.10)$$

описывающую (в линейном приближении) динамику летательного аппарата с переменными аэродинамическими характеристиками [36]. Здесь x_2 — угол тангажа, x_3 — угол атаки, u — отклонение руля высоты. Непосредственно проверяется, что если a_i не зависят от t , то неравенство $a_3 \neq 0$ является необходимым и достаточным условием докритичности системы, а условия $a_3 \neq 0$, $(a_1 - a_3)^2 + 4a_2 \geq 0$ обеспечивают глобальную докритичность (то есть $\sigma = \infty$). Пусть теперь функции $t \rightarrow a_i(t)$ непрерывны, и для всех t выполнено условие $a_3(t) \neq 0$. Можно показать тогда (с применением теорем 2.1 и 2.3), что если для каждого t найдется такое $\vartheta > 0$, что выполнены неравенства

$$-1 \leq a_3(t) \int_t^{t+\vartheta} a_2(s) \exp \int_t^s (a_3(\tau) - a_1(\tau)) d\tau ds \leq 0, \quad (2.11)$$

то система докритическая, причем $\sigma(t) > \vartheta$. В частности, если $a_3(t) < 0$ и $a_2(t) \geq 0$, или $a_3(t) > 0$ и $a_2(t) \leq 0$, то $\sigma(t) > 0$.

На рисунке 1 проиллюстрирован тот случай, когда a_i не зависят от t , $a_3 \neq 0$, и выражение $(a_1 - a_3)^2 + 4a_2$ меняет знак, а именно: $a_1 = 1$, $-0.4 \leq a_2 \leq 0.1$, $a_3 = 1$. В этом случае система является автономной и $\sigma(t_0)$ будет переобозначена как σ . Горизонтальный участок графика при $a_2 \geq 0$ означает, что на испытательном отрезке $[0, 100]$ (о численном алгоритме оценки функции $\sigma(t)$ см. § 4 на стр. 40) не найден 3-й нуль минимальной линейной комбинации (см. § 3 на

стр. 36) функций $\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$, т.е. $\sigma \geq 100$. То же самое наблюдается и на испытательном отрезке $[0, 1000]$, т.е. $\sigma \geq 1000$ и т.д.

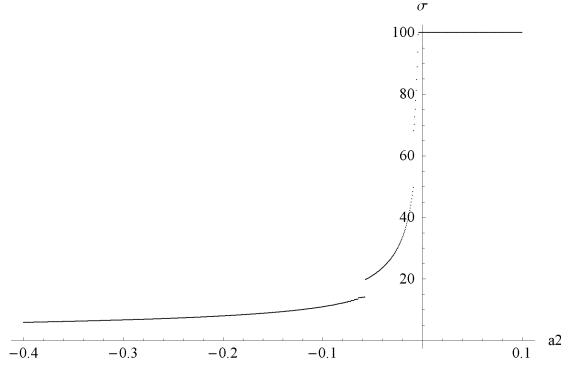


Рис. 1. Зависимость значения σ от параметра a_2 в системе (2.10), $a_1 = 1$, $-0.4 \leq a_2 \leq 0.1$, $a_3 = 1$.

Далее, пусть $a_1(t) = a_3(t) = t$. Тогда условие (2.11) превращается в $-1 \leq t \int_t^{t+\vartheta} a_2(s)ds \leq 0$. Положив $a_2(t) = 1$, получим условие $-1 \leq t\vartheta \leq 0$, из выполнения которого следует $\sigma(t) > \vartheta$. На рисунке 2 показан соответствующий график функции $t \rightarrow \sigma(t)$ при $-2 \leq t \leq 1$. Здесь, как и на предыдущем рисунке, горизонтальный участок графика при $t \geq 0$ означает, что на испытательном отрезке $[t_0, t_0 + 5]$ не найден 3-й нуль минимальной линейной комбинации функций $\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$, т.е. $\sigma(t_0) \geq 5$ при $t_0 \geq 0$. То же самое наблюдается и на испытательном отрезке $[t_0, t_0 + 1000]$, т.е. $\sigma(t_0) \geq 1000$ и т.д.

Как видно из этих примеров, оценки интервала докритичности, получаемые с помощью теорем 2.1 и 2.3 (в данном случае такой оценкой является неравенство (2.11)), могут быть достаточно грубыми.

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость значений $\sigma(t_0)$ от значений двух параметров при фиксированном t_0 . Вычисления производились

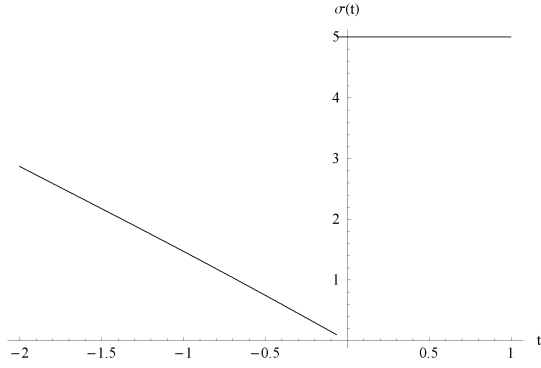


Рис. 2. График функции $t \rightarrow \sigma(t)$ для системы (2.10), $a_1(t) = t$,
 $a_2(t) = 1$, $a_3(t) = t$.

при $t_0 = 0$, $a_1(t) = \cos t$, $-1 \leq a_2 \leq 0$, $-1 \leq a_3 \leq 1$. Горизонтальная площадка на графике, как и в предыдущих двух случаях, означает, что на испытательном отрезке $[t_0, t_0 + 10]$ не найден 3-й нуль минимальной линейной комбинации функций $\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$, т.е. $\sigma(t_0) \geq 10$.

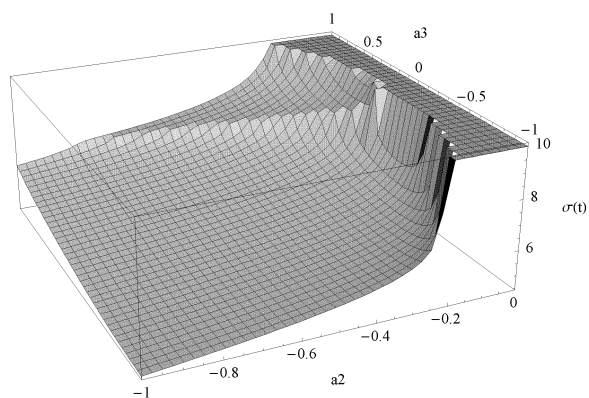


Рис. 3. Зависимость значения $\sigma(t_0)$ от параметров a_2 и a_3 для системы (2.10), $a_1(t) = \cos t$, $-1 \leq a_2 \leq 0$, $-1 \leq a_3 \leq 1$.

§ 3. Свойства функции $\sigma(t)$

В этом параграфе доказана лемма, определяющая поведение функции $t_0 \rightarrow \sigma(t_0)$ в точках разрыва, введено понятие *минимальной линейной комбинации* функций $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ и приведены численные примеры, иллюстрирующие различные варианты поведения функции $t_0 \rightarrow \sigma(t_0)$.

В параграфе 2 определена функция $t_0 \rightarrow \sigma(t_0)$ как точная верхняя грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность непрерывных и ограниченных функций

$$\xi_1(t), \dots, \xi_n(t) \quad (3.1)$$

является чебышевской системой (Т-системой), т.е. всякая нетривиальная линейная комбинация функций (3.1) имеет на $[t_0, t_0 + \sigma)$ не более $n - 1$ геометрически различных (т.е. без учета кратности) нулей. В этом параграфе, с целью определения общих свойств $t_0 \rightarrow \sigma(t_0)$, функции (3.1) — произвольные непрерывные скалярные функции.

Л е м м а 3.1. *Если t_0 — точка разрыва функции $\sigma(t)$, то в этой точке выполнены неравенства*

$$\sigma(t_0 - 0) \leq \sigma(t_0) \quad \text{и} \quad \sigma(t_0) \leq \sigma(t_0 + 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем второе неравенство. Предположим обратное, т.е. предположим, что $\sigma(t_0) > \sigma(t_0 + 0)$. Запишем это неравенство следующим образом: $\sigma(t_0) = \sigma(t_0 + 0) - \hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma} > 0$ — величина предполагаемого ϵ -падения функции $\sigma(t)$ при разрыве в точке t_0 (т.е. $\hat{\sigma} = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} (\sigma(t) - \sigma(t_0))$). Это означает, что для некоторого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \hat{\sigma}$ существует нетривиальная линейная комбинация функций (3.1), имеющая n нулей на отрезке $[t_0 + \varepsilon, t_0 + \sigma(t_0) - \hat{\sigma} + \varepsilon]$, что, в свою очередь, противоречит тому, что всякая нетривиальная линейная комбинация функций (3.1) имеет на $[t_0, t_0 + \sigma(t_0))$ не более $n - 1$ нулей, поскольку отрезок $[t_0 + \varepsilon, t_0 + \sigma(t_0) - \hat{\sigma} - \varepsilon]$ целиком лежит внутри интервала $[t_0, t_0 + \sigma(t_0))$. Следовательно, $\hat{\sigma} \leq 0$. Доказательство первого неравенства аналогично доказательству второго

с той лишь разницей, что вместо предела справа нужно взять предел слева. Лемма доказана.

Пусть для некоторой системы функций (3.1) и некоторого t_0 выполнено $\sigma(t_0) < \infty$. Не уменьшая общности можно считать, что в каждой линейной комбинации

$$\xi(t) = c_1 \xi_1(t) + \dots + c_n \xi_n(t) \quad (3.2)$$

множители $\{c_1, \dots, c_n\}$ обладают тем свойством, что $|\text{col}(c_1, \dots, c_n)| = 1$, поскольку нормирование вектора $c \doteq \text{col}(c_1, \dots, c_n)$ не влияет на расположение нулей линейной комбинации (3.2). Таким образом, $c \in S^{n-1}$ и, в силу компактности множества S^{n-1} и линейности $\xi(t)$ по c , можно построить сходящуюся последовательность $\{c^i\}_{i=1}^\infty$ такую, что соответствующая ей последовательность линейных комбинаций (которая будет обозначена как $\{\xi(t; c^i)\}_{i=1}^\infty$) обладает следующим свойством (здесь через $\phi_n(\xi(t))$ обозначен n -й нуль функции $\xi(t)$):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_n(\xi(t; c^i)) = t_0 + \sigma(t_0).$$

Соответствующий предел $\widehat{\xi}(t) \doteq \lim_{i \rightarrow \infty} \xi(t; c^i)$ будет называться *минимальной линейной комбинацией* функций (3.1).

Пример 3.1. На рис. 4 изображен график функции $t \rightarrow \sigma(t)$, полученный численно (описание численного алгоритма изложено в параграфе 3) для системы функций $\xi_1(t) = 1$, $\xi_2(t) = \cos t$. Этот пример иллюстрирует тот случай, когда $\sigma(t_0 - 0) < \sigma(t_0)$, а именно: $\sigma(k\pi - 0) = 0$, $\sigma(k\pi) = \pi$ для любого целого k .

Пример 3.2. На рис. 5 изображен график функции $t \rightarrow \sigma(t)$ для системы функций $\xi_1(t) = e^t - 1$, $\xi_2(t) = \sin t^2$. Этот пример иллюстрирует тот случай, когда $\sigma(t_0 - 0) = \sigma(t_0)$ в точке разрыва $t_0 = 0$.

Пример 3.3. На рис. 6 изображена зависимость значений $\sigma(t_0)$ от параметра a для системы двух функций $\xi_1(t) = t^2$, $\xi_2(t) = \sin t^a$ при $1.5 \leq a \leq 3$ и $0.1 \leq t \leq 2.5$.

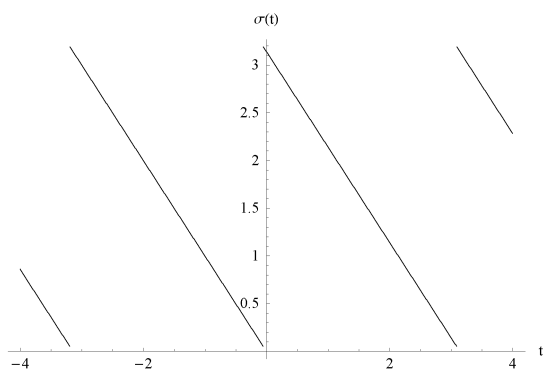


Рис. 4. График $t \rightarrow \sigma(t)$ для функций $\xi_1(t) = 1$, $\xi_2(t) = \cos t$.

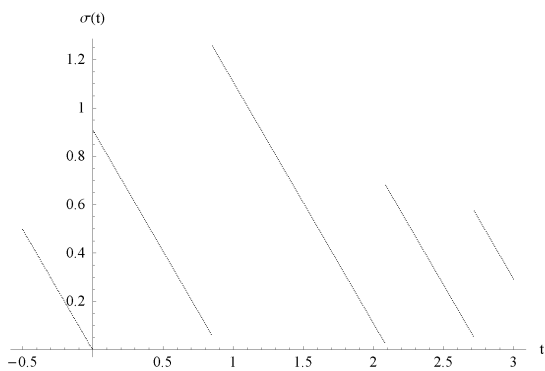


Рис. 5. График $t \rightarrow \sigma(t)$ для функций $\xi_1(t) = e^t - 1$, $\xi_2(t) = \sin t^2$.

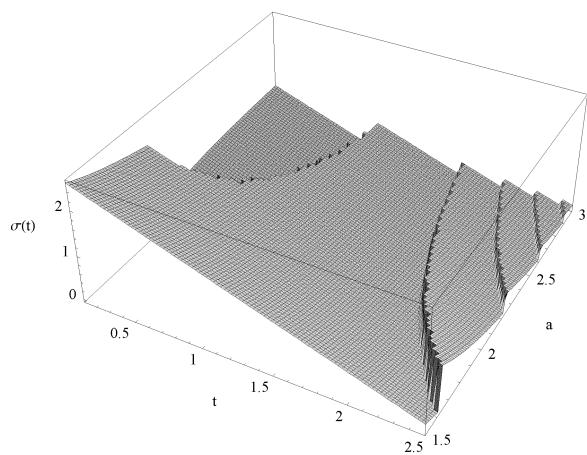


Рис. 6. Зависимость значений $t \rightarrow \sigma(t)$ от параметра a для функций $\xi_1(t) = t^2$, $\xi_2(t) = \sin t^a$.

§ 4. Численный алгоритм построения функции $\sigma(t)$

В этом параграфе сформулирован алгоритм численной оценки функции $\sigma(t)$. Суть этого алгоритма сводится к поиску минимальной линейной комбинации

$$\widehat{\xi}(t) = c_1\xi_1(t) + \dots + c_n\xi_n(t)$$

среди всех возможных линейных комбинаций $\xi(t)$ функций $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ путем перебора различных наборов множителей $\{c_1, \dots, c_n\}$ на некотором множестве C . В качестве множества C берется M^{n-1} точек (здесь и далее в этом параграфе M — это параметр метода, определяющий точность вычислений), получающихся путем разбиения половины сферы S^{n-1} на M^{n-1} частей. Этот алгоритм будет называться *медленным*, поскольку он допускает усовершенствование в тех случаях, когда первый нуль минимальной линейной комбинации находится в точке t_0 . В этих случаях размерность разбиваемой полусферы понижается на единицу и получающийся алгоритм называется *быстрым*.

Будем искать минимальную линейную комбинацию n непрерывных функций

$$\xi_1(t), \dots, \xi_n(t) \tag{4.1}$$

в точке t_0 . В контексте этой работы предполагается, что эти функции представляют собой фундаментальную систему решений сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ (2.2), умноженную скалярно на вектор $b(t)$, однако с целью формального определения численного алгоритма в этом параграфе, если не оговорено иное, функции (4.1) произвольны.

Строго говоря, поведение линейных комбинаций $\xi(t)$ функций (4.1) необходимо исследовать на полуоси $[t_0, +\infty)$, но это невозможно в силу ограниченности вычислительных ресурсов. Поэтому все исследования производятся на *испытательном отрезке* $[t_0, t_0 + T]$, где T — некоторая наперед заданная константа, являющаяся параметром метода. Если ни одна линейная комбинация функций $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ (получаемая численно) не имеет n нулей на отрезке $[t_0, t_0 + T]$, то полагается, что $\sigma(t_0) \geq T$.

1°. Разобьем испытательный отрезок на $N - 1$ частей, где N — еще один параметр метода. Полученные точки будут обозначаться как t_0, t_1, \dots, t_{N-1} , где $t_{N-1} = t_0 + T$. Все значения исследуемых функций $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ и их линейных комбинаций будут вычисляться в этих N точках.

Как уже было показано (см. стр. 37), все возможные линейные комбинации функций (4.1) могут быть нормированы таким образом, что $|\text{col}(c_1, \dots, c_n)| = 1$ (это нормирование, очевидно, не влияет на расположение нулей функции $\xi(t) = c_1\xi_1(t) + \dots + c_n\xi_n(t)$). Следовательно, наборы множителей $\{c_1, \dots, c_n\}$ достаточно выбирать таким образом, что $c \in S^{n-1}$ (здесь, как и ранее, $c = \text{col}(c_1, \dots, c_n)$). Более того, вместо сферы S^{n-1} достаточно ограничиться её полусферой, которая будет обозначаться S_+^{n-1} , поскольку линейные комбинации, получаемые на второй полусфере S_-^{n-1} будут отличаться лишь знаком.

2°. Определим в \mathbb{R}^n произвольный нормированный базис r_1, \dots, r_n и будем полагать

$$\begin{aligned} s_2 &= r_1 \sin \theta_1 + r_2 \cos \theta_1 \\ s_3 &= s_2 \sin \theta_2 + r_3 \cos \theta_2 \\ &\dots \\ s_n &= s_{n-1} \sin \theta_{n-1} + r_n \cos \theta_{n-1} \\ c &= \frac{s_n}{|s_n|}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta_i < \pi$, $i = 1, \dots, n - 1$. Углы $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ представляют собой координаты вектора c в сферической координатной системе, заданной на S_+^{n-1} . Ортогональность базиса r_1, \dots, r_n не требуется, поскольку (с точки зрения оптимальности алгоритма) проще нормировать вектор s_n . Введя еще один параметр метода M , разобьем отрезок $[0, \pi]$ на $M + 1$ частей и будем производить вычисления $\xi(t)$ для каждого $\theta_i = \frac{2k_i\pi}{M+1}$, $k_i = 0, \dots, M - 1$, $i = 1, \dots, n - 1$. Таким образом, на полусфере S_+^{n-1} задано M^{n-1} различных точек c , для каждой из которых необходимо вычислить линейную комбинацию $\xi(t) = c_1\xi_1(t) + \dots + c_n\xi_n(t)$ в каждой из N точек отрезка $[t_0, t_0 + T]$.

Среди полученных функций $\xi(t)$ выберем ту, которая имеет ближайший n -й нуль на $[t_0, t_0 + T]$, если таковой имеется (вектор c , соответствующий выбранной линейной комбинации будет обозначаться \bar{c}). В противном случае полагаем $\sigma(t_0) \geq T$ и заканчиваем процесс.

З а м е ч а н и е 4.1. На втором этапе необходимо произвести вычисление значений функций $\xi(t)$ в $N \cdot M^{n-1}$ точках. Разумеется, при больших n предлагаемый метод приведет к огромным вычислительным затратам и, вообще говоря, не может быть применим для промышленного использования (по крайней мере, при нынешнем уровне развития вычислительной техники). Но в исследовательских и демонстрационных целях этот метод дает приемлемые результаты. Например, автору удалось вычислить $\sigma(t_0)$ для системы пяти функций (4.1) за несколько часов (все вычисления, результаты которых приводятся в этой работе, произведены с использованием персонального компьютера, оснащенного процессором Pentium с тактовой частотой 133 MHz).

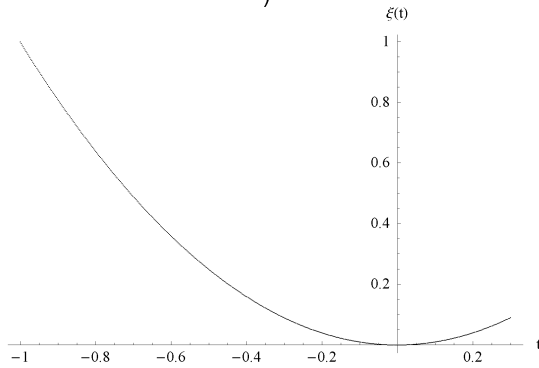


Рис. 7. Минимальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций $\xi_1(t) = 1$, $\xi_2(t) = t^2$, полученная численно.

Прежде чем продолжить описание алгоритма, рассмотрим приме-

ры того, какой вид имеют линейные комбинации $\xi(t)$, получаемые на втором этапе алгоритма.

Пример 4.1. На рис. 7 построена минимальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций $\xi_1(t) = 1$, $\xi_2(t) = t^2$, вычисленная при следующих параметрах алгоритма: $t_0 = -1$, $T = 1.3$, $N = 500$, $M = 1000$.

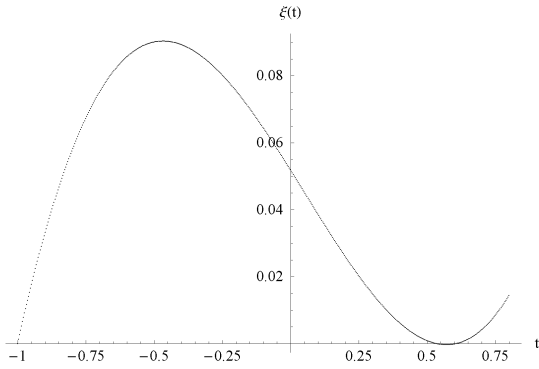


Рис. 8. Минимальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций $\xi_1(t) = t$, $\xi_2(t) = \sin t$, $\xi_3(t) = \cos t$, полученная численно.

Пример 4.2. На рис. 8 построена минимальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций $\xi_1(t) = t$, $\xi_2(t) = \sin t$, $\xi_3(t) = \cos t$ при $t_0 = -1$, $T = 1.8$, $N = 500$, $M = 1000$.

