Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет»

На правах рукописи

УДК 517.917

БЫКОВА ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНА

ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор Е. Л. Тонков

Ижевск — 2005

Оглавление

Введение

Линейная система с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \tag{0.1}$$

может иметь решения $x(t)$, обращающиеся в нуль (с возрастанием t) по истечение конечного промежутка времени, либо не обращающиеся в нуль, но стремящиеся к нулю быстрее любой экспоненциальной функции (Дж. Хейл, [29, с. 87]). Это означает, что показатель Ляпунова $\lambda(x) \doteq \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\ln|x(t)|}{t}$ этого решения равен $-\infty$.

Игнорируя такие решения, мы можем задаться следующим вопросом: будет ли система (0.1), рассматриваемая только на множестве нетривиальных решений $x(t)$ с конечными показателями Ляпунова $\lambda(x)$, асимптотически подобна некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений? Правда, может оказаться, что пространство решений с конечными показателями Ляпунова (дополненное, конечно, тривиальным решением, показатель Ляпунова которого заведомо равен $-\infty$) бесконечномерно, а количество различных показателей таких решений по меньшей мере счетно. Оказывается, однако, что при естественных предположениях относительно $A(t,s)$, сужение системы (0.1) на любое конечномерное подпространство решений с конечными показателями Ляпунова, асимптотически подобно некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это важное свойство подобия обыкновенной системе полезно при изучении асимптотических инвариантов систем с последействием. Неявно оно отмечалось для систем с периодической по t матрицей $A(t,s)$ (А. Стокс [34], С. Н. Шиманов [31], А. Д. Мышкис [22, § 17]), но в общей ситуации не исследовалось. Вопросам асимптотического поведения решений периодических систем с последействием и более общих периодических систем нейтрального типа посвящены работы Ю. Ф. Долгого [14, 15], Ю. Ф. Долгого и С. Н. Шиманова [13] и Ю. Ф. Долгого и В. С. Тарасяна [16].

Основная часть диссертации посвящена изучению вопроса об асимптотическом подобии системы (0.1) на конечномерных подпространствах решений, системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Хорошо известно и общепризнано, что системе (0.1) отвечает некоторая динамическая система с фазовым пространством $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ и потоком на нем $t \to x_t$, порожденным решениями системы (0.1). Такая концепция, предложенная Н. Н. Красовским [18] в конце 50-х годов прошлого столетия, оказалась естественной и очень плодотворной при изучении асимптотического поведения решений системы (0.1) и здесь мы придерживаемся этой концепции Н. Н. Красовского.

На протяжении этой работы мы предполагаем, что интеграл Стилтьеса в (0.1) рассматривается по переменной s, $x_t(s) = x(t+s)$, функция $(t,s) \to A(t,s)$ ограничена в полосе $\mathbb{R} \times [-r,0]$, равномерно непрерывна по t, имеет ограниченную вариацию по s, $A(t,-r) \equiv 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $|\tau| \leqslant \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\displaystyle\int_{-r}^{0} |A(t+\tau,s) - A(t,s)|\,d\,s \leqslant \varepsilon$ (подробно эти условия описаны в первом параграфе).

Пусть $\mathfrak{S}$ — пространство непрерывных функций $u : [-r,0] \to \mathbb{R}^n$. Решению $t \to x(t,t_0,u)$ задачи

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad x_t(s)\big|_{t=t_0} = u(s), \quad s \in [-r,0], \quad t \geqslant t_0, \qquad (0.2)$$

где $u \in \mathfrak{S}$, поставим в соответствие функцию $t \to x_t(\cdot,t_0,u) \in \mathfrak{S}$, которую будем называть *движением* (в пространстве $\mathfrak{S}$). Если $t_0 = 0$, то будем писать $x_t(\cdot,u)$ или $x_t(u)$. Для $x_t(u)$ определим $\mathbb{L}_2$-показатель Ляпунова

$$\varkappa(u)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\|x_t(u)\|_2}{t},\quad \varkappa(0)\doteq-\infty.$$

Здесь $\|x_t(u)\|_2\doteq\sqrt{\int_{-r}^{0}|x_t(s,u)|^2\,ds}$. Тогда для каждого $\varkappa\in\mathbb{R}$ множество

$$\mathfrak{S}_{\varkappa}\doteq\{u\in\mathfrak{S}:\varkappa(u)\leqslant\varkappa\}$$

образует линейное подпространство в $\mathfrak{S}$ и если $\varkappa_1<\varkappa_2$, то $\mathfrak{S}_{\varkappa_1}\subseteq\mathfrak{S}_{\varkappa_2}$. В частности, множество

$$\mathfrak{S}^-\doteq\{u\in\mathfrak{S}:\varkappa(u)=-\infty\}$$

также является линейным подпространством в $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}^+$ — линейное подпространство в $\mathfrak{S}$, являющееся прямым дополнением подпространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$, то есть $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}^+\oplus\mathfrak{S}^-$. Тогда для всех ненулевых функций $u\in\mathfrak{S}^+$ выполнено неравенство $\varkappa(u)>-\infty$.

Пусть $u^1(\cdot),\ldots,u^p(\cdot)$ — фиксированный набор p линейно независимых функций из $\mathfrak{S}^+$. Линейное подпространство в $\mathfrak{S}^+$, порожденное этим набором, обозначим $\mathbb{S}_0^p$ и всякой начальной функции $u\in\mathbb{S}_0^p$ поставим в соответствие движение $t\to x_t(u)$, отвечающее решению задачи (0.2) при $t_0=0$. Таким образом, построено движение $t\to x_t(\mathbb{S}_0^p)\doteq\mathbb{S}_t^p$ пространства $\mathbb{S}_0^p$. Мы будем говорить, что это движение порождено *сужением* системы $A\in\mathfrak{A}$ на подпространство $\mathbb{S}_0^p$. Такое сужение обозначим $(A,\mathbb{S}_0^p)$.

Наряду с системой $(A,\mathbb{S}_0^p)$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot y=B(t)y,\quad t\geqslant0,\quad y\in\mathbb{R}^p \tag{0.3}$$

с непрерывной на полуоси $\mathbb{R}_+$ матричной функцией $t\to B(t)$. Будем далее отождествлять систему (0.3) с задающей ее матрицей B и называть системой B. По аналогии с подпространством $\mathbb{S}_t^p$, введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{R}_t^p$ размерности p с базисом $y^1(t), \ldots, y^p(t)$, образующем столбцы матрицы Коши $Y(t,\tau)$ системы B при $\tau = 0$.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ — пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{S}_t^p$ в $\mathbb{R}_t^p$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p}$.

О п р е д е л е н и е. Функцию $t \to L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ будем называть *обобщенным ляпуновским преобразованием* систем $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B, если: 1) функция $t \to L(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$; 2) при $t \geqslant 0$ оператор $L(t)$ является гомеоморфизмом пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$ и 3) выполнено неравенство $\sup\limits_{t \geqslant 0}\bigl(\|L(t)\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \to \mathbb{L}_2}\bigr) < \infty$. Будем говорить также, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *приводима* обобщенным ляпуновским преобразованием L к системе B, или что системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B *асимптотически подобны*.

В диссертации показано, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ имеет не более p различных $\mathbb{L}_2$-показателей Ляпунова $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_p(A)$ и что асимптотически подобные системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B сохраняют показатели Ляпунова: для всякого показателя $\lambda_i(A)$ системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ найдется такое решение $y_i(t)$ системы B, что $\lambda_i(A) = \overline{\lim\limits_{t \to \infty}} \dfrac{\ln |y_i(t)|}{t}$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^p$. Верно и обратное утверждение.

В работах Е. К. Макарова [19, 20] введено понятие абстрактной линейной системы и построена теория приводимости для абстрактных линейных систем. Абстрактная линейная система определяется функцией двух переменных $X(t, t_0)$, которая совпадает с матрицей Коши в случае классических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Система $(A, \mathbb{S}_0^p)$, изучаемая в диссертации, может рассматриваться как некоторая обобщенная (по отношению к абстрактной линейной системе в смысле Макарова) абстрактная линейная система. Такое обобщение вызвано тем, что сужение оператора Коши на пространство начальных условий $\mathbb{S}_0^p$ не обладает свойством группы, как это требуется в аксиоматике Макарова, но обладает свойством полугруппы. Поэтому теорией Е. К. Макарова в случае систем с последействием не удалось воспользоваться.

Основным утверждением диссертации является следующая теорема.

Теорема 1 (теорема 4.4 на стр. 51). *Пусть* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *сужение системы* A *на подпространство* $\mathbb{S}_0^p$ *и* $\mathbb{S}_0^p \subset \mathfrak{S}^+$. *Тогда:*

а) *найдутся система* B *с непрерывной* $(p \times p)$*-матрицей* $B(t)$ *и обобщенное ляпуновское преобразование* L, *приводящее систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B;

б) *в множестве* $\{B\}$ *всех систем, асимптотически подобных системе* $(A, \mathbb{S}_0^p)$, *найдется система с непрерывной на* $\mathbb{R}_+$, *верхней треугольной матрицей* $B(t)$;

в) *если, в дополнение к сказанному, всякое решение системы* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *«продолжаемо влево», то есть найдется константа* $\alpha > 0$ *такая, что для каждого* $u \in \mathbb{S}_0^p$, *любого* $\tau \in [-r, 0]$ *и всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполнено неравенство* $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\|_2 \leqslant \alpha \|x_t(\cdot, u)\|_2$, *то в множестве* $\{B\}$ *всех систем, асимптотически подобных системе* $(A, \mathbb{S}_0^p)$, *найдется система* B *с ограниченной на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *матрицей* $B(t)$ *(и следовательно, с огрниченной на* $\mathbb{R}_+$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$*)*;

г) *если* $A(t+T, s) = A(t, s)$ *для всех* $(t, s) \in \mathbb{R} \times [-r, 0]$, *то найдутся система* B *с вещественнозначной непрерывной* T*-периодической матрицей* $B(t)$ *и* T*-периодическое по* t *обобщенное ляпуновское преобразование* L, *приводящее систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B.

д) *в множестве обобщенных ляпуновских преобразований, приводящих систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B *с непрерывной на* $\mathbb{R}_+$, *верхней треугольной матрицей* $B(t)$, *найдется ортогональное* $(L^*(t)L(t) = I_p)$ *обобщенное ляпуновское преобразование.*

Перед доказательством этой теоремы описан алгоритм построения соответствующего обобщенного ляпуновского преобразования (см. стр. 52), приводящего сужение $(A, \mathbb{S}_0^p)$ системы $A \in \mathfrak{A}$ к системе B с треугольной матрицей B. Из этого алгоритма следует, что увеличение размерности системы обыкновенных дифференциальных уравнений на единицу засчет пополнения пространства началных условий не влечет за собой больших вычислительных затрат, так как при этом «новая» система содержит «старую» в качестве подсистемы. Поясним это более подробно. Зафиксируем в пространстве $\mathfrak{S}^+$ совокупность $p+1$ линейно независимых функций $u^1, \ldots, u^p, u^{p+1}$ и рассмотрим сужения системы A на подпространства $\mathbb{S}_0^p = \operatorname{lin}(u^1, \ldots, u^p)$ и $\mathbb{S}_0^{p+1} = \operatorname{lin}(u^1, \ldots, u^p, u^{p+1})$. Оказывается тогда (см. стр. 61), что если система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{y} = B_p(t)y$ асимптотически подобна сужению $(A, \mathbb{S}_0^p)$, то найдутся такие вектор-функция $t \to b(t) \in \mathbb{R}^p$ и скалярная функция $t \to b_{p+1}(t)$, что система

$$\begin{cases} \dot{y} & = & B_p(t)y + b(t)y_{p+1}, \\ \dot{y}_{p+1} & = & b_{p+1}(t)y_{p+1}, \end{cases}$$

асимптотически подобна сужению $(A, \mathbb{S}_0^{p+1})$.

Отметим теперь одно важное обстоятельство, связанное с теоремой 1. Теорема 1 утверждает, что сужения системы A на конечномерные подпространства начальных функций ведут себя подобно системам обыкновенных дифференциальных уравнений, если только такие сужения не содержат решений, $\mathbb{L}_2$-показатели Ляпунова которых равны $-\infty$ (тривиальное решение, которое всегда присутствует и $\mathbb{L}_2$-показатель которого равен $-\infty$, мы игнорируем). Правда, при этом не удается доказать (без дополнительных условий) ограниченность матрицы $B(t)$ системы B, асимптотически подобной системе $(A, \mathbb{S}_0^p)$ (весьма важное условие при исследовании асимптотического поведения решений системы B). Однако, матрица $B(t)$ будет ограниченной, если выполнено, так называемое, условие продолжаемости влево (см. утверждение в) теоремы 1). Условие продолжаемости влево трудно проверяемо, но например, для периодических систем это условие и не требуется (см. утверждение г)). Вероятно, этот факт имеет место и для более широкого класса систем, а именно для рекуррентных систем. В диссертации не доказан факт продолжаемости влево решений рекуррентных систем, но показано, что при некотором дополнительном условии, более слабом, чем условие продолжаемости влево, утверждение об ограниченности матрицы $B(t)$ остается верным и для случая рекуррентных систем.

О п р е д е л е н и е. Функцию $(t,s) \to A(t,s)$ (или, что эквивалентно, систему A), удовлетворяющую естественным условиям, будем называть *рекуррентной* (по переменной t), если для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ множество

$$\varTheta_A(\varepsilon, T) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant T}\Big(|A(t+\vartheta, 0) - A(t,0)| + \\ + \int_{-r}^{0} |A(t+\vartheta, s) - A(t,s)|\, ds\Big) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$ (то есть найдется такая константа $l > 0$, что $[t, t+l] \bigcap \varTheta_A(\varepsilon, T) \neq \varnothing$ для всех $t \in \mathbb{R}$).

При каждом фиксированном $s \in [-r, 0]$ сдвиг функции $t \to A(t,s)$ на константу τ обозначим $A_\tau(t,s) \doteq A(t+\tau, s)$. Пусть далее, $\mathcal{R}(A)$ — замыкание множества $\{A_\tau(t,s) : \tau \in \mathbb{R}\}$ сдвигов функции A в локально открытой топологии. Это означает, что $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ в том и только в том случае, если для некоторой последовательности $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ и любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такой номер i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leqslant T}\Big(|A_{\tau_i}(t,0) - \widehat{A}(t,0)| + \int_{-r}^{0} |A_{\tau_i}(t,s) - \widehat{A}(t,s)|\, ds\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Зафиксируем подпространство $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$ и для каждой системы $\widehat{A}$ из $\mathcal{R}(A)$ полный набор $\mathbb{L}_2$-показатель Ляпунова системы $(\widehat{A}, \mathbb{S}_0^p)$ обозначим $\lambda_1(\widehat{A}), \ldots, \lambda_p(\widehat{A})$. Будем считать, что $\lambda_1(\widehat{A}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p(\widehat{A})$.

Формулируемую ниже теорему можно рассматривать, как частичное распространение теоремы В. М. Миллионщикова [21] на системы уравнений с последействием.

Теорема 2 (теорема 8.6 на стр. 92). *Пусть* $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$, *система* $A \in \mathfrak{A}$ *рекуррентна и для всех* $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ *и некоторой константы* $\varkappa > -\infty$ *выполнено неравенство* $\lambda_1(\widehat{A}) \geqslant \varkappa$. *Тогда найдутся система* B *с непрерывной и ограниченной на* $\mathbb{R}$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$ *и обобщенное ляпуновское преобразование* L, *приводящее сужение* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *системы* A *на подпространство* $\mathbb{S}_0^p$ *к системе* B.

Доказательство теоремы 2 опирается на формулируемые ниже леммы, представляющие самостоятельный интерес.

Лемма 1 (лемма 8.9 на стр. 92). *Если функция* $t \to A(t,s)$ *рекуррентна, то для любых* $\varepsilon > 0$, $T > r$, $T_0 > 0$ *и всякой непрерывно дифференцируемой на* $[-r, 0]$ *начальной функции* $u \in \mathfrak{S}$, *множество*

$$\Xi_u(\varepsilon, T, T_0) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \|x_{t+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_1 \leqslant \varepsilon\},$$

где

$$\Delta_1(T, T_0) \doteq \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 + r \leqslant t \leqslant t_0 + T,\ |t_0| \leqslant T_0\},$$

$\|u\|_1 = \max\{\|u\|_0, \|\dot{u}\|_0\}$, *относительно плотно на прямой* $\mathbb{R}$.

Зафиксируем в пространстве $\mathbb{S}_0^p$ ортонормированный базис $u^1, \ldots, u^p$, то есть, если $U(s) \doteq (u^1(s), \ldots, u^p(s))$— функциональная матрица, столбцами которой являются функции $u^i : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$, то постоянная квадратная матрица $\int_{-r}^{0} U^*(s)U(s)\,ds$ порядка p совпадает с единичной матрицей.

Далее, для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$, любого $t \geqslant t_0$ и всех $s \in [-r, 0]$ построим $(n\times p)$-матрицу

$$V_t(s,t_0) \doteq \big(x_t^1(s,t_0),\dots,x_t^p(s,t_0)\big), \tag{0.4}$$

где $x_t^i(s,t_0) = x_t(s,t_0,u^i)$, и постоянную $(p\times p)$-матрицу

$$\mathit{\Gamma}(t,t_0) \doteq \int_{-r}^{0} V_t^*(s,t_0)V_t(s,t_0)\,ds, \quad t \geqslant t_0.$$

В силу линейной независимости столбцов матрицы (0.4) для всех $t \geqslant t_0$ (см. лемму 4.5), при каждом фиксированном $t \geqslant t_0$ матрица $\mathit{\Gamma}(t,t_0)$ положительно определена. Кроме того, $\mathit{\Gamma}(t_0,t_0) = I_p$, где I_p— единичная матрица порядка p.