Эти простые примеры иллюстрируют одну важную особенность минимальных линейных комбинаций — возможны ситуации, когда корни минимальной линейной комбинации $\xi(t)$ (полученной численно) близки друг к другу, что в пределе приводит к появлению одного корня кратности выше, чем единица. Ниже будет показано, что такая ситуация типична для тех случаев, когда функции $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ представляют собой решения обыкновенного дифференциального уравнения или квазидифференциального уравнения

n -го порядка. Пока же важно, что такие случаи возможны, и это существенно усложняет численную оценку функции $\sigma(t)$. В самом деле, как видно из этих рисунков, небольшое изменение множителей $\{c_1, \dots, c_n\}$ (или, другими словами, небольшой сдвиг вектора c на полусфере S_+^{n-1}) приводит к сильному сдвигу n -го корня функции $\xi(t)$ и даже к исчезновению этого корня, что выглядит на рисунке как отрыв графика $\xi(t)$ от оси абсцисс. Для подавления этого эффекта служат следующие два этапа алгоритма.

3°. Вектору \bar{c} , полученному на втором этапе алгоритма, соответствуют сферические координаты $\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{n-1}$. Введем еще один параметр метода M_2 и повторим процедуру, описанную во втором этапе, но не на всей полусфере, а на том её участке, который ограничен квадратом (в сферических координатах)

$$\left[\bar{\theta}_1 - \frac{\pi}{M-1}, \bar{\theta}_1 + \frac{\pi}{M-1} \right] \times \dots \times \left[\bar{\theta}_{n-1} - \frac{\pi}{M-1}, \bar{\theta}_{n-1} + \frac{\pi}{M-1} \right]$$

с заменой параметра M на M_2 . Этот прием позволяет получить более близкую к минимальной $\hat{\xi}(t)$ линейную комбинацию $\xi(t)$ с такой точностью, как если бы вычисления на втором этапе производились со значением параметра M , равным $M \cdot M_2$. На самом же деле произведено $N \cdot (M^{n-1} + M_2^{n-1})$ вычислений значений функции $\xi(t)$, что при больших M и M_2 существенно меньше $N \cdot M^{n-1} \cdot M_2^{n-1}$.

4°. Если после выполнения третьего этапа выяснено, что n -й и $(n-1)$ -й нули функции $\xi(t)$ еще больше сблизилась (по сравнению со вторым этапом), и расстояние между ними стало меньше, чем $\frac{2T}{N-1}$, то предполагается, что в пределе эти точки совпадут, образовав корень кратности выше, чем единица. В этом случае в качестве результата работы алгоритма (т.е. точки $t_0 + \sigma(t_0)$) принимается среднее арифметическое значений n -го и $(n-1)$ -го нулей функции $\xi(t)$, полученных на третьем этапе. В противном случае в качестве результата принимается значение n -го нуля функции $\xi(t)$.

Описанный выше алгоритм будет называться *медленным*, поскольку он допускает усовершенствование для тех случаев, когда первый

нуль минимальной линейной комбинации функций (4.1) находится в точке t_0 (далее показано, когда это происходит). Введя обозначение $\xi_0 = (\xi_1(t_0), \dots, \xi_n(t_0))$, выделим из сферы S^{n-1} те точки c' , для которых $\xi_0 c' = 0$. Полученное множество будет являться сферой S^{n-2} . Выделим произвольным образом из этой сферы полусферу S_+^{n-2} . Заменяя в описанном выше алгоритме полусферу S_+^{n-1} на только что построенную полусферу S_+^{n-2} , получим алгоритм, который будет называться *быстрым*. В результате применения этого алгоритма получаются минимальные линейные комбинации, имеющие нуль в точке t_0 .

З а м е ч а н и е 4.2. Пусть система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u,$$

обозначенная ранее (2.1), приводима к канонической системе (см. теорему 2.1)

$$\dot{z} = F(t)z + g(t)u, \quad (4.2)$$

причем матрица $F(t)$ имеет следующий вид:

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & f_{1n}(t) \\ -1 & 0 & \vdots & f_{2n}(t) \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & -1 & f_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

В этом случае сопряженная система $\dot{\eta} = -\eta F(t)$ имеет следующий вид (здесь нижний индекс означает координату):

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_3 \\ \dots \\ \dot{\eta}_{n-1} = -\eta_n \\ \dot{\eta}_n = \eta_1 f_{1n}(t) + \eta_2 f_{2n}(t) + \dots + \eta_n f_{nn}(t) \end{cases}$$

и эквивалентна следующему уравнению:

$$\phi^{(n)} + f_{nn}(t)\phi^{(n-1)} + \dots + f_{1n}(t)\phi = 0, \quad (4.4)$$

где введено обозначение $\phi = \eta_1$. Вопрос о распределении нулей решений уравнения (4.4) достаточно изучен. Например, для случая $n = 3$ в работе Н.В. Азбелева и З.Б. Цалюка [37] показано, что максимальный промежуток неосцилляции (термин заимствован из [37]) обладает тем свойством, что существует решение уравнения (4.4) имеющее нули на концах этого промежутка (кратности 1 на одном из концов и 2 на другом) и не имеющее нулей внутри. Аналогичный результат для произвольного n был позже получен А.Ю. Левиным в [26, теорема 3.3]. Таким образом, система (2.1) приводимая к канонической системе (4.2) с матрицей $F(t)$ вида (4.3) обладает следующим свойством. Существует $k \in \{1, \dots, n\}$ такое, что минимальная линейная комбинация $\hat{\xi}(t)$ функций (2.3) имеет нули в точках t_0 и $t_0 + \sigma(t_0)$ кратности k и $(n - k)$ соответственно, $1 \leq k \leq n - 1$, и для вычисления интервала докритичности такой системы можно применять быстрый алгоритм.

Оказывается, далее, что если система (2.1) приводима к канонической системе (4.2), то сопряженная система $\dot{\eta} = -\eta F(t)$ эквивалентна некоторому квазидифференциальному уравнению, частным случаем которого является уравнение (4.4). Как стало известно автору из бесед с В.Я. Дерром, результат работы [26, теорема 3.3] распространяется и на эти квазидифференциальные уравнения. Таким образом, быстрый алгоритм применим для всех систем, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, но применяя этот алгоритм следует обращать внимание на соблюдение условий этой теоремы в каждой точке отрезка $[t_0, t_0 + \sigma(t_0)]$, получаемого численно (см. следующее замечание).

З а м е ч а н и е 4.3. Существуют простые примеры систем (2.1), обладающих следующим свойством: на некотором интервале J^* , лежащем внутри интервала $J = [t_0, t_0 + \sigma(t_0)]$, где величина $\sigma(t_0)$ получена численно с использованием быстрого алгоритма, система (2.1) приводима к виду (4.2), тогда как на всем интервале J существует по крайней мере одна точка, для которой условия теоремы (2.1) не вы-

полнены. В этих случаях (см. следующий пример) быстрый алгоритм неприменим при нахождении интервала докритичности.

Пусть в системе (2.1) матрица $A(t)$ и вектор $b(t)$ имеют вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Преобразование $z(t) = L(t)x$, приводящее систему (2.1) к виду (4.2) должно удовлетворять следующим условиям (см. доказательство теоремы 2.1):

$$F(t)L(t) = \dot{L}(t) + L(t)A(t), \quad g(t) = L(t)b(t). \quad (4.6)$$

Подставив в (4.6) матрицу $F(t)$ и вектор $g(t)$, которые в данном случае имеют вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ -\beta_2(t) & f_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим, что искомое преобразование

$$L(t) = \begin{pmatrix} l_{11}(t) & \beta_1(t) \\ l_{21}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где функции $l_{11}(t)$ и $l_{21}(t)$ должны удовлетворять следующему матричному уравнению (аргумент t опущен для краткости записи):

$$\begin{pmatrix} f_{11}l_{11} + f_{12}l_{21} & f_{11}\beta_1 \\ -\beta_2l_{11} + f_{22}l_{21} & -\beta_1\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{l}_{11} & \dot{\beta}_1 + l_{11}a \\ \dot{l}_{21} & l_{21}a \end{pmatrix},$$

откуда

$$l_{21}(t) = -\frac{\beta_1(t)\beta_2(t)}{a(t)}.$$

Если на отрезке $J = [t_0, t_0 + \sigma(t_0)]$, где величина $\sigma(t_0)$ получена численно с использованием быстрого алгоритма, найдется точка t^* такая, что $a(t^*) = 0$, то это означает, что данная система не удовлетворяет условиям теоремы 2.1 на отрезке J , и, следовательно, для нахождения $\sigma(t_0)$ следует применять медленный алгоритм.

Отметим, что формальное применение быстрого алгоритма не требует проверки выполнения условия теоремы 2.1, а также построения матрицы $F(t)$ и вектора $g(t)$, и может привести к ошибочным результатам. На рисунке 9 изображены минимальные линейные комбинации $\xi(t)$ функций (2.3) (см. стр. 25) для системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (4.7)$$

полученные при помощи быстрого и медленного алгоритмов соответственно при $t_0 = -1$. Легко видеть, что для нахождения интервала докритичности системы (4.7) быстрый алгоритм не применим ни в одной точке t_0 числовой оси.

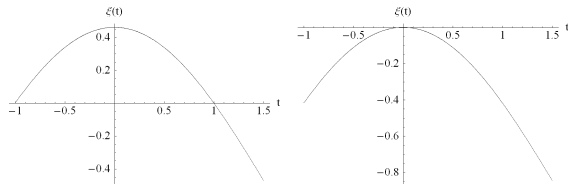


Рис. 9. Минимальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций (2.3) для системы (4.7), быстрый и медленный алгоритмы.

В силу приведенных выше примеров возникает задача о численной или аналитической проверке возможности применения быстрого алгоритма. Эта задача пока не решена и, строго говоря, для нахождения интервала докритичности системы (2.1) следует применять медленный алгоритм. Если же в результате применения медленного алгоритма первый нуль полученной минимальной линейной комбинации $\xi(t)$ близок к точке t_0 , то, допуская некоторую вольность, можно переключиться на использование быстрого алгоритма с целью получения более точного результата за меньшее время.

Глава 2. Структура множества управляемости докритических систем и вектор быстрогодействия

Эта глава посвящена изучению структуры множества управляемости $D_\vartheta(t_0)$ докритической системы (2.1), а также расширенного множества управляемости $\mathfrak{D} = \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$. Показано, что граница $\partial D_\vartheta(t_0)$ множества $D_\vartheta(t_0)$ есть объединение непересекающихся многообразий $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$, $k = 0, \dots, n-1$, гладкости на единицу превышающей гладкость функций $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ и $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ системы (2.1).

Определен вектор быстрогодействия $\tau(q) = (\tau_1(q), \dots, \tau_n(q))$, где $\tau_1(q), \dots, \tau_n(q)$ являются моментами переключения оптимального в смысле быстрогодействия управления при оптимальном движении из точки $q_0 = (t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+n}$ в начало координат. Показано, что $\tau_i(q_0)$, $i = 1, \dots, n$ является временем быстрогодействия ($\vartheta = \tau_i(q_0)$) в задаче о переводе точки $x_0 \in \mathcal{N}_+^n(t_0)$ на многообразие $\mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}(t_0 + \vartheta)$, где вместо $\nu(i)$ надо поставить знак плюс, если i — четное и знак минус, если i — нечетное число.

Для каждого $k = 0, \dots, n$ функции $\tau_i: \mathcal{N}_+^{1+k} \cup \mathcal{N}_-^{1+k} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ имеют гладкость на единицу большую, чем гладкость функций $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ системы (2.1).

Построены численные алгоритмы моделирования множеств $D_\vartheta(t_0)$ и \mathfrak{D} , а также многообразия $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$, $k = 0, \dots, n-1$. Приведены примеры и иллюстрации.

§ 5. Структура множества управляемости

В этом параграфе в виде трех свойств и теоремы 5.1 описана структура множества управляемости $D_\vartheta(t_0)$ докритической системы. Показано, что граница $\partial D_\vartheta(t_0)$ множества $D_\vartheta(t_0)$ есть объединение непересекающихся многообразий $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$, $k = 0, \dots, n-1$, гладкости на единицу превышающей гладкость функций $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ и $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Установлен диффеоморфизм f между множеством наборов моментов переключений $M^k(\vartheta) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k}, \dots, \tau_{n-1}) \in \mathbb{R}^k: 0 < \tau_{n-k} < \dots < \tau_{n-1} < \vartheta\}$ (интерпретируемым как многообразие размерности k , погруженное в \mathbb{R}^n) и многообразием $N_+^k(t_0, \vartheta)$ (или $N_-^k(t_0, \vartheta)$), $k = 1, \dots, n-1$.

Будем далее предполагать, что функции $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ и $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задающие систему (2.1), ограничены на \mathbb{R} , принадлежат классу C^r (т. е. r раз непрерывно дифференцируемы на \mathbb{R}), где $r \geq 0$, и система (2.1) докритична.

Если $\vartheta \leq \sigma(t_0)$, то, в силу принципа максимума Л.С. Понтрягина,

$$\max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \psi(t)b(t)u = \psi(t)b(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta, \quad (5.1)$$

для всякой точки $x_0 \in D_\vartheta(t_0)$ найдутся целое k , $0 \leq k \leq n-1$ и вектор $\tau \in M^k(\vartheta)$, где

$$M^0(\vartheta) \doteq \{0\},$$

$$M^1(\vartheta) \doteq \{\tau = (\tau_{n-1}) \in \mathbb{R}: 0 < \tau_{n-1} < \vartheta\},$$

...

$$M^k(\vartheta) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k}, \dots, \tau_{n-1}) \in \mathbb{R}^k: 0 < \tau_{n-k} < \dots < \tau_{n-1} < \vartheta\},$$

$$k = 1, \dots, n-1$$

такие, что управление, переводящее $x_0 = x(t_0)$ в начало координат за минимальное время, принимает значения $+1$ или -1 и имеет переключения только в точках $t_0 + \tau_i$, $i = n-k, \dots, n-1$ (точки $t_0 + \tau_i$, $i = n-k, \dots, n-1$, отвечают нулям функции $\xi(t) \doteq \psi(t)b(t)$, где $\psi(t)$ — некоторое нетривиальное решение системы (2.2)). В силу условия $\vartheta < \sigma(t_0)$, таких переключений не более $n-1$. Множеству $M^0(\vartheta)$ отвечают точки из $D_\vartheta(t_0)$, переходящие в нуль под действием управлений

без переключений. Будем интерпретировать $M^k(\vartheta)$ как вложенные (в \mathbb{R}^k) гладкие многообразия размерности k с естественной топологией.

Для каждого $k = 0, \dots, n-1$ построим множества $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$ следующим образом: $N_+^k(t_0, \vartheta)$ состоит из всех таких точек $x_0 \in D_\vartheta(t_0)$, для каждой из которых найдётся точка $\tau(t_0, x_0) \in M^k(\vartheta)$ такая, что оптимальное управление $u(t, x_0)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta$, переводит точку $x(t_0) = x_0$ в точку $x(t_0 + \vartheta) = 0$, имеет переключения только в моменты времени $t = t_0 + \tau_i(t_0, x_0)$ и до первого момента переключения $u(t, x_0) = +1$. При этом множество $N_+^0(t_0, \vartheta)$ состоит из одной точки:

$$N_+^0(t_0, \vartheta) = \left\{ - \int_{t_0}^{t_0 + \vartheta} X(t_0, t) b(t) dt \right\}.$$

Множества $N_-^k(t_0, \vartheta)$ определяются аналогично с заменой управления $u(t, x_0)$ на -1 при $t_0 \leq t < t_0 + \tau_{n-k}(t_0, x_0)$. Множества $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$, $k = 0, \dots, n-1$, обладают следующими свойствами.

С в о й с т в о 5.1. Пусть $\vartheta \leq \sigma(t_0)$. Тогда

$$N_+^k(t_0, \vartheta) \subset \partial D_\vartheta(t_0)$$

и всякой точке $x_0 \in N_+^k(t_0, \vartheta)$ отвечает единственная точка

$$\tau(t_0, x_0) \in M^k(\vartheta)$$

(набор моментов переключения) такая, что управление $u(t, x_0)$, удовлетворяющее принципу максимума (5.1), переводит $x_0 = x(t_0)$ в $x(t_0 + \vartheta) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, так как

$$N_+^k(t_0, \vartheta) \subset D_\vartheta(t_0),$$

то существование точки $x_0 \in N_+^k(t_0, \vartheta)$, не принадлежащей $\partial D_\vartheta(t_0)$, влечёт включение $x_0 \in \text{int } D_\vartheta(t_0)$. Тогда найдётся такое ϑ_0 , что $x_0 \in \partial D_{\vartheta_0}(t_0)$. Поэтому $\tau_n(t_0, x_0) \leq \vartheta_0$. В силу леммы 1.1 (см. стр. 23) имеет место неравенство $\vartheta_0 < \vartheta$, откуда $\tau_n(t_0, x_0) < \vartheta$. Вторая часть свойства 5.1 следует из доказанной ниже леммы.

Л е м м а 5.1. Пусть $\vartheta \leq \sigma(t_0)$. Тогда для каждой точки (t_0, x_0) , где $x_0 \in D_{\vartheta}(t_0)$, программное управление $u(t)$, оптимальное в смысле быстрогодействия, единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности выполнено $x_0 \in N_+^k(t_0, \vartheta)$. Для случая $k = 0$ лемма очевидна, поэтому будем полагать $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Предположим противное, т.е. предположим, что существуют два управления $u^1(t)$ и $u^2(t)$, каждое из которых переводит точку $x_0 = x(t_0)$ в точку $x(t_0 + \vartheta) = 0$ за минимальное время ϑ , и эти управления имеют переключения в моменты времени $t_0 + \tau_{n-k}^1, \dots, t_0 + \tau_{n-1}^1$ и $t_0 + \tau_{n-k}^2, \dots, t_0 + \tau_{n-1}^2$ соответственно. При этом некоторые моменты времени не совпадают, т.е. существует такое i , что $\tau_i^1 \neq \tau_i^2$.

Определим функцию $v(t) \doteq u^1(t) - u^2(t)$ и функцию $y(t) \doteq x^1(t) - x^2(t)$. Здесь $x^i(t)$, $i = 1, 2$ — решения задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^i(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

По построению функция $y(t)$ является решением задачи

$$\dot{y} = A(t)y + b(t)v(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y(t_0 + \vartheta) = 0,$$

при этом имеет место равенство

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t)b(t)v(t) dt = 0. \quad (5.2)$$

Умножив (5.2) слева на вектор $\psi \in S^{n-1}$, получим

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \psi(t)b(t)v(t) dt = 0, \quad (5.3)$$

где $\psi(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ с начальным условием $\psi(t_0) = \psi$.

Покажем, что количество перемен знака функции $v(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$ не превышает k . Для этого упорядочим числа

$$\tau_{n-k}^1, \dots, \tau_{n-1}^1, \tau_{n-k}^2, \dots, \tau_{n-1}^2$$

по возрастанию, переобозначив их как \varkappa_i , $i = 1, \dots, 2k$, при этом $0 < \varkappa_1 \leq \dots \leq \varkappa_{2k} < \vartheta$. Разобьём эти числа на пары

$$\{\varkappa_1, \varkappa_2\}, \{\varkappa_3, \varkappa_4\}, \dots, \{\varkappa_{2k-1}, \varkappa_{2k}\}.$$

Совпадающие \varkappa_i и \varkappa_{i+1} также будем считать парой. Для каждой пары $\{\varkappa_i, \varkappa_{i+1}\}$, $i = 1, 3, \dots, 2k - 1$ определим её ε -окрестность

$$I_i \doteq (t_0 + \varkappa_i - \varepsilon, t_0 + \varkappa_{i+1} + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

причём ε выбрано так, что выполнено включение $I_i \subset (t_0, t_0 + \vartheta)$. На интервале $(t_0 + \varkappa_i - \varepsilon, t_0 + \varkappa_i)$ возможны три случая:

$$v(t) > 0, \quad v(t) < 0, \quad v(t) \equiv 0.$$

Рассмотрим первый случай. В этом случае в точке $t_0 + \varkappa_i$ или функция $u^1(t)$, или функция $u^2(t)$ меняет знак, откуда следует, что на интервале $(t_0 + \varkappa_i, t_0 + \varkappa_{i+1})$ функция $v(t)$ обращается в тождественный нуль. Далее, в точке $t_0 + \varkappa_{i+1}$ опять одна из функций $u^1(t)$ либо $u^2(t)$ меняет знак, что приводит к двум возможным случаям: $v(t) > 0$ или $v(t) < 0$ на интервале $(t_0 + \varkappa_{i+1}, t_0 + \varkappa_{i+1} + \varepsilon)$. В первом случае на интервале I_i функция $v(t)$ сохраняет знак, а во втором случае имеет одну перемену знака. В случае совпадения пары $\{\varkappa_i, \varkappa_{i+1}\}$ картина не меняется: либо $v(t)$ имеет на интервалах $(t_0 + \varkappa_i - \varepsilon, t_0 + \varkappa_i)$ и $(t_0 + \varkappa_i, t_0 + \varkappa_i + \varepsilon)$ разные знаки, либо совпадающие.

Рассмотрим второй случай: $v(t) < 0$ на интервале $(t_0 + \varkappa_i - \varepsilon, t_0 + \varkappa_i)$. В этом случае рассуждения аналогичны первому случаю.

Рассмотрим третий случай: $v(t) \equiv 0$ на интервале $(t_0 + \varkappa_i - \varepsilon, t_0 + \varkappa_i)$. В этом случае на интервале $(t_0 + \varkappa_i, t_0 + \varkappa_{i+1})$ либо $v(t) > 0$ либо $v(t) < 0$, а на интервале $(t_0 + \varkappa_{i+1}, t_0 + \varkappa_{i+1} + \varepsilon)$ снова $v(t) \equiv 0$. При этом, в случае совпадения пары $\{\varkappa_i, \varkappa_{i+1}\}$ имеем $v(t) \equiv 0$ на всем I_i . Таким образом, в третьем случае функция $v(t)$ сохраняет знак на интервале I_i .

Учитывая, что общее количество пар $\{\varkappa_i, \varkappa_{i+1}\}$ равно k , получаем, что функция $v(t)$ имеет на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$ не более k перемен знака.

Поэтому, в силу теоремы Бернштейна (см. стр. 23), существует вектор $\psi \in S^{n-1}$ такой, что функция $\xi(t) = \psi(t)b(t)$ имеет не более k нулей, и на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$ выполнено неравенство $\xi(t)v(t) \geq 0$. Отсюда, в силу равенства (5.3), следует равенство $v(t) \equiv 0$ всюду на $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Лемма доказана.

В силу свойства 5.1, для каждого $\vartheta \leq \sigma(t_0)$ и любого фиксированного $k = 0, \dots, n-1$ определена функция

$$f^{-1}: N_+^k(t_0, \vartheta) \rightarrow M^k(\vartheta),$$

ставящая в соответствие точке $x \in N_+^k(t_0, \vartheta)$ точку $\tau \in M^k(\vartheta)$, задающую моменты переключений оптимального управления $u(t, \tau)$. Функция $f^{-1} = f_k^{-1}$ зависит от ϑ и индекса k , но без необходимости это не подчеркивается.

С в о й с т в о 5.2. *Функция f^{-1} непрерывна и осуществляет гомеоморфизм множеств $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $M^k(\vartheta)$. Обратная функция $f: M^k(\vartheta) \rightarrow N_+^k(t_0, \vartheta)$ определена равенством*

$$f(\tau) = \sum_{i=n-k-1}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t_0, t)b(t) dt, \quad (5.4)$$

где $\tau_{n-k-1} = 0, \tau_n = \vartheta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция f^{-1} непрерывна. Пусть последовательность

$$\{x_j\}_1^\infty \subset N_+^k(t_0, \vartheta)$$

такова, что

$$x_j \rightarrow x_0 \in N_+^k(t_0, \vartheta).$$

Последовательности $\{x_j\}_1^\infty$ отвечает последовательность

$$\{\tau_j\}, \quad \tau_j = f^{-1}(x_j) \in M^k(\vartheta),$$

а точке x_0 — точка

$$\tau_0 = f^{-1}(x_0) \in M^k(\vartheta).$$

Надо показать, что $\tau_j \rightarrow \tau_0$. Выделим из последовательности $\{\tau_j\}_1^\infty$ сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначим $\{\tau_j\}_1^\infty$. Предел этой последовательности $\tau_* \in \text{cl } M^k(\vartheta)$. Пусть управление $u(t, \tau_j)$ отвечает точке x_j (т. е. переводит x_j в нуль), тогда

$$x_j = - \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t) b(t) u(t, \tau_j) dt. \quad (5.5)$$

Последовательность $\{u(t, \tau_j)\}_1^\infty$ слабо сходится к $u(t, \tau_*)$, поэтому, переходя в (5.5) к пределу, получим

$$x_0 = - \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t) b(t) u(t, \tau_*) dt.$$

С другой стороны,

$$x_0 = - \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t) b(t) u(t, \tau_0) dt$$

и поэтому (см. доказательство свойства 5.1) $\tau_* = \tau_0$. Следовательно, из сходимости $x_j \rightarrow x_0$ следует сходимость $f^{-1}(x_j) \rightarrow f^{-1}(x_0)$. Доказательство равенства (5.4) очевидно.

С в о й с т в о 5.3. Пусть $\vartheta \leq \sigma(t_0)$. Для каждого $k = 1, \dots, n-1$ и любой точки $\tau = (\tau_{n-k}, \dots, \tau_{n-1}) \in M^k(\vartheta)$ векторы

$$h(\tau_{n-k}) \doteq X(t_0, t_0 + \tau_{n-k}) b(t_0 + \tau_{n-k}), \dots, h(\tau_{n-1}) \doteq X(t_0, t_0 + \tau_{n-1}) b(t_0 + \tau_{n-1})$$

линейно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если найдутся числа c_{n-k}, \dots, c_{n-1} , не равные нулю одновременно, такие, что

$$h(\tau_{n-k}) c_{n-k} + \dots + h(\tau_{n-1}) c_{n-1} = 0,$$

то для всякого $\psi \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\xi(\tau_{n-k}) c_{n-k} + \dots + \xi(\tau_{n-1}) c_{n-1} = 0, \quad (5.6)$$

где

$$\xi(\tau_i) = \psi X(t_0, t_0 + \tau_i) b(t_0 + \tau_i).$$

Пусть $c_j \neq 0$. Найдётся такой вектор $\psi \neq 0$, что функция $\xi(t) = \psi X(t_0, t) b(t)$ имеет нули в точках $t_0 + \tau_i$, $i \neq j$ и $\xi(\tau_j) \neq 0$ (это следует из неосцилляции и цитированной теоремы Бернштейна). Поэтому из (5.6) следует, что $\xi(\tau_j) c_j = 0$. Свойство 5.3 доказано.

В силу свойств 5.1–5.3, для любого $\vartheta \leq \sigma(t_0)$ и каждого $k = 1, \dots, n-1$, множество $N_+^k(t_0, \vartheta)$ является гладким (класса C^1) многообразием размерности k , вложенными в \mathbb{R}^n . В действительности оно принадлежит классу C^{r+1} . Докажем это. Из равенства

$$f(\tau + \delta\tau) = f(\tau) + df(\tau)\delta\tau + \omega(|\delta\tau|),$$

где

$$df(\tau) = (q_{n-k}(\tau), \dots, q_{n-1}(\tau)),$$

$$q_i(\tau) = \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau_i} = -2(-1)^{i-n+k} h(\tau_i),$$

$$i = n-k, \dots, n-1,$$

следует, что оператор $df(\tau)$ действует из пространства $T_\tau M^k$ касательного к многообразию $M^k(\vartheta)$ в точке τ (и отождествляемого с \mathbb{R}^k) в пространство $T_x N^k$ касательное к $N_+^k(t_0, \vartheta)$ в точке $x = f(\tau)$ (моделью которого служит \mathbb{R}^k). Кроме того, $df(\tau)(T_\tau M^k) = T_x N^k$ и поэтому $df(\tau)$ — изоморфизм. С учетом условий на систему (2.1), легко проверить, что функция $\tau \rightarrow df(\tau)$ принадлежит классу C^r , следовательно, f — диффеоморфизм класса C^{r+1} , и поэтому $N_+^k(t_0, \vartheta)$ — многообразие класса C^{r+1} .

Т е о р е м а 5.1. Пусть система (2.1) докритическая на \mathbb{R} . Тогда для каждого $\vartheta \leq \sigma(t_0)$ множество управляемости $D_\vartheta(t_0)$ является строго выпуклым телом в \mathbb{R}^n (т. е. $\text{int } D_\vartheta(t_0) \neq \emptyset$ и для любых $x, x_0 \in \partial D_\vartheta(t_0)$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ точка $\lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in \text{int } D_\vartheta(t_0)$). Граница $\partial D_\vartheta(t_0)$ множества $D_\vartheta(t_0)$ есть объединение непересекающихся гладких (класса C^{r+1}) многообразий $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$,

$k = 0, 1, \dots, n - 1$, и объединение

$$\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} N_-^i(t_0, \vartheta) \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} N_+^i(t_0, \vartheta) \right)$$

является общим краем многообразий $\text{cl } N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $\text{cl } N_-^k(t_0, \vartheta)$. Далее, всякой точке $x_0 \in N_+^k(t_0, \vartheta)$ отвечает единственное управление, переводящее точку $x(t_0) = x_0$ в точку $x(t_0 + \vartheta) = 0$, причем программное управление $u(t; t_0, x_0)$ имеет ровно k переключений на интервале $(t_0, t_0 + \vartheta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все утверждения, сформулированные в теореме, кроме утверждения о строгой выпуклости $D_\vartheta(t_0)$, уже доказаны. Доказательство строгой выпуклости следует из единственности управления $u(t, x_0)$, переводящего точку $x_0 = x(t_0) \in \partial D_\vartheta(t_0)$ в нуль за время ϑ . Действительно, если найдётся $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0 \in \partial D_\vartheta(t_0)$ для некоторых $x_0, x_1 \in \partial D_\vartheta(t_0)$, то $u_\lambda(t) = \lambda u(t, x_1) + (1 - \lambda)u(t, x_0)$ — единственное управление, переводящее точку x_λ в нуль за время ϑ . Поэтому $|u_\lambda(t)| = 1$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$. Следовательно, либо $\lambda \notin (0, 1)$, либо $u(t, x_0) = u(t, x_1)$ и тогда $x_0 = x_1$. Теорема доказана.

П р и м е р 5.1. На рис. 10 изображено множество управляемости $D_\vartheta(t_0)$ системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad |u| \leq 1, \quad (5.7)$$

при $\vartheta = 3$, $t_0 = 0$. Многообразие $N_+^2(t_0, \vartheta)$ изображено на рис. 11.

П р и м е р 5.2. На рис. 12 и 13 изображены множество $D_\vartheta(t_0)$ и многообразие $N_+^2(t_0, \vartheta)$ для системы (2.10) из примера 2.1 (стр. 32) при $|u| \leq 1$, $t_0 = 0$, $\vartheta = 2\pi$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0.1 \sin t$, $a_3 = 1 + 0.999 \sin t$.

Численные алгоритмы моделирования множеств $D_\vartheta(t_0)$ и многообразий $N_+^k(t_0, \vartheta)$, $N_-^k(t_0, \vartheta)$, $k = 1, \dots, n$ построены в § 7 (стр. 70).

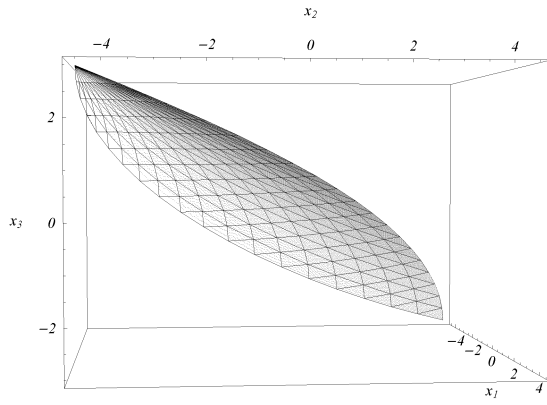


Рис. 10. Множество $D_{\vartheta}(t_0)$ системы (5.7) при $\vartheta = 3$, $t_0 = 0$

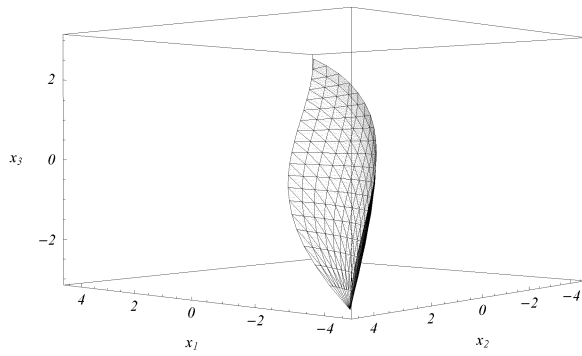


Рис. 11. Многообразие $N_+^2(t_0, \vartheta)$ системы (5.7) при $\vartheta = 3$, $t_0 = 0$

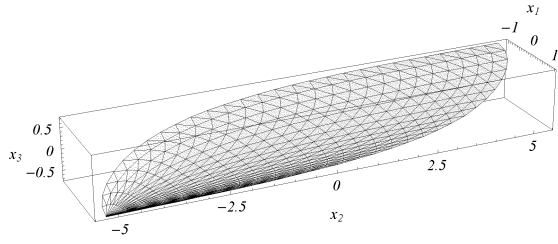


Рис. 12. Множество $D_{\vartheta}(t_0)$ системы (2.10) при $\vartheta = 2\pi$, $t_0 = 0$

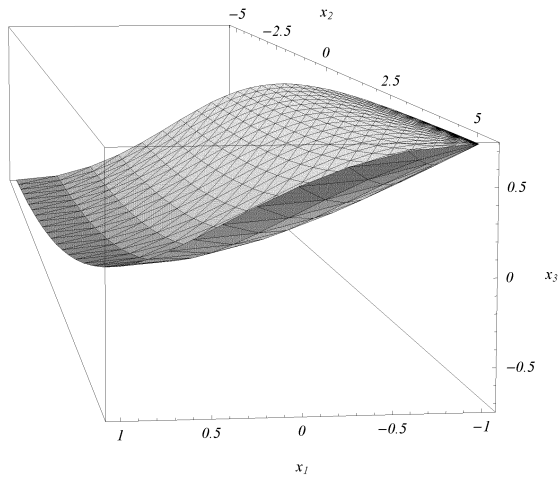


Рис. 13. Многообразие $N_+^2(t_0, \vartheta)$ системы (2.10) при $\vartheta = 2\pi$, $t_0 = 0$

§ 6. Структура расширенного множества управляемости

В этом параграфе доказана теорема о представимости расширенного множества управляемости $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ в виде замыкания объединения слабо инвариантных многообразий \mathfrak{N}_+^{1+n} и \mathfrak{N}_-^{1+n} , описаны свойства этих многообразий, приведены примеры и иллюстрации.

Введем обозначение $\tau_n = \vartheta$ и для каждого $k = 0, \dots, n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообразия $\mathcal{M}^k(t)$, где

$$\mathcal{M}^0(t) \doteq \{0\}, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{M}^k(t) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) : 0 < \tau_{n-k+1} < \dots < \tau_n < \sigma(t)\}, \quad (6.2)$$

$k = 1, \dots, n$, и многообразия $\mathcal{M}^{1+k} \doteq \mathbb{R} \times \mathcal{M}^k(t)$. Всякой точке $p = (t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$ поставим в соответствие точку $q = (t, x)$, где $x = 0$ при $k = 0$, а при $k \geq 1$

$$x = x(p) = - \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}} X(t, s) b(s) ds, \quad \tau_{n-k} = 0. \quad (6.3)$$

Таким образом, для каждого k задана функция $p \rightarrow F(p) = q$ с областью определения \mathcal{M}^{1+k} и областью значений

$$\mathcal{N}_+^{1+k} \doteq F(\mathcal{M}^{1+k})$$

(в дальнейшем нижний индекс у \mathcal{N}_+^{1+k} будет опущен). Так как $\mathcal{N}_+^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{N}_+^k(t)$, где $\mathcal{N}_+^0(t) = \{0\}$, а для $k \geq 1$ множество $\mathcal{N}_+^k(t)$ состоит из точек вида (6.3), то $\mathcal{N}_+^k(t) \subset D_{\sigma(t)}(t)$. Поэтому, в силу принципа максимума Понтрягина и условия $\tau_n < \sigma(t)$, каждой точке $q = (t, x) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ отвечает единственная точка $p = (t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$, задающая (при $k \geq 2$) моменты переключений управления, переводящего позицию (t, x) в позицию $(t + \tau_n, 0)$ и оптимального в смысле быстрогодействия (при $k = 0$ оптимальное управление $\equiv 0$, а при $k = 1$ не имеет переключений). Доказательство этого факта аналогично доказательству свойства 5.1 (см. стр 51). Следовательно, существует

функция $F^{-1}: \mathcal{N}_+^{1+k} \rightarrow \mathcal{M}^{1+k}$ обратная к F . Проведя рассуждения, аналогичные доказательству свойства 5.2 (стр 54), легко убедиться, что функция $q \rightarrow F^{-1}(q)$ непрерывна на \mathcal{N}_+^{1+k} . Следовательно, F — гомеоморфизм многообразий \mathcal{M}^{1+k} и \mathcal{N}_+^{1+k} .

Далее, для F имеет место равенство

$$F(p + \delta p) = F(p) + dF(p)\delta p + \omega(|\delta p|),$$

где $dF(p) = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ при $k = 0$, а для $k \geq 1$,

$$dF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{n-k}(p) & \ell_{n-k+1}(p) & \dots & \ell_n(p) \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Здесь векторы

$$\ell_{n-k}(p), \ell_{n-k+1}(p), \dots, \ell_n(p) \quad (6.5)$$

определены равенствами

$$\begin{aligned} \ell_{n-k}(p) &= \frac{\partial x(p)}{\partial t} = A(t)x(p) + b(t) + \ell_{n-k+1}(p) + \dots + \ell_n(p), \\ \ell_i(p) &= \frac{\partial x(p)}{\partial \tau_i} = 2(-1)^{i-n+k}X(t, t + \tau_i)b(t + \tau_i), \quad i = n - k + 1, \dots, n - 1, \\ \ell_n(p) &= \frac{\partial x(p)}{\partial \tau_n} = (-1)^k X(t, t + \tau_n)b(t, t + \tau_n). \end{aligned}$$

Можно показать (как это сделано при доказательстве свойства 5.3, стр 55), что при каждом фиксированном $p \in \mathcal{M}^{1+k}$ векторы

$$\ell_{n-k+1}(p), \dots, \ell_n(p)$$

линейно независимы, поэтому столбцы матрицы $dF(p)$ тоже линейно независимы. Следовательно $dF(p)$ — изоморфизм пространства $T_p \mathcal{M}^{1+k}$, касательного к многообразию \mathcal{M}^{1+k} в точке p , в пространство $T_q \mathcal{N}_+^{1+k}$, касательное к многообразию \mathcal{N}_+^{1+k} в точке $q = F(p)$. Кроме того, функция $p \rightarrow dF(p)$ принадлежит классу C^r и поэтому F — диффеоморфизм класса C^{r+1} . Следовательно, для каждого $k = 0, 1, \dots, n$, многообразие \mathcal{N}_+^{1+k} является гладким многообразием класса C^{r+1} .

Построенные многообразия \mathcal{N}_+^{1+k} обладают тем свойством, что для точек $(t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ оптимальное (в смысле быстрогодействия) управление $u_0(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \tau_{n-k+1}(t_0, x_0))$ равно $+1$. Аналогичным образом строятся многообразия \mathcal{N}_-^{1+k} , $k = 1, \dots, n$ (в этом случае оптимальное управление начинается с -1).

З а м е ч а н и е 6.1. Можно непосредственно проверить, что, в силу (6.4), вектор скорости $v_+(q_0) \doteq \text{col}(1, A(t_0)x_0 + b(t_0))$ движения $t \rightarrow q(t) = (t, x(t))$, ($x(t)$ — решение системы (2.1), проходящее через точку x_0 в момент времени t_0 под действием управления $u = +1$) находится в пространстве $T_{q_0} \mathcal{N}_+^{1+k}$, касательном к многообразию \mathcal{N}_+^{1+k} в точке q_0 . Далее, из приведенных построений следует, что многообразия \mathcal{N}^1 , \mathcal{N}_-^{1+k} и \mathcal{N}_+^{1+k} , $k = 1, \dots, n$, рассматриваемые как многообразия вложенные в \mathbb{R}^{1+n} , не имеют общих точек, и многообразия $\mathcal{N}_+^k \cup \mathcal{N}_-^k$ является общим краем многообразий $\text{cl } \mathcal{N}_+^{1+k}$ и $\text{cl } \mathcal{N}_-^{1+k}$.

Т е о р е м а 6.1. Пусть система (2.1) докритическая. Тогда расширенное множество управляемости $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ представимо в виде $\mathfrak{D} = \text{cl } (\mathfrak{N}_+^{1+n} \cup \mathfrak{N}_-^{1+n})$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_+^{1+k} &= \mathcal{N}_+^{1+k} \cup \mathcal{N}_-^k \cup \mathcal{N}_+^{k-1} \cup \dots \cup \mathcal{N}^1, \\ \mathfrak{N}_-^{1+k} &= \mathcal{N}_-^{1+k} \cup \mathcal{N}_+^k \cup \mathcal{N}_-^{k-1} \cup \dots \cup \mathcal{N}^1, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$k = 0, \dots, n$. Многообразия \mathfrak{N}_+^{1+k} , \mathfrak{N}_-^{1+k} слабо инвариантны, и для каждого $k = 0, \dots, n$, многообразие $\mathfrak{N}_+^k \cup \mathfrak{N}_-^k$ является общим краем многообразий $\text{cl } \mathfrak{N}_+^{1+k}$ и $\text{cl } \mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства слабой инвариантности многообразий \mathfrak{N}_+^{1+k} достаточно заметить, что для любой точки $q_0 = (t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ найдётся управление $u(t, q_0)$ (в качестве такого управления достаточно взять управление, оптимальное в смысле быстрогодействия) такое, что соответствующее ему решение системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ будет проходить через многообразия \mathcal{N}_-^k , \mathcal{N}_+^{k-1} , \dots , \mathcal{N}^1 (см. замечание 6.1). Аналогично доказывается слабая инвариантность многообразий \mathfrak{N}_-^{1+k} . Далее, выше было показано, что многообразие $\mathcal{N}_+^k \cup \mathcal{N}_-^k$ является общим краем много-

образий $\text{cl } \mathcal{N}_+^{1+k}$ и $\text{cl } \mathcal{N}_-^{1+k}$, $k = 1, \dots, n$; следовательно, для каждого $k = 0, \dots, n$ многообразие $\mathfrak{N}_+^k \cup \mathfrak{N}_-^k$ является общим краем многообразий $\text{cl } \mathfrak{N}_+^{1+k}$ и $\text{cl } \mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Докажем представимость $\mathfrak{D} = \text{cl } (\mathfrak{N}_+^{1+n} \cup \mathfrak{N}_-^{1+n})$. Пусть $q_0 \in \mathfrak{D}$. Тогда, в силу определения \mathfrak{D} , существует оптимальное в смысле быстрогодействия управление $u(t, q_0)$, приводящее движение $q(t, q_0) = (t, x(t, q_0))$ на многообразии \mathcal{N}^1 за время $\vartheta \leq \sigma(t_0)$, причем решение $x(t, q_0)$ системы (2.1) имеет не более $n-1$ переключений. Следовательно, $q(t, q_0)$ принадлежит либо $\text{cl } \mathfrak{N}_+^{1+n}$, либо $\text{cl } \mathfrak{N}_-^{1+n}$, в зависимости от положения точки q_0 , откуда следует включение $\mathfrak{D} \subset \text{cl } (\mathfrak{N}_+^{1+n} \cup \mathfrak{N}_-^{1+n})$. Обратно, пусть $q_0 \in \text{cl } \mathcal{N}_+^{1+n}$. Тогда существует оптимальное в смысле быстрогодействия управление $u(t, q_0)$, приводящее $q(t, q_0)$ на многообразии \mathcal{N}^1 за время $\vartheta \leq \sigma(t_0)$. Проведя то же рассуждение для $q_0 \in \text{cl } \mathcal{N}_-^{1+n}$, получим включение $\text{cl } (\mathfrak{N}_+^{1+n} \cup \mathfrak{N}_-^{1+n}) \subset \mathfrak{D}$, и, наконец, равенство $\mathfrak{D} = \text{cl } (\mathfrak{N}_+^{1+n} \cup \mathfrak{N}_-^{1+n})$. Теорема доказана.