Лемма 2 (лемма 8.10 на стр. 96). *Для любых $\varepsilon > 0$, $T > r$ и $T_0 > 0$ множество*

$$\mathit{\Xi}_{\mathit{\Gamma}}(\varepsilon,T,T_0) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \Big(|\mathit{\Gamma}(t+\vartheta,t_0+\vartheta) - \mathit{\Gamma}(t,t_0)| + \\ + |\dot{\mathit{\Gamma}}(t+\vartheta,t_0+\vartheta) - \dot{\mathit{\Gamma}}(t,t_0)|\Big) \leqslant \varepsilon\},$$

где $\Delta_1(T,T_0) \doteq \{(t,t_0) : t_0 + r \leqslant t \leqslant t_0 + T,\ |t_0| \leqslant T_0\}$, относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

Лемма 3 (лемма 8.11 на стр. 97). *Если функция $t \to A(t,s)$ рекуррентна, то для каждого $T > r$ найдется такая константа $\mathit{\Gamma}_0$, что при всех $(t,t_0) \in \Delta_2(T) \doteq \{(t,t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 + r \leqslant t \leqslant t_0 + T\}$ имеет место неравенство*

$$|\mathit{\Gamma}(t,t_0)| \leqslant \mathit{\Gamma}_0. \tag{0.5}$$

Если, в дополнение к сказанному, для каждой системы $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ и некоторой константы $\varkappa > -\infty$ выполнено неравенство $\lambda_1(\widehat{A}) \geqslant \varkappa$, *где* $\lambda_1(\widehat{A})$ — *наименьший* $\mathbb{L}_2$*-показатель Ляпунова системы* $(\widehat{A}, \mathbb{S}_0^p)$, *то для каждого* $T > r$ *найдется такая константа* $\gamma_0 > 0$, *что при всех* $(t, t_0) \in \Delta_2(T) \doteq \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 + r \leqslant t \leqslant t_0 + T\}$ *имеет место неравенство*

$$|\mathit{\Gamma}(t, t_0)| \geqslant \gamma_0. \tag{0.6}$$

Лемма 4 (лемма 8.12 на стр. 100). *Для всех* $t \geqslant t_0$ *существует единственная верхняя треугольная* $(p{\times}p)$ *- матрица* $Z(t, t_0)$ *с положительными диагональными элементами* $z_{ii}(t, t_0)$, *являющаяся решением матричного уравнения*

$$Z^* Z = \mathit{\Gamma}(t, t_0) \tag{0.7}$$

и удовлетворяющая условию $Z(t_0, t_0) = I_p$. *Это решение непрерывно дифференцируемо по* t *при всех* $t \geqslant t_0 + r$.

Лемма 5 (лемма 8.13 на стр. 100). *Пусть* $Z(t, t_0)$ — *решение уравнения* (0.7), *существование которого утверждается в лемме* 4. *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$, $T > r$ *и* $T_0 > 0$ *множества*

$$\mathit{\Xi}_Z(\varepsilon, T, T_0) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \Big(|Z(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - Z(t, t_0)| + \\ + |\dot{Z}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - \dot{Z}(t, t_0)|\Big) \leqslant \varepsilon\},$$

$$\mathit{\Xi}_{Z^{-1}}(\varepsilon, T, T_0) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \Big(|Z^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - Z^{-1}(t, t_0)| + \\ + |\dot{Z}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - \dot{Z}^{-1}(t, t_0)|\Big) \leqslant \varepsilon\},$$

где $\Delta_1(T, T_0) \doteq \{(t, t_0) : t_0 + r \leqslant t \leqslant t_0 + T,\ |t_0| \leqslant T_0\}$, *относительно плотны на прямой* $\mathbb{R}$.

При фиксированном t_0 построим матрицу $B(t) = \dot{Z}(t,t_0)Z^{-1}(t,t_0)$, $t \geqslant t_0$. Тогда $B(t)$ — верхняя треугольная матрица, непрерывная и, в силу леммы 5, ограниченная при $t \geqslant t_0 + r$, а система $\dot{y} = B(t)y$, $y \in \mathbb{R}^p$ асимптотически подобна сужению $(A, \mathbb{S}_0^p)$ системы A.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в теореме Миллионщикова утверждается, что и треугольная матрица $B(t)$ и соответствующее ляпуновское преобразование $L(t)$ тоже рекуррентны, но для систем с последействием это пока не удалось доказать.

В связи с теоремами 1 и 2, возникает естественный вопрос: существуют ли системы вида (0.1), для которых пространство $\mathfrak{S}^+$ конечномерно и какова в этом случае его размерность? В диссертации выделен некоторый простой класс систем вида (0.1), имеющих бесконечномерное пространство решений, но подпространство решений $\mathfrak{S}^+$ которых конечномерно и подсчитана размерность подпространства $\mathfrak{S}^+$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t) + \displaystyle\int_{-r}^{0} dC(t,s)y_t(s), \\ \dot{y}(t) = D(t)y(t). \end{cases} \tag{0.8}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, функции $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n,m)$, $D : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(m)$ непрерывны и ограничены на прямой $\mathbb{R}$, а функция $C : \mathbb{R} \times [-r, 0] \to \mathbb{M}(n,m)$ удовлетворяет естественным условиям.

Теорема 3 (теорема 6.5 на стр. 74). *Для любой системы вида* (0.8) *размерность пространства* $\mathfrak{S}^+$ *равна* $n + m$.

Из этой теоремы следует, в частности, что система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + \gamma(t)y(t) + \displaystyle\int_{-1}^{0} y_t(s)dg(t,s), \\ \dot{y}(t) = \beta(t)y(t). \end{cases} \tag{0.9}$$

асимптотически подобна системе

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dfrac{\dot{z}_{11}(t)}{z_{11}(t)}\,\xi + \dfrac{z_{11}(t)}{z_{22}(t)}\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{z_{12}(t)}{z_{11}(t)}\Big)\,\eta, \\ \dot{\eta} = \dfrac{\dot{z}_{22}(t)}{z_{22}(t)}\,\eta, \end{cases} \tag{0.10}$$

где

$$z_{11}(t) = \|x_t^1\|_2, \quad z_{12}(t) = \|x_t^1\|_2^{-1}\int_{-1}^{0} x_t^1(s)x_t^2(s)ds,$$

$$z_{22}(t) = \bigg(\|x_t^2\|_2^2 + \|y_t^2\|_2^2 - \|x_t^1\|_2^{-2}\Big(\int_{-1}^{0} x_t^1(s)x_t^2(s)ds\Big)^2\bigg)^{1/2},$$

$$x^1(t) = \exp\Big(\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\Big), \quad y^2(t) = \exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big),$$

$$x^2(t) = \int_0^t \exp\Big(\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\Big)\varphi(s)ds,$$

$$\varphi(t) = \gamma(t)\exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big) + \int_{-1}^{0}\exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big)dg(t,s).$$

Следствие 1 (следствие 6.1 на стр. 82). *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{11}(t)}{t}, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{22}(t)}{t},$$

тогда система (0.10) *правильная и, следовательно, конечные* $\mathbb{L}_2$*-показатели Ляпунова системы с последействием* (0.9) *исчерпываются значениями*

$$\lambda_1 = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{11}(t)}{t}, \quad \lambda_2 = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{22}(t)}{t},$$

если при этом $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, *то нулевое решение системы* (0.9) *экспоненциально устойчиво.*

Следствие 2 (следствие 6.2 на стр. 83). *Если система* (0.10) *не предполагается правильной, то:*

а) *нулевое решение системы с последействием* (0.9) *устойчиво тогда и только тогда, когда функции*

$$t \to z_{11}(t) \;\; \text{и} \;\; t \to \big(z_{12}^2(t) + z_{22}^2(t)\big)$$

ограничены на полуоси $\mathbb{R}^+$;

б) *нулевое решение системы* (0.9) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t\to+\infty} \big(z_{11}^2(t) + z_{12}^2(t) + z_{22}^2(t)\big) = 0.$$

В диссертации исследуется также вопрос о равномерной экспоненциальной устойчивости системы (0.1). Этот вопрос для систем, не обладающих свойством периодичности, не исследован. Для периодических и стационарных систем свойство равномерной экспоненциальной устойчивости автоматически следует из экспоненциальной устойчивости, для произвольных систем это неверно.

Вопросам экспоненциальной (но не равномерной экспоненциальной устойчивости) систем с последействием, пространство начальных функций для которых совпадает с конечномерным пространством, посвящена монография Н. В. Азбелева и П. М. Симонова [3] (см. также [32]). В условиях этой монографии пространство решений изучаемой системы конечномерно и, следовательно, такая система всегда подобна системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что система (0.1) удовлетворяющая естественным условиям, *C-равномерно экспоненциально устойчива*, если найдутся такие константы $\lambda > 0$ и $M > 0$, что для всякого движения $t \to x_t(\cdot)$, порожденного системой (0.1), для любого $t_0 \geqslant 0$ и всех $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\|x_t(\cdot)\|_0 \leqslant M\|x_{t_0}(\cdot)\|_0 \exp\bigl[-\lambda(t-t_0)\bigr]. \tag{0.11}$$

Аналогичным образом можно ввести понятие *L_2-равномерной экспоненциальной устойчивости.* В этом случае неравенство (0.11) заменяется неравенством

$$\|x_t(\cdot)\|_2 \leqslant M\|x_{t_0}(\cdot)\|_2 \exp\bigl[-\lambda(t-t_0)\bigr].$$

Теорема 4. (теорема 3.1 на стр. 37). *Система* (0.1), *удовлетворяющая естественным условиям, C-равномерно экспоненциально устойчива в том и только в том случае, если показатель Боля*

$$\mathfrak{B}_0(A) \doteq \varlimsup_{t-\tau\to\infty} \frac{\ln\|X(t,\tau)\|_{\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}}}{t-\tau}, \quad \mathfrak{S} = C([-r,0],\mathbb{R}^n),$$

системы (0.1) *удовлетворяет неравенству* $\mathfrak{B}_0(A) < 0$.

Аналогичным образом доказывается, что необходимым и достаточным условием L_2-равномерной экспоненциальной устойчивости системы (0.1) является отрицательность показателя $\mathfrak{B}_2(A)$.

Далее, рассмотрим подпространство $\mathfrak{A}_0$ всех систем из $\mathfrak{A}$, удовлетворяющих естественным условиям и обладающих свойством «*продолжаемости влево*» каждого существенного решения (см. стр. 38).

Теорема 5 (теорема 3.2 на стр. 39). *Свойство C-равномерной экспоненциальной устойчивости на пространстве $\mathfrak{A}_0$ с метрикой*

$$\varrho(A,B) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\Bigl(|A(t,0)-B(t,0)| + \int_{-r}^{0} |A(t,s)-B(t,s)|\,ds\Bigr)$$

является грубым свойством.

Доказательство этой теоремы использует следующую лемму.

Лемма 6 (лемма 3.1 на стр. 39). *Показатель Боля $\mathfrak{B}_0(A)$ системы $A \in \mathfrak{A}_0$ устойчив вверх, то есть каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой системы $A+B \in \mathfrak{A}_0$, где B удовлетворяет естественным условиям и неравенству*

$$\sup_{t\geqslant 0}\Big(|B(t,0)| + \int_{-r}^{0} |B(t,s)|ds\Big) \leqslant \delta,$$

имеет место неравенство

$$\mathfrak{B}_0(A+B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon. \tag{0.12}$$

Если на пространстве $\mathfrak{A}$ всех систем вида (0.1) определить метрику ρ равенством

$$\rho(A,B) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(|A(t,0) - B(t,0)| + \operatorname*{var}_{s\in[-r,0]} |A(t,s) - B(t,s)|\Big), \tag{0.13}$$

то утверждения аналогичные выше сформулированным, останутся справедливыми без условия «продолжаемости влево», то есть на всем пространстве $\mathfrak{A}$. Приведем эти утверждения.

Лемма 7 (лемма 3.2 на стр. 42). *Показатель Боля $\mathfrak{B}_0(A)$ системы $A \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющей естественным условиям, устойчив вверх, то есть каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любого возмущения $B(t,s)$, удовлетворяющего естественным условиям и неравенству*

$$\sup_{t\geqslant 0} \operatorname*{var}_{s\in[-r,0]} |B(t,s)| \leqslant \delta,$$

имеет место неравенство (0.12).

Теорема 6 (теорема 3.3 на стр. 44). *В пространстве $\mathfrak{A}$ с метрикой ρ, определенной равенством* (0.13) *свойство C-равномерной экспоненциальной устойчивости, является грубым свойством.*

Вопросы приводимости играют существенную роль в задачах управления асимптотическими характеристиками линейных управляемых систем [24, 25]. Рассмотренные в диссертации задачи найдут свое применение при исследовании вопросов управления асимптотическими характеристиками систем с последействием.

Основные результаты диссертации опубликованы в [4–9].

Глава 1. Линейные системы с последействием и показатель Боля

§ 1. Описание системы

Будем рассматривать линейную систему уравнений с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.1}$$

Здесь $\dot{x}(t) \doteq \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-1}\big(x(t+\varepsilon) - x(t)\big)$ — правая производная функции $x(t)$, а интеграл Стилтьеса рассматривается по переменной s при каждом фиксировенном t. Всюду далее предполагается, что $r > 0$ и функция $A\colon \mathbb{R}\times[-r,0] \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям, которые мы будем называть *естественными условиями*:

1) функция $(t,s) \to A(t,s)$ ограничена в полосе $\mathbb{R} \times [-r,0]$;

2) функция $t \to A(t,0)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $A(t,-r) \equiv 0$;

3) функция $s \to A(t,s)$ непрерывна слева по s на $(-r,0)$;

4) вариация $\operatorname*{var}\limits_{s\in[-r,0]} |A(t,s)|$ функции $s \to A(t,s)$ ограничена на $[-r,0]$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$;

5) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для всех $|\tau| \leqslant \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\int_{-r}^{0} |A(t+\tau,s) - A(t,s)|\, d\,s \leqslant \varepsilon.$$

Эти условия с запасом обеспечивают (см. [22, 29]) правостороннее существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи Коши для системы (1.1).

В дальнейшем систему (1.1) будем отождествлять с задающей ее функцией A, а пространство всех систем A, удовлетворяющих естественным условиям, обозначать $\mathfrak{A}$.

В виде (1.1) могут быть записаны как системы с сосредоточенными запаздываниями, так и системы с распределенным запаздыванием.

П р и м е р 1.1. Обозначим $\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geqslant 0. \end{cases}$ Если

$$A(t,s) = A_0(t)\chi(s+\vartheta_0(t)) + \dots + A_m(t)\chi(s+\vartheta_m(t)),$$

где $0 \leqslant \vartheta_k(t) \leqslant r$ при $t \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, m$, то (1.1) — система дифференциальных уравнений с конечным числом сосредоточенных запаздываний

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t-\vartheta_0(t)) + \dots + A_m(t)x(t-\vartheta_m(t)).$$

П р и м е р 1.2. Если $A(t,s) = \displaystyle\int_{-r}^{s} F(t,\tau)\,d\tau$, то (1.1) — система с распределенным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} F(t,s)x(t+s)ds.$$

П р и м е р 1.3. Пусть $(Qy)(t) = y(t) + \displaystyle\int_{-r}^{0} A(t,s)y(t+s)\,ds$ — линейный интегральный опреатор, действующий в пространстве непрерывных функций $y : [-r,0] \to \mathbb{R}^n$. Тогда система (1.1) может быть записана в виде функционально–диффернциального уравнения

$$(Q\dot{x})(t) = A(t,0)x(t). \tag{1.2}$$

Далее, в качестве пространства начальных функций будем рассматривать пространство $\mathfrak{S}$ всех непрерывных функций $u : [-r,0] \to \mathbb{R}^n$ и, в зависимости от обстоятельств, снабжать это пространство либо L_2-нормой

$\|u(\cdot)\|_2 = \Big(\int_{-r}^{0} |u(s)|^2 ds\Big)^{1/2}$, либо равномерной нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{t\in[-r,0]} |u(t)|$ (в последнем случае $\mathfrak{S}$ становится банаховым пространством и совпадает с пространством $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$). Таким образом, для каждого момента времени t_0 и любой непрерывной функции $u \in \mathfrak{S}$ решением $t \to x(t,t_0,u)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x(t+s) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \tag{1.3}$$

$$x(t) = u(t-t_0) \quad \text{при} \quad t \in [t_0 - r, t_0], \tag{1.4}$$

будем называть непрерывную на $[t_0 - r, \infty)$ функцию, совпадающую с функцией $u(t-t_0)$ при $t \in [t_0 - r, t_0]$ и обращающую систему (1.3) в тождество при $t \geqslant t_0$.

З а м е ч а н и е 1.1. Отметим еще, что расширение пространства начальных функций до пространства $L_2([-r,0],\mathbb{R}^n)$ (или любого другого пространства измеримых функций) не меняет асимптотику решений, поскольку с возрастанием времени решения системы (1.1) становятся непрерывно дифференцируемыми функциями переменного t. Действительно, если, например, начальная функция u берется из пространства $L_2([-r,0],\mathbb{R}^n)$ и $x(t,t_0,u)$ — решение задачи (1.3), (1.4), то для любого $t_1 \geqslant t_0 + r$ функция $t \to x(t,t_1,v)$, где $v(s) \doteq x(s+t_1,t_0,u)$ при $s \in [-r,0]$, является решением системы (1.3) с начальным условием $x(t) = v(t-t_1)$, $t \in [t_1 - r, t_1]$ (и совпадает с решением $x(t,t_0,u)$ при всех $t \geqslant t_1$), но при этом начальная функция $s \to v(s)$ уже непрерывно дифференцируема на $[-r,0]$.

Таким образом, при изучении асимптотических свойств решений системы (1.1) достаточно ограничиться постранством начальных функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-r,0]$.

Далее, для произвольной непрерывной функции $t \to x(t)$, определенной на некотором интервале $J \subseteq \mathbb{R}$, и любой точки t такой, что $[t-r, t] \subseteq J$, запись $x_t(\cdot)$ (или просто x_t) означает функцию $s \to x_t(s) \doteq x(t+s)$ переменного $s \in [-r, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, то есть элемент пространства $\mathfrak{S}$.

Рассмотрим автономную систему с последействием $\dot{x}(t) = v(x_t)$, обладающую свойством непрерывной зависимости и глобальной правосторонней единственности решения задачи Коши. Как показал Н. Н. Красовский [18], естественным фазовым пространством такой системы является банахово пространство $\mathfrak{S} = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, в котором движение $t \to x_t(x_0)$ строится по решению $t \to x(t, x_0)$ системы $\dot{x}(t) = v(x_t)$ и начальному условию $x_t(x_0)\big|_{t=0} = x_0 \in \mathfrak{S}$. Таким образом, автономной системе отвечает естественная динамическая система $(\mathfrak{S}, g^t)$, где полупоток $g^t : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, $t \geqslant 0$, определяется равенством $g^t(x_0) = x_t(x_0)$.

Если рассматриваемая система

$$\dot{x}(t) = v(t, x_t) \tag{1.5}$$

неавтономна, то $\mathfrak{S}$ уже не является фазовым пространством, но и в этом случае можно построить динамическую систему сдвигов, где фазовым пространством является «расширенное фазовое пространство». Эта конструкция описана в работе [26]. В этой работе мы будем придерживаться концепции Красовского и, основанной на ней, конструкции работы [26]. Кратко опишем её. Пусть $v_\tau(t, u) \doteq v(t+\tau, u)$ — сдвиг функции v на постоянную $\tau \geqslant 0$, $v_0 \equiv v$. Обозначим $\mathfrak{R}(v) \doteq \operatorname{cl}\{v_\tau(\cdot, u) : \tau \geqslant 0\}$ — замыкание множества сдвигов функции v в топологии равномерной сходимости на отрезках равномерно по u на каждом шаре в $\mathfrak{S}$. На $\mathfrak{R}(v)$ действует полугруппа сдвигов $h^t : \mathfrak{R}(v) \to \mathfrak{R}(v)$, $t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty)$, $h^t v = v_t = v_t(\cdot, u)$. Таким образом, на пространстве $\Omega \doteq \mathfrak{R}(v) \times \mathfrak{S}$ определен полупоток $f^t : \Omega \to \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$, порожденный системой (1.5): если $\omega \doteq (v,u) \in \Omega$, то $f^t\omega = (h^t v, g^t u)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Фазовое пространство Ω полупотока f^t естественно считать фазовым пространством системы (1.5).