Далее приведены примеры того, как выглядят расширенные множества управляемости \mathfrak{D} и многообразия \mathcal{N}_+^{1+k} (\mathcal{N}_-^{1+k}) для различных систем (численные алгоритмы описаны в § 7).

Пример 6.1. Движение маятника с подвижной точкой подвеса (см., например, [38]–[40]) в линейном приближении описывается следующим уравнением:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{1}{\ell} \ddot{q}(t) \right) \varphi = -\frac{1}{\ell} \ddot{p}(t), \quad (6.7)$$

где g — ускорение свободного падения, ℓ — длина маятника, φ — угол отклонения, а функции $p(t)$ и $q(t)$ описывают возмущение, действующее на точку подвеса соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях. Будем считать управляющим воздействием на точку подвеса в горизонтальном направлении, положив $u = -\ddot{p}(t)/\ell$. Обозначив в (6.7) $\varphi = x_1$ и $\dot{\varphi} = x_2$, а также $\alpha(t) = \ddot{q}(t)$, получим

следующую управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left(-\frac{g}{\ell} - \frac{1}{\ell}\alpha(t)\right)x_1 + u. \end{cases} \quad (6.8)$$

Введя ограничение на управляющее воздействие $|u| \leq 1$, получим задачу об остановке маятника в точке равновесия за минимальное время путем ограниченного воздействия на точку подвеса в горизонтальном направлении, причем количество переключений оптимального управления $u(t)$, с учетом переключения в нуль при попадании в начало координат, не должно превышать 2.

Пусть в системе (6.8) $g = 1$, $\ell = 1$, $\alpha(t) = 0.5 \sin 2t$. Тогда система (6.8) примет следующий вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (-1 - 0.5 \sin 2t)x_1 + u. \quad (6.9)$$

На рисунках 14 и 15 соответственно изображены фрагменты объединения многообразий $\mathcal{N}_+^2 \cup \mathcal{N}_-^2$ и расширенного множества управляемости \mathfrak{D} системы (6.9) при $0 \leq t \leq 6$.

Далее, пусть в системе (6.8) $g = 9.81$, $\ell = 1$, $\alpha(t) = 5 \sin 2t$. Тогда система (6.8) примет следующий вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (-9.81 - 5 \sin 2t)x_1 + u. \quad (6.10)$$

На рисунках 16 и 17 соответственно изображены фрагменты объединения многообразий $\mathcal{N}_+^2 \cup \mathcal{N}_-^2$ и расширенного множества управляемости \mathfrak{D} системы (6.10) при $0 \leq t \leq 6$.

Пример 6.2. Для системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \sin t u \quad (6.11)$$

с разрывной функцией $t \rightarrow \sigma(t)$ на рисунках 18 и 19 соответственно изображены фрагменты объединения многообразий $\mathcal{N}_+^2 \cup \mathcal{N}_-^2$ и расширенного множества управляемости \mathfrak{D} при $0 \leq t \leq 2\pi$.

Пример 6.3. Многообразие $\mathcal{N}_+^2(t_0) \cup \mathcal{N}_-^2(t_0)$ для системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = (-1 - \sin t)x_1 \quad (6.12)$$

при $t_0 = 0$ изображено на рисунке 20. Здесь $\sigma(t_0) \approx 2.706$.

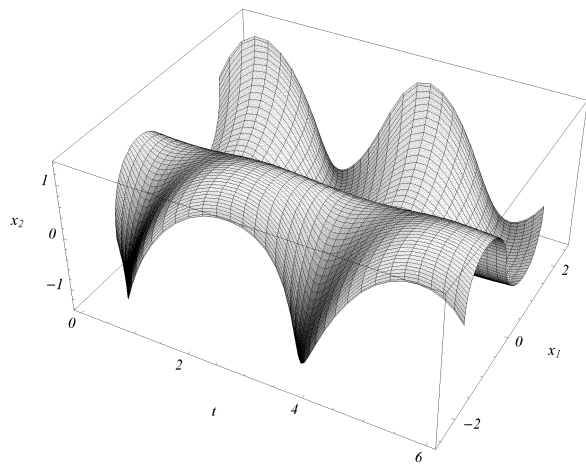


Рис. 14. Фрагмент многообразия $\mathcal{N}_+^2 \cup \mathcal{N}_-^2$ системы (6.9)

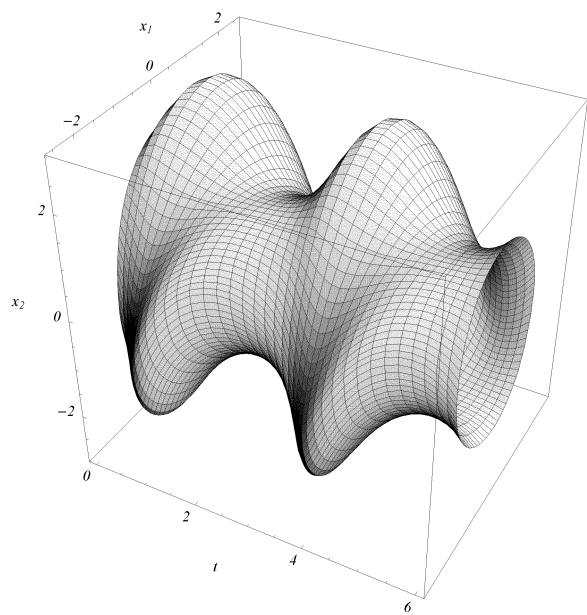


Рис. 15. Фрагмент множества \mathfrak{D} системы (6.9)

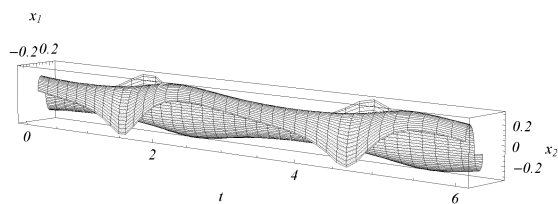


Рис. 16. Фрагмент многообразия $\mathcal{N}_+^2 \cup \mathcal{N}_-^2$ системы (6.10)

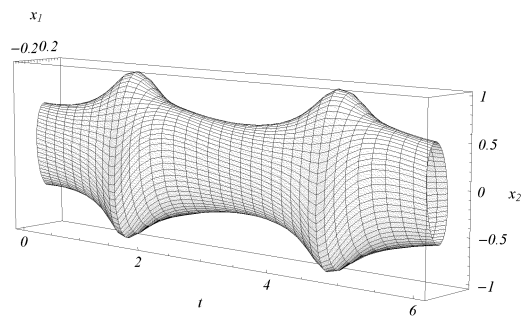


Рис. 17. Фрагмент множества \mathfrak{D} системы (6.10)

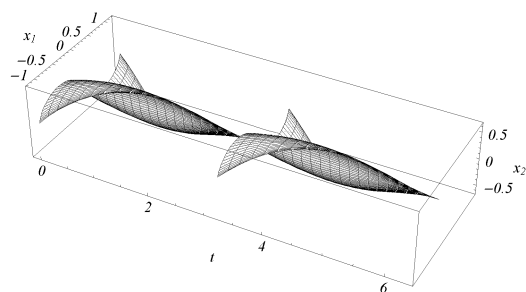


Рис. 18. Фрагмент многообразия $\mathcal{N}_+^2 \cup \mathcal{N}_-^2$ системы (6.11)

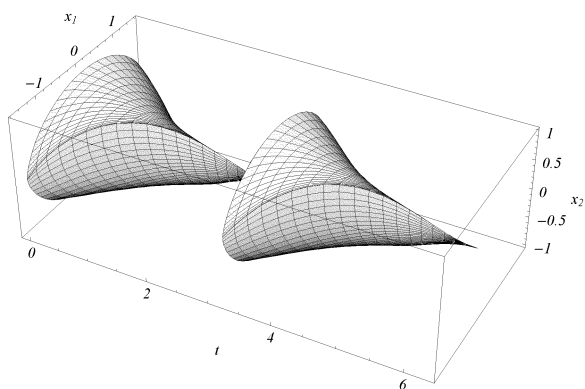


Рис. 19. Фрагмент множества \mathfrak{D} системы (6.11)

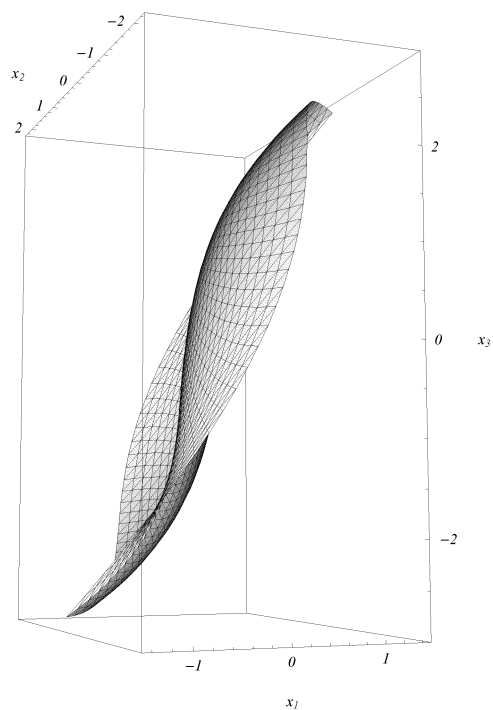


Рис. 20. Многообразие $\mathcal{N}_+^2(t_0) \cup \mathcal{N}_-^2(t_0)$ системы (6.12)

§ 7. Численное моделирование границы множества управляемости

В этом параграфе сформулированы два алгоритма численного моделирования границы множества управляемости. Суть первого алгоритма сводится к многократному численному решению системы уравнений (7.1) в обратную сторону (т.е. находятся численные решения задачи Коши с начальным условием $x(t_0 + \vartheta) = 0$ в конечный момент времени t_0) путем перебора всех возможных комбинаций моментов переключений управления $u(t)$ на фиксированном разбиении отрезка $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Второй алгоритм сводится к предварительному вычислению векторов $y_i = X(t_0, t_i)b(t_i)$, $i = 0, \dots, N - 1$ на том же разбиении отрезка $[t_0, t_0 + \vartheta]$ на $N - 1$ частей и последующему вычислению интегралов (5.4) (стр. 54) методом трапеций.

Как показано в § 5 (стр. 50), докритическая система (2.1) (стр. 25) обладает тем свойством, что оптимальное управление $u(t)$ принимает значения $+1$ и -1 и имеет переключения в моменты времени $t_0 + \tau_i$, $i = n - k + 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$. Подставив это оптимальное управление в систему (2.1), получим следующую замкнутую систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t). \quad (7.1)$$

В § 5 также установлено взаимно-однозначное соответствие между точками, расположенными на границе множества управляемости $D_\vartheta(t_0)$ и наборами моментов переключения $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. Таким образом, перебирая различные наборы τ можно посредством некоторых алгоритмов получать различные точки $\partial D_\vartheta(t_0)$. Ниже приведено описание двух таких алгоритмов.

1°. Разобьем отрезок $[t_0, t_0 + \vartheta]$ на $N - 1$ частей, где N — параметр метода. Полученные N точек будут обозначены как t_0, t_1, \dots, t_{N-1} , где $t_{N-1} = t_0 + \vartheta$. Будем решать задачу Коши (7.1) с начальным условием $x(t_{N-1}) = 0$ и отрицательным шагом по времени при $u(t) = +1$, фиксируя получаемое решение в точках $t_{N-2}, t_{N-3}, \dots, t_0$.

З а м е ч а н и е 7.1. Для решения этой задачи Коши автором применена модификация экспоненциального метода решения систем

обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенная Лоусоном [41] для систем вида (7.1). Строго говоря, система (7.1) имеет разрывы в правой части в точках переключения управления $u(t)$, но этот факт не является помехой для применения указанного численного метода, поскольку фактически здесь речь идет о совокупности задач Коши с начальными условиями, определенными в точках $t_{N-1}, t_{N-2}, \dots, t_0$ и управляющими функциями, не имеющими переключений на отрезках $[t_i, t_j]$, $N - 1 \geq i > j \geq 0$. Решения этих задач, как будет видно далее, непрерывно гсшиваются в точках $t_{N-1}, t_{N-2}, \dots, t_0$.

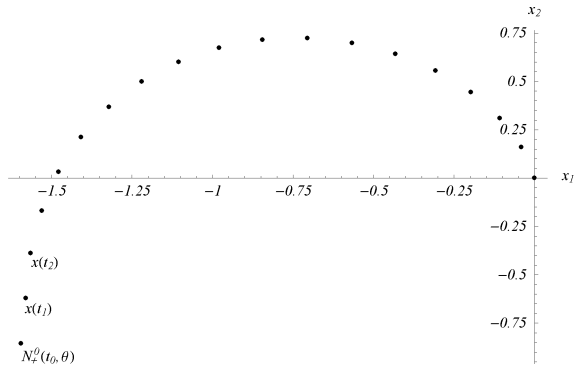


Рис. 21. Результат работы 1-го этапа алгоритма для системы (7.2)

На рисунке 21 показан результат работы первого этапа алгоритма для системы (система (6.9) на стр. 64)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (-1 - 0.5 \sin(2t))x_1 + u, \quad (7.2)$$

при $t_0 = 0$, $\vartheta = 3$, $N = 19$. Здесь следует отметить, что последняя точка $x(t_0)$, получающаяся в результате решения задачи Коши (7.1), представляет собой многообразие $N_+^0(t_0, \vartheta)$.

2°. Каждая точка $x(t_i)$, $i = 1, \dots, N - 1$, полученная на первом этапе алгоритма, представляет собой ту точку фазового пространства, при достижении которой в соответствующий момент времени t_i происходит переключение оптимального (в смысле быстрогодействия) управления с -1 на $+1$. Аналогично предыдущему этапу будем решать $N - 1$ задач Коши (7.1) с начальными условиями $x = x(t_i)$, $i = 1, \dots, N - 1$ и отрицательным шагом по времени при $u(t) = -1$, фиксируя получаемое решение каждой задачи в точках t_j , $j = i - 1, \dots, 0$. Точки фазового пространства, полученные в результате работы первых двух этапов, будут обозначены через $x(t_i, t_j)$, $i = 0, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, i$, где $x(t_i, t_i) = x(t_i)$.

На рисунке 22 показан результат работы второго этапа алгоритма для системы (7.2) при $t_0 = 0$, $\vartheta = 3$, $N = 19$. Аналогично первому этапу, точки $x(t_i, t_0)$, $i = 0, \dots, N - 1$ представляют собой точки многообразия $N_-^1(t_0, \vartheta)$ (на рисунке эти точки соединены сплошной линией).

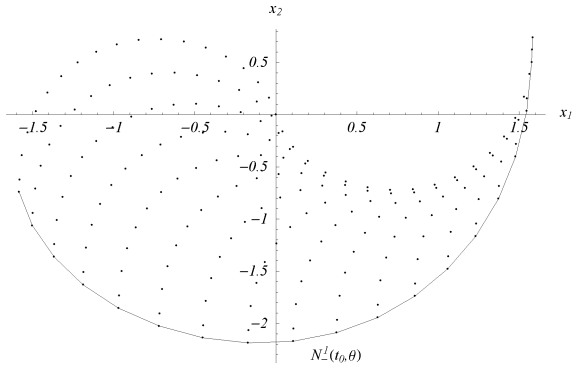


Рис. 22. Результат работы 2-го этапа алгоритма для системы (7.2)

3°. Для случая $n = 2$ второй этап, очевидно, является последним

(остается лишь построить точки многообразий $N_-^0(t_0, \vartheta)$ и $N_+^1(t_0, \vartheta)$, центрально симметричные относительно начала координат построенным многообразиям $N_+^0(t_0, \vartheta)$ и $N_-^1(t_0, \vartheta)$, и в результате будет получено множество $D_\vartheta(t_0)$), а для случая $n > 2$ процесс повторяется вплоть до n -го этапа, при этом $u(t) = +1$ для четных n и $u(t) = -1$ для нечетных n . Например, в результате работы третьего этапа будут получены точки фазового пространства $x(t_i, t_j, t_k)$, $i = 0, \dots, N-1$, $j = 0, \dots, i$, $k = 0, \dots, j$, где $x(t_i, t_i, t_i) = x(t_i, t_i) = x(t_i)$, $x(t_i, t_j, t_j) = x(t_i, t_i, t_j) = x(t_i, t_j)$, а точки $x(t_i, t_j, t_0)$, $i = 0, \dots, N-1$, $j = 0, \dots, j$ расположены на многообразии $N_+^2(t_0, \vartheta)$.

На рисунке 23 показан результат работы третьего этапа алгоритма для системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = (-1 - \sin t)x_1, \quad (7.3)$$

при $t_0 = 0$, $\vartheta = 2.72$, $N = 40$. На рисунке изображены точки $x(t_i, t_j, t_0)$, $i = 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, N-1$, находящиеся на многообразии $N_+^2(t_0, \vartheta)$.

Итак, первый алгоритм моделирования множеств $D_\vartheta(t_0)$ для докритических систем (2.1) представляет собой последовательное выполнение n этапов, описанных выше, в результате которых последовательно вычисляются точки многообразий

$$N_+^0(t_0, \vartheta), N_-^1(t_0, \vartheta), N_+^2(t_0, \vartheta), \dots,$$

после чего остается построить многообразия

$$N_-^0(t_0, \vartheta), N_+^1(t_0, \vartheta), N_-^2(t_0, \vartheta), \dots,$$

центрально симметричные относительно начала координат. Данный алгоритм требует вычисления решения задач Коши на

$$(n-1)N^2 - (n-1)^2N + \sum_{i=1}^{n-2} i(i+1) \quad (7.4)$$

отрезках $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-2$, и использование этого алгоритма при больших N и n может привести к значительным вычислительным

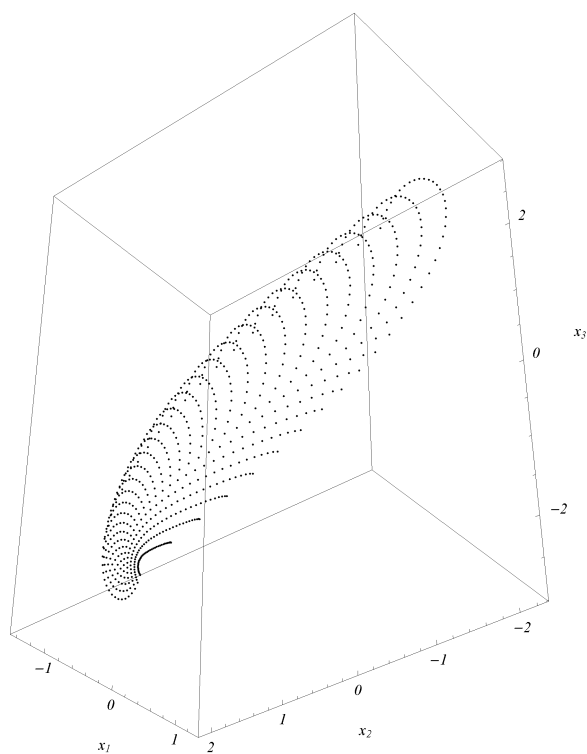


Рис. 23. Результат работы 3-го этапа алгоритма для системы (7.3)

затратам. С другой стороны, к достоинствам этого алгоритма следует отнести гарантированную точность получаемых результатов, поскольку точность решения задачи Коши на каждом шаге численного интегрирования поддается контролю (например, при помощи прави-

ла Рунге) путем изменения длины шага по времени.

Наоборот дело обстоит при использовании второго алгоритма. Введем обозначения

$$y(t) = X(t_0, t)b(t), \quad y_i = X(t_0, t_i)b(t_i), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

и будем считать, что векторы y_i уже вычислены (один из способов вычисления этих векторов описан далее). Тогда точки, находящиеся на границе множества $D_\vartheta(t_0)$, могут быть вычислены как суммы интегралов (см. (5.4) на стр. 54)

$$\sum_{i=n-k-1}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} y(t) dt, \quad (7.5)$$

для различных наборов моментов времени $t_0 + \tau_i$, $i = n - k + 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$. Для вычисления векторов y_1, \dots, y_n достаточно решить n сопряженных задач Коши

$$\dot{\psi} = -\psi A(t) \quad (7.6)$$

с начальными условиями $\psi(t_0) = \psi_j$, $j = 1, \dots, n$, где через ψ_j обозначен вектор вида $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, у которого единице равна j -я координата. Фиксируя решение каждой такой задачи в точках t_i , $i = 1, \dots, N-1$ и умножая его скалярно в каждой этой точке на вектор-столбец $b(t_i)$, $i = 1, \dots, N-1$, будем получать j -ю координату векторов y_1, y_2, \dots, y_{N-1} соответственно. Таким образом заполняется матрица Y размера $n \times N$, столбцами которой служат векторы y_0, y_1, \dots, y_{N-1} (здесь $y_0 = b(t_0)$), при этом для вычисления элементов этой матрицы требуется всего $n \cdot N$ вычислений решения задач Коши (7.6) на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-2$, что значительно меньше величины (7.4). После этого остается вычислить суммы (7.5), что по вычислительным затратам пренебрежительно мало по сравнению с затратами на вычисление векторов y_0, y_1, \dots, y_{N-1} . Второй алгоритм значительно быстрее первого, но он обладает тем недостатком, что погрешность вычисления интегралов (7.5) методом трапеций имеет

порядок длины отрезка $[t_i, t_{i+1}]$. Тем не менее, для исследовательских целей этот алгоритм вполне применим, и все множества управляемости в этой работе вычислены при помощи второго алгоритма.

Для моделирования расширенного множества управляемости $\mathfrak{D} = \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ и многообразий $\mathcal{N}_+^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{N}_+^k(t)$, $k = 1, \dots, n-1$ (см. § 6) достаточно многократно выполнить один из описанных выше алгоритмов на некотором фиксированном наборе моментов времени t_1, t_2, \dots, t_M , предварительно вычислив длины интервалов до критичности $\sigma(t_1), \sigma(t_2), \dots, \sigma(t_M)$ и положив на каждом шаге $\vartheta = \sigma(t_i)$, $i = 1, \dots, M$. На рисунке 24 показаны множества $D_{\sigma(t)}(t)$ для системы (7.2) при $0 \leq t \leq 6$, получающиеся в процессе моделирования множества \mathfrak{D} (здесь $M = 30$). См. также рис. 15 на стр. 66.

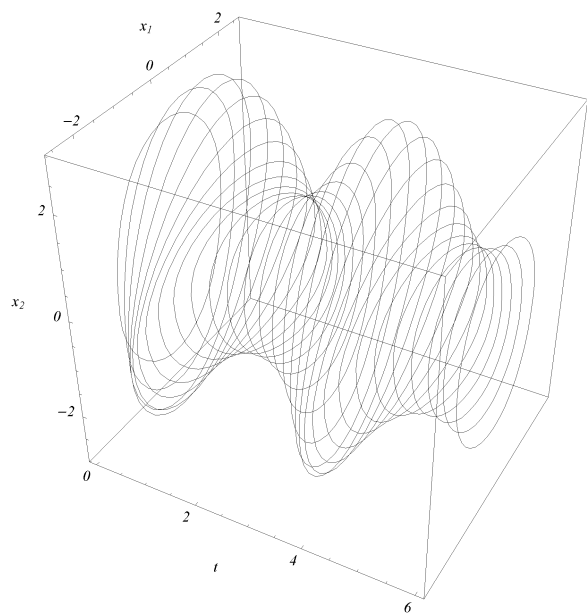


Рис. 24. Моделирование множества \mathfrak{D} для системы (7.2)

§ 8. Вектор быстрогодействия

В этом параграфе определен *вектор быстрогодействия* $\tau(q) = (\tau_1(q), \dots, \tau_n(q))$, где $\tau_1(q), \dots, \tau_n(q)$ являются моментами переключения оптимального в смысле быстрогодействия управления при оптимальном движении из точки $q_0 = (t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+n}$ в начало координат. Показано, что $\tau_i(q_0)$, $i = 1, \dots, n$ является временем быстрогодействия ($\vartheta = \tau_i(q_0)$) в задаче о переводе точки $x_0 \in \mathcal{N}_+^n(t_0)$ на многообразии $\mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}(t_0 + \vartheta)$, где вместо $\nu(i)$ надо поставить знак плюс, если i — четное и знак минус, если i — нечетное число. Доказано, что для каждого $k = 0, \dots, n$ функции $\tau_i: \mathcal{N}_+^{1+k} \cup \mathcal{N}_-^{1+k} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ имеют гладкость на единицу большую, чем гладкость функций $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ системы (2.1).

Пусть точка $q_0 = (t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+n}$, тогда функция $F^{-1}: \mathcal{N}_+^{1+n} \rightarrow \mathcal{M}^{1+n}$, обратная к F при $k = n$ задает точку

$$p_0 = (t_0, \tau_1(q_0), \dots, \tau_n(q_0)) \in \mathcal{M}^{1+n}, \quad 0 < \tau_1(q_0) < \dots < \tau_n(q_0).$$

Оказывается (это будет доказано ниже), что для каждого $i = 1, \dots, n$, число $\tau_i(q_0)$ является временем быстрогодействия ($\vartheta = \tau_i(q_0)$) в задаче о переводе точки $x_0 \in \mathcal{N}_+^n(t_0)$ на многообразии $\mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}(t_0 + \vartheta)$:

$$\vartheta(u(\cdot)) \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (8.1)$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta, \quad (8.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + \vartheta) \in \mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}(t_0 + \vartheta), \quad (8.3)$$

где вместо $\nu(i)$ надо поставить знак плюс, если i — четное и знак минус, если i — нечетное число. Таким образом, вектор

$$\tau(q) = (\tau_1(q), \dots, \tau_n(q))$$

естественно называть *вектором быстрогодействия*.

З а м е ч а н и е 8.1. Вектор быстрогодействия определен на многообразии \mathcal{N}_+^{1+n} . Поскольку множество $D_{\sigma(t)}(t)$ центрально симметрично, то фактически вектор $\tau(q)$ определен на $\mathcal{N}_+^{1+n} \cup \mathcal{N}_-^{1+n}$ (действительно, из включения $x \in \mathcal{N}_+^n(t)$ следует включение $-x \in \mathcal{N}_-^n(t)$,

причем $\tau_i(t, x) = \tau_i(t, -x)$). С учетом (8.3) доопределим $\tau(q)$ на все \mathfrak{D} , положив $\tau_i(q) = 0$ при $q \in \mathfrak{N}_+^{1+n-i} \cup \mathfrak{N}_-^{1+n-i}$ (для $i \in \{1, \dots, n\}$, мера Лебега множества $\mathfrak{N}_+^{1+n-i} \cup \mathfrak{N}_-^{1+n-i}$ равна нулю).

Т е о р е м а 8.1. Пусть система (2.1) докритическая. Обозначим

$$(u^0(\cdot), \vartheta^0, x^0(\cdot))$$

— оптимальный процесс задачи (8.1)–(8.3) при некотором фиксированном $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\vartheta^0 = \tau_i(q_0)$ и на интервале $(t_0, t_0 + \tau_i(q_0))$ оптимальное управление $u^0(t)$ и отвечающее ему оптимальное решение $x^0(t)$ системы (8.2) совпадают с оптимальными управлением и решением задачи быстрогодействия в нуль (т. е. задачи (8.1)–(8.3) при $i = n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+n}$ и $(u(t), \vartheta, x(t))$ — допустимый процесс задачи (8.1)–(8.3) при $i = 1$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta$. Докажем, что $\vartheta \geq \tau_1(q_0)$. Доказательство будет разбито на несколько пунктов.

А. Построим точку $p_0 = F^{-1}(q_0)$, где F^{-1} — отображение, обратное к F (см. (6.3) при $k = n$). Тогда

$$x_0 = - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \int_{t_0 + \tau_i}^{t_0 + \tau_{i+1}} X(t_0, t) b(t) dt, \quad (8.4)$$

где $\tau_0 = 0$, $\tau_i = \tau_i(q_0)$. Далее, поскольку $x(t_0 + \vartheta) \in \mathcal{N}_-^{n-1}(t_0 + \vartheta)$, то найдется вектор $\theta = (\theta_2, \dots, \theta_n)$, $0 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ такой, что

$$x(t_0 + \vartheta) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_{t_0 + \vartheta + \theta_i}^{t_0 + \vartheta + \theta_{i+1}} X(t_0 + \vartheta, t) b(t) dt. \quad (8.5)$$

Здесь $\theta_1 = 0$, $\theta_i = \tau_i(t_0 + \vartheta, x(t_0 + \vartheta))$, $i = 2, \dots, n$. Подставив (8.4) и (8.5) в решение

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)b(s)u(s)ds,$$

после несложных преобразований получим n равенств

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i \int_{t_0+\vartheta+\theta_i}^{t_0+\tau_i} X(t_0, t) b(t) dt - (-1)^n \int_{t_0+\tau_n}^{t_0+\vartheta+\theta_n} X(t_0, t) b(t) dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t) b(t) (u(t) - 1) dt - 2 \int_{t_0+\vartheta}^{t_0+\tau_1} X(t_0, t) b(t) dt = 0. \quad (8.6)
\end{aligned}$$

Таким образом, каждому допустимому процессу задачи (8.1)–(8.3) отвечает решение $w = (u(\cdot), \vartheta, \theta)$ системы уравнений (8.6); верно и обратное утверждение, поэтому решение w системы (8.6) тоже будем называть допустимым процессом задачи (8.1)–(8.3). Очевидным допустимым процессом служит тройка $w^0 = (u^0(\cdot), \tau_1, \theta^0)$, где $u^0(t) = 1$ при $t \in [t_0, t_0 + \tau_1)$, $\theta^0 = (\tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_1)$.

Пусть $\psi \in S^{n-1}$. Умножим равенства (8.6) скалярно на ψ и получившуюся слева функцию обозначим $\mathfrak{S}(w, \psi)$. Тогда

$$\mathfrak{S} = I_1(w, \psi) + S(w, \psi) + I_n(w, \psi),$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \xi(t, \psi) (u(t) - 1) dt - 2 \int_{t_0+\vartheta}^{t_0+\tau_1} \xi(t, \psi) dt, \\
S &= 2 \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i \int_{t_0+\vartheta+\theta_i}^{t_0+\tau_i} \xi(t, \psi) dt, \\
I_n &= -(-1)^n \int_{t_0+\tau_n}^{t_0+\vartheta+\theta_n} \xi(t, \psi) dt, \\
\xi(t, \psi) &= \psi X(t_0, t) b(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого допустимого процесса w и любого $\psi \in S^{n-1}$ из (8.6) следует равенство $\mathfrak{S}(w, \psi) = 0$.

Б. Запишем сумму $S(w, \psi)$ в виде $S = I_2(w, \psi) + \dots + I_{n-1}(w, \psi)$,

где

$$I_i = c_i \int_{t_0 + \alpha_i}^{t_0 + \beta_i} \xi(t, \psi) dt, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$\alpha_i = \min\{\vartheta + \theta_i, \tau_i\},$$

$$\beta_i = \max\{\vartheta + \theta_i, \tau_i\},$$

$$c_i = \begin{cases} 2(-1)^i, & \text{если } \alpha_i = \vartheta + \theta_i \\ -2(-1)^i, & \text{если } \alpha_i = \tau_i \end{cases}$$

Очевидно $\alpha_i \leq \beta_i$. Оказывается далее, что $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$. Действительно, если $\alpha_i = \vartheta + \theta_i$ и $\alpha_{i+1} = \vartheta + \theta_{i+1}$ или $\alpha_i = \tau_i$ и $\alpha_{i+1} = \tau_{i+1}$, то неравенство $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ очевидно. Пусть $\alpha_i = \vartheta + \theta_i$, $\alpha_{i+1} = \tau_{i+1}$; тогда $\beta_i = \tau_i$ и $\alpha_i \leq \beta_i < \tau_{i+1} = \alpha_{i+1}$. Если же $\alpha_i = \tau_i$, $\alpha_{i+1} = \vartheta + \theta_{i+1}$, то $\alpha_i \leq \beta_i = \vartheta + \theta_i < \vartheta + \theta_{i+1} = \alpha_{i+1}$. Аналогично доказываются неравенства $\beta_i \leq \beta_{i+1}$.

Покажем, что если при некотором i интервалы (α_i, β_i) и $(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$ пересекаются, то $c_i + c_{i+1} = 0$. Действительно, пусть $\alpha_{i+1} < \beta_i$ и $\alpha_{i+1} = \vartheta + \theta_{i+1}$, тогда $\beta_i = \tau_i$ и поэтому $\alpha_i = \vartheta + \theta_i$; следовательно $c_i + c_{i+1} = 2(-1)^i + 2(-1)^{i+1} = 0$. Если $\alpha_{i+1} = \tau_{i+1}$, то $\beta_i = \vartheta + \theta_i$. Поэтому $\alpha_i = \tau_i$ и $c_i + c_{i+1} = -2(-1)^i - 2(-1)^{i+1} = 0$. Таким образом, любой паре пересекающихся интервалов (α_i, β_i) и $(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$ отвечает в $S(w, \psi)$ два интеграла

$$I_i^0(w, \psi) = c_i \int_{t_0 + \alpha_i}^{t_0 + \alpha_{i+1}} \xi(t, \psi) dt$$

и

$$I_{i+1}^0(w, \psi) = c_{i+1} \int_{t_0 + \beta_i}^{t_0 + \beta_{i+1}} \xi(t, \psi) dt$$

с непересекающимися интервалами $(t_0 + \alpha_i, t_0 + \alpha_{i+1})$ и $(t_0 + \beta_i, t_0 + \beta_{i+1})$ (для дальнейшего важно, что отмеченная перестройка не увеличивает количество интегралов в $S(w, \psi)$).

В. Предположим, что существует допустимый процесс $(u(\cdot), \vartheta, \theta)$, такой, что $\vartheta \leq \tau_1$. Выберем вектор $\psi_0 \in S^{n-1}$, обеспечивающий следующие свойства функции $\xi_0(t) = \xi(t, \psi_0)$.

1°. $\xi_0(t) > 0$ при $t \in (t_0, t_0 + \tau_1)$.

2°. $(-1)^n \xi_0(t) > 0$ при $t \in (t_0 + \tau_n, t_0 + \vartheta + \theta_n)$ (неравенство $\tau_n \leq \vartheta + \theta_n$ следует из определения функции быстродействия).

3°. Если интервал $(t_0 + \alpha_i, t_0 + \beta_i)$ не пересекается с остальными интервалами, находящимися в $(t_0 + \alpha_2, t_0 + \beta_{n-1})$, то $c_i \xi_0(t) < 0$ при $t \in (t_0 + \alpha_i, t_0 + \beta_i)$.

4°. Если интервалы $(t_0 + \alpha_i, t_0 + \beta_i)$ и $(t_0 + \alpha_{i+1}, t_0 + \beta_{i+1})$ пересекаются, то $c_i \xi_0(t) < 0$ при $t \in (t_0 + \alpha_i, t_0 + \alpha_{i+1})$ и $c_{i+1} \xi_0(t) < 0$ при $t \in (t_0 + \beta_i, t_0 + \beta_{i+1})$.

В силу докритичности функция $\xi_0(t)$ с указанными свойствами существует. Действительно, максимальное число нулей $\xi_0(t)$ на интервале $(t_0 + \alpha_2, t_0 + \beta_{n-1})$ не превосходит количества интегралов в $S(w, \psi)$ (а их $n-2$) минус единица (т. е. $n-3$), кроме того, два нуля может появиться в точках $t_0 + \tau_1$ и $t_0 + \tau_n$ (заметим, что на интервалах $(t_0, t_0 + \tau_1)$ и $(t_0 + \tau_n, t_0 + \vartheta + \theta_n)$ функция $\xi_0(t)$ сохраняет знак). Следовательно, $\xi_0(t)$ имеет не более $n-1$ нулей, что допустимо.

Из построения $\xi_0(t)$ получаем неравенства $I_1(w, \psi_0) \leq 0$, $S(w, \psi_0) \leq 0$, $I_n(w, \psi_0) \leq 0$. Так как $\mathfrak{S}(w, \psi_0) = 0$, то $I_1(w, \psi_0) = S(w, \psi_0) = I_n(w, \psi_0) = 0$. Далее, из равенства $I_1(w, \psi_0) = 0$ следуют равенства $\vartheta = \tau_1$ и $u(t) = 1$ при $t \in (t_0, t_0 + \tau_1)$.

Теорема 8.1 доказана для случая максимальной размерности. Доказательство теоремы для $i = 2, \dots, n-1$ аналогично.

З а м е ч а н и е 8.2. Пусть $q_0 = (t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+n} \cup \mathcal{N}_-^{1+n}$, $x_0(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_n(q_0)$ — оптимальное решение задачи быстродействия в нуль, отвечающее начальной точке q_0 ; $\tau(q_0) = (\tau_1(q_0), \dots, \tau_n(q_0))$ — вектор быстродействия. Тогда легко убедиться, что для каждого фиксированного $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого $i \in \{k, \dots, n\}$ имеют место равенства

$$\tau_i(t_0 + \tau_k(q_0), x_0(t_0 + \tau_k(q_0))) = \tau_i(q_0) - \tau_k(q_0).$$

Пусть $\tau(q) = (\tau_1(q), \dots, \tau_n(q))$ — вектор быстрогодействия системы (2.1). Производной (см. также определение на стр. 21) $d\tau_i(q_0)$ функции $\tau_i: \mathcal{N}_+^{1+k} \rightarrow \mathbb{R}$ на многообразии \mathcal{N}_+^{1+k} в точке $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ вдоль направления, заданного вектором $w \in T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$, называется линейное отображение $d\tau_i(q_0): T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством

$$d\tau_i(q_0)w \doteq \left. \frac{d\tau_i(q(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

где $q(\varepsilon)$ — класс эквивалентности гладких кривых $q: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{N}_+^{1+k}$, обладающих следующими свойствами:

$$q(0) = q_0, \quad \left. \frac{dq(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = w.$$

Аналогично определяется производная $d^s\tau_i$, $s \geq 2$:

$$d^s\tau_i(q_0)(w_1, \dots, w_s) \doteq \left. \frac{d^s\tau_i(q(\varepsilon))}{d\varepsilon^s} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (8.7)$$

где $q: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{N}_+^{1+k}$ — класс эквивалентности гладких кривых вида

$$q(\varepsilon) = q_0 + \varepsilon w_1 + \frac{\varepsilon^2 w_2}{2!} + \dots + \frac{\varepsilon^s w_s}{s!} + o(\varepsilon^s).$$

Функция $q \rightarrow \tau_i(q)$ принадлежит классу C^s на многообразии \mathcal{N}_+^{1+k} , если для всякой C^s -кривой $q: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{N}_+^{1+k}$ функция $\varepsilon \rightarrow \tau_i(q(\varepsilon))$ является функцией класса C^s . Отметим еще, что пространство C^s -функций $q: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{N}_+^{1+k}$, проходящих через точку $q_0 = q(0)$, исчерпывается следующим набором: $q(\varepsilon) = (t(\varepsilon), x(p(\varepsilon)))$, где $p(\varepsilon) = (t(\varepsilon), \tau(\varepsilon)) \in \mathcal{M}^{1+k}$ — произвольная C^s -функция, проходящая через точку $p_0 = F^{-1}(q_0)$,

$$x(p(\varepsilon)) = - \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t(\varepsilon)+\tau_i(\varepsilon)}^{t(\varepsilon)+\tau_{i+1}(\varepsilon)} X(t(\varepsilon), s) b(s) ds, \quad \tau_{n-k} = 0.$$

З а м е ч а н и е 8.3. Для дальнейшего важно, что пространство $T_p\mathcal{M}^{1+k}$ представимо в виде $T_p\mathcal{M}^{1+k} = \mathbb{R} \times T_\tau\mathcal{M}^k(t)$, где $T_\tau\mathcal{M}^k(t)$ —

пространство, касательное к $\mathcal{M}^k(t)$ в точке τ . Далее, так как изоморфизм $dF(p)$ можно записать в виде $dF(p) = (1, dF_0(p))$, где $dF_0(p) = (\ell_{n-k}(p), \ell_{n-k+1}(p), \dots, \ell_n(p))$, то пространство $T_q\mathcal{N}_+^{1+k}$, касательное к \mathcal{N}_+^{1+k} в точке $q = (t, x)$, имеет представление $T_q\mathcal{N}_+^{1+k} = \mathbb{R} \times T_x\mathcal{N}_+^k(t)$, где $T_x\mathcal{N}_+^k(t)$ — пространство, касательное к $\mathcal{N}_+^k(t)$ в точке x . Поэтому всякий вектор $\delta q \in T_q\mathcal{N}_+^{1+k}$ представим в виде $\delta q = (\delta t, \delta x)$, где $\delta x \in T_x\mathcal{N}_+^k(t)$. Вектор δx может быть разложен по базису (6.5) (см. стр. 61):

$$\delta x = \ell_{n-k}(p)\delta t + \ell_{n-k+1}(p)\delta\tau_{n-k+1} + \dots + \ell_n(p)\delta\tau_n.$$

Здесь $p = F^{-1}(q) = (t, \tau(t, x))$, $(\delta\tau_{n-k+1}, \dots, \delta\tau_n)$ — координаты вектора δx в базисе (6.5).

Т е о р е м а 8.2. Пусть система (2.1) докритическая, и функции $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежат классу C^r . Тогда для каждого $k = 0, \dots, n$ функции $\tau_i: \mathcal{N}_+^{1+k} \cup \mathcal{N}_-^{1+k} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, принадлежат классу C^{r+1} на многообразиях $\mathcal{N}_+^{1+k} \cup \mathcal{N}_-^{1+k}$. В частности, τ_i непрерывно дифференцируемы $r+1$ раз на $\mathcal{N}_+^{1+n} \cup \mathcal{N}_-^{1+n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше показано, что отображение $F^{-1}: \mathcal{N}_+^{1+n} \rightarrow \mathcal{M}^{1+k}$, $k = 0, \dots, n$, обратное отображению F , заданному равенством (6.3), является диффеоморфизмом класса C^{r+1} . Следовательно, кривая $\varepsilon \rightarrow p(\varepsilon) = (t(\varepsilon), \tau(q(\varepsilon))) \in \mathcal{M}^{1+k}$ представляет собой $r+1$ раз непрерывно дифференцируемую функцию аргумента ε в точке $\varepsilon = 0$, откуда, в силу определения (8.7), следует, что функция $q \rightarrow \tau_i(q)$ непрерывно дифференцируема $r+1$ раз в каждой точке $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+n}$. Повторив те же рассуждения для многообразий \mathcal{N}_-^{1+k} , получим утверждение теоремы.

Глава 3. Позиционное управление докритической системой

Эта глава посвящена проблеме построения позиционного управления $u(t, x)$ (управления по принципу обратной связи) в задаче быстрогодействия для динамической системы, поведение которой описывается уравнением (9.1) (см. стр. 86). Эта проблема остается одной из наиболее трудных и мало изученных задач математической теории оптимального управления. Важной причиной, препятствующей существованию позиционного управления, может служить отсутствие внутренней устойчивости уравнения (9.1) по отношению к изменениям $u(t, x)$ на множествах в \mathbb{R}^{1+n} с нулевой мерой Лебега.