Перепишем задачу (1.3), (1.4) в виде

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad x_t(s)\big|_{t=t_0} = u(s), \quad s \in [-r,0], \quad t \geqslant t_0. \tag{1.6}$$

Пусть $t \to x(t,t_0,u)$ — решение задачи (1.6). Всякое такое решение порождает *движение* $t \to x_t(\cdot,t_0,u) \doteq x_t(t_0,u)$ в пространстве $\mathfrak{S}$, $t \geqslant t_0$ (для краткости при $t_0 = 0$ вместо $x_t(\cdot,0,u)$ будем писать $x_t(u)$). Тогда, в силу единственности решения задачи Коши, для всех $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$ и любой начальной функции $u \in \mathfrak{S}$ имеет место равенство (см. рис. 1.1)

$$x_t(s,t_0,u) = x_t(s,t_1,x_{t_1}(\cdot,t_0,u)), \quad s \in [-r,0]. \tag{1.7}$$

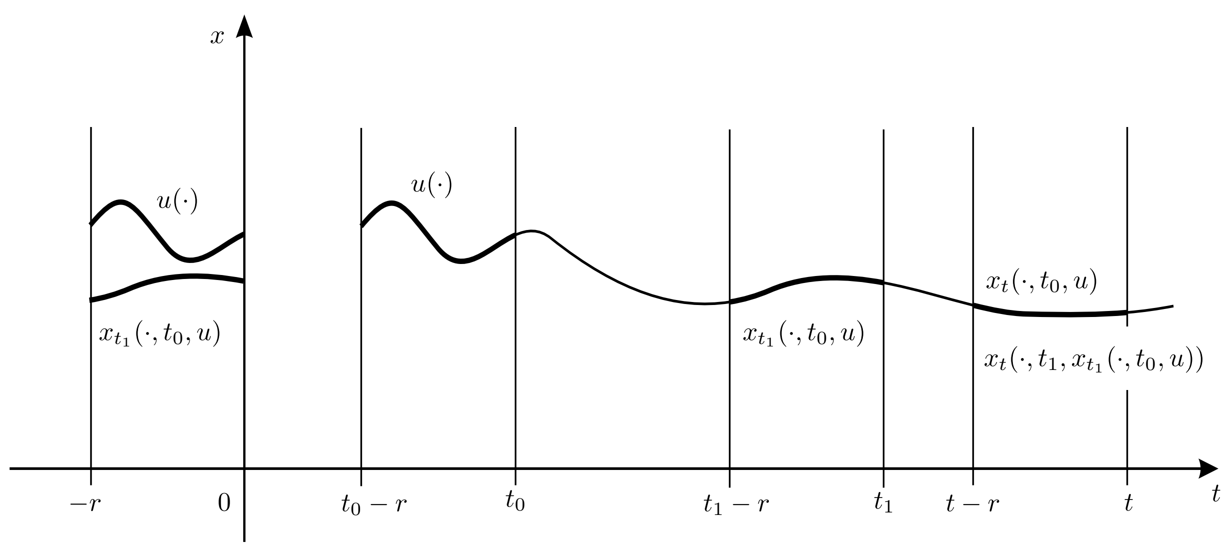

Рис. 1.1. Построение движения по решению задачи (1.6)

Определим оператор $X(t,\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, отображающий пространство $\mathfrak{S}$ в себя, следующим образом: функции $u \in \mathfrak{S}$ ставится в соответствие функция $s \to x_t(s)$, $s \in [-r, 0]$, построенная по решению $t \to x(t, \tau, u)$ системы (1.3) при начальном условии $x(\tau + s) = u(s)$, $s \in [-r, 0]$. Таким образом, согласно (1.7), имеет место равенство

$$x_t = X(t, \tau)x_\tau. \tag{1.8}$$

Этот оператор, введенный Н. Н. Красовским [18], будем называть *оператором Коши* системы A. Это линейный непрерывный оператор, непрерывно зависящий от совокупности переменных t, τ ($t_0 \leqslant \tau \leqslant t$). Кроме того, оператор $X(t, \tau)$ обладает свойством (см. (1.7)):

$$X(t, \tau) = X(t, \vartheta)X(\vartheta, \tau), \quad t \geqslant \vartheta \geqslant \tau.$$

Если $t \geqslant t_0 + r$, то $X(t, \tau)$ можно рассматривать как линейный непрерывный оператор, действующий из пространства непрерывных функций в пространство непрерывно дифференцируемых функций. Поэтому, в силу теоремы Арцела [17, гл. 2], оператор Коши $X(t, \tau) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ системы $A \in \mathfrak{A}$ при $t \geqslant t_0 + r$ и $t \geqslant \tau \geqslant t_0$ компактен в $\mathfrak{S}$.

Отметим также, что оператор $X(t, \tau)$ имеет ограниченный показатель Боля (верхний особый показатель [10])

$$\mathfrak{B}(A) \doteq \varlimsup_{t-\tau\to\infty} (t - \tau)^{-1} \ln \|X(t, \tau)\|_{\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}}. \tag{1.9}$$

Всюду далее, в зависимости от выбранной в пространстве $\mathfrak{S}$ нормы, показатель Боля будем обозначать либо $\mathfrak{B}_0(A)$, если выбрана равномерная норма, либо $\mathfrak{B}_2(A)$, если выбрана L_2-норма.

Как показано в [22, §8] решение задачи (1.6) можно представить в виде

$$x(t) = \int_{t_0-r}^{t_0} dK(t, \xi, t_0)u(\xi - t_0), \quad t_0 < t < \infty, \tag{1.10}$$

где функция $K(t,\xi,t_0)$ определена при всех $t \geqslant t_0$, имеет конечное изменение по $\xi \in [t_0 - r, t_0]$ и при дополнительных условиях:

а) $K(t, t_0 - r, t_0) \equiv 0$,

б) функция $\xi \to K(t,\xi,t_0)$ непрерывна справа при $\xi \in (t_0 - r, t_0)$ и определяется равенством (1.10) однозначно.

Из этих условий непосредственно следует, что $K(t,\xi,t_0)$ представляет собой решение начальной задачи

$$\dot{K}(t,\xi,t_0) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)K(t+s,\xi,t_0), \quad t_0 \leqslant t < \infty, \tag{1.11}$$

$$K(t+s,\xi,t_0) = \begin{cases} I, & t+s \leqslant \xi, \\ 0, & \xi < t+s \leqslant t_0, \end{cases} \tag{1.12}$$

где I — единичная матрица соответствующей размерности.

Из представления (1.10) и равенства (1.8) следует, что

$$x_t(\vartheta) = \big(X(t,\tau)x_\tau\big)(\vartheta) = \\ = \begin{cases} \displaystyle\int_{-r}^{0} dK(t+\vartheta, s+\tau, \tau)x_\tau(s), & \tau \leqslant t+\vartheta \leqslant t, \\ x_\tau(t-\tau+\vartheta), & \tau - r \leqslant t+\vartheta < \tau. \end{cases} \tag{1.13}$$

Действительно, заменяя в представлении (1.10) $\xi - t_0$ на s, при $t_0 = \tau$ и $u(\cdot) = x_\tau(\cdot)$, для $t + \vartheta \geqslant \tau$ получим

$$x_t(\vartheta) = \int_{-r}^{0} dK(t+\vartheta, s+\tau, \tau)x_\tau(s),$$

а при $\tau - r \leqslant t + \vartheta < \tau$ значение образа $x_t(\vartheta)$ можно выписать явно через значение прообраза, используя равенство $x_t(\vartheta) = x_\tau(t - \tau + \vartheta)$.

З а м е ч а н и е 1.2. С помощью функции $K(t,\xi,t_0)$ равенство (1.13) при $t \geqslant \tau + r$ определяет интегральное представление оператора Коши $X(t,\tau) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ системы A.

З а м е ч а н и е 1.3. Рассмотрим стационарную систему с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(s)x_t(s). \tag{1.14}$$

Здесь функция $s \to A(s) \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ ограничена на отрезке $[-r, 0]$ и имеет на этом отрезке ограниченное изменение. Отметим, что если функция $t \to x(t)$ — решение системы (1.14), то при любом $t_1 \in \mathbb{R}$ функция $t \to x(t + t_1)$ также является решением этой системы, и, следовательно, для любой функции $u \in \mathfrak{S}$ и любых двух начальных моментов времени t_0 и $t_0 + t_1$ справедливо равенство (см. рис. 1.2)

$$x_t(\cdot, t_0, u) = x_{t+t_1}(\cdot, t_0 + t_1, u). \tag{1.15}$$

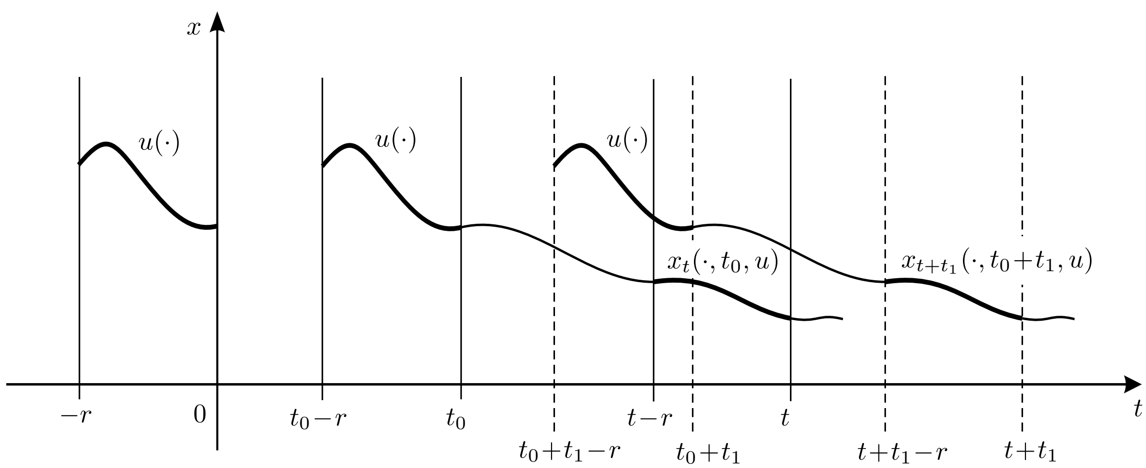

Рис. 1.2. Решения стационарной системы

Равентсво (1.15) равносильно равенству

$$X(t, t_0)u = X(t + t_1, t_0 + t_1)u,$$

где $X(t, \tau) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ — оператор Коши системы (1.14). Таким образом, оператор Коши $X(t, \tau)$ стационарной системы (1.14) зависит от одного неотрицательного параметра — разности своих аргументов, то есть для любых

t и τ, таких что $t \geqslant \tau$ выполнено равенство

$$X(t,\tau) = X(t-\tau, 0),$$

и, следовательно, при любых $t \geqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$ выполнено равенство (свойство полугруппы)

$$X(t,0)X(\tau,0) = X(t+\tau,0).$$

Рассмотрим, далее, неоднородную линейную систему уравнений с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s) + f(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{1.16}$$

где функция $A\colon\ \mathbb{R}\times[-r,0] \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ удовлетворяет выше перечисленным естественным условиям, функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Как показано, например, в [22] или [29], решение уравнения (1.16) при начальном условии

$$x(t) = u(t-t_0), \quad t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0, \tag{1.17}$$

можно представить в виде

$$x(t) = \int_{t_0-r}^{t_0} dK(t,\tau,t_0)u(\tau-t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \geqslant t_0.$$

Здесь функция $R(t,\tau)$ представляет собой решение начальной задачи

$$\dot{R}(t,\tau) = \int_{-r}^{0} dA(t,\vartheta)R(t+s,\tau), \quad \tau \leqslant t < +\infty, \tag{1.18}$$

$$R(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau - r \leqslant t < \tau, \\ I, & t = \tau, \end{cases} \tag{1.19}$$

функция $K(t,\tau,t_0)$ является решением задачи (1.11), (1.12) и определяет оператор Коши $X(t,\tau) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ (см. (1.13)) однородной системы (1.1).

Таким образом, движение $t \to x_t$, порожденное системой (1.16) при начальном условии (1.17), при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет равенству

$$x_t(s) = \big(X(t,t_0)u\big)(s) + \int_{t_0}^{t+s} R(t+s,\tau)f(\tau)d\tau, \quad -r \leqslant s \leqslant 0. \qquad (1.20)$$

Далее, поскольку $R(t+s,\tau) = 0$ при $t+s < \tau$ (см. (1.19)), то

$$\int_{t}^{t+s} R(t+s,\tau)f(\tau)d\tau = 0$$

и представление (1.20) можно переписать в виде

$$x_t(s) = \big(X(t,t_0)u\big)(s) + \int_{t_0}^{t} R(t+s,\tau)f(\tau)d\tau, \quad -r \leqslant s \leqslant 0. \qquad (1.21)$$

или

$$x_t(s) = \big(X(t,t_0)u\big)(s) + \int_{t_0}^{t} R_t(s,\tau)f(\tau)d\tau, \quad -r \leqslant s \leqslant 0.$$

Так как функция $R(t,\tau)$ является решением начальной задачи (1.18), (1.19), то при всех $t \geqslant \tau$ выполнено равенство

$$R_t(\cdot,\tau) = X(t,\tau)\Phi,$$

где

$$\Phi(s) = \begin{cases} 0, & -r \leqslant s < 0, \\ I, & s = 0. \end{cases}$$

Окончательно получаем, что для движения $t \to x_t$, порожденного системой (1.16) при начальном условии (1.17), справедливо следующее представление

$$x_t(s) = \big(X(t,t_0)u\big)(s) + \int_{t_0}^{t} \big(X(t,\tau)\Phi\big)(s)f(\tau)d\tau, \quad -r \leqslant s \leqslant 0. \qquad (1.22)$$

Из (1.22) следует, что когда u пробегает все пространство $\mathfrak{S}$ начальных функций, точка x_t (t фиксированно) пробегает афинное пространство, образующим линейным подпространством которого является (возможно бесконечномерное) пространство $X(t, t_0)\mathfrak{S}$. Оно и определяет асимптотическое поведение решений как однородной (1.1), так и неоднородной системы (1.16). С возрастанием t размерность $X(t, t_0)\mathfrak{S}$ может только понизиться. В ряде интересных для приложений случаев, $X(t, t_0)\mathfrak{S}$ при больших t может даже оказаться конечномерным (см. § 6). В следующем параграфе будет приведено простое преобразование [2] однородной системы (1.1), позволяющее построить расслоение пространства $\mathbb{R}^n$ (при фиксированном t_0) на семейство афинных подпространств с общим образующим. Такое преобразование тоже представляет интерес при изучении асимптотики решений системы (1.1).

§ 2. Об одном элементарном преобразовании системы (1.1) и негрубой экспоненциальной устойчивости

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad t \in (0,\infty), \tag{2.1}$$

$$x(t) = u(t), \quad t \in [-r,0], \tag{2.2}$$

в предположении, что $A \in \mathfrak{A}$.

Пусть $t \in (0,r]$. Произведем в правой части уравнения (2.1) замену $t+s=\tau$ и перепишем (2.1) в виде

$$\dot{x}(t) = \int_{t-r}^{t} dQ(t,\tau)x(\tau) = \int_{t-r}^{0} dQ(t,\tau)x(\tau) + \int_{0}^{t} dQ(t,\tau)x(\tau), \tag{2.3}$$

где $Q(t,\tau) = A(t,\tau-t)$. Учитывая начальное условие (2.2), получим задачу Коши

$$\dot{x}(t) = \int_{0}^{t} dQ(t,\tau)x(\tau) + q(t,u(\cdot)), \quad t \in (0,r], \tag{2.4}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.5}$$

где функция $t \to q(t,u(\cdot)) \doteq \displaystyle\int_{t-r}^{0} dQ(t,\tau)u(\tau)$ известна и строится при $t \in [0,r]$ по начальной функции $u(t)$, а $x_0 = u(0)$. Ясно также, что задача (2.4), (2.5) для неоднородной системы (2.4) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant r$ эквивалентна исходной задаче для однородной системы (2.1). Далее, поскольку пространство начальных функций для однородной системы

$$\dot{x}(t) = \int_{0}^{t} dQ(t,\tau)x(\tau), \quad t \in (0,r], \tag{2.6}$$

конечномерно и совпадает с $\mathbb{R}^n$, а система (2.6) линейна, то пространство решений системы (2.6) на отрезке $[0,r]$ конечномерно (его размерность равна n), разрешающий опертор (оператор Коши) $C(t,s)$ задается квадратной матрицей порядка n, а непрерывное на $[-r, r]$ решение задачи (2.4), (2.5) определяется формулой Коши (см. [2])

$$x(t) = C(t,0)u(0) + \int_0^t C(t,\tau)q(\tau, u(\cdot))d\tau, \quad t \in (0, r]. \tag{2.7}$$

Отметим еще, что матрица Коши $C(t,\tau)$ системы (2.6) при каждом фиксированном $\tau \geqslant 0$ и всех $t \geqslant \tau$ является решением матричной задачи Коши [2]

$$\dot{X}(t) = \int_\tau^t dQ(t,s)X(s), \quad t \geqslant \tau \geqslant 0, \quad X(t)\big|_{t=\tau} = I_n,$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Обозначим $x^1(t)$ — решение задачи (2.1), (2.2) на отрезке $[0, r]$. Тогда, в соответствии с обозначениями § 1, после замены $t = s + r$ получим равенство $x^1(t) = x_r(s)$, $-r \leqslant s \leqslant 0$. Рассмотрим на отрезке $[r, 2r]$ задачу

$$\dot{x}(t) = \int_r^t dQ(t,\tau)x(\tau) + q(t, x^1(\cdot)), \quad t \in (r, 2r], \tag{2.8}$$

$$x(r) = x^1(r), \tag{2.9}$$

где функция $q(t, x^1(\cdot)) \doteq \int_{t-r}^r dQ(t,\tau)x^1(\tau)$ рассматривается при $t \in [r, 2r]$. Решение (обозначим его $x^2(t)$) задачи (2.8), (2.9) на отрезке $[r, 2r]$ задается формулой Коши

$$x^2(t) = C(t,r)x^1(r) + \int_r^t C(t,\tau)q(\tau, x^1(\cdot))d\tau, \quad t \in (r, 2r]. \tag{2.10}$$

Таким образом, мы построили решение $x(t, u(\cdot))$ задачи (2.1), (2.2) на отрезке $[-r, 2r] : x(t, u(\cdot)) = x^2(t) = x_{2r}(s)$, $-r \leqslant s \leqslant 0$, $t = s + 2r$.