Показано, что для докритической системы (2.1) существует позиционное управление, оптимальное в смысле быстрогодействия, и построено такое управление. Показано, что координаты $\tau_i(t_0, x_0)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ вектора быстрогодействия, определенного в § 8, являются решениями соответствующих уравнений Беллмана. Описан класс таких допустимых возмущений основной докритической системы (2.1), что оптимальное в смысле быстрогодействия позиционное управление $u(t, x)$ для основной системы доставляет в нуль каждое решение возмущенной системы (не обязательно за минимальное, но за конечное время), начинающееся в точках расширенного множества управляемости \mathfrak{D} . Рассмотрены примеры.

§ 9. Постановка задачи и пример П. Бруновского

В этом параграфе сформулирована проблема построения позиционного управления $u(t, x)$ (управления по принципу обратной связи) в задаче быстрогодействия для динамической системы, поведение которой описывается уравнением (9.1). Приведен пример линейной по фазовым координатам и управлению стационарной системы на плоскости (построенный впервые П. Бруновским в [27]), у которой отсутствует внутренняя устойчивость по отношению к изменениям $u(t, x)$ на множестве нулевой меры. Также сформулирована проблема построения позиционного управления в нуль (не обязательно за минимальное, но за конечное время) семейства \mathcal{W} уравнений близких к *основному уравнению* (2.1).

Проблема построения позиционного управления $u(t, x)$ (управления по принципу обратной связи) в задаче быстрогодействия для динамической системы, поведение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U, \quad (9.1)$$

(U — выпуклый компакт в \mathbb{R}^m , $0 \in \text{int } U$) остается одной из наиболее трудных и мало изученных задач математической теории оптимального управления. Важной причиной, препятствующей существованию позиционного управления, служит отсутствие внутренней устойчивости уравнения

$$\dot{x} = v(t, x, u(t, x)), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (9.2)$$

по отношению к изменениям $u(t, x)$ на множествах в \mathbb{R}^{1+n} с нулевой мерой Лебега.

В.Г. Болтянский, по-видимому, первым обратил внимание на такое аномальное поведение уравнения (9.2), но достаточно простой пример (линейной по фазовым координатам и управлению стационарной системы на плоскости) построен П. Бруновским в [27]. Далее приведен несколько модифицированный пример П. Бруновского.

Рассмотрим задачу быстрогодействия в начало координат для систе-

мы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \end{cases} \quad (9.3)$$

где $u \in U \doteq \{u = (u_1, u_2) : |u_1 + u_2| \leq 1\}$. Легко убедиться, что множество управляемости системы (9.3) представляет собой полосу

$$D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, |x_2| < 1\},$$

а оптимальное в смысле быстродействия управление определено равенством

$$\widehat{u}(x) = \widehat{u}(x_1, x_2) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_1 = x_2 = 0, \\ (+1, 0), & \text{если } x_1 < 0, x_2 = 0, \\ (-1, 0), & \text{если } 0 < x_1, x_2 = 0, \\ (0, -1), & \text{если } 0 < x_2 < 1, \\ (0, +1), & \text{если } -1 < x_2 < 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Система (9.3), замкнутая управлением (9.4),

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \widehat{u}_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2 + \widehat{u}_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (9.5)$$

обладает следующими свойствами:

1) пусть $x(t, t_0, x^0)$ — решение (в смысле Каратеодори) системы (9.5), $u(t, t_0, x^0) = \widehat{u}(x(t, t_0, x^0))$, тогда $u(t, t_0, x^0)$ — оптимальное (в смысле быстродействия) управление системы (9.3) для точки $(t_0, x^0) \in D$;

2) всякое нетривиальное решение (в смысле А.Ф. Филиппова [17]) системы (9.5), начинающееся в D , экспоненциально стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, но не входит в нуль за конечное время.

Это происходит потому (см. рис. 25), что решения Каратеодори системы (9.5), начинающиеся на горизонтальной оси, являются решениями системы $\dot{x}_1 = -x_1 - 1$, $\dot{x}_2 = x_2$ (если $x_1^0 > 0$), а решения Филиппова являются решениями системы $\dot{x}_1 = -x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$ (при

$x_1 > 0$). Следовательно, в данном примере не существует устойчивого (к возмущениям на множествах меры нуль), позиционного управления, оптимального в смысле быстродействия.

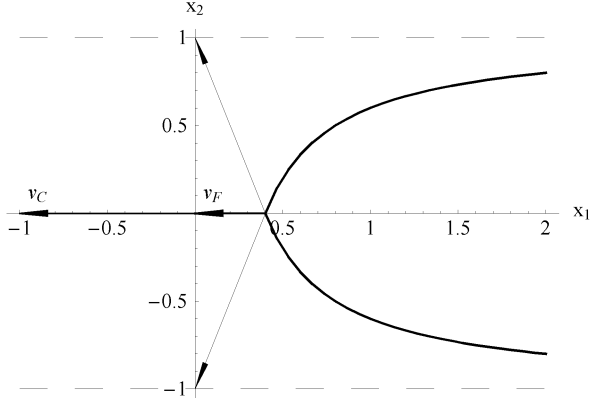


Рис. 25. Векторы скорости v_C и v_F решений системы (9.5) определенные по Каратеодори (программное управление) и А.Ф. Филиппову (позиционное управление). Вектор v_F гупируется в начало координат и не позволяет фазовым точкам войти в нуль за конечное время

Пусть \mathfrak{D} — открытое множество в \mathbb{R}^{1+n} , содержащее внутри себя цилиндр $\mathfrak{D}_r \doteq \mathbb{R} \times O_r^n$, где $O_r^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. Предположим, что уравнение (9.1) (будем называть его *основным*) допускает в \mathfrak{D} позиционное управление $u(t, x)$, оптимальное в смысле быстродействия в нуль. Это означает следующее: всякой точке $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}$ отвечает число $\tau(t_0, x_0)$ (время быстродействия) такое, что решение $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (9.1) (понимаемое в смысле А.Ф. Филиппова) обращается в нуль при $t = t_0 + \tau(t_0, x_0)$ и программное управление $u_0(t) = u(t, x(t, t_0, x_0))$ является оптимальным в смысле быстродей-

ствия для уравнения (9.1) из точки (t_0, x_0) в точку $(t_0 + \tau, 0)$.

Рассмотрим теперь семейство \mathcal{W} уравнений

$$\dot{x} = v(t, x, u) + w(t, x, u), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U. \quad (9.6)$$

При каких условиях:

1) существует открытое множество $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$ содержащее внутри себя цилиндр \mathfrak{D}_ε (при некотором $\varepsilon > 0$) такое, что управление $u(t, x)$ является позиционным (т. е. переводит за конечное время точки из \mathfrak{D}_0 на $\mathbb{R} \times \{0\}$) одновременно для всех уравнений из семейства \mathcal{W} ;

2) для уравнений вида (9.6) близких к основному, управление $u(t, x)$ близко к оптимальному (в смысле быстрогодействия), т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|w(t, x, u)| \leq \delta$ при $(t, x, u) \in \mathfrak{D}_0 \times U$ следует неравенство $|\vartheta(t_0, x_0) - \tau(t_0, x_0)| \leq \varepsilon$, $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_0$, где $\vartheta(t_0, x_0)$ — время перехода решения $x_w(t, t_0, x_0)$ уравнения (9.6) в нуль.

З а м е ч а н и е 9.1. В идейном смысле такое управление аналогично *универсальной стратегии*, введенной Н.Н. Красовским [19, § 7, с.67] для дифференциальных игр (см. также [20]).

§ 10. Позиционное управление докритической системой, оптимальное в смысле быстрогодействия

В этом параграфе доказано существование позиционного управления для докритической системы (2.1) и построено такое управление.

Л е м м а 10.1. *Точка $(t, x^0(t))$, $x^0(t) = x^0(t, q_0)$, $q_0 \in \mathcal{N}_+^{n+1}$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_n(q_0)$ при движении $t \rightarrow (t, x^0(t))$, отвечающем оптимальному процессу $(u^0(\cdot), \tau_n(q_0), x^0(\cdot))$ задачи быстрогодействия в нуль, входит в каждое многообразие $\mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}$, $i = 0, \dots, n-1$, трансверсально (вместо $\nu(i)$ надо поставить знак гминусЕ , если i — нуль или четное число и знак гплюсЕ , если i — нечетное число).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму для $i = 0$. Обозначим $t_1 = t_0 + \tau_1(q_0)$. Надо доказать, что вектор $v_1 = \text{col}(1, \dot{x}^0(t_1))$, касательный к движению $t \rightarrow (t, x^0(t))$ в точке $q_1 = (t_1, x^0(t_1)) \in \mathcal{N}_-^n$, не лежит в пространстве $T_{q_1} \mathcal{N}_-^n$, касательном к многообразию \mathcal{N}_-^n в точке q_1 .

По точке q_1 построим точку $p_1 = F^{-1}(q_1)$; здесь F^{-1} — функция, обратная F (см. (6.3), где надо положить $k = n-1$ и гминусЕ перед знаком суммы заменить на гплюсЕ). Тогда $p_1 = (t_1, \theta)$, где $\theta = (\theta_2, \dots, \theta_n)$, причем $\theta_i = \tau_i(q_0) - \tau_1(q_0)$ (см. замечание 8.2). Из построения следует, что

$$x^0(t_1) = x(p_1) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_{t_1+\theta_i}^{t_1+\theta_{i+1}} X(t_1, t) b(t) dt, \quad \theta_1 = 0. \quad (10.1)$$

Таким образом, в точке q_1 вектор скорости $v_1 = \text{col}(1, A(t_1)x(p_1) + b(t_1))$. Далее, с учетом (10.1) и равенства (6.4) (в котором надо внешние понятные изменения, связанные с заменой многообразия \mathcal{N}_+^{1+k} на многообразие \mathcal{N}_-^n) несложно убедиться, что векторы

$$l_1(q_1) = \text{col}(1, A(t_1)x(p_1) - b(t_1)),$$

$$l_i(q_1) = \text{col}(0, X(t_1, t_1 + \theta_i)b(t_1 + \theta_i)), \quad i = 2, \dots, n,$$

образуют базис в $T_{q_1} \mathcal{N}_-^n$.

Если вектор v_1 лежит в $T_{q_1} \mathcal{N}_-^n$, то найдутся константы c_1, \dots, c_n , не равные нулю одновременно, такие, что

$$v_1 = c_1 l_1(p_1) + \dots + c_n l_n(p_1).$$

Следовательно $c_1 = 1$ и поэтому

$$2b(t_1) = c_2 X(t_1, t_1 + \theta_2) b(t_1 + \theta_2) + \dots + c_n X(t_1, t_1 + \theta_n) b(t_1 + \theta_n).$$

Проведя рассуждения, аналогичные доказательству свойства 5.3 (см. стр. 55), можно убедиться, что линейная зависимость векторов $X(t_0 + \tau_1, t_0 + \tau_i) b(t_0 + \tau_i)$, $i = 1, \dots, n$, противоречит условию $\tau_n(q_0) < \sigma(t_0)$. Лемма 10.1 доказана.

Пусть функция $q \rightarrow u(q)$, где $q = (t, x)$, определена на внутренности расширенного множества управляемости \mathfrak{D} , принимает значения в $U = [-1, +1]$ и суперпозиционно измерима. \mathcal{C} -решением (решением в смысле Каратеодори) системы уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t, x), \quad (10.2)$$

называется всякая абсолютно-непрерывная функция $t \rightarrow x(t)$, удовлетворяющая при всех t равенству

$$x(t) = X(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t X(t, s)b(s)u(s, x(s)) ds,$$

где t_0 — произвольный фиксированный момент времени. Основным недостатком \mathcal{C} -решений является их сильная чувствительность к изменениям функции $u(q)$ на множествах меры нуль. Этому недостатка лишены \mathcal{F} -решения (решения в смысле А.Ф. Филиппова [17, с. 40]). Кроме того, \mathcal{F} -решения наиболее приспособлены для описания прикладных задач, допускающих моделирование с помощью дифференциальных уравнений с разрывными по фазовым координатам правыми частями.

Для определения решений в смысле Филиппова построим многозначную функцию

$$q \rightarrow \mathbb{F}(q) \doteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\text{mes } \mu = 0} \overline{\text{conv}} u(O_\varepsilon(q) \setminus \mu), \quad q \in \text{int } \mathfrak{D}, \quad (10.3)$$

где $O_\varepsilon(q)$ — ε -окрестность точки q , μ — произвольное множество в \mathbb{R}^{1+n} , мера Лебега $\text{mes } \mu$ которого равна нулю, $\overline{\text{conv}} Q$ — замыкание выпуклой оболочки множества Q . \mathcal{F} -решением системы (10.2) называется всякая абсолютно-непрерывная функция $t \rightarrow x(t)$, удовлетворяющая при почти всех t дифференциальному включению

$$\dot{x} \in A(t)x + b(t)\mathbb{F}(t, x).$$

Суперпозиционно измеримую функцию $u_{\mathcal{C}} : \mathfrak{D} \rightarrow U$ будем называть *оптимальным в смысле быстрогодействия позиционным \mathcal{C} -управлением* (сокращенно оптимальным \mathcal{C} -управлением), если для любой точки $q_0 \in \text{int } \mathfrak{D}$, \mathcal{C} -решение $x(t, q_0)$ задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (10.4)$$

при $u = u_{\mathcal{C}}(q)$, существует на полуоси $[t_0, \infty)$, единственно, обращается в нуль в точке $t = t_0 + \tau_n(q_0)$ и $x(t, q_0) \equiv 0$ для $t > t_0 + \tau_n(q_0)$.

Аналогично определяется *оптимальное в смысле быстрогодействия позиционное \mathcal{F} -управление* (сокращенно оптимальное \mathcal{F} -управление). В этом случае функция $q \rightarrow u_{\mathcal{F}}(q)$ должна быть определена для почти всех (в смысле меры Лебега в \mathbb{R}^{1+n}) точек $q \in \text{int } \mathfrak{D}$ и обеспечивать следующее свойство: каждому $q_0 \in \text{int } \mathfrak{D}$ отвечает единственное \mathcal{F} -решение $x(t, q_0)$ задачи (10.4) с управлением $u = u_{\mathcal{F}}(q)$ и $x(t, q_0) \equiv 0$ для $t \geq t_0 + \tau_n(q_0)$. Здесь стоит подчеркнуть еще раз, что в силу определения \mathcal{F} -решений, для построения оптимального \mathcal{F} -управления нет необходимости определять $u_{\mathcal{F}}(q)$ в каждой точке внутренности расширенного множества управляемости \mathfrak{D} ; достаточно построить $u_{\mathcal{F}}(q)$ на множестве полной меры.

Известны примеры (см., например, [27], [28]) следующего аномального поведения линейных управляемых систем: оптимальное \mathcal{C} -управление существует и единственно, но оптимальное \mathcal{F} -управление отсутствует. Этот эффект возникает (даже для линейных стационарных систем) в том случае, когда оптимальное \mathcal{C} -управление (которое однозначно находится из принципа максимума Л.С. Понтрягина)

определяет на поверхностях разрыва (имеющих нулевую меру Лебега) вектор скорости, не совпадающий с вектором скорости, задаваемом конструкцией Филиппова (10.3).

Т е о р е м а 10.1. *Функция*

$$u_{\mathcal{C}}(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \in \mathcal{N}_+^{1+k} \text{ при некотором } k \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{если } k = 0 \\ -1, & \text{если } q \in \mathcal{N}_-^{1+k} \text{ при некотором } k \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (10.5)$$

доставляет оптимальное \mathcal{C} -управление, а функция

$$u_{\mathcal{F}}(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \in \mathcal{N}_+^{1+n} \\ -1, & \text{если } q \in \mathcal{N}_-^{1+n} \end{cases} \quad q \in \text{int } \mathfrak{D} \quad (10.6)$$

— оптимальное \mathcal{F} -управление для докритической системы (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 10.1 будет разбито на несколько пунктов.

А. Пусть $q_0 \in \text{int } \mathfrak{D}$. Предположим для определенности, что $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ при некотором $k \in \{1, \dots, n\}$ (при $k = 0$ $x(t, q_0) \equiv 0$). В точке q_0 построим точку $p_0 = (t_0, \tau)$, где $\tau = (\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n)$, $\tau_i = \tau_i(q_0)$, задает моменты переключений программного управления $u^0(t)$, оптимального в смысле быстрогодействия. Управлению $u^0(t)$ отвечает оптимальное решение $x^0(t)$ системы (10.2), причем (см. (6.3))

$$x_0 = x^0(t_0) = - \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t_0, s) b(s) ds, \quad \tau_{n-k} = 0,$$

Б. Покажем, что \mathcal{C} -решение $x(t, q_0)$ задачи (10.4) при $u = u_{\mathcal{C}}(q)$ существует, единственно и совпадает (при почти всех t) с решением $x^0(t)$. Так как $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+k}$, то $u_{\mathcal{C}}(q_0) = 1$, и вектор скорости

$$v_+(q) \doteq \text{col}(1, A(t)x + b(t)u_{\mathcal{C}}(q))$$

при $q = q_0$ находится в пространстве $T_{q_0} \mathcal{N}_+^{1+k}$ касательном к \mathcal{N}_+^{1+k} в точке q_0 . При t близких к t_0 включение $v_+(q(t)) \in T_{q(t)} \mathcal{N}_+^{1+k}$, где $q(t) = (t, x(t, q_0))$, сохраняется (так как \mathcal{N}_+^{1+k} — многообразие без края),

поэтому \mathcal{C} -решение $x(t, q_0)$ при t близких к t_0 существует, единственно, совпадает с $x^0(t)$ и

$$x(t, q_0) = \int_{t_0}^t X(t, s)b(s) ds - \int_{t_0}^{t_0+\tau_{n-k+1}} X(t, s)b(s) ds + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} (-1)^{i-n+k+1} \int_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t, s)b(s) ds. \quad (10.7)$$

Из (10.7) следует, что включение $v_+(q(t)) \in T_{q(t)} \mathcal{N}_+^{1+k}$ имеет место при всех $t \in I_1 \doteq [t_0, t_1)$, где $t_1 = t_0 + \tau_{n-k+1}$, поэтому $x(t, q_0) \in \mathcal{N}_+^k(t)$ при $t \in I_1$. Отметим далее, что

$$v_-(q(t)) \doteq \text{col}(1, A(t)x - b(t)) \notin T_{q(t)} \mathcal{N}_+^{1+k}, \quad t \in I_1$$

(см. лемму 10.1). В момент времени $t = t_1$ картина меняется:

$$v_+(q(t_1)) \notin T_{q(t_1)} \mathcal{N}_+^{1+k},$$

а вектор $v_-(q(t_1))$ касается многообразия \mathcal{N}_-^k (являющегося краем многообразия $\text{cl } \mathcal{N}_+^{1+k}$). Поэтому \mathcal{C} -решение $x(t, q_0)$ в момент времени t_1 покидает многообразие $\mathcal{N}_+^k(t)$ и переходит на многообразие $\mathcal{N}_-^{k-1}(t_1)$. Действительно, из (10.7) имеем

$$x(t_1, q_0) = + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} (-1)^{i-n+k+1} \int_{t_1+\theta_i}^{t_1+\theta_{i+1}} X(t_1, t)b(t) dt,$$

где $\theta_i = \tau_i - \tau_{n-k+1}$, $i = n - k + 1, \dots, n$, поэтому $x(t_1, q_0) \in \mathcal{N}_-^{k-1}(t_1)$ и, следовательно, $q(t_1) \in \mathcal{N}_-^k$. Поскольку для всех t близких к t_1 и удовлетворяющих неравенству $t \geq t_1$, имеет место включение $v_-(q(t)) \in T_{q(t)} \mathcal{N}_-^k$ (см. (10.5)), то $x(t, q_0)$ некоторое время остается на многообразии \mathcal{N}_-^k и поэтому является классическим решением системы $\dot{x} = A(t)x - b(t)$. Потери единственности в точке t_1 не происходит, поскольку \mathcal{C} -решение $x(t, q_0)$ однозначно гсшивается из двух классических решений. Таким образом, \mathcal{C} -решение $x(t, q_0)$ совпадает с $x^0(t)$ при $t \in [t_0, t_2)$, где $t_2 = t_1 + \theta_{n-k+2} = t_0 + \tau_{n-k+1}$.

Из приведенных рассуждений следует, что \mathcal{C} -решение существует, единственно и обращается в нуль при достаточно больших t (при $t = t_0 + \tau_n(q_0)$).

Построим функцию $u_1(t) = u_{\mathcal{C}}(t, x(t, q_0))$, где $x(t, q_0)$ — \mathcal{C} -решение. Функция $u_1(t)$ принимает два значения ($+1$ или -1), имеет переключения только в точках $t = t_0 + \tau_i(q_0)$, $i = n - k + 1, \dots, n$ и решение $x_1(t)$ задачи (10.4) при $u = u_1(t)$ совпадает с \mathcal{C} -решением $x(t, q_0)$. Следовательно, $u_1(t)$ — программное управление, оптимальное в смысле быстрогодействия для задачи (10.4). Поэтому, в силу единственности оптимального управления, имеют место равенства $u_1(t) = u_0(t)$, $x_1(t) = x_0(t)$. Поэтому $u_{\mathcal{C}}(q)$ — оптимальное \mathcal{C} -управление.