Допустим теперь, что, продолжая этот процесс построения решения вдоль оси $0t$, мы построили непрерывное решение $x(t, u(\cdot))$ задачи (2.1), (2.2) на отрезке $[-r, kr]$. Следовательно, это решение на каждом из отрезков $[(m-1)r, mr]$ совпадает с решением $x^m(t)$, $m = 1, \dots, r$, задачи

$$\dot{x}(t) = \int_{(m-1)r}^t dQ(t,\tau)x(\tau) + q(t, x^{m-1}(\cdot)), \quad x((m-1)r) = x^{m-1}((m-1)r).$$

Поэтому, на отрезке $[kr,(k+1)r]$ решение $x(t,u(\cdot))$ совпадает с функцией $x^{k+1}(t)$, определенной равенством

$$x^{k+1}(t) = C(t,kr)x^k(kr) + \int_{kr}^{t} C(t,\tau)q(\tau,x^k(\cdot))d\tau, \quad t \in (kr,(k+1)r], \tag{2.11}$$

где $k = 0,1,\ldots$, функция $x^0(t)$ совпадает при $t \in [-r,0]$ с функцией $u(t)$, а $q(t,x^k(\cdot)) = \displaystyle\int_{t-r}^{kr} dQ(t,\tau)x^k(\tau)$ при $t \in [kr,(k+1)r]$. Таким образом, при каждом $k = 0,1,\ldots$ и всех $t \in [kr,(k+1)r]$ имеет место равенство $x(t,u(\cdot)) = x_{(k+1)r}(s)$, где $s \in [-r,0]$, $t = s+(k+1)r$.

Равенство (2.11) можно применять при получении грубых оценок роста решений системы (2.1). Действительно, обозначим

$$\|x^k\| = \|x_{kr}\|_0 = \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} |x_{kr}(s)|,$$

тогда найдется константа α такая, что при всех $t \in [kr,(k+1)r]$ выполнено неравенство $|q(t,x^k(\cdot))| \leqslant \alpha\|x^k\|$. Пусть далее,

$$\beta_k = \max_{(t,\tau)\in\Delta_k} |C(t,\tau)|, \quad \text{где} \quad \Delta_k = \{(t,\tau) \,:\, kr \leqslant \tau \leqslant t \leqslant (k+1)r\}.$$

Далее, из (2.11) следует неравенство

$$|x^{k+1}(t)| \leqslant \beta_k|x^k(kr)| + \beta_k\alpha\|x^k\|, \quad kr \leqslant \tau \leqslant t \leqslant (k+1)r,$$

из которого, в свою очередь, получаем (при каждом k) неравенства

$$\|x^{k+1}\| \leqslant (1+\alpha)\beta_k\|x^k\|, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

а из этих последних неравенств уже следуют нужные нам неравенства

$$\|x^k\| \leqslant \|u\|_0(1+\alpha)^k \prod_{j=0}^{k-1}\beta_j, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{2.12}$$

В частности, если $|C(t,\tau)| \leqslant N\exp\lambda(t-\tau)$ для всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$ и некоторых констант N и λ, то $\beta_k \leqslant N\exp(\lambda r)$. Поэтому непосредственно из (2.12) для всех $k = 1, 2, \ldots$ получаем неравенства

$$\|x^k\| \leqslant \|u\|_0 (1+\alpha)^k N^k \exp(\lambda k r).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение:

для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа N_ε, что для всякой начальной функции $u \in \mathfrak{S}$ и всех $t \geqslant 0$ решение $x(t, u(\cdot))$ задачи (2.1), (2.2) *допускает экспоненциальную оценку*

$$|x(t, u(\cdot))| \leqslant N_\varepsilon \|u\|_0 \exp(\lambda + \varepsilon) t.$$

Поэтому, если $\lambda < 0$, то тривиальное решение системы (2.1) *экспоненциально устойчиво.*

З а м е ч а н и е 2.4. Напомним, что система (2.1) называется *экспоненциально устойчивой*, если всякое движение $t \to x_t(\cdot)$, отвечающее системе (2.1), с возрастанием времени экспоненциально стремится к нулю, то есть $\varLambda(A) < 0$, где $\varLambda(A)$ — точная верхняя грань всех показателей Ляпунова

$$\mu(u, A) \doteq \varlimsup_{t \to \infty} \frac{\ln \|x_t(\cdot, u)\|_0}{t}$$

системы (2.1). Так определенное свойство экспоненциальной устойчивости не является грубым свойством.

Поясним это более подробно. На пространстве $\mathfrak{A}$ всех систем вида (2.1), удовлетворяющих естественным условиям, определим метрику ϱ равенством

$$\varrho(A, B) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big(|A(t,0) - B(t,0)| + \int_{-r}^{0} |A(t,s) - B(t,s)|\, ds \Big). \tag{2.13}$$

З а м е ч а н и е 2.5. Введение на постранстве $\mathfrak{A}$ метрики (2.13) вполне обосновано. Действительно, рассмотрим две системы с последействием и с конечным числом сосредоточенных запаздываний

$$\dot{x}(t) = A_0(t) x(t - \vartheta_0(t)) + \cdots + A_m(t) x(t - \vartheta_m(t)) \tag{2.14}$$

и

$$\dot{y}(t) = B_0(t)x(t - \tau_0(t)) + \dots + B_m(t)x(t - \tau_m(t)), \qquad (2.15)$$

с ограниченными на числовой оси матрицами $A_i(t)$, $B_i(t)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A_i(t)| \leqslant \alpha, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |B_i(t)| \leqslant \beta, \quad i = 0, \dots, m,$$

и запаздываниями

$$0 \leqslant \vartheta_i(t) \leqslant r, \quad 0 \leqslant \tau_i(t) \leqslant r, \quad i = 0, \dots, m.$$

Системы (2.14) и (2.15) естественно считать близкими, если для каждого $i = 0, \dots, m$, при достаточно малом δ, выполнено неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \big(|A_i(t) - B_i(t)| + |\vartheta_i(t) - \tau_i(t)|\big) \leqslant \delta.$$

В метрике ϱ системы (2.14) и (2.15) также являются близкими. Покажем это. Легко проверить, что системе (2.14) в записи (2.1) соответствует функция

$$A(t, s) = A_0(t)\chi(s + \vartheta_0(t)) + \dots + A_m(t)\chi(s + \vartheta_m(t)),$$

а системе (2.15) — функция

$$B(t, s) = B_0(t)\chi(s + \tau_0(t)) + \dots + B_m(t)\chi(s + \tau_m(t)),$$

где $\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ 1, & \text{если } t \geqslant 0 \end{cases}.$

Далее, так как $\chi(\vartheta_i(t)) = \chi(\tau_i(t)) = 1$, $i = 0, \dots, m$ при всех $t \in \mathbb{R}$, то при каждом $t \in \mathbb{R}$ и выполнены неравенства

$$|A(t, 0) - B(t, 0)| \leqslant |A_0(t) - B_0(t)| + \dots + |A_m(t)) - B_m(t))| \leqslant \delta(m + 1),$$

$$\int_{-r}^{0} |A(t,s) - B(t,s)| ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-r}^{0} \Big(|A_0(t)\chi(s+\vartheta_0(t)) - B_0(t)\chi(s+\tau_0(t))| + \dots +$$
$$+ |A_m(t)\chi(s+\vartheta_m(t)) - B_m(t)\chi(s+\tau_m(t))| \Big) ds \leqslant \delta(m+1)(r+\beta).$$

Это следует (при каждом $i = 0, \dots, m$) из неравенств

$$\int_{-r}^{0} \Big(|A_i(t)\chi(s+\vartheta_i(t)) - B_i(t)\chi(s+\tau_i(t))| \Big) ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-r}^{0} \Big(|A_i(t) - B_i(t)| |\chi(s+\vartheta_i(t))| + |B_i(t)| |\chi(s+\vartheta_i(t)) - \chi(s+\tau_i(t))| \Big) ds \leqslant$$
$$\leqslant \delta r + \beta |\vartheta_i(t) - \tau_i(t)| \leqslant \delta(r+\beta).$$

Следовательно, $\varrho(A,B) \leqslant M\delta$, где $M = \delta(m+1)(1+r+\beta)$.

Вернемся к вопросу о грубости свойства экспоненциальной устойчивости системы (2.1) (в метрике (2.13)). Негрубость свойства экспоненциальной устойчивости означает, что найдется такая экспоненциально устойчивая система $A \in \mathfrak{A}$, что в любой окрестности этой системы есть система $B \in \mathfrak{A}$, не являющаяся экспоненциально устойчивой. Первый пример такого странного поведения линейной системы построил (для системы обыкновенных дифференциальных уравнений) О. Перрон [33] (см. также [1]). Более того, в примере Перрона теряется не только экспоненциальная устойчивость, но сколь угодно близкая система (к экспоненциально устойчивой системе) становится даже неустойчивой. В этом смысле свойство экспоненциальной устойчивости системы (2.1) не является грубым свойством. Оказывается далее, что даже среди правильных систем обыкновенных дифференциальных уравнений существуют негрубые экспоненциально устойчивые системы (Р. Э. Виноград [11]), теряющие экспоненциальную устойчивость, минуя асимптотическую устойчивость.

Отметим теперь, что описанная в этом параграфе методика преобразования задачи (2.1), (2.2) к системе (2.11), не позволяет «улавливать» негрубые свойства системы (2.1), а также свойства устойчивости, равномерные относительно сдвигов системы. Задаче о равномерной экспоненциальной устойчивости системы (2.1) посвящен следующий параграф.

§ 3. Показатель Боля и равномерная экспоненциальная устойчивость системы (1.1)

Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3.1. Будем говорить, что система

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \tag{3.1}$$

удовлетворяющая естественным условиям, *C-равномерно экспоненциально устойчива*, если найдутся такие константы $\lambda > 0$ и $M > 0$, что для всякого движения $t \to x_t(\cdot)$, порожденного системой (3.1), для любого $t_0 \geqslant 0$ и всех $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\|x_t(\cdot)\|_0 \leqslant M\|x_{t_0}(\cdot)\|_0 \exp\bigl[-\lambda(t-t_0)\bigr]. \tag{3.2}$$

З а м е ч а н и е 3.6. Аналогичным образом можно ввести понятие *L_2-равномерной экспоненциальной устойчивости*. В этом случае неравенство (3.2) заменяется неравенством

$$\|x_t(\cdot)\|_2 \leqslant M\|x_{t_0}(\cdot)\|_2 \exp\bigl[-\lambda(t-t_0)\bigr].$$

Теорема 3.1. *Система* (3.1), *удовлетворяющая естественным условиям, C-равномерно экспоненциально устойчива в том и только в том случае, если показатель Боля $\mathfrak{B}_0(A)$ системы* (3.1) *удовлетворяет неравенству $\mathfrak{B}_0(A) < 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна. Действительно, непосредственно из определения показателя Боля и неравенства $\mathfrak{B}_0(A) < 0$ следует существование таких констант $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, что для всякого движения, отвечающего системе (3.1), при $\lambda \doteq -(\mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon) > 0$, выполнено неравенство (3.2).

Докажем необходимость этого утверждения. Из определения C-равномерной экспоненциальной устойчивости системы (3.1) следует, что для всякого нетривиального движения $t \to x_t(\cdot)$, порожденного системой (3.1), каждого $t_0 \geqslant 0$ и всех $t \geqslant t_0$, при некоторых константах $\lambda > 0$ и $M > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{\|x_t(\cdot)\|_0}{\|x_{t_0}(\cdot)\|_0} \leqslant M \exp[-\lambda(t - t_0)].$$

Пусть, в частности, движение $t \to x_t(\cdot) \doteq x_t(\cdot, t_0, u)$ отвечает решению $t \to x(t, t_0, u)$ задачи

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad x_t(s)\big|_{t=t_0} = u(s), \quad s \in [-r, 0], \quad t \geqslant t_0.$$

Тогда $x_t = X(t, t_0)u$ и, в силу равенства

$$\|X(t, t_0)\|_{C \to C} = \sup_u \frac{\|x_t(\cdot, t_0, u)\|_0}{\|u(\cdot)\|_0},$$

где sup берется по всем ненулевым начальным функциям $u \in \mathfrak{S}$, получаем неравенство

$$\|X(t, t_0)\|_{C \to C} \leqslant M \exp[-\lambda(t - t_0)],$$

из которого следует, что $\mathfrak{B}_0(A) \leqslant -\lambda < 0$. □

З а м е ч а н и е 3.7. Аналогичным образом доказывается, что необходимым и достаточным условием L_2-равномерной экспоненциальной устойчивости системы (3.1) является отрицательность показателя $\mathfrak{B}_2(A)$.

Далее, рассмотрим подпространство $\mathfrak{A}_0$ всех систем из $\mathfrak{A}$, для которых всякое решение с конечным показателем

$$\mu(x) \doteq \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln \|x_t(\cdot)\|_0}{t}$$

обладает свойством «*продолжаемости влево*». Это означает, что для всякого такого решения системы $A \in \mathfrak{A}_0$ найдется константа $\alpha > 0$ (своя для каждого решения) такая, что для любого $s \in [-r, 0]$ и всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$\|x_{t+s}(\cdot)\|_0 \leqslant \alpha \|x_t(\cdot)\|_0. \tag{3.3}$$

Пространство $\mathfrak{A}_0$ невырождено в том смысле, что существуют классы систем с последействием (например, периодические или почти периодические), для которых пространство $\mathfrak{A}_0$ содержит не только системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 3.2. *Свойство C-равномерной экспоненциальной устойчивости на пространстве $\mathfrak{A}_0$ с метрикой (2.13) является грубым свойством.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую, формулируемую ниже лемму.

Лемма 3.1. *Показатель Боля $\mathfrak{B}_0(A)$ системы $A \in \mathfrak{A}_0$ устойчив вверх, то есть каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой системы $A + B \in \mathfrak{A}_0$, где B удовлетворяет естественным условиям и неравенству*

$$\sup_{t \geqslant 0} \Big(|B(t,0)| + \int_{-r}^{0} |B(t,s)| ds \Big) \leqslant \delta, \tag{3.4}$$

имеет место неравенство

$$\mathfrak{B}_0(A+B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из ограниченности показателя Боля $\mathfrak{B}_0(A) \doteq \mathfrak{B}_0$ системы (3.1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа $M_\varepsilon > 0$, что при всех t, t_0 ($t \geqslant t_0 \geqslant 0$) выполнено неравенство

$$\|x_t(\cdot)\|_0 \leqslant \|x_{t_0}(\cdot)\|_0 M_\varepsilon e^{(\mathfrak{B}_0 + \varepsilon)(t - t_0)}, \tag{3.6}$$

где константа M_ε зависит только от ε и не зависит от t_0.

Неравенство (3.6) эквивалентно аналогичному неравенству для оператора Коши $X(t,t_0)$ системы (3.1): для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа M_ε, что при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|X(t,t_0)\|_{C\to C} \leqslant M_\varepsilon e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon)(t-t_0)}. \tag{3.7}$$

Предположим, что лемма неверна. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется возмущенная система

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} d\bigl(A(t,s) + B_\delta(t,s)\bigr) y_t(s) \tag{3.8}$$

с матрицей B_δ, удовлетворяющей неравенству (3.4), хотя бы для одного решения $t \to y^\delta(t)$ которой выполнено неравенство

$$\mu(y^\delta) > \mathfrak{B}_0 + \varepsilon_0. \tag{3.9}$$

Применяя интегрирование по частям, систему (3.8) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)y(t+s) + B_\delta(t,0)y(t) - \\ - \int_{-r}^{0} B_\delta(t,s)\Bigl[\int_{-r}^{0} d\bigl(A(t+s,\tau) + B_\delta(t+s,\tau)\bigr)y(t+s+\tau)\Bigr]ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Согласно представлению (1.22) движение, порожденное системой (3.10), а, следовательно, и системой (3.8), и начальнымым условием $y_t(\cdot)\Big|_{t=t_0} = y_{t_0}(\cdot)$, определяется равенством

$$y_t(s) = \bigl(X(t,t_0)y_{t_0}\bigr)(s) + \int_{t_0}^{t} \bigl(X(t,\vartheta)\varPhi\bigr)(s) f_\delta(\vartheta)d\vartheta, \ -r \leqslant s \leqslant 0,$$

где

$$f_\delta(t) \doteq B_\delta(t,0)y(t) - \int_{-r}^{0} B_\delta(t,s)\Bigl[\int_{-r}^{0} d\bigl(A(t+s,\tau) + B_\delta(t+s,\tau)\bigr)y(t+s+\tau)\Bigr]ds.$$

В силу условий, накладываемых на системы A и $A + B_\delta$, при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$|f_\delta(t)| \leqslant \Big(|B_\delta(t,0)| + \beta v_0 \int_{-r}^{0} |B_\delta(t,s)| ds\Big) \|y_t^\delta\|_0,$$

где $v_0 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \operatorname*{var}\limits_{s\in[-r,0]} \big(A(t,s) + B_\delta(t,s)\big)$, β — константа, обеспечивающая неравенство (3.3) для решения $t \to y^\delta(t)$ системы (3.8). Таким образом, если выполнено неравенство (3.4), то $|f_\delta(t)| \leqslant \delta_1 \|y_t^\delta\|_0$, $t \in \mathbb{R}$, где $\delta_1 = (1 + \beta v_0)\delta$.

Далее, с учетом неравенств (3.6), (3.7), получим

$$\|y_t^\delta\|_0 \leqslant \|y_{t_0}^\delta\|_0 M_{\varepsilon_0} e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon_0)(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \Big[M_{\varepsilon_0} e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon_0)(t-\tau)} \delta_1 \|y_\tau^\delta\|_0\Big] d\tau. \qquad (3.11)$$

Умножим обе части неравенства (3.11) на $e^{-(\mathfrak{B}_0+\varepsilon_0)(t-t_0)}$

$$\|y_t^\delta\|_0 e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon_0)(t_0-t)} \leqslant \|y_{t_0}^\delta\|_0 M_{\varepsilon_0} + \int_{t_0}^{t} \delta_1 M_{\varepsilon_0} e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon_0)(t_0-\tau)} \|y_\tau^\delta\|_0 d\tau.$$

В силу леммы Гронуолла–Беллмана из последнего неравенства следует неравенство

$$\|y_t^\delta\|_0 e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon_0)(t_0-t)} \leqslant \|y_{t_0}^\delta\|_0 M_{\varepsilon_0} \exp \int_{t_0}^{t} \delta_1 M_{\varepsilon_0} d\tau,$$

из которого легко следует неравенство

$$\|y_t^\delta\|_0 \leqslant \|y_{t_0}^\delta\|_0 M_{\varepsilon_0} e^{(\mathfrak{B}_0+\delta_1 M_{\varepsilon_0}+\varepsilon_0)(t-t_0)}.$$

Таким образом, $\mu(y^\delta) \leqslant \mathfrak{B}_0 + \delta_1 M_{\varepsilon_0} + \varepsilon_0$. В силу произвольности выбора δ получаем

$$\mu(y^\delta) \leqslant \mathfrak{B}_0 + \varepsilon_0,$$

что противоречит неравенству (3.9). Полученое противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 3.2. Из определения метрики (2.13) следует, что $\varrho(A + B, A) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \big(|B(t,0)| + \int_{-r}^{0} |B(t,s)|\, ds\big)$.