В. Покажем, что всякое \mathcal{F} -решение системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u_{\mathcal{F}}(t, x),$$

где $u_{\mathcal{F}}(q)$ определено равенством (10.6), является \mathcal{C} -решением системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u_{\mathcal{C}}(t, x).$$

С этой целью построим для $u_{\mathcal{F}}(q)$ многозначную функцию $q \rightarrow \mathbb{F}(q)$, определенную равенством (10.3). Легко убедиться, что $\mathbb{F}(q) = 1$, если $q \in \mathcal{N}_+^{1+n}$, $\mathbb{F}(q) = -1$, если $q \in \mathcal{N}_-^{1+n}$ и $\mathbb{F}(q) = [-1, 1]$, если $q \in S$, где $S = \mathfrak{D} \setminus (\mathcal{N}_+^{1+n} \cup \mathcal{N}_-^{1+n})$ (отметим, что $\text{mes } S = 0$). Если $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+n} \cup \mathcal{N}_-^{1+n}$, то \mathcal{F} -решение совпадает с \mathcal{C} -решением при всех $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть $q_0 \in S$ (для определенности будем считать, что $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ при некотором $k = 0, \dots, n - 1$). Тогда, согласно конструкции Филиппова, вектор скорости, направляющий движение $t \rightarrow q(t)$ в точке t_0 , одновременно находится в множестве

$$V(q_0) \doteq \text{col}(1, A(t_0)x_0 + b(t_0)U)$$

и касательном пространстве $T_{q_0} \mathcal{N}_+^{1+k}$. Покажем, что только один вектор $v_+(q_0) = \text{col}(1, A(t_0)x_0 + b(t_0))$ содержится в пересечении

$$V(q_0) \cap T_{q_0} \mathcal{N}_+^{1+k}.$$

Действительно, если при некотором $\lambda \in [-1, 1)$, вектор $v_\lambda(q_0) = \text{col}(1, A(t_0)x_0 + b(t_0)\lambda)$ лежит в $T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$, то $v_\lambda(q_0)$ можно разложить по базису $l_1(q_0), l_i(q_0), i = n - k + 1, \dots, n$, касательного пространства $T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$ (см. доказательство леммы 10.1). Тогда, проводя рассуждения, аналогичные доказательству свойства 5.3, получим противоречие с условием $\tau_n(q_0) < \sigma(t_0)$.

Таким образом, вектор скорости \mathcal{F} -решения в любой точке $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ совпадает с вектором скорости \mathcal{C} -решения, поэтому \mathcal{F} -решение совпадает с \mathcal{C} -решением. Теорема доказана.

§ 11. Уравнение Беллмана

В этом параграфе доказана теорема о том, что координаты $\tau_i(t_0, x_0)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ вектора быстродействия, определенного в § 8, являются решениями соответствующих уравнений Беллмана. Особо выделен случай стационарной системы (2.1).

Для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ обозначим

$$\mathcal{N}^{1+k} = \mathcal{N}_+^{1+k} \bigcup \mathcal{N}_-^{1+k}, \quad \mathfrak{N}^{1+k} = \mathfrak{N}_+^{1+k} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+k}.$$

где \mathfrak{N}_\pm^{1+k} определены равенством (6.6) (см. стр. 62). Тогда $\mathfrak{D} = \text{cl } \mathfrak{N}^{1+n}$, и для любой точки $(t_0, x_0) \in \text{int } \mathfrak{D}$, где $x_0 \neq 0$, найдется такое максимальное $k \in \{0, \dots, n-1\}$, что $(t_0, x_0) \in \mathfrak{N}^{1+n-k}$ и $(t_0, x_0) \notin \mathfrak{N}^{n-k}$.

В § 8 (см. стр. 78) для всех $(t, x) \in \text{int } \mathfrak{D}$ определен *вектор быстродействия* следующим образом. Для каждого фиксированного $i \in \{1, \dots, n\}$ и любой точки $(t_0, x_0) \in \text{int } \mathfrak{D}$ через $\tau_i(t_0, x_0)$ обозначено время быстродействия для системы (2.1) на многообразии \mathfrak{N}^{1+n-i} . Таким образом, $\tau_i(t_0, x_0)$ является решением задачи (задача (8.1)–(8.3) на стр. 78)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + b(t)u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad (t_0, x_0) \in \mathfrak{D}, \\ (t_0 + \vartheta, x(t_0 + \vartheta, t_0, x_0, u(\cdot))) &\in \mathfrak{N}^{1+n-i}, \\ \vartheta(u(\cdot)) &\longrightarrow \min, \end{aligned} \tag{11.1}$$

где $x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (2.1) при управлении $u(t)$ (если $(t_0, x_0) \in \mathfrak{N}^{1+n-i}$, то полагается $\tau_i(t_0, x_0) = 0$).

Пусть $\theta(t, x)$ — непрерывная скалярная функция, определенная для всех $(t, x) \in \mathcal{N}^{1+k}$ при некотором $k = 0, \dots, n$; $(\delta t, \delta x)$ — вектор в касательном пространстве $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k}$ к \mathcal{N}^{1+k} . Введем обозначение $q = (t, x)$ и рассмотрим функцию $\varepsilon \rightarrow q(\varepsilon) \in \mathcal{N}^{1+k}$, заданную равенством

$$q(\varepsilon) = (t + \varepsilon \delta t, x + \varepsilon \delta x + o(\varepsilon)).$$

Производная $d\theta(t, x)$, определенная равенством

$$d\theta(t, x)(\delta t, \delta x) \doteq \left. \frac{d\theta(q(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

задает линейный функционал $d\theta(t, x)$, действующий из $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k}$ в \mathbb{R} . Так как $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k} = \mathbb{R} \times T_x\mathcal{N}^k(t)$ (см. замечание 8.3 на стр. 83), то $d\theta(t, x) = (d_t\theta(t, x), d_x\theta(t, x))$, где линейный функционал

$$d_x\theta(t, x): T_x\mathcal{N}^k(t) \rightarrow \mathbb{R}$$

определен равенством

$$d_x\theta(t, x)(\delta x) = \left. \frac{d\theta(t, x + \varepsilon\delta x + o(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Т е о р е м а 11.1. Пусть система (0.4) докритическая, и функции $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежат классу C^r . Тогда каждая координата $\tau_i(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, вектора быстроедействия:

- (а) непрерывна в $\text{int } \mathfrak{D}$;
- (б) непрерывно дифференцируема $r + 1$ раз в \mathcal{N}^{1+n} ;
- (с) является функцией класса C^{r+1} на многообразиях \mathcal{N}^{1+k} , $k \in \{1, \dots, n-1\}$;
- (д) является решением задачи

$$d\theta(t, x)h(t, x) = -1, \quad \theta(t, x)|_{(t,x) \in \mathfrak{N}^{1+n-i}} = 0, \quad (11.2)$$

где $d\theta(t, x)h(t, x)$ — производная функции $\theta(t, x)$ на многообразиях \mathcal{N}^{1+k} , $k = 1+n-i, \dots, n$, в точке (t, x) вдоль направления, заданного вектором $h(t, x) = (1, A(t)x + \nu(t, x)b(t))$,

$$\nu(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_+^2 \cup \dots \cup \mathcal{N}_+^{1+n}, \\ 0, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}^1, \\ -1, & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}_-^2 \cup \dots \cup \mathcal{N}_-^{1+n}; \end{cases} \quad (11.3)$$

(е) в частности, при $(t, x) \in \mathcal{N}_+^{1+n}$ функция $\tau_i(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\theta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial\theta(t, x)}{\partial x} (A(t)x + b(t)) = -1,$$

а при $(t, x) \in \mathcal{N}_-^{1+n}$ — уравнению

$$\frac{\partial\theta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial\theta(t, x)}{\partial x} (A(t)x - b(t)) = -1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ранее показано (теорема 8.2, стр. 84 и теорема 10.1, стр. 93), что функции $\tau_i(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны, непрерывно дифференцируемы в \mathcal{N}^{1+n} , дифференцируемы на многообразиях \mathcal{N}^{1+k} вдоль всех направлений, лежащих в касательном пространстве $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k}$ к многообразию \mathcal{N}^{1+k} , $k = 1, \dots, n-1$, и оптимальное управление для задачи (11.1) определено равенством (см. (10.6) на стр 93)

$$\widehat{u}(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \in \mathcal{N}_+^{1+n} \\ -1, & \text{если } q \in \mathcal{N}_-^{1+n} \end{cases}. \quad (11.4)$$

Учитывая, что решения Филиппова инвариантны относительно изменений правой части системы на множествах меры нуль, а множество \mathfrak{N}^n имеет меру Лебега равную нулю, доопределим управление (11.4) до функции (11.3); при этом движения системы (2.1) при $u = \widehat{u}(t, x)$ и $u = \nu(t, x)$ не изменятся, но теперь (как показано в теореме 10.1) всякое решение Филиппова системы (2.1) при $u = \widehat{u}(t, x)$ совпадает с решением Каратеодори системы (2.1) при $u = \nu(t, x)$.

Покажем, что $\tau_i(t, x)$ является решением задачи (11.1). Пусть $(t, \widehat{x}(t))$ — оптимальное движение в задаче (11.1). Тогда, непосредственно из определения $\tau_i(t, x)$, имеем равенство

$$t + \varepsilon + \tau_i(t + \varepsilon, \widehat{x}(t + \varepsilon)) = t + \tau_i(t, \widehat{x}(t)), \quad t, t + \varepsilon \geq t_0. \quad (11.5)$$

Допустим, что при некотором t точка $(t, \widehat{x}(t))$ находится на одном из многообразий \mathcal{N}^{1+k} , где $k \in \{1+n-i, \dots, n-1\}$. Для определенности будем считать, что $(t, \widehat{x}(t)) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$. Тогда (см. (6.4) на стр. 61) вектор

$$h(t, \widehat{x}(t)) \doteq (1, A(t)\widehat{x}(t) + b(t)) \in T_{(t, \widehat{x}(t))}\mathcal{N}_+^{1+k},$$

причем включение

$$h(t + \varepsilon, \widehat{x}(t + \varepsilon)) \in T_{(t+\varepsilon, \widehat{x}(t+\varepsilon))}\mathcal{N}_+^{1+k}$$

сохранится для всех ε достаточно близких к нулю. Поэтому имеет место включение $(t + \varepsilon, \widehat{x}(t + \varepsilon)) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ (при ε близких к нулю), доказательство которого следует из теоремы 1.1 (стр. 110) работы [42].

Так как

$$\widehat{x}(t + \varepsilon) = \widehat{x}(t) + \varepsilon (A(t)x + b(t)) + o(\varepsilon),$$

то из (11.5) получаем равенство

$$\varepsilon^{-1} \left[\tau_i(t + \varepsilon, \widehat{x}(t) + \varepsilon (A(t)x + b(t)) + o(\varepsilon)) - \tau_i(t, \widehat{x}(t)) \right] = -1,$$

приводящее (при $\varepsilon \rightarrow 0$) к равенству

$$d\tau_i(t, \widehat{x}(t))h(t, \widehat{x}(t)) = -1,$$

из которого, в свою очередь, получаем при $t = t_0$ равенство

$$d\tau_i(t_0, x_0)h(t_0, x_0) = -1,$$

доказывающее утверждение (d) теоремы. Утверждение (e) следует из (d). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 11.1. Из представимости производной $d\theta(t, x)$ в виде $(d_t\theta(t, x), d_x\theta(t, x))$ следует, что задача (11.2) эквивалентна следующей задаче

$$d_t\theta(t, x) + d_x\theta(t, x) (A(t)x + \nu(t, x)b(t)) = -1,$$

$$\theta(t, x) \Big|_{x \in \mathfrak{N}^{n-i}(t)} = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$\mathfrak{N}^{n-i}(t) = \bigcup_{k=0}^{n-i} \left(\mathcal{N}_+^k(t) \bigcup \mathcal{N}_-^k(t) \right).$$

Для стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A, b \equiv \text{const}, \quad |u| \leq 1, \quad (11.6)$$

пространство \mathbb{R}^n служит естественным фазовым пространством (т.е. предполагается, что допустимыми являются управления $u(x)$, не зависящие от t); функция $\sigma(t) = \sigma$ не зависит от t , и неравенство $\sigma > 0$ выполнено в том и только том случае, когда $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0$. Расширенное множество управляемости \mathfrak{D} системы (11.6) представляет из себя цилиндр $\mathbb{R} \times D_\sigma$; каждое многообразие $\mathcal{M}^k(t)$ (см. (6.1)

на стр. 60) не зависит от t (обозначим его M^k), поэтому многообразия \mathcal{N}_{\pm}^{1+k} имеют представление $\mathcal{N}_{\pm}^{1+k} = \mathbb{R} \times N_{\pm}^k$, где $N_{\pm}^k = F_{\pm}(M^k)$, а отображения $F_{\pm}: M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ определены равенствами (см. (6.3) на стр. 60)

$$F_{\pm}(\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) = \mp \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{rk} A^r b, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{rk} &= \alpha_{rk}(\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) = \\ &= \frac{(-1)^{r-n+k}}{(r+1)!} \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^i (\tau_{i+1}^{r+1} - \tau_i^{r+1}), \quad \tau_{n-k} = 0, \quad r = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Если $\det A \neq 0$, то из (11.7) следуют равенства

$$F_{\pm}(\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) = \pm \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \left(\exp A(\tau_i - \tau_{i+1}) \right) A^{-1} b.$$

Таким образом, для стационарной системы все события разворачиваются в D_{σ} ; задача (11.1) переходит в задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu(x), \quad |u(x)| \leq 1, \quad x(0) = x_0 \in D_{\sigma}, \\ x(\vartheta, x_0, u(\cdot)) &\in N^0 \bigcup \dots \bigcup N^{n-i}, \\ \vartheta(u(\cdot)) &\longrightarrow \min, \end{aligned}$$

где $x(t, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (11.6), отвечающее управлению $u(x)$, $N^k = N_+^k \bigcup N_-^k$, $i = 1, \dots, n$, $N_{\pm}^0 = \{0\}$; вектор быстрогодействия $\tau(x) = (\tau_1(x), \dots, \tau_n(x))$ не зависит от t , и для координат $\tau_i(x)$ имеет место следующий аналог теоремы 11.1.

Т е о р е м а 11.2. Пусть для системы (11.6) выполнено неравенство $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0$. Тогда каждая координата $\tau_i(x)$ вектора быстрогодействия $\tau(x)$ непрерывна в $\text{int } D_{\sigma}$; непрерывно дифференцируема в $N_+^n \bigcup N_-^n$; при $k \in \{0, \dots, n-1\}$ дифференцируема на

многообразии $N_+^k \cup N_-^k$ вдоль любого направления, лежащего в касательном пространстве $T_x N^k$ к многообразию N^k в точке $x \in N^k$ и является решением задачи

$$d\eta(x) (Ax + \zeta(x)b) = -1, \quad \eta(x)|_{x \in N^{n-i}} = 0,$$

где $d\eta(x)v$ — производная $\eta(x)$ на многообразии N^k вдоль направления $v \in T_x N^k$ в точке $x \in N^k$,

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in N_+^1 \cup \dots \cup N_+^n, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x \in N_-^1 \cup \dots \cup N_-^n. \end{cases}$$

В частности, при $x \in N^n$ функции $\tau_i(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \eta(x)}{\partial x} (Ax + \zeta(x)b) = -1, \quad x \in N_+^n \cup N_-^n.$$

§ 12. Позиционное управление нелинейной системой, близкой к докритической

В этом параграфе описан класс таких допустимых возмущений (см. постановку задачи на стр. 89) основной докритической системы (2.1), что оптимальное в смысле быстродействия позиционное управление $u(t, x)$ для основной системы доставляет в нуль каждое решение возмущенной системы (не обязательно за минимальное, но за конечное время), начинающееся в точках расширенного множества управляемости \mathfrak{D} . Рассмотрен пример маятника с подвижной точкой подвеса, а также пример стационарной системы с возмущением.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad |u| \leq 1, \quad (12.1)$$

где функции $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны, функция $w: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $w(t, 0) \equiv 0$, и существует такое $r > 0$, что для линейной системы (2.1) при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\sigma(t) \geq r$.

Обозначим

$$\mathfrak{D}_r \doteq \mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < r\},$$

$\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ — расширенное множество управляемости системы (2.1). Построим многозначные функции

$$U(t, x) = \begin{cases} \hat{u}(t, x), & \text{если } (t, x) \in \mathcal{N}^{1+n}, \\ [-1, +1], & \text{если } (t, x) \in \mathfrak{N}^n, \end{cases}$$

и $\mathcal{F}(t, x) = A(t)x + b(t)U(t, x) + w(t, x)$. Тогда решения задачи

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \mathfrak{D},$$

называются решениями (в смысле А.Ф. Филиппова [17]) задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\hat{u}(t, x) + w(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (12.2)$$

Пусть точка $q = (t, x) \in \mathfrak{N}^n$, обозначим $\mathfrak{I}(q)$ — контингентный конус (конус Булигана) к \mathfrak{N}^n в точке q . По определению (см. [42])

или [43, стр. 28]) вектор $\delta q = (\delta t, \delta x)$ принадлежит $\mathfrak{I}(q)$ в том и только том случае, если

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\rho_0(q + \varepsilon \delta q, \mathfrak{N}^n)}{\varepsilon} = 0, \quad (12.3)$$

где $\rho_0(q, Q)$ — евклидово расстояние точки q до множества Q . Непосредственно из (12.3) следует, что если $q \in \mathcal{N}^n$, то $\mathfrak{I}(q) = T_q \mathcal{N}^n$; если $q \in \mathcal{N}^{1+k}$ при $k \in \{0, \dots, n-2\}$, то $T_q \mathcal{N}^{1+k} \subset \mathfrak{I}(q)$.

Следующая лемма является следствием теоремы 1.1 работы [42].

Л е м м а 12.1. *Если для всех $q = (t, x) \in \mathfrak{N}^n$, за исключением точки $q_0 = (t, 0)$, пересечение $\mathfrak{I}(q) \cap \mathcal{F}(q)$ пусто, то всякое движение $q(t) = (t, x(t))$ системы (12.2), за исключением движения $q_0 = (t, 0)$, л'прошивает \mathfrak{N}^n , т. е. если $q(t_0) \in \mathfrak{N}^n$ и $x_0 \neq 0$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q(t) \notin \mathfrak{N}^n$ для всех $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{0\}$.*

Далее, если существует такое движение $q(t)$ системы (12.2), что $\mathfrak{I}(q(t)) \cap \mathcal{F}(q(t)) \neq \emptyset$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$, то $q(t) \in \mathfrak{N}^n$ при $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$. В частности, если $\mathfrak{I}(q) \cap \mathcal{F}(q) \neq \emptyset$ для всех $q \in \mathfrak{N}^n$, то множество \mathfrak{N}^n положительно инвариантно (т.е. всякое движение, начинающееся в \mathfrak{N}^n при $t = t_0$, остается в \mathfrak{N}^n при всех $t \geq t_0$).

Обозначим $O_\varepsilon(\mathfrak{N}^n) = \{q \in \mathfrak{D} : \rho_0(q, \mathfrak{N}^n) < \varepsilon\}$. В формулируемой ниже теореме описан класс допустимых возмущений (см. постановку задачи на стр. 89) основной системы (2.1).

Т е о р е м а 12.1. *Пусть существует открытое множество \mathfrak{D}_0 такое, что $\mathfrak{D}_r \subseteq \mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$ и при некотором $\alpha > 0$ выполнено неравенство*

$$\sup_{(t,x) \in \mathfrak{D}_0 \setminus \mathfrak{N}^n} \frac{\partial \tau_n(t, x)}{\partial x} w(t, x) < 1 - \alpha. \quad (12.4)$$

Тогда для всякого $\eta > 0$ найдется непрерывная функция $w_\eta(t, x)$, $(t, x) \in \mathfrak{D}_0$, такая, что:

- 1) $w_\eta(t, x) = w(t, x)$ при $(t, x) \in \mathfrak{D}_0 \setminus O_\eta(\mathfrak{N}^n)$;
- 2) $|w_\eta(t, x) - w(t, x)| < \eta$ при $(t, x) \in O_\eta(\mathfrak{N}^n)$;

3) управление $\hat{u}(t, x)$, определенное равенством (11.4) (стр. 99), служит позиционным управлением для системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w_\eta(t, x) \quad (12.5)$$

в области \mathfrak{D}_0 , т.е. для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_0$ найдется момент времени $\vartheta_\eta(t_0, x_0) < \infty$ такой, что любое решение $x_\eta(t; t_0, x_0)$ системы (12.5) существует и $x_\eta(t_0 + \vartheta_\eta(t_0, x_0); t_0, x_0) = 0$. Далее, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|w(t, x)| \leq \delta$ при $(t, x) \in \mathfrak{D}_0$, то $|\tau_n(t, x) - \vartheta_\eta(t, x)| \leq \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного $\eta > 0$ построим функцию $w_\eta(t, x)$, удовлетворяющую условиям теоремы и такую, что для всех $q \in \mathfrak{N}^n$ выполнено $\mathfrak{T}(q) \cap \mathcal{F}_\eta(q) = \emptyset$. Здесь $\mathcal{F}_\eta(q) = A(t)x + b(t)U(q) + w_\eta(q)$. Пусть сначала точка (t_0, x_0) находится на многообразии \mathcal{N}^{1+n} (следовательно, $(t_0, x_0) \notin \mathfrak{N}^n$). Для определенности будем считать, что $(t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+n}$. Обозначим $x_\eta(t) = x_\eta(t; t_0, x_0)$ — решение системы (12.5). Пусть, далее, $\rho(t) \doteq \tau_n(t, x_\eta(t))$ — расстояние точки $x_\eta(t)$ от нуля. Тогда $\rho(t_0) = \tau_n(t_0, x_0) > 0$ и для всех таких t , что $(t, x_\eta(t)) \in \mathcal{N}_+^{1+n}$, с учетом условия (12.4), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= \left(\frac{\partial \tau_n(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \tau_n(t, x)}{\partial x} (A(t)x + b(t) + w_\eta(t, x)) \right) \Big|_{x=x_\eta(t)} = \\ &= -1 + \frac{\partial \tau_n(t, x)}{\partial x} w_\eta(t, x) \Big|_{x=x_\eta(t)} \leq -1 + 1 - \alpha = -\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, $\dot{\rho}(t) \leq -\alpha$ и поэтому $\rho(t) \leq \rho(t_0) - \alpha(t - t_0)$. Таким образом, если точка $(t, x_\eta(t))$ находится в \mathcal{N}_+^{1+n} достаточно долго, то найдется момент времени $\vartheta_\eta(t_0, x_0) > 0$ такой, что выполнено $\rho(t_0 + \vartheta_\eta(t_0, x_0)) = 0$. Поэтому $x_\eta(t_0 + \vartheta_\eta(t_0, x_0)) = 0$. Для $\vartheta_\eta(t_0, x_0)$ справедлива оценка $\vartheta_\eta(t_0, x_0) \leq \tau_n(t_0, x_0)/\alpha$.