Пусть система A из $\mathfrak{A}_0$ C-равномерно экспоненциально устойчива, это означает, в силу теоремы (3.1), что показатель Боля $\mathfrak{B}_0(A)$ удовлетворяет неравенству $\mathfrak{B}_0(A) < 0$. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon_0 < 0$. В силу леммы 3.1, для этого ε_0 найдется δ такое, что для любой возмущенной системы $A + B$, удовлетворяющей условию $\varrho(A + B, A) \leqslant \delta$ выполнено неравенство

$$\mathfrak{B}_0(A + B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon_0 < 0,$$

что означает C-равномерную экспоненциальную устойчивость любой достаточно близкой к A системы $A+B$, что, в свою очередь, означает грубость свойства C-равномерной экспоненциальной устойчивости на пространстве $\mathfrak{A}_0$ с метрикой (2.13). $\square$

З а м е ч а н и е 3.8. Запись возмущенной системы в виде (3.10) позволяет учитывать возмущения, малые в среднем, что характерно для систем с сосредоточенными запаздываниями (см. замечание 2.5).

З а м е ч а н и е 3.9. Если на пространстве $\mathfrak{A}$ всех систем вида (3.1) определить метрику ϱ_1 равенством

$$\varrho_1(A, B) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(|A(t, 0) - B(t, 0)| + \operatorname*{var}_{s\in[-r,0]} |A(t, s) - B(t, s)|\Big), \tag{3.12}$$

то утверждения аналогичные выше доказанным остаются справедливыми, причем без условия «продолжаемости влево» решений систем, то есть на всем пространстве $\mathfrak{A}$. Приведем эти утверждения.

Лемма 3.2. *Показатель Боля* $\mathfrak{B}_0(A)$ *системы* (3.1), *удовлетворяющей естественным условиям, устойчив вверх, то есть каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* $\delta > 0$, *что для любого возмущения* $B(t, s)$, *удовлетворяющего естественным условиям и неравенству*

$$\sup_{t\geqslant 0} \operatorname*{var}_{s\in[-r,0]} |B(t, s)| \leqslant \delta, \tag{3.13}$$

имеет место неравенство

$$\mathfrak{B}_0(A+B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon. \tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно представлению (1.22) движение, порожденное системой

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} d\big(A(t,s) + B(t,s)\big) y_t(s), \tag{3.15}$$

и начальным условием $y_t(\cdot)\Big|_{t=t_0} = y_{t_0}(\cdot)$, определяется равенством

$$y_t(s) = \big(X(t,t_0)y_{t_0}\big)(s) + \\ + \int_{t_0}^{t} \Big[\big(X(t,\tau)\varPhi\big)(s) \int_{-r}^{0} dB(\tau,\xi) y_\tau(\xi)\Big] d\tau, \quad -r \leqslant s \leqslant 0.$$

С учетом неравенств (3.6), (3.7) и условия (3.13) получим

$$\|y_t\|_0 \leqslant \|y_{t_0}\|_0 M_\varepsilon e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon)(t-t_0)} + \delta M_\varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon)(t-\tau)} \|y_\tau\|_0 d\tau. \tag{3.16}$$

Умножим обе части неравенства (3.16) на $e^{-(\mathfrak{B}_0+\varepsilon)(t-t_0)}$

$$\|y_t\|_0 e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon)(t_0-t)} \leqslant \|y_{t_0}\|_0 M_\varepsilon + \delta M_\varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon)(t_0-\tau)} \|y_\tau\|_0 d\tau.$$

В силу неравенства Гронуолла и Беллмана, из последнего неравенства следует неравенство

$$\|y_t\|_0 e^{(\mathfrak{B}_0+\varepsilon)(t_0-t)} \leqslant \|y_{t_0}\|_0 M_\varepsilon \exp\big[\delta M_\varepsilon (t-t_0)\big],$$

из которого легко следует неравенство

$$\|y_t\|_0 \leqslant \|y_{t_0}\|_0 M_\varepsilon e^{(\mathfrak{B}_0+\delta M_\varepsilon+\varepsilon)(t-t_0)}.$$

Таким образом, для оператора Коши $Y(t,t_0) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ системы (3.15) справедливо утверждение:

для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа M_ε, что при всех t, t_0 ($t \geqslant t_0$) выполнено неравенство

$$\|Y(t,t_0)\|_{C\to C} \leqslant M_\varepsilon e^{(\mathfrak{B}_0+\delta M_\varepsilon+\varepsilon)(t-t_0)},$$

из которого следует, что показатель Боля системы (3.15) удовлетворяет неравенству

$$\mathfrak{B}_0(A+B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \delta M_\varepsilon.$$

Полагая $\delta = \varepsilon/M_\varepsilon$, получаем требуемое неравенство (3.14). □

Теорема 3.3. *В пространстве $\mathfrak{A}$ с метрикой ϱ_1, определенной равенством* (3.12) *свойство C-равномерной экспоненциальной устойчивости, является грубым свойством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения метрики (3.12) следует, что

$$\varrho_1(A+B,A) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(|B(t,0)| + \operatorname*{var}_{s\in[-r,0]}|B(t,s)|\Big).$$

Предположим, что система A из $\mathfrak{A}$ C-равномерно экспоненциально устойчива, это означает, в силу теоремы 3.1, что $\mathfrak{B}_0(A) < 0$. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon_0 < 0$. В силу леммы 3.2, для ε_0 найдется δ такое, что для любой возмущенной системы $A+B$, удовлетворяющей условию $\varrho_1(A+B,A) \leqslant \delta$ выполнено неравенство

$$\mathfrak{B}_0(A+B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon_0 < 0,$$

что означает C-равномерную экспоненциальную устойчивость любой системы $A+B$, достаточно близкой к системе A в метрике ϱ_1, и, следовательно, грубость свойства C-равномерной экспоненциальной устойчивости на пространстве $\mathfrak{A}$ с метрикой ϱ_1. □

Глава 2. Системы с последействием, асимптотически подобные на конечномерных подпространствах системам обыкновенных дифференциальных уравнений

§ 4. Распространение теоремы Перрона на линейные системы с последействием

Каждой ненулевой функции $u \in \mathfrak{S}$ поставим в соответствие L_2-показатель Ляпунова

$$\varkappa(u) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \|x_t(u)\|_2}{t} \tag{4.1}$$

движения $t \to x_t(u)$, порожденного системой $A \in \mathfrak{A}$. Положим по определению $\varkappa(0) \doteq -\infty$.

Отметим, что в силу условий, накладываемых на систему A, введенный L_2-показатель огрничен сверху, то есть $\varkappa(u) < \infty$ для любого $u \in \mathfrak{S}$. Из (4.1) следует:

1) при любом $c \neq 0$

$$\varkappa(cu) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \|cx_t(u)\|_2}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |\, c \,| + \ln \|cx_t(u)\|_2}{t} = \varkappa(u);$$

2) пусть $\varkappa_0 = \varkappa(u) \neq -\infty$, тогда для любого положительного ε найдется $M_\varepsilon > 0$ такое, что при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|x_t(u)\|_2 \leqslant M_\varepsilon \exp((\varkappa_0 + \varepsilon)t); \tag{4.2}$$

3) пусть $\varkappa(u) = \varkappa_1$, $\varkappa(v) = \varkappa_2$, $\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2$ и $\varkappa_2 > -\infty$, тогда в силу (4.2) для любого $\varepsilon > 0$ при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|x_t(u) + x_t(v)\|_2 \leqslant \|x_t(u)\|_2 + \|x_t(v)\|_2 \leqslant M_\varepsilon \exp((\varkappa_2 + \varepsilon)t) \tag{4.3}$$

при некоторой зависящей от ε константе $M_\varepsilon > 0$. Из неравенства (4.3), в силу произвольности ε, следует, что

$$\varkappa(u+v) \leqslant \varkappa_2 = \max\{\varkappa(u), \varkappa(v)\}.$$

Очевидно, что если $\varkappa_1 = \varkappa_2 = -\infty$, то $\varkappa(u+v) = -\infty$.

Кроме того, если $\varkappa_1 < \varkappa_2$, то $\varkappa(u+v) = \varkappa_2$. Действительно, допустив, что $\varkappa(u+v) = \varkappa_0 < \varkappa_2$, получим

$$\varkappa_2 = \varkappa(v) = \varkappa((u+v) + (-u)) \leqslant \max\{\varkappa_0, \varkappa_1\} < \varkappa_2.$$

Таким образом, L_2-показатели Ляпунова (4.1), определенные на пространстве $\mathfrak{S}$, обладают следующими свойствами:

1) если $c \neq 0$, то $\varkappa(cu) = \varkappa(u)$;

2) $\varkappa(u+v) \leqslant \max\{\varkappa(u), \varkappa(v)\}$;

3) если $\varkappa(u) < \varkappa(v)$, то $\varkappa(u+v) = \varkappa(v)$.

З а м е ч а н и е 4.10. В монографии [10, §1] построена абстрактная теория показателей, где показатель определяется на конечномерном пространстве как функционал, удовлетворяющий условиям 1) и 2). Таким образом, L_2 -показатели Ляпунова действительно являются показателями в смысле [10, §1], и к ним может быть (частично) применена теория, развитая в этой монографии.

Отметим, что из свойств 1) и 2) L_2 -показателей Ляпунова следует, что для каждого $\varkappa$ множество

$$\mathfrak{S}_\varkappa \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) \leqslant \varkappa\},$$

образует линейное подпространство в пространстве $\mathfrak{S}$. В частности, множество

$$\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) = -\infty\}$$

также является линейным подпространством в $\mathfrak{S}$. Если же $\varkappa \geqslant \mathfrak{B}(A)$, где $\mathfrak{B}(A)$ — показатель Боля системы $A \in \mathfrak{A}$, то множество $\mathfrak{S}_{\varkappa}$ совпадает с $\mathfrak{S}$. Кроме того, для всех $\varkappa_1 < \varkappa_2$ справедливо включение $\mathfrak{S}_{\varkappa_1} \subseteq \mathfrak{S}_{\varkappa_2}$.

Пусть $u^1(\cdot), \ldots, u^p(\cdot)$ — фиксированный набор p линейно независимых функций из $\mathfrak{S}$. Линейное подпространство в $\mathfrak{S}$, порожденное этим набором функций, обозначим $\mathbb{S}_0^p$. Всякой начальной функции $u \in \mathbb{S}_0^p$ поставим в соответствие решение $t \to x(t, u)$ задачи Коши (1.6) при $t_0 = 0$ и движение $t \to x_t(u) \in \mathfrak{S}$, отвечающее этому решению при $t \geqslant 0$. Таким образом, построено движение $t \to x_t(\mathbb{S}_0^p) \doteq \mathbb{S}_t$ пространства $\mathbb{S}_0^p$. Это движение порождено *сужением* системы $A \in \mathfrak{A}$ на подпространство $\mathbb{S}_0^p$. Такое сужение обозначим $(A, \mathbb{S}_0^p)$. Всякое движение, порожденное системой $(A, \mathbb{S}_0^p)$, есть функция $t \to x_t(u)$, непрерывно продолжающая начальную функцию $u \in \mathbb{S}_0^p$ и принимающая значения в $\mathbb{S}_t$.

Лемма 4.3. *В пространстве $\mathbb{S}_0^p$ существует нормальный базис, то есть совокупность линейно независимых функций $u^1, \ldots, u^p$ из $\mathbb{S}_0^p$, обладающих следующим свойством: для любого набора линейно независимых функций $v^1, \ldots, v^p \in \mathbb{S}_0^p$ выполнено неравенство*

$$\sum_{\varkappa(u_i) > -\infty} \varkappa(u^i) \leqslant \sum_{\varkappa(v_i) > -\infty} \varkappa(v^i)$$

(*свойство минимальности*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду конечномерности пространтства $\mathbb{S}_0^p$ функционал $\varkappa : \mathbb{S}_0^p \to [-\infty, +\infty)$ принимает конечное число различных значений: $-\infty = \varkappa_0 < \varkappa_1 < \cdots < \varkappa_m$, $m \leqslant p$. Множества

$$M_i \doteq \{u \in \mathbb{S}_0^p : \varkappa(u) \leqslant \varkappa_i\},\ i = 0, \ldots, m,$$

являются линейными подпространствами в $\mathbb{S}_0^p$ и образуют пирамиду

$$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = \mathbb{S}_0^p,$$

в пространстве $\mathbb{S}_0^p$, причем на каждой из ступеней $M_i \setminus M_{i-1}$, $i = 0, \ldots, m$, показатель $\varkappa$ принемает постоянное значение $\varkappa_i$. Выберем какой-нибудь базис в подпространстве M_0 и дополним его до базиса пространства M_1, который, в свою очередь, дополним до базиса пространства M_2 и так до тех пор, пока не построим базис в M_m. Таким образом, будет построен базис в пространстве $\mathbb{S}_0^p$, являющийся нормальным. $\square$

Замечание 4.11. Если для любого $u \in \mathbb{S}_0^p$ значение показателя $\varkappa(u) = -\infty$, то любой базис пространства $\mathbb{S}_0^p$ является нормальным.

Если $u^1, \ldots, u^p$ — *нормальный* базис, то для любого $u \in \mathbb{S}_0^p$ найдется индекс $i \in \{1, \ldots, p\}$ такой, что $\varkappa(u) = \varkappa(u^i)$. Показатели $\varkappa(u^i)$ нормального базиса будем обозначать $\lambda_i(A)$, называть $\mathbb{L}_2$-*показателями* Ляпунова системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$, и говорить, что набор $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_p(A)$ образует *полную совокупность* $\mathbb{L}_2$-показателей Ляпунова системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$. Будем считать далее, что полная совокупность показателей упорядочена в порядке возрастания: $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p(A)$. Отметим еще, что если $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_p(A)$ — полная совокупность $\mathbb{L}_2$-показателей Ляпунова сужения системы A на $\mathbb{S}_0^p$, то этот же набор содержится в множестве всех $\mathbb{L}_2$-показателей системы A, поэтому обозначение $\lambda_i(A)$ вполне корректно.

Лемма 4.4. *В пространстве $\mathbb{S}_0^p$ существует ортонормированный нормальный базис.*

Доказательство. Пусть $u^1, \ldots, u^p$ — нормальный базис, а показатели этого базиса упорядочены по возрастанию $\varkappa(u^1) \leqslant \ldots \leqslant \varkappa(u^p)$. Стандартный (шмидтовский) процесс ортогонализации:

$$v^1 \doteq u^1,$$

$$v^k \doteq u^k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u^k, v^i \rangle}{\|v^i\|^2} v^i, \quad k = 2, \ldots, p,$$

не меняет нормальности базиса: показатель функции v^k не может быть больше, чем показатель $\varkappa(u^k)$, в силу того, что v^k является линейной комбинацией функций u^i, $i = 1, \ldots, k$, показатели которых не превосходят $\varkappa(u^k)$. В тоже время, показатель $\varkappa(v^k)$ не может стать меньше, чем $\varkappa(u^k)$, так как это означало бы, что базис $u^1, \ldots, u^p$ не является нормальным. Таким образом, $\varkappa(v^i) = \varkappa(u^i)$, $i = 1, \ldots, p$. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_p(A)$ — полная совокупность $\mathbb{L}_2$-показателей Ляпунова сужения $(A, \mathbb{S}_0^p)$ системы A. Если $\lambda_i(A) > -\infty$, $i = 1, \ldots, p$, то $\dim \mathbb{S}_t = p$ для всех $t \geqslant 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $x_t^i(s) = x_t(s, u^i)$. Допустим, что $\dim \mathbb{S}_{t_1} \leqslant p - 1$ при некотором $t_1 > 0$. Тогда найдутся числа $c_1, \ldots, c_p$, неравные нулю одновременно, такие, что $x_{t_1}(s) \doteq c_1 x_{t_1}^1(s) + \cdots + c_p x_{t_1}^p(s) \equiv 0$ при $s \in [-r, 0]$. Так как $x_{t_1}(s) = x_{t_1}(s, u)$, где $u(s) \doteq c_1 u^1(s) + \cdots + c_p u^p(s)$, то $x_{t_1}(s, u) \equiv 0$ при $s \in [-r, 0]$. Далее, положим в равенстве (1.7) $t_0 = 0$. Тогда $x_t(s, 0, u) \doteq x_t(s, u) = x_t(s, t_1, x_{t_1}(\cdot, u)) \equiv 0$ при всех $s \in [-r, 0]$ и $t \geqslant t_1$. Поэтому найдется индекс $i \in \{1, \ldots, p\}$ такой, что $\lambda_i(A) = -\infty$. $\square$

Далее, подчеркивая размерность пространства $\mathbb{S}_t$, будем писать $\mathbb{S}_t^p$.

Наряду с системой $(A, \mathbb{S}_0^p)$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B(t) y, \quad t \geqslant 0, \quad y \in \mathbb{R}^p \tag{4.4}$$

с непрерывной на полуоси $\mathbb{R}_+$ функцией $t \to B(t) \in \mathbb{M}(p, \mathbb{R})$. Будем далее отождествлять систему (4.4) с задающей ее матрицей B и называть системой B. По аналогии с подпространством $\mathbb{S}_t^p$, введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{R}_t^p$ размерности p с базисом $y^1(t), \dots, y^p(t)$, образующем столбцы матрицы Коши $Y(t,s)$ системы B при $s=0$. Следовательно, запись $y(t) \in \mathbb{R}_t^p$ означает, что $y(t)$ — значение решения системы B в точке t и поэтому $y(t) = Y(t,0)h$ при некотором $h \in \mathbb{R}_0^p$.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ — пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{S}_t^p$ в $\mathbb{R}_t^p$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}\to\mathbb{R}^p}$.

О п р е д е л е н и е 4.2. Функцию $t \to L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ будем называть *обобщенным ляпуновским преобразованием* систем $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B, если

1) функция $t \to L(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}^+$;

2) при каждом $t \geqslant 0$ оператор $L(t)$ является гомеоморфизмом пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$;

3) выполнено неравенство

$$\sup_{t\geqslant 0}\big(\|L(t)\|_{\mathfrak{S}\to\mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p\to\mathfrak{S}}\big) < \infty.$$

Будем говорить также, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *приводима* обобщенным ляпуновским преобразованием L к системе B, или что системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B *асимптотически подобны.*

З а м е ч а н и е 4.12. Приведенное здесь определение обобщенного ляпуновского преобразования отличается от традиционного определения ляпуновского преобразования отсутствием условия ограниченности на полуоси производной по времени функции $t \to L(t)$. Дело в том, что мы не можем потребовать выполнения этого условия, потому что разность $L(t+\varepsilon) - L(t)$ может не иметь смысла при $\varepsilon \neq 0$, так как область определения $\mathbb{S}_t^p$ преобразования $L(t)$ зависит от времени t.

Далее, непосредственно из определения $L(t)$ следует, что обобщенные ляпуновские преобразования системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ сохраняют показатели

Ляпунова. Таким образом, если $\lambda_1(B), \ldots, \lambda_p(B)$ — полная совокупность показателей Ляпунова системы B, упорядоченных в порядке возрастания, то $\lambda_i(A) = \lambda_i(B)$, $i = 1, \ldots, p$.

Теорема 4.4. *Пусть $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_p(A)$ – полная совокупность $\mathbb{L}_2$-показателей Ляпунова сужения $(A, \mathbb{S}_0^p)$ системы A. Если $\lambda_i(A) > -\infty$, $i = 1, \ldots, p$, то:*

а) *найдутся система B с непрерывной на $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$ матрицей $B(t)$ и обобщенное ляпуновское преобразование L, приводящее систему $(A, \mathbb{S}_0^p)$ к системе B;*

б) *в множестве $\{B\}$ всех систем, асимптотически подобных системе $(A, \mathbb{S}_0^p)$, найдется система с непрерывной на $\mathbb{R}_+$, верхней треугольной матрицей $B(t)$;*

в) *если, в дополнение к сказанному, всякое решение системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ «продолжаемо влево», то есть найдется константа $\alpha > 0$ такая, что для каждого $u \in \mathbb{S}_0^p$, любого $\tau \in [-r, 0]$ и всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\|_2 \leqslant \alpha \|x_t(\cdot, u)\|_2$, то в множестве $\{B\}$ всех систем, асимптотически подобных системе $(A, \mathbb{S}_0^p)$, найдется система B с ограниченной на полуоси $\mathbb{R}_+$ матрицей $B(t)$ (и следовательно, с огрниченной на $\mathbb{R}_+$ верхней треугольной матрицей $B(t)$);*

г) *если $A(t + T, s) = A(t, s)$ для всех $(t, s) \in \mathbb{R} \times [-r, 0]$, то найдутся система B с вещественнозначной непрерывной T-периодической матрицей $B(t)$ и T-периодическое по t обобщенное ляпуновское преобразование L, приводящее систему $(A, \mathbb{S}_0^p)$ к системе B.*

д) *в множестве обобщенных ляпуновских преобразований, приводящих систему $(A, \mathbb{S}_0^p)$ к системе B с непрерывной на $\mathbb{R}_+$, верхней треугольной матрицей $B(t)$, найдется ортогональное $(L^*(t)L(t) = I_p)$ обобщенное ляпуновское преобразование.*

Прежде, чем приступить к изложению доказательства теоремы 4.4, опишем алгоритм построения обобщенного ляпуновского преобразования L и системы B.

1. Зафиксируем в подпространстве $\mathbb{S}_0^p$ начальных условий системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ базис $u^1, \ldots, u^p$. Тогда каждой функции $u \in \mathbb{S}_0^p$ соответствует вектор $h \in \mathbb{R}^p$ — координатный столбец функции u в выбранном базисе, то есть

$$u = h_1 u^1 + \cdots + h_p u^p.$$

Для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ построим матрицу

$$s \to U_t(s) = \big(x_t^1(s) \ldots x_t^p(s)\big), \quad s \in [-r, 0], \tag{4.5}$$

столбцы которой определены равенствами $x_t^i(s) = x_t(s, u^i)$, $s \in [-r, 0]$. Эта матрица определяет оператор U_t, действующий из пространства $\mathbb{R}_0^p$ в пространство $\mathbb{S}_t^p$, следующим образом: каждому $h \in \mathbb{R}_0^p$ ставится в соответствие функция $s \to x_t(s) = (U_t u)(s) \doteq U_t(s)h$, принадлежащая $\mathbb{S}_t^p$.

Матрицу, транспонированную к $U_t(s)$ обозначим $U_t^*(s)$ и для любого $t \in \mathbb{R}_+$ введем в рассмотрение симметрическую $(p \times p)$-матрицу

$$\varGamma(t) \doteq \int_{-r}^{0} U_t^*(s) U_t(s)\, ds. \tag{4.6}$$

В силу линейной независимости столбцов матрицы (4.5) для всех $t \in \mathbb{R}_+$ (см. лемму 4.5), при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$ матрица $\varGamma(t)$ положительно определена.

Очевидно (см. лемму 4.5), что оператор $U_t^{-1} : \mathbb{S}_t^p \to \mathbb{R}_0^p$, обратный к U_t существует, и как будет показано ниже, действует по следующему правилу: если $x(\cdot) \in \mathbb{S}_t^p$, то

$$U_t^{-1} x = \varGamma^{-1}(t) \int_{-r}^{0} U_t^*(s) x(s)\, ds \in \mathbb{R}_0^p.$$

2. Пусть $V(t) \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ — произвольная непрерывно дифференцируемая при $t \geqslant 0$, ортогональная матрица, $Z(t) \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ — верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, являющаяся решением матричного уравнения (см. лемму 5.6)

$$Z^* Z = \mathit{\Gamma}(t). \tag{4.7}$$

Тогда матрица $Y(t) = V(t)Z(t)$ невырождена при всех $t \in \mathbb{R}_+$, непрерывно дифференцируема по t при $t \geqslant r$ и также является решением уравнения (4.7). Отметим еще, что соотношение (4.7) выражает равентство попарных скалярных произведений функций $x_t^1, \ldots x_t^p$, образующих базис в пристранстве $\mathbb{S}_t^p$ и некоторого набора (линейно независимых) векторов $y^1(t), \ldots, y^p(t) \in \mathbb{R}^p$, являющихся столбцами митрицы $Y(t)$, в частности, для всех $i = 1, \ldots, p$ выполнено равенство $\|x_t^i\|_2 = |y^i(t)|$.

Построим функцию $t \to B(t) \in \mathbb{M}(p, \mathbb{R})$ и отвечающую ей систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.4), по матрице $Y(t)$ как по фундаментальной матрице решений. Таким образом,

$$B(t) = \dot{Y}(t) Y^{-1}(t),$$

при этом $Y(t, s) = Y(t)Y^{-1}(s)$ является матрицей Коши системы B, а оператор $L(t)$, определенный равенством

$$L(t) = Y(t, 0) U_t^{-1},$$

действует из пространства $\mathbb{S}_t^p$ в пространство $\mathbb{R}_t^p$ и, как будет показано ниже, удовлетворяет определению обобщенного ляпуновского преобразования.

З а м е ч а н и е 4.13. Если базис $u^1, \ldots, u^p$ в пространстве $\mathbb{S}_0^p$ ортонормированный и $V(t) = I_p$, $t \geqslant 0$, то оператор $L(t) : \mathbb{S}_t^p \to \mathbb{R}_t^p$, построенный выше, определяется равенством

$$L(t)x = \bigl(Z^*(t)\bigr)^{-1} \int_{-r}^{0} U_t^*(s)x(s)\,ds, \quad x \in \mathbb{S}_t^p.$$

Действительно, если базис $u^1, \dots, u^p$, выбранный в пространстве $\mathbb{S}_0^p$, ортонормированный, то $\mathit{\Gamma}(0) = I_p$, и следовательно, требуемое решение $Z(t)$ уравнения (4.7) удовлетворяет равенству $Z(0) = I_p$. Таким образом, при условии $V(t) = I_p$, $t \geqslant 0$, выполнено равенство $Y(t,0) = Z(t)$ и

$$L(t)x = Z(t)U_t^{-1}x = Z(t)\bigl(\mathit{\Gamma}(t)\bigr)^{-1} \int_{-r}^{0} U_t^*(s)x(s)\,ds = \\ = \bigl(Z^*(t)\bigr)^{-1} \int_{-r}^{0} U_t^*(s)x(s)\,ds, \quad x \in \mathbb{S}_t^p.$$

Проиллюстрируем применение алгоритма построения преобразования L и системы B на простом примере.

П р и м е р 4.4. Рассмотрим систему уравнений с последействием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \displaystyle\int_{-1}^{0} y_t(s)d\,a(t,s), \\ \dot{y}(t) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$, функция $a : \mathbb{R} \times [-1, 0] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет естественным условиям, перечисленным в §1.

Для системы (4.8) максимальная размерность p пространства $\mathbb{S}_0^p$ начальных функций, показатели которых конечны, равна 2 (см. теорему 6.5), другими словами, $\operatorname{codim} \mathfrak{S}^- = 2$.

Функции

$$s \to u^1(s) = \mathrm{col}(1, 0), \quad s \in [-1, 0],$$

$$s \to u^2(s) = \mathrm{col}(0, 1), \quad s \in [-1, 0],$$

рассматриваемые как начальные для системы (4.8), имеют конечные показатели (см. доказательство теоремы 6.5).

Пусть $t_0 = 0$. Выберем в качестве пространства начальных условий $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}_0^2 = \mathrm{lin}(u^1, u^2)$. Тогда

$$x^1(t) = 1, \quad y^1(t) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

$$x^2(t) = \int_0^t a(\tau, 0)d\tau, \quad y^2(t) = 1, \quad t \geqslant 0,$$

Обозначим $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^t a(\tau, 0)d\tau$. Тогда для системы (4.8) матрицы (4.5) и (4.6) при $t \geqslant 1$ будут иметь вид

$$U_t(s) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_t(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [-1, 0],$$

$$\mathit{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \displaystyle\int_{-1}^0 \varphi_t(s)ds \\ \\ \displaystyle\int_{-1}^0 \varphi_t(s)ds & \|\varphi_t\|_2^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathit{\Gamma}(0) = I_2$. Решая уравнение (4.7), найдем элементы матрицы

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_{11}(t) & z_{12}(t) \\ 0 & z_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

При $t \geqslant 1$ эти элементы будут иметь следующие значения

$$z_{11}(t) = 1, \quad z_{12}(t) = \int_{-1}^0 \varphi_t(s)ds,$$

$$z_{22}(t) = \Big(\|\varphi_t\|_2^2 - \Big(\int_{-1}^0 \varphi_t(s)ds\Big)^2 + 1\Big)^{1/2}. \tag{4.9}$$

Построим матрицу $B(t)$. Пусть $V(t) = I_2$, тогда $Y(t) = Z(t)$ и

$$B(t) = \dot{Z}(t)Z^{-1}(t) =$$
$$= \frac{1}{z_{22}(t)} \begin{pmatrix} 0 & \dot{z}_{12}(t) \\ 0 & \dot{z}_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{22}(t) & -z_{12}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_{22}(t)} \begin{pmatrix} 0 & \dot{z}_{12}(t) \\ 0 & \dot{z}_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотически подобная системе (4.8) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dfrac{\dot{z}_{12}(t)}{z_{22}(t)}\, \eta, \\ \dot{\eta} = \dfrac{\dot{z}_{22}(t)}{z_{22}(t)}\, \eta. \end{cases} \tag{4.10}$$

Общее решение системы (4.10) (напомним, что матрица $Z(t)$ является фундаментальной матрицей этой системы) может быть записано в виде

$$\begin{cases} \xi(t) &= & c_1 + c_2 z_{12}(t), \\ \eta(t) &= & \qquad c_2 z_{22}(t), \end{cases}$$

где c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные.

С учетом равенства $Z(0) = I_2$ и равенства (4.7) для построенной матрицы $Z(t)$, обобщенное ляпуновское преобразование, приводящее систему (4.8) к системе (4.10) определяется равенством

$$L(t)x = \big(Z^*(t)\big)^{-1} \int_{-1}^{0} U_t^*(s)x(s)\, ds.$$

Далее, пользуясь тем, что матрица построенной системы (4.10) является треугольной и тем, что решение этой системы получено в явном виде, опираясь на теорию показателей Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [10, гл. IV] и общие теоремы об устойчивости линейных дифференциальных систем [12, гл. II], сформулируем некоторые утверждения об асимптотическом поведении решений системы с последействием (4.8).

1. *Если существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{22}(t)}{t}\doteq\lambda,$$

где функция $t\to z_{22}(t)$ *определена равенством* (4.9), *то система* (4.10) *правильная и ее показатели совпадают со средними значениями элементов, стоящих на главной диагонали матрицы системы*

$$\lambda_1(B)=\bar b_{11}=0,$$
$$\lambda_2(B)=\bar b_{22}=\lim_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\frac{\dot z_{22}(\tau)}{z_{22}(\tau)}\,d\tau=\lambda.$$

Следовательно, показатели системы уравнений с последействием (4.8) *исчерпываются значениями*

$$\lambda_0=-\infty,\quad\lambda_1=0,\quad\lambda_2=\lambda.$$

Заметим, что значение показателя $\lambda_0=-\infty$ достигается не только на нулевом решении системы (4.8) (см. теорему 6.5). Действительно, начальная функция $u(s)=\mathrm{col}(u_1(s),u_2(s))\not\equiv 0$, $s\in[-1,0]$, удовлетворяющая условиям

$$u_2(0)=0\ \text{ и }\ u_1(0)=-\int_0^1\Big(\int_{-1}^{-\tau}u_2(\tau+s)da(\tau,s)\Big)d\tau,$$

порождает нетривиальное решение, *«прилипаюшее к нулю»* за конечное время, следовательно показатель функции u равен $-\infty$.

Отметим также, что в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\Big(\int_{-1}^0\varphi_t(s)ds\Big)^2\leqslant\int_{-1}^0\varphi_t^2(s)ds,$$

и равенства (4.9), при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $z_{22}(t) \geqslant 1$, поэтому $\lambda_2 \geqslant 0$. Таким образом, конечные показатели ситемы (4.8) неотрицательны.

2. *Нулевое решение системы с последействием* (4.8) *устойчиво тогда и только тогда, когда функция* $t \to \|\varphi_t\|_2$ *ограничена на полуоси* $\mathbb{R}^+$, *здесь* $\varphi(t) = \int_0^t a(\tau, 0)d\tau$.

Действительно, так как необходимым и достаточным условием устойчивости нулевого решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений является ограниченность на положительной полуоси всех ее решений, а общее решение системы (4.10) является линейной комбинацией столбцов $z^1(t) = \mathrm{col}(1, 0)$ и $z^2(t) = \mathrm{col}(z_{12}(t), z_{22}(t))$ матрицы $Z(t)$, ограниченность которых эквивалентна ограниченности функции $t \to |z^2(t)|$, то в силу равенства

$$|z^2(t)| = \sqrt{z_{12}^2(t) + z_{22}^2(t)} = \sqrt{\|\varphi_t\|_2^2 + 1},$$

получаем требуемое утверждение.

З а м е ч а н и е 4.14. Отметим, что увеличение размерности системы обыкновенных дифференциальных уравнений на единицу засчет пополнения пространства началных условий не влечет за собой больших вычислительных затрат, так как при этом «новая» система содержит «старую» в качестве «подсистемы».

Поясним это замечание. Зафиксируем в пространстве $\mathfrak{S}^+$ совокупность $p+1$ линейно независимых элементов $u^1, \ldots, u^p, u^{p+1}$. Рассмотрим сужения системы A на подпространства $\mathbb{S}_0^p = \mathrm{lin}(u^1, \ldots, u^p)$ и $\mathbb{S}_0^{p+1} = \mathrm{lin}(u^1, \ldots, u^p, u^{p+1})$. Для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ построим матрицы

$$s \to U_t(s) = \big(x_t^1(s) \;\ldots\; x_t^p(s)\big), \quad s \in [-r, 0], \quad \text{и}$$

$$s \to V_t(s) = \big(x_t^1(s) \, \dots \, x_t^p(s) \; x_t^{p+1}(s)\big), \quad s \in [-r, 0].$$

Заметим, что

$$V_t(s) = \big(U_t(s) \quad x_t^{p+1}(s)\big), \quad s \in [-r, 0],$$

поэтому

$$V_t^*(s)V_t(s) = \begin{pmatrix} U_t^*(s)U_t(s) & U_t^*(s)x_t^{p+1}(s) \\ \big(x_t^{p+1}(s)\big)^* U_t(s) & \big(x_t^{p+1}(s)\big)^* x_t^{p+1}(s) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, симметрические матрицы

$$\mathit{\Gamma}_p(t) \doteq \int_{-r}^{0} U_t^*(s)U_t(s)\, ds,$$

$$\mathit{\Gamma}_{p+1}(t) \doteq \int_{-r}^{0} V_t^*(s)V_t(s)\, ds$$

связаны соотношением

$$\mathit{\Gamma}_{p+1}(t) = \begin{pmatrix} \mathit{\Gamma}_p(t) & \displaystyle\int_{-r}^{0} U_t^*(s)x_t^{p+1}(s)\, ds \\ & \\ \displaystyle\int_{-r}^{0} \big(U_t^*(s)x_t^{p+1}(s)\big)^*\, ds & \displaystyle\int_{-r}^{0} \big(x_t^{p+1}(s)\big)^* x_t^{p+1}(s)\, ds \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матричные уравнения

$$Z_p^* Z_p = \mathit{\Gamma}_p(t),$$

$$Z_{p+1}^* Z_{p+1} = \mathit{\Gamma}_{p+1}(t). \tag{4.11}$$

Разобьем матрицу Z_{p+1} на блоки следующим образом

$$Z_{p+1} = \left(\begin{array}{c|c} Z_p & z \\ \hline 0 & z_{p+1,p+1} \end{array}\right),$$

здесь $z = \operatorname{col}(z_{1,p+1} \dots z_{p,p+1})$ — вектор-столбец, занимающий вместе с $z_{p+1,p+1}$ последний столбец матрицы Z_{p+1}, тогда

$$Z_{p+1}^* Z_{p+1} = \left(\begin{array}{c|c} Z_p^* Z_p & Z_p^* z \\ \hline z^* Z_p & z^* z + z_{p+1,p+1}^2 \end{array}\right)$$

и уравнение (4.11) можно переписать в виде совокупности матричных уравнений

$$Z_p^* Z_p = \mathit{\Gamma}_p(t),$$

$$Z_p^* z = \int_{-r}^0 U_t^*(s) x_t^{p+1}(s)\, ds,$$

$$z^* z + z_{p+1,p+1}^2 = \int_{-r}^0 \bigl(x_t^{p+1}(s)\bigr)^* x_t^{p+1}(s)\, ds.$$

Таким образом, если матрица $Z_p(t)$ уже найдена, то

$$z(t) = \bigl(Z_p^*(t)\bigr)^{-1} \int_{-r}^0 U_t^*(s) x_t^{p+1}(s)\, ds,$$

$$z_{p+1,p+1}(t) = \Bigl(\int_{-r}^0 \bigl(x_t^{p+1}(s)\bigr)^* x_t^{p+1}(s)\, ds - z^*(t) z(t)\Bigr)^{1/2}.$$

Напомним, что в силу линейной независимости столбцов матрицы $s \to V_t(s)$ для всех $t \geqslant 0$, при каждом $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $\det \mathit{\Gamma}_{p+1}(t) > 0$, и, следовательно, $z_{p+1,p+1}(t) \neq 0$, $t \geqslant 0$.