Допустим теперь, что найдется момент времени $t = t_1 \geq t_0$ такой, что точка $q(t_1) = (t_1, x_\eta(t_1)) \in \mathfrak{N}^n$ и $x_\eta(t_1) \neq 0$. В силу построения функции $w_\eta(t, x)$ выполнено равенство $\mathfrak{T}(q(t_1)) \cap \mathcal{F}(q(t_1)) = \emptyset$, откуда следует (см. лемму (12.1)), что при движении $t \rightarrow (t, x_\eta(t))$ точка $(t, x_\eta(t))$ покидает \mathfrak{N}^n при $t > t_1$ и, тем самым, снова входит

в \mathcal{N}^{1+n} (возможно возвращается в \mathcal{N}_+^{1+n}). При этом оценка $\rho(t) \leq \rho(t_1) - \alpha(t - t_1)$, $t \geq t_1$, сохраняется до следующего момента встречи с \mathfrak{N}^n . Поэтому

$$\rho(t) \leq \rho(t_1) - \alpha(t - t_1) \leq \rho(t_0) - \alpha(t_1 - t_0) - \alpha(t - t_1) = \rho(t_0) - \alpha(t - t_0).$$

Таким образом, решение $x_\eta(t)$ уравнения (12.5) обращается в нуль за конечное время.

Пусть $x_\eta(t_0 + \vartheta_\eta(t_0, x_0)) = 0$. Как уже отмечалось, для $\vartheta_\eta(t_0, x_0)$ имеет место оценка $\vartheta_\eta(t_0, x_0) \leq \tau_n(t_0, x_0)/\alpha$. Поэтому

$$|\tau_n(t, x) - \vartheta_\eta(t, x)| \leq \alpha^{-1}(1 - \alpha)\tau_n(t, x), \quad (t, x) \in \mathfrak{D}_0. \quad (12.6)$$

Из (12.6) следует, что если возмущение $w_\eta(t, x)$ близкó к нулю, то, в силу (12.4), константа α близка́ к единице, поэтому модуль разности $|\tau_n(t, x) - \vartheta_\eta(t, x)|$ близок к нулю. Теорема доказана.

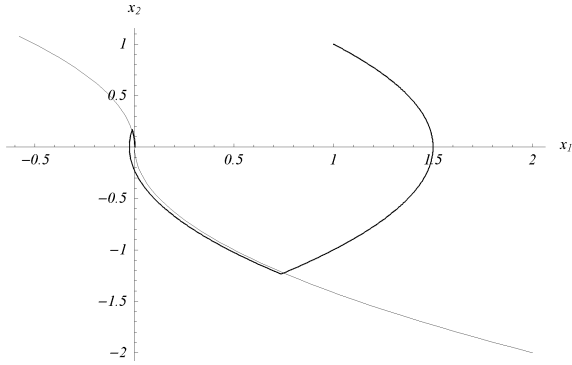


Рис. 26. Траектория системы (12.7), близкая к оптимальной

П р и м е р 12.1. Рассмотрим стационарную систему (см. стр. 100)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \quad (12.7)$$

Здесь $\sigma = \infty$, и, в силу стационарности этой системы, все траектории, а также множества \mathcal{N}_{\pm}^2 удобно наблюдать в виде проекций на плоскость \mathbb{R}^2 вдоль направления оси t .

На рисунке 26 изображена траектория системы (12.7), близкая к оптимальной (все траектории этого примера выходят из точки $(1, 1)$ при $u = -1$ или из точки $(-1, -1)$ при $u = +1$). В силу погрешности вычислительного метода говорить о точном попадании траектории в нуль некорректно, поэтому в данном (и следующем) примере решается задача о попадании в окрестность нуля. Кроме того, в силу этих же причин, невозможно абсолютно точно вычислить момент пересечения траектории с многообразием \mathcal{N}_{\pm}^2 . В результате траектория совершает несколько пересечений с многообразиями \mathcal{N}_{+}^2 и \mathcal{N}_{-}^2 .

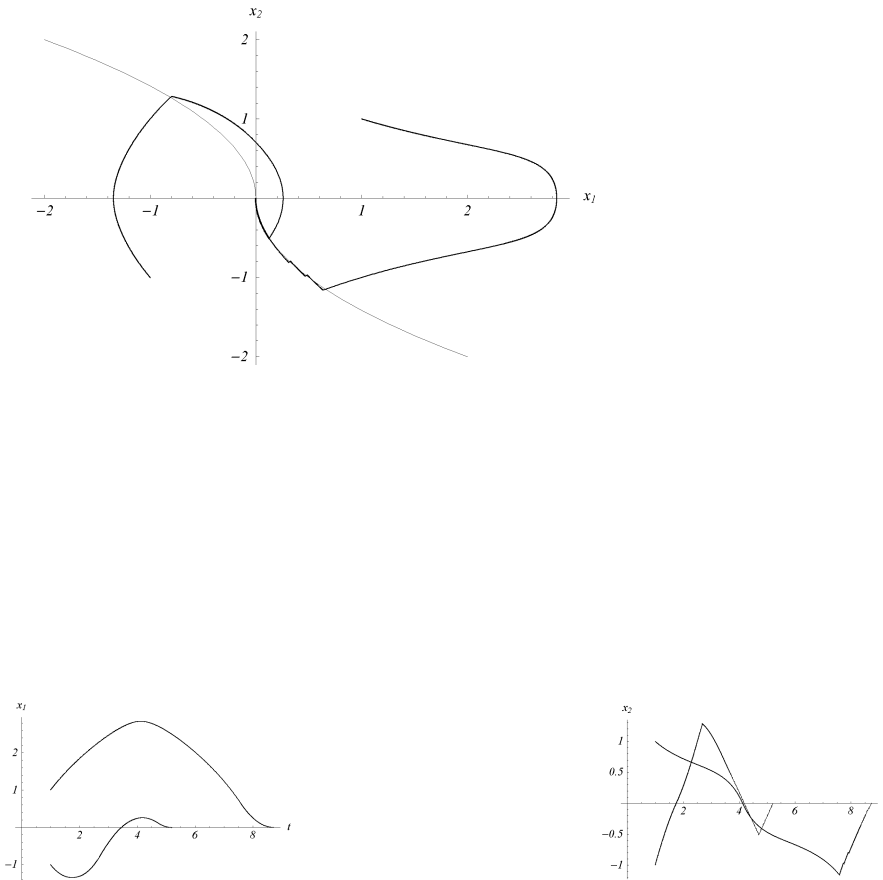


Рис. 27. Траектории и решения системы (12.8) при $w = 0.6|x_1x_2|$

Траектории возмущенной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + w(t, x). \end{cases} \quad (12.8)$$

изображены на следующих двух рисунках.

На рис. 27 изображены траектории системы (12.8) при $w(t, x) = 0.6|x_1x_2|$, $t_0 = 1$. В этом случае траектория, выходящая из точки $(-1, -1)$, после пересечения с многообразием \mathcal{N}_-^2 движется далее, как и траектория, выходящая из точки $(1, 1)$, до пересечения с многообразием \mathcal{N}_+^2 , после чего обе траектории каждый раз возвращаются на это многообразие, двигаясь к нулю.

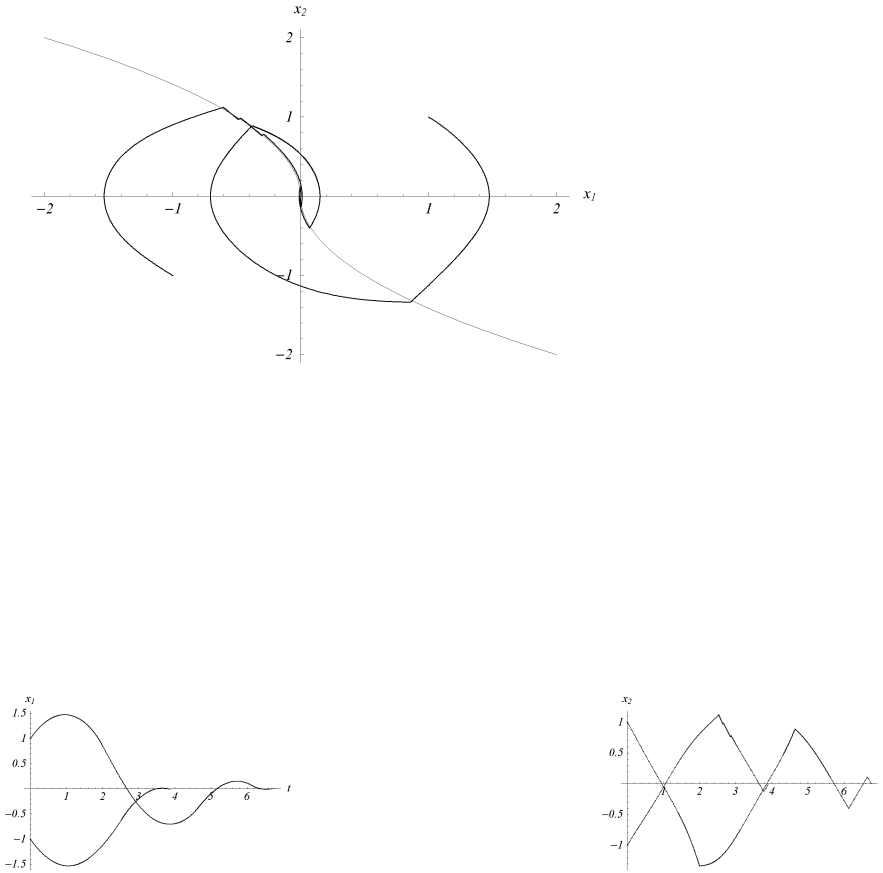


Рис. 28. Траектории и решения системы (12.8) при возмущении $w(t, x) = -0.6x_2^2 \sin t$

На рисунке 28 изображены две траектории системы (12.8) при $w(t, x) = -0.6x_2^2 \sin t$, $t_0 = 0$. Здесь проиллюстрированы различные варианты поведения траекторий.

Пример 12.2. Вернемся к задаче о маятнике единичной массы с подвижной точкой подвеса (см. пример 6.1 на стр. 63). Предположим, что точка подвеса маятника длины ℓ движется в вертикальной плоскости и координаты точки подвеса являются заданными функциями $p(t)$, $q(t)$, времени t ($p(t)$ — отклонение по горизонтали, $q(t)$ — по вертикали). Тогда уравнение относительного движения маятника имеет вид (в примере 6.1 на стр. 63 изучалось линейное приближение этого уравнения)

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{1}{\ell} \ddot{q}(t) \right) \sin \varphi = -\frac{1}{\ell} \ddot{p}(t) \cos \varphi, \quad (12.9)$$

где φ — угол отклонения от вертикального положения, g — ускорение свободного падения. Предположим, что маятник ϵ мало отклоняется от нуля и вместо (12.9) будем изучать уравнение

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{1}{\ell} \ddot{q}(t) \right) \sin \varphi = u, \quad u = -\frac{1}{\ell} \ddot{p}(t). \quad (12.10)$$

Обозначим $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$ и перейдем от уравнения (12.10) к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{\ell} + a(t) \right) x_1 + v(t, x_1) + u, \end{cases} \quad (12.11)$$

где

$$a(t) = \frac{1}{\ell} \ddot{q}(t), \quad v(t, x_1) = \left(\frac{g}{\ell} + a(t) \right) (x_1 - \sin x_1),$$

а функция $u = u(t, x)$ интерпретируется как управление и предполагается, что $|u| \leq 1$. Далее, допустим, что $a(t) = a_0(t) + a_1(t)$, причем непрерывная и ограниченная на \mathbb{R} функция $a_0(t)$ известна точно, а функцию $a_1(t)$ будем интерпретировать как малое случайное колебание с нулевым средним. Перепишем теперь систему (12.11) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{\ell} + a_0(t) \right) x_1 + w(t, x_1) + u, \quad |u| \leq 1. \end{cases}$$

Здесь

$$w(t, x_1) = \left(\frac{g}{\ell} + a_0(t) \right) (x_1 - \sin x_1) - a_1(t) \sin x_1.$$

Задача об остановке маятника состоит в построении позиционного управления $\hat{u}(t, x)$ такого, что все решения $x(t, t_0, x_0)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = - \left(\frac{g}{\ell} + a_0(t) \right) x_1 + w(t, x_1) + \hat{u}(t, x) \end{cases} \quad (12.12)$$

для x_0 близких к нулю, приходят в нуль за конечное время независимо от $a_1(t)$. Для решения поставленной задачи воспользуемся теоремой 12.1. Можно показать, что найдется такое $r > 0$, что функция $\sigma(t)$ для линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = - \left(\frac{g}{\ell} + a_0(t) \right) x_1 + u, \quad |u| \leq 1. \end{cases} \quad (12.13)$$

удовлетворяет неравенству $\sigma(t) \geq r$; кроме того, возмущение $w(t, x_1)$ — непрерывная функция и $w(t, 0) = 0$. Таким образом, в малой окрестности нуля для системы (12.13) применима теорема 12.1.

На рис. 29 построен график $\sigma(t)$ для системы (12.13) при $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5 \sin(2t)$. В этом примере $\sigma(t) \geq r = 0.823$. Множество управляемости \mathfrak{D} системы (12.13) при указанных параметрах построено на рис. 30.

На рис. 31 построены: а) поверхность переключения $\mathcal{N}_+^2 \cup \mathcal{N}_-^2$ системы (12.13) для $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5 \sin 2t$ и б) два решения, выходящие из точки $x_0 = (0.1, 0.4)$ при $t_0 = 1.5$. Решение, изображенное толстой линией, отвечает системе (12.13) при $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5 \sin 2t$, $u = \hat{u}(t, x)$ (оно имеет одно переключение, но в силу погрешности численного алгоритма, как и в предыдущем примере, приближенное решение пересекает поверхность переключения многократно). Решение, изображенное тонкой линией, отвечает системе (12.12) при тех же значениях g , ℓ , $a_0(t)$ и при $a_1(t) = 5 \sin 3t$.

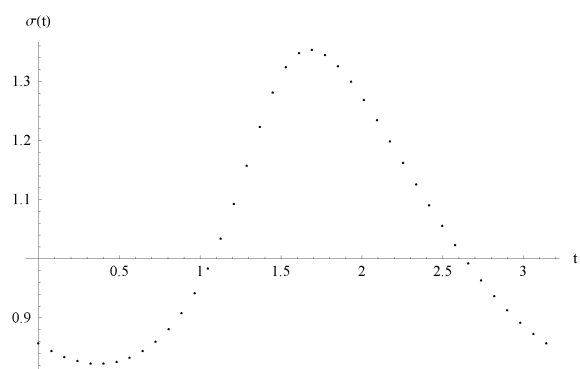


Рис. 29. График $\sigma(t)$ для (12.13) при $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5 \sin(2t)$

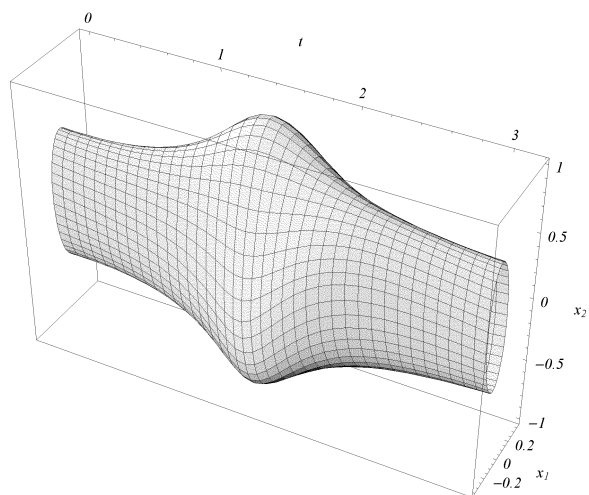


Рис. 30. Множество \mathfrak{D} для (12.13) при $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5 \sin(2t)$

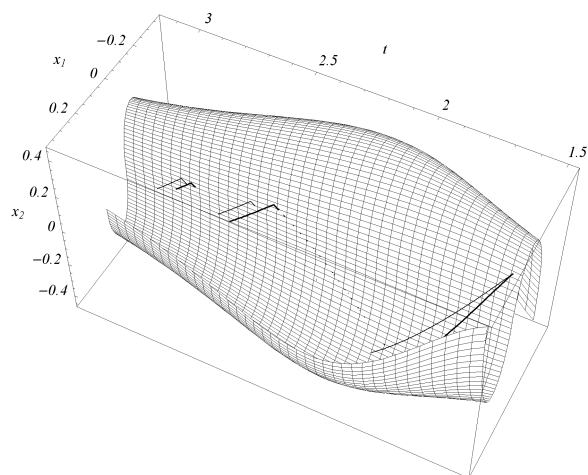


Рис. 31. Поверхность $\mathcal{N}_+^2 \cup \mathcal{N}_-^2$ и решения систем (12.12) и (12.13)

Литература

1. *Понтрягин Л.С.* Оптимальные процессы регулирования // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, Вып. 1(85). С. 3–20.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, С. 384.
3. *Гамкрелидзе Р.В.* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, Г 4. С. 449–474.
4. *Болтянский В.Г.* Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования // Изв. АН СССР. Сер. матем. 3(1968), Т. 28, С. 481–514.
5. *Черноусько Ф.Л., Шматков А.М.* Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка. // Прикл. матем. и мех. 1997. Т. 61, Вып. 5. С. 723–731.
6. *Киселев Ю.Н.* Оптимальный синтез в гладкой линейной задаче быстродействия // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, Г 2. С. 232–237.
7. *Благодатских В.И.* Линейная теория оптимального управления. М.: Наука, 1978.
8. *Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н., Орлов М.В.* Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Тр. Матем. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 3–31.
9. *Тонков Е.Л.* Неосцилляция и число переключений в линейной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. Г 12. С. 2180–2185.
10. *Тонков Е.Л.* О множестве управляемости линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. Г 2. С. 269–278.

11. *Сатимов Е.Я., Азамов А.* О числе переключений в линейных системах // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. Г 2. С. 20–23.
12. *Тонков Е.Л.* Неосцилляция и структура множества управляемости линейного уравнения // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 5 (233). С. 131.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Прищепова С.В.* Синтез оптимальной по быстродействию дискретной системы // Автомат. и телемех., 1991, Г 12, С. 92–99.
14. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени. // Техническая кибернетика, 1992, Г 4, С. 3–19.
15. *Тонков Е.Л.* К теории линейных управляемых систем // Дис. д.ф.-м.н., ИММ УНЦ АН СССР, Свердловск, 1983, С. 267.
16. *Альбрехт Э.Г., Ермоленко Е.А.* Синтез оптимального по быстродействию управления в линейных системах // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 33, Г 11. С. 1443–1450.
17. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985, С. 223.
18. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
19. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985, С. 518.
20. *Субботина Н.Н.* Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения, 1983. Т. 19. Г 11. С. 1890–1896.
21. *Николаев С.Ф., Тонков Е.Л.* Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1996, Г 2(8), С. 47–68.

22. *Николаев С.Ф.* Функция быстродействия и позиционное управление // Тезисы докладов международной математической конференции гЕругинские чтения-IVС, Витебск, 20-22 мая 1997 г. — С. 77–78.
23. *Николаев С.Ф.* Численная оценка интервала докритичности // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1998. Г 1(12). С.81–88.
24. *Nickolayev S.F., Tonkov E.L.* Differentiability of Speed Function and Positional Control of Linear Nonstationary System // Nonsmooth and discontin. probl. of contr. and optimiz. (NDPCO 98). June 1998: Proceedings of the Internat. Workshop, Chelyabinsk, 1998. P. 163–165.
25. *Николаев С.Ф., Тонков Е.Л.* Позиционное управление нелинейной системой близкой к докритической // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1998, Г 2(13), С. 3–26.
26. *Левин А.Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, Г 2(146), С. 43–96.
27. *Brunovski P.* Regular synthesis and singular extremas // Lect. Contr. and Inform. Sci. 1980, V. 22, P. 280–284.
28. *Brunovski P.* Existence of regular synthesis for general control // J. Different. Equat., 1980, V. 38, Г 3, P. 317–343.
29. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М., 1985.
30. *Палис Ж., ду Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. М., 1986.
31. *Родионова А.Г., Тонков Е.Л.* О непрерывности функции быстродействия линейной системы в критическом случае // Изв. ВУЗ-ов. Математика. 1993, Г 5(372), С. 101–111.
32. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М., 1974.

33. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.
34. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968. С. 475.
35. Chang A. An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Automat. Control, 1965, Vol. 10, Г 1.
36. Боднер В.А. Теория автоматического управления полетом. М., 1964.
37. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка. // Математический сборник. 1960, Т. 51(93), Г 4, С. 475–486.
38. Антонов И.Л. Случайные колебания. Свойства траекторий. М.: Изд-во механико-математич. факультета МГУ, 1993, С. 176.
39. Bressan Aldo, Motta Monica. On minimum time problems for a pendulum with variable length and a conjecture based on a law of Galilei // Atti. Ist. veneto sci., lett. ed arti. Cl. sci. fis., mat. e.natur. 1993-1994(1995). 152, Г 3. P. 305-314.
40. Брусин В.А. Глобальная стабилизация системы гобращенный маятник на тележке при действии на маятник неизмеряемых возмущений // Изв. АН. Техн. кибернет. (Россия). 1993. Г 3. С. 30-39.
41. Lawson J.D. Generalized Runge-Kutta processes for stable systems with large Lipschitz constants // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1967, V. 4, Г 3.
42. Субботин А.И. Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка // Успехи матем. наук, 1996. Т. 51. Вып. 2(308). С. 105–138.
43. Aubin J.-P. Mutational and Morphological Analysis. Tools for Shape Regulation and Optimization. 1998. 352 p.