З а м е ч а н и е 4.15. Если $u^1, \dots, u^p$ — ортонормированный базис, то $z(t) = L_p(t) x_t^{p+1}$ (см. замечание 4.13).

Далее, нетрудно проверить, что

$$Z_{p+1}^{-1} = \begin{pmatrix} Z_p^{-1} & -Z_p^{-1} z z_{p+1,p+1}^{-1} \\ 0 & z_{p+1,p+1}^{-1} \end{pmatrix}.$$

поэтому матрицы

$$B_p(t) = \dot{Z}_p(t) Z_p^{-1}(t),$$

$$B_{p+1}(t) = \dot{Z}_{p+1}(t) Z_{p+1}^{-1}(t)$$

систем обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотически подобных сужениям $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и $(A, \mathbb{S}_0^{p+1})$ связаны следующим соотношением

$$B_{p+1}(t) = \begin{pmatrix} B_p(t) & b(t) \\ 0 & b_{p+1,p+1}(t) \end{pmatrix},$$

где $b(t) = Z_p(t)\dfrac{d}{dt}\big(Z_p^{-1}(t)z(t)\big)z_{p+1,p+1}^{-1}(t)$ — вектор-столбец, $b_{p+1,p+1}(t) = \dot{z}_{p+1,p+1}(t) z_{p+1,p+1}^{-1}(t)$.

Таким образом, если система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B_p(t) y$$

асимптотически подобна сужению $(A, \mathbb{S}_0^p)$, то система

$$\begin{cases} \dot{y} & = & B_p(t) y + b(t) y_{p+1}, \\ \dot{y}_{p+1} & = & b_{p+1,p+1}(t) y_{p+1}, \end{cases}$$

асимптотически подобна сужению $(A, \mathbb{S}_0^{p+1})$.

§ 5 . Доказательство теоремы 4.4

При доказательстве теоремы будем использовать алгоритм построения обобщенного ляпуновского преобразования L и системы B, описанный в § 4 . Доказательство разобьем на несколько пунктов.

1. Зафиксируем в подпространстве $\mathbb{S}_0^p$ базис $u^1, \ldots, u^p$. Для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ построим матрицу

$$s \to U_t(s) = \big(x_t^1(s) \ldots x_t^p(s)\big), \quad s \in [-r, 0],$$

столбцы которой определены равенствами $x_t^i(s) = x_t(s, u^i)$, $s \in [-r, 0]$. Эта матрица определяет оператор U_t, действующий из пространства $\mathbb{R}_0^p$ в пространство $\mathbb{S}_t^p$, следующим образом: каждому $h \in \mathbb{R}_0^p$ ставится в соответствие функция $s \to x_t(s) = (U_t u)(s) \doteq U_t(s)h$, принадлежащая $\mathbb{S}_t^p$.

Далее построим симметрическую $(p\times p)$-матрицу

$$\varGamma(t) \doteq \int_{-r}^{0} U_t^*(s) U_t(s)\, ds,$$

здесь $U_t^*(s)$ — матрица, транспонированная к $U_t(s)$. Напомним, что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$ матрица $\varGamma(t)$ положительно определена (см. лемму 4.5).

Покажем, что оператор $U_t^{-1} : \mathbb{S}_t^p \to \mathbb{R}_0^p$, обратный к U_t действует по следующему правилу: если $x(\cdot) \in \mathbb{S}_t^p$, то

$$U_t^{-1} x = \varGamma^{-1}(t) \int_{-r}^{0} U_t^*(s) x(s)\, ds \in \mathbb{R}_0^p.$$

Действительно, если $h \in \mathbb{R}_0^p$, то $U_t h \in \mathbb{S}_t^p$, следовательно, $U_t^{-1} U_t h = h$. Далее, если $x \in \mathbb{S}_t^p$, то найдется единственный $h \in \mathbb{R}_0^p$ такой, что

$$x = U_t h = h_1 x_t^1 + \cdots + h_p x_t^p = x_t(\cdot, u),$$

где $u = h_1u^1 + \cdots + h_pu^p$. Поэтому

$$U_tU_t^{-1}x_t(\cdot,u) = U_t\Gamma^{-1}(t)\int_{-r}^{0}U_t^*(s)U_t(s)h\,ds = U_th = x_t(\cdot,u).$$

2. Выберем произвольную непрерывную функцию $t \to B(t) \in \mathbb{M}(p,\mathbb{R})$ и отвечающую ей систему (4.4). Пусть $Y(t,s)$ — матрица Коши системы B. При каждом $t \geqslant 0$ определим оператор $L(t)\colon \mathbb{S}_t^p \to \mathbb{R}_t^p$ равенством

$$L(t) = Y(t,0)U_t^{-1}.$$

Тогда, если $x_t \in \mathbb{S}_t^p$, то найдется $h \in \mathbb{R}_0^p$ такой, что $x_t = U_th$ и поэтому $L(t)x_t = Y(t,0)U_t^{-1}U_th = Y(t,0)h$. Следовательно, функция $t \to L(t)x_t$ является решением системы B. Выберем теперь, произвольное решение $t \to y(t) = Y(t,0)h$ системы B, где $h = y(0)$, тогда

$$L^{-1}(t)y(t) = U_tY(0,t)y(t) = U_tY(0,t)Y(t,0)h = U_th = x_t(\cdot,u),$$

где $u = h_1u^1 + \cdots + h_pu^p$. Следовательно, $x_t(\cdot,u) = L^{-1}(t)y(t) \in \mathbb{S}_t^p$.

Таким образом, каждой системе B отвечает линейное преобразование $L_B(t) :\ \mathbb{S}_t^p \to \mathbb{R}_t^p$, определенное равенством $L_B(t) = Y_B(t,0)U_t^{-1}$ (здесь $Y_B(t,s)$ — матрица Коши системы B) и устанавливающее гомеоморфизм пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$.

3. Построим теперь функцию $t \to B(t)$ так, чтобы функции $t \to L(t)$ и $t \to L^{-1}(t)$ были ограниченны на полуоси $\mathbb{R}_+$. С этой целью при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим матричное уравнение

$$Z^*Z = \Gamma(t) \tag{5.1}$$

относительно $(p\times p)$-матрицы Z.

Лемма 5.6. (см. [30, с. 483], [5], [28], [27]). *Существует единственная верхняя треугольная матрица $Z(t)$ с положительными (при каждом*

$t \in \mathbb{R}_+$) *диагональными элементами* $z_{ii}(t)$, *являющаяся решением матричного уравнения* (5.1). *Это решение непрерывно дифференцируемо по* t *при всех* $t \geqslant r$.

З а м е ч а н и е 5.16. Утверждение, аналогичное лемме 5.6 сформулировано, например, в [30] для постоянной симметрической матрицы Γ. Доказательство приведенное там же носит неконструктивный характер. Поскольку для нас представляет интерес не только существование решения уравнения (5.1), но и его дифференцируемость, приведем подробное доказательство леммы 5.6.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что если существует верхняя треугольная матрица $Z(t)$, удовлетворяющая уравнению (5.1), то

$$|\det Z(t)| = |z_{11}(t)| \cdot |z_{22}(t)| \cdots |z_{pp}(t)| = \sqrt{\det \Gamma(t)} > 0, \tag{5.2}$$

поэтому $z_{ii}(t) \neq 0$, $i = 1, \dots, p$.

Доказательство проведем по индукции. При $p = 1$ лемма очевидна. Действительно, уравнение

$$z_{11}^2 = \int_{-r}^{0} \big(x_t^1(s)\big)^2 ds$$

имеет единственное положительное решение $z_{11}(t) = \|x_t^1\|_2 > 0$ и, в силу равенства

$$\dot{x}_t(s) = \int_{-r}^{0} dA(t+s,\tau) x_{t+s}(\tau), \quad s \in [-r, 0], \quad t \geqslant r,$$

где $\dot{x}_t(s) = dx(t+s)/dt$, функция $t \to z_{11}(t)$ непрерывно дифференцируема при всех $t \geqslant r$.

Допустим, что лемма доказана для каждого $p = 2, \dots, k$. Следовательно, уравнение $Z_k^* Z_k = \Gamma_k(t)$, где $\Gamma_k(t)$ — главный диагональный блок порядка k матрицы $\Gamma(t)$, имеет единственное решение $Z_k(t)$, удовлетворяющее требованиям леммы: $Z_k(t)$ — верхняя треугольная матрица с положительными при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ диагональными элементами

$$z_{ii}(t) > 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

и функция $t \to Z_k(t)$ непрерывно дифференцируема при всех $t \geqslant r$.

Пусть $z = \mathrm{col}(z_{1,k+1} \ldots z_{k,k+1})$ — вектор-столбец, занимающий вместе с $z_{k+1,k+1}$ последний столбец матрицы Z_{k+1}, $\gamma(t) = \big(\gamma_{1,k+1}(t) \ldots \gamma_{k,k+1}(t)\big)$ — вектор-строка, занимающая вместе с функцией $t \to \gamma_{k+1,k+1}(t)$ последнюю строку матрицы $\Gamma_{k+1}(t)$. Разобьем матрицы, входящие в уравнение

$$Z_{k+1}^* Z_{k+1} = \Gamma_{k+1}(t), \tag{5.3}$$

на блоки

$$\left(\begin{array}{c|c} Z_k^* & 0 \\ \hline z^* & z_{k+1,k+1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} Z_k & z \\ \hline 0 & z_{k+1,k+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma_k & \gamma^* \\ \hline \gamma & \gamma_{k+1,k+1} \end{array}\right).$$

Тогда уравнение (5.3) перепишется в виде системы

$$Z_k^* Z_k = \Gamma_k(t), \quad z^* Z_k(t) = \gamma(t), \quad |z|^2 + (z_{k+1,k+1})^2 = \gamma_{k+1,k+1}(t). \tag{5.4}$$

Матрица $Z_k(t)$ уже найдена, поэтому

$$z^*(t) = \gamma(t) Z_k^{-1}(t)$$

и с учетом условия (5.2), переписанного для $Z_{k+1}(t)$ и $\Gamma_{k+1}(t)$, получим

$$z_{k+1,k+1}(t) = \frac{\sqrt{\det \Gamma_{k+1}(t)}}{z_{11}(t) \cdots z_{k,k}(t)} > 0.$$

Дифференцируемость функций $t \to z(t)$ и $t \to z_{k+1,k+1}(t)$, а вместе с ними и функции $t \to Z_{k+1}$, следует из (5.4) и дифференцируемости функций $t \to Z_k(t)$ и $t \to \varGamma_{k+1}(t)$. Лемма доказана.

4. Продолжим доказательство теоремы. Пусть $V(t)$ — непрерывно дифференцируемая по t ортогональная ($V^*(t)V(t) = I_p$) матрица порядка p, $Z(t)$ — решение матричного уравнения (5.1) с требуемыми свойствами (см. лемму 5.6). Тогда, как легко видеть, матрица $Y(t) = V(t)Z(t)$ тоже является решением уравнения (5.1).

Зафиксируем произвольную (но ортогональную и дифференцируемую) матрицу $V(t)$ и построим матрицы $Y(t)=V(t)Z(t)$, $B(t)=\dot{Y}(t)Y^{-1}(t)$ (при этом $Y(t,s) \doteq Y(t)Y^{-1}(s)$ является матрицей Коши системы B) и преобразование $L(t) \doteq Y(t,0)U_t^{-1}$. Покажем, что имеет место неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} \|L(t)\|_{\mathfrak{S} \to \mathbb{R}^p} \doteq a < \infty.$$

Проверим сначала, что неравенство $a < \infty$ эквивалентно неравенству

$$|Y(t,0)| \leqslant a\|U_t\|_{\mathbb{R}^p \to \mathfrak{S}}, \quad t \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Действительно, каждому $x_t \in \mathbb{S}_t^p$ отвечает единственный вектор $h \in \mathbb{R}_0^p$ такой, что $x_t = U_t h$. Поэтому $L(t)x_t = Y(t,0)U_t^{-1}U_t h = Y(t,0)h$ и, следовательно, неравенство $|L(t)x_t| \leqslant a\|x_t\|_2$ эквивалентно неравенству $|Y(t,0)h| \leqslant a\|U_t h\|_2$, а последнее неравенство эквивалентно (5.5).

Покажем, что неравенство (5.5) выполнено при $a = |Z^{-1}(0)|$. Действительно, из (5.1) следует, что

$$|Z(t)h|^2 = h^*Z^*(t)Z(t)h = \int_{-r}^{0} h^*U_t^*(s)U_t(s)h\,ds = \int_{-r}^{0} |U_t(s)h|^2\,ds, \quad h \in \mathbb{R}_0^p,$$

таким образом, $|Z(t)| = \|U_t\|_{\mathbb{R}^p \to \mathfrak{S}}$. Далее, из равенства

$$Y(t,0) = V(t)Z(t)Z^{-1}(0)V^*(0)$$

имеем:

$$|Y(t,0)| \leqslant |Z(t)||Z^{-1}(0)| = a|Z(t)| = a\,\|U_t\|_{\mathbb{R}^p\to\mathfrak{S}},$$

что и требовалось доказать.

5. Покажем, что $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p\to\mathfrak{S}} \doteq b < \infty$. Неравенство $b < \infty$ эквивалентно неравенству $\|U_t\|_{\mathbb{R}^p\to\mathfrak{S}} \leqslant b|Y(t,0)|$. Действительно, так как для каждого $y(t) \in \mathbb{R}^p_t$ найдется единственный вектор $h \in \mathbb{R}^p$ такой, что $y(t) = Y(t,0)h$, то $L^{-1}(t)y(t) = U_tY(0,t)y(t) = U_th$. Таким образом, требуемое неравенство $\|L^{-1}(t)y(t)\|_2 \leqslant b|y(t)|$ будет доказано, если мы покажем, что для всех $h \in \mathbb{R}^p$ выполнено неравенство $\|U_th\|_2 \leqslant b|Y(t,0)h|$.

Докажем последнее неравенство. Для любого $h \in \mathbb{R}^p_0$, имеем

$$\|U_th\|_2 = |Z(t)h| = |V^*(t)Y(t,0)V(0)Z(0)h| \leqslant b|Y(t,0)||h|,$$

где $b = |Z(0)|$. Таким образом, $\|U_t\|_{\mathbb{R}^p\to\mathfrak{S}} \leqslant b|Y(t,0)|$.

6. Как следует из теоремы Перрона [10, с. 263] и построения обобщенного ляпуновского преобразования L, множество систем $\{B\}$, асимптотически эквивалентных системе $(A, \mathbb{S}^p_0)$ описывается равенством

$$B_V(t) = \dot{V}(t)V^*(t) + V(t)\dot{Z}(t)Z^{-1}(t)V^*(t),$$

где $Z(t)$ — верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, являющаяся решением матричного уравнения (5.1), а $V(t)$ пробегает множество всех непрерывно дифференцируемых ортогональных $(p\times p)$-матричных функций. Соответствующее обобщенное ляпуновское преобразование имеет вид $L_V(t) = V(t)Z(t)Z^{-1}(0)V^*(0)U_t^{-1}$. Среди таких преобразований, преобразование при $V(t) \equiv I_p$ приводит систему $(A, \mathbb{S}^p)$ к системе B с верхней треугольной матрицей $B(t) = \dot{Z}(t)Z^{-1}(t)$.

7. Докажем утверждение в) теоремы. Покажем, что имеет место неравенство $\sup_{t\geqslant 0}|B(t)| \doteq c < \infty$. Пусть $Z(t)$ — требуемое нам решение матричного уравнения (5.1), $Y(t) = V(t)Z(t)$, где $V(t)$ — фиксированная ортогональная дифференцируемая матрица (см. пункт 4). Дифференцируя равенство $Y^*(t)Y(t) = \mathit{\Gamma}(t)$ получим

$$\dot{Y}^*(t)Y(t) + Y^*(t)\dot{Y}(t) = \dot{\mathit{\Gamma}}(t) = \int_{-r}^{0} \big(\dot{U}_t^*(s)U_t(s) + U_t^*(s)\dot{U}_t(s)\big)\,ds. \qquad (5.6)$$

Умножим (5.6) справа на $Y^{-1}(t)$ и слева на $Y^{*^{-1}}(t)$, тогда равенство (5.6) перепишется в виде

$$B^*(t) + B(t) = Y^{*^{-1}}(t)\int_{-r}^{0} \big(\dot{U}_t^*(s)U_t(s) + U_t^*(s)\dot{U}_t(s)\big)\,ds\,Y^{-1}(t).$$

Далее, для доказательства ограниченности $B(t)$ достаточно доказать, что найдутся константы α и β такие, что для всех $h \in \mathbb{R}^p$ и всех $t \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$2\alpha|h|^2 \leqslant h^*\big(B^*(t) + B(t)\big)h \leqslant 2\beta|h|^2.$$

С учетом (5.6) последние неравенства эквивалентны неравенствам

$$2\alpha|h|^2 \leqslant h^*Y^{*^{-1}}(t)\int_{-r}^{0} \big(\dot{U}_t^*(s)U_t(s) + U_t^*(s)\dot{U}_t(s)\big)\,ds\,Y^{-1}(t)h \leqslant 2\beta|h|^2,$$

или (после замены $h = Y(t)q$) неравенствам

$$\alpha|Y(t)q|^2 \leqslant \int_{-r}^{0} q^*U_t^*(s)\dot{U}_t(s)q\,ds \leqslant \beta|Y(t)q|^2$$

для всех $q \in \mathbb{R}^p$. Так как $|Y(t)q|^2 = \|U_t(s)q\|_2^2$, то для доказательства ограниченности $B(t)$ достаточно доказать, что при некотором β, всех $q \in \mathbb{R}^p$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\Big|\int_{-r}^{0} q^*U_t^*(s)\dot{U}_t(s)q\,ds\Big| \leqslant \beta\|U_tq\|_2^2. \qquad (5.7)$$

Докажем неравенство (5.7). Из равномерной относительно $t \in \mathbb{R}_+$ ограниченности вариации $\operatorname*{var}_{\tau\in[-r,0]} A(t,\tau)$ функции $\tau \to A(t,\tau)$ на отрезке

$[-r,0]$, равенства

$$\dot{U}_t(s)=\int_{-r}^{0} dA(t+s,\tau)U_{t+s}(\tau),\quad s\in[-r,0],\quad t\geqslant r,$$

где $\dot{U}_t(s)=dU(t+s)/dt$, и предположения пункта в) теоремы для всех $q\in\mathbb{R}^p$, всех $(t,s)\in\mathbb{R}_+\times[-r,0]$ и некоторой константы β_0, легко следует неравенство

$$|q^*U_t^*(s)\dot{U}_t(s)q|\leqslant|U_t(s)q||\dot{U}_t(s)q|\leqslant\beta_0|U_t(s)q|\|U_tq\|_2. \qquad (5.8)$$

Интегрируя (5.8) по $s\in[-r,0]$ и учитывая неравенство Коши–Буняковского, получим неравенства

$$\Big|\int_{-r}^{0} q^*U_t^*(s)\dot{U}_t(s)q\,ds\Big|\leqslant\int_{-r}^{0}|q^*U_t^*(s)\dot{U}_t(s)q|\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\beta_0\|U_tq\|_2\int_{-r}^{0}|U_t(s)q|\,ds\leqslant\beta\|U_tq\|_2^2,$$

где $\beta=\sqrt{r}\beta_0$, доказывающие неравенство (5.7).

8. Докажем утверждение г) теоремы. Пусть $A(t+T,s)=A(t,s)$ для всех $(t,s)\in\mathbb{R}\times[-r,0]$ и $Z(t)$ — верхнее треугольное решение системы (5.1) с положительными диагональными элементами. В силу периодичности A, найдется невырожденная постоянная $(p\times p)$-матрица C такая, что $U_{t+T}(s)=U_t(s)C$ для всех $(t,s)\in\mathbb{R}\times[-r,0]$. Тогда имеет место равенство $Z^*(t+T)Z(t+T)=C^*Z^*(t)Z(t)C$. Поэтому $|Z(t+T)h|=|Z(t)Ch|$ для любого $h\in\mathbb{R}^p$ и всех t. Из этого равенства не следует равенство $Z(t+T)=Z(t)C$, но найдется дифференцируемая ортогональная матрица $V(t)$, обеспечивающая для всех $t\in\mathbb{R}$ равенство $V(t+T)Z(t+T)=V(t)Z(t)C$. Покажем это.

Обозначим через $H(t)=Z(t)CZ^{-1}(t+T)$. Заметим, что $H(t)$ — ортогональная матрица, так как

$$H^*(t)H(t)=Z^{T^{-1}}(t+T)C^*Z^*(t)Z(t)CZ^{-1}(t+T)=I_p$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $V_0(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ ортогональная матрица. Тогда для любого натурального k матрица

$$V_k(t) = V_{k-1}(t-T)H(t-T)$$

также ортогональная. Таким образом, построена равномерно ограниченная (в силу равенств $|V_k(t)| = 1$, для всех t и всех $k = 0, 1, \ldots$) последовательность матриц $\{V_k(t)\}$, непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$. Покажем, что последовательность $\{\dot{V}_k(t)\}$ также равномерно ограничена на $\mathbb{R}$. Для этого покажем, что

$$|\dot{V}_k(t+T) + V_k(t+T)B(t+T)| \leqslant$$
$$\leqslant |\dot{V}_{k-1}(t) + V_{k-1}(t)B(t)|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots. \quad (5.9)$$

Действительно, легко проверяется, что $\dot{H}(t) = B(t)H(t) - H(t)B(t+T)$, поэтому

$$\dot{V}_k(t+T) = \big(\dot{V}_{k-1}(t) + V_{k-1}(t)B(t)\big)H(t) - V_k(t+T)B(t+T)$$

и следовательно, выполнено равенство

$$\dot{V}_k(t+T) + V_k(t+T)B(t+T) = \big(\dot{V}_{k-1}(t) + V_{k-1}(t)B(t)\big)H(t),$$

из которого получаем (5.9). Обозначим через $a \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{V}_0(t) + V_0(t)B(t)|$, $b \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} |B(t)|$. Тогда, в силу (5.9), получаем неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{V}_1(t+T) + V_1(t+T)B(t+T)| \leqslant a,$$

из которого, в свою очередь, легко следует неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{V}_1(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{V}_1(t+T)| \leqslant (a+b).$$

Поэтому, рассуждая по индукции, получим неравенства

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{V}_k(t)| \leqslant (a+b)$$

для всех целых $k \geqslant 0$.

Таким образом, последовательность $\{V_k(\cdot)\}$ содержит равномерно сходящуюся на $\mathbb{R}$ подпоследовательность $\{V_{k_i}(\cdot)\}$. Предел $V(\cdot)$ этой подпоследовательности — непрерывная и ортогональная на $\mathbb{R}$ матрица, удовлетворяющая при всех t равенству $V(t+T) = V(t)H(t)$.

Перенумеруем индексы подпоследовательности $\{V_{k_i}(\cdot)\}$. Пусть $\{V_i(\cdot)\}$ — последовательность, равномерно на $\mathbb{R}$ сходящаяся к $V(\cdot)$. Поскольку последовательность $\{\dot{V}_i(\cdot)\}$ равномерно на $\mathbb{R}$ ограничена, то существует подпоследовательность $\{\dot{V}_{i_k}(\cdot)\}$, слабо сходящаяся (на каждом отрезке $[-\vartheta, \vartheta]$) к некоторой ограниченной на $\mathbb{R}$ функции $t \to W(t) \in \mathbb{M}(p, \mathbb{R})$. Так как $\dot{V}_{i_k+1}(t+T) = \dot{V}_{i_k}(t)H(t) + V_{i_k}(t)\dot{H}(t)$, то

$$V_{i_k+1}(t+T) = V_{i_k+1}(-\vartheta+T) + \int_{-\vartheta}^{t} \big(\dot{V}_{i_k}(s)H(s) + V_{i_k}(s)\dot{H}(s)\big)\, ds. \qquad (5.10)$$

Переходя в (5.10) к пределу, получим равенство

$$V(t+T) = V(-\vartheta+T) + \int_{-\vartheta}^{t} \big(W(s)H(s) + V(s)\dot{H}(s)\big)\, ds,$$

из которого следует дифференцируемость и ограниченность на $\mathbb{R}$ функции $t \to V(t) \in \mathbb{M}(p, \mathbb{R})$. Из равенств

$$B_V(t) = \dot{V}(t)V^*(t) + V(t)B(t)V^*(t),$$

$$\dot{H}(t) = B(t)H(t) - H(t)B(t+T),$$

имеем далее:

$$\begin{aligned}B_V(t+T) &= \dot V(t+T)V^*(t+T) + V(t+T)B(t+T)V^*(t+T) = \\ &= \dot V(t)H(t)H^*(t)V^*(t) + V(t)\dot H(t)H^*(t)V^*(t) + \\ &+ V(t)H(t)B(t+T)H^*(t)V^*(t) = \\ &= \dot V(t)V^*(t) + V(t)\big(B(t)H(t) - H(t)B(t+T)\big)H^*(t)V^*(t) + \\ &+ V(t)H(t)B(t+T)H^*(t)V^*(t) = \\ &= \dot V(t)V^*(t) + V(t)B(t)V^*(t) = B_V(t), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Таким образом, матрица $Y(t) = V(t)Z(t)$ удовлетворяет условию $Y(t+T)=Y(t)C$ и является фундаментальной матрицей системы $\dot y = B_V(t)y$. Поэтому обобщенное преобразование Ляпунова $L_V(t):\ \mathbb{S}^p_t \to \mathbb{R}^p_t$, определенное равенством $L_V(t) = Y(t)U_t^{-1}$, приводит систему $(A, \mathbb{S}^p_t)$ к системе B_V и периодично с периодом T:

$$L_V(t+T) = Y(t+T)U_{t+T}^{-1} = Y(t)CC^{-1}U_t^{-1} = L_V(t).$$

9. Докажем утверждение д) теоремы. Операторы $Y(t,0) : \mathbb{R}^p_0 \to \mathbb{R}^p_t$ и $U_t : \mathbb{R}^p_0 \to \mathbb{S}^p_t$ построим так, чтобы обобщенное ляпуновское преобразование $L(t) = Y(t,0)U_t^{-1}$ было ортогональным, для этого необходимо и достаточно, чтобы $L^{-1}(t) = L^*(t)$, здесь $L^*(t)$ — оператор, сопряженный к $L(t)$. Так как $L(t) = Y(t,0)U_t^{-1} = Y(t)Y^{-1}(0)U_t^{-1}$, где $Y(t)$ — матрица, являющаяся решением матричного уравнения (5.1), то

$$L^{-1}(t) = U_tY(0)Y^{-1}(t),$$

$$L^*(t) = (U_t^{-1})^*(Y^{-1}(0))^*Y^*(t) = (U_t^*)^{-1}(Y^*(0))^{-1}Y^*(t).$$

Получим выражения для операторов $U_t^* : \mathbb{S}^p_t \to \mathbb{R}^p_0$ и $(U_t^*)^{-1} : \mathbb{R}^p_0 \to \mathbb{S}^p_t$. Если U_t^* — оператор, сопряженный к U_t, то для любых $h \in \mathbb{R}^p_0$ и $x \in \mathbb{S}^p_t$ выполнено равенство $\langle U_th, x\rangle = \langle h, U_t^*x\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в соответствующих пространствах, расписав которые получим

$$h^* \int_{-r}^{0} U_t^*(s)x(s)ds = h^* U_t^* x.$$

Следовательно, оператор $U_t^* : \mathbb{S}_t^p \to \mathbb{R}_0^p$ определяется следующим равенством: для любого $x \in \mathbb{S}_t^p$

$$U_t^* x = \int_{-r}^{0} U_t^*(s)x(s)ds,$$

где $U_t^*(s)$ — матрица, транспонированная к $U_t(s)$, а оператор $(U_t^*)^{-1}$ определяется равенством

$$(U_t^*)^{-1} = U_t \varGamma^{-1}(t).$$

Действительно, для любого $x \in \mathbb{S}_t^p$

$$(U_t^*)^{-1}(U_t^* x) = U_t \varGamma^{-1}(t) \int_{-r}^{0} U_t^*(s)x(s)ds = U_t U_t^{-1} x = x.$$

Таким образом,

$$L^*(t) = U_t \varGamma^{-1}(t)(Y^*(0))^{-1} Y^*(t) = U_t Y^{-1}(t)(Y^*(t))^{-1}(Y^*(0))^{-1} Y^*(t),$$

Сравнивая выражения для $L^{-1}(t)$ и $L^*(t)$, получим, что для того, чтобы выполнялось равенство $L^{-1}(t) = L^*(t)$, достаточно, чтобы $Y(0) = I_p$, а для этого достаточно потребовать, чтобы $\varGamma(0) = I_p$ (это означает, что базис $u^1, u^2, \ldots, u^p$, выбранный в пространстве $\mathbb{S}_0^p$, должен быть ортонормированным), а в качестве $Y(t)$ взять верхнюю треугольную матрицу с положительными диагональными элементами, являющуюся решением уравнения (5.1) с выбранной $\varGamma(t)$. Действительно, если $Y(t)$ — верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами и $Y^*(0)Y(0) = I_p$, то $Y(0) = I_p$. При этом матрица $B(t) = \dot{Y}(t)Y^{-1}(t)$ приведенной системы будет верхней треугольной.

Теорема доказана.

§ 6. Пример системы с конечномерным существенным пространством решений

Из свойств показателей следует, что множество

$$\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) = -\infty\}$$

образует линейное подпространство в пространстве $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}^+$ — линейное подпространство в $\mathfrak{S}$, являющееся прямым дополнением подпространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$, то есть $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-$. Тогда для всех ненулевых функций $u \in \mathfrak{S}^+$ выполнено неравенство $\varkappa(u) > -\infty$.

Отметим, что случай, когда подпространство $\mathfrak{S}^+$ конечномерно, не является исключительным.

Приведем пример системы с конечномерным пространством $\mathfrak{S}^+$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t) + \displaystyle\int_{-r}^{0} dC(t,s)y_t(s), \\ \dot{y}(t) = D(t)y(t). \end{cases} \tag{6.1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, функции

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n), \quad B : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n,m), \quad D : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(m) \quad \text{и}$$

$$C : \mathbb{R} \times [-r, 0] \to \mathbb{M}(n,m)$$

удовлетворяют естественным условиям, перечисленным в §1. Пусть начальный момент времени $t_0 = 0$. Покажем, что пространство $\mathfrak{S}^+$ имеет конечную размерность.

Теорема 6.5. *Для любой системы с последействием вида* (6.1) *размерность пространства* $\mathfrak{S}^+$ *равна* $n + m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для системы (6.1) имеет место равенство $\dim \mathfrak{S}^+ = n + m$.

Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы (6.1) с начальным условием $(u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathfrak{S}$, стремящееся к нулю быстрее любой экспоненты (здесь $u(t) \in \mathbb{R}^n$, $v(t) \in \mathbb{R}^m$). Тогда $y(t) = X_D(t, 0)v(0)$ при $t \geqslant 0$, где $X_D(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{y} = D(t)y$. Так как $|X_D(t, 0)v(0)| = |y(t)|$ и $\varkappa(u, v) = -\infty$ (см. (4.1)), то $v(0) = 0$ и следовательно, $y(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Поэтому, с учетом равенства

$$x(t) = X_A(t, 0)\Big(u(0) + \int_0^t X_A(0, \xi) \int_{-r}^{-\xi} d_sC(\xi, s)v(\xi + s)\, d\xi\Big),$$

верного при $t \in [0, r]$, получаем при всех $t \geqslant r$ равенство $x(t) = X_A(t, 0)h$, где вектор h определяется равенством

$$h = u(0) + \int_0^r X_A(0, \xi) \int_{-r}^{-\xi} d_sC(\xi, s)v(\xi + s)\, d\xi.$$

Поскольку показатель Ляпунова компоненты $x(t)$ решения $(x(t), y(t))$ должен быть равен $-\infty$, то из тех же соображений, которые мы провели для компоненты $y(t)$, получаем равенство $h = 0$.

Таким образом, пространство $\mathfrak{S}^-$ для системы (6.1) задается $n + m$ функционалами

$$\begin{cases} g_j(u, v) = e_j^*\Big(u(0) + \int_0^r X_A(0, \xi) \int_{-r}^{-\xi} dC(\xi, s)v(\xi + s)\, d\xi\Big),\ j = 1, \dots, n, \\ f_i(u, v) = e_i^* v(0),\ i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

где $e_1 = \mathrm{col}(1, 0, \dots, 0), \dots, e_k = \mathrm{col}(0, \dots, 0, 1)$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Покажем, что функционалы $g_1, \dots, g_n$, $f_1, \dots, f_m$ линейно независимы на пространстве $\mathfrak{S}$. Действительно, фиксируем ненулевой вектор

$b = \mathrm{col}(b_1, \ldots, b_m)$ и такую функцию $(u, v) \in \mathfrak{S}$, что

$$v(0) = b, \quad u(0) = -\int_0^r X_A(0, \xi) \int_{-r}^{-\xi} d_s C(\xi, s) v(\xi + s)\, d\xi.$$

Тогда при любых $a_1, \ldots, a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(u, v) + \sum_{j=1}^{m} b_j f_j(u, v) = |b|^2 > 0.$$

Если же $b = 0$, а $a = \mathrm{col}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, то выбрав функцию (u, v) следующим образом: $v(s) \equiv 0$, $s \in [-r, 0]$, $u(0) = a$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(u) + \sum_{j=1}^{m} b_j f_j(u) = |a|^2 > 0.$$

Таким образом, в силу линейной независимости на пространстве $\mathfrak{S}$ функционалов $g_1, \ldots, g_n$, $f_1, \ldots, f_m$, получаем равенства

$$\mathrm{codim}\, \mathfrak{S}^- = \dim \mathfrak{S}^+ = n + m,$$

доказывающие теорему. $\square$

З а м е ч а н и е 6.17. Из доказанной теоремы легко следует, что если $\big(x(t), y(t)\big)$ — решение системы (6.1) с начальным условием $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$ из пространства $\mathfrak{S}^-$, $t_0 = 0$, то для всех $t \geqslant r$ выполнено равенство $(x(t), y(t)) = 0$, то есть все решения, начинающиеся в $\mathfrak{S}^-$, за конечное время «*прилипают к нулю*».

Отметим теперь, что пространство $\mathfrak{S}^+$ определяется неоднозначно. Построим базис одного из возможных вариантов пространства $\mathfrak{S}^+$ для системы (6.1).

Напомним (см. доказательство теоремы 6.5), что пространство $\mathfrak{S}^-$ для системы (6.1) задается $n+m$ равенствами

$$\begin{cases} e_j^*\Big(u(0)+\int_0^r X_A(0,\xi)\int_{-r}^{-\xi} dC(\xi,s)v(\xi+s)\,d\xi\Big)=0,\ j=1,\ldots,n, \\ e_i^* v(0)=0,\ i=1,\ldots,m, \end{cases} \tag{6.2}$$

где $e_1=\mathrm{col}(1,0,\ldots,0),\ldots,e_k=\mathrm{col}(0,\ldots,0,1)$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Легко проверить, что начальные функции $\big(u(\cdot),v(\cdot)\big)\in\mathfrak{S}$, удовлетворяющие условиям

$$u(0)\neq 0,\ v(\cdot)=0 \text{ или } u(\cdot)=0,\ v(0)\neq 0, \tag{6.3}$$

не принадлежат пространству $\mathfrak{S}^-$, так как для них не выполняется хотя бы одно из равенств (6.2).

Примером совокупности $n+m$ линейно независимых функций пространства $\mathfrak{S}$, удовлетворяющих условиям (6.3) может служить набор функций $\big(u^i(\cdot),v^i(\cdot)\big)\in\mathfrak{S}$, $i=1,\ldots,n+m$, где

$$u^1(s)=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\ u^n(s)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}, u^{n+1}(s)\equiv 0,\ldots,\ u^{n+m}(s)\equiv 0,\ s\in[-r,0],$$

$$v^1(s)\equiv 0,\ldots,\ v^n(s)\equiv 0, v^{n+1}(s)=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\ v^{n+m}(s)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix},\ s\in[-r,0].$$

Таким образом, пространство $\mathfrak{S}^+$ может быть построено как линейная оболочка этого набора функций, то есть

$$\mathfrak{S}^+ = \mathrm{lin}\Big(\big(u^1(\cdot), v^1(\cdot)\big), \ldots, \big(u^{n+m}(\cdot), v^{n+m}(\cdot)\big)\Big).$$

Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, асимимптотически подобную сужению системы (6.1) на подпространство $\mathfrak{S}^+$. Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, удовлетворяющая условию $X(0) = I_n$, $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y} = D(t)y$, удовлетворяющая условию $Y(0) = I_m$. Тогда матрицы (4.5) и (4.6) для системы (6.1) имеют вид

$$U_t(s) = \begin{pmatrix} X_t(s) & W_t(s) \\ 0 & Y_t(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [-1, 0],$$

где $W(t) = X(t)\displaystyle\int_0^t \Big(X^{-1}(\tau)\int_{-1}^0 d_s C(\tau, s) Y_\tau(s)\Big) d\tau.$

Построим далее матрицы

$$\Gamma_X(t) = \int_{-1}^0 X_t^*(s) X_t(s) ds, \quad \Gamma_{XW}(t) = \int_{-1}^0 X_t^*(s) W_t(s) ds,$$

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_X(t) & \Gamma_{XW}(t) \\ \Gamma_{XW}^*(t) & \Gamma_W(t) + \Gamma_Y(t) \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0.$$

Разбивая матрицу Z в уравнении (5.2) на блоки, соответствующие блокам матрицы $\Gamma(t)$

$$Z = \begin{pmatrix} Z_n & Z_{nm} \\ 0 & Z_m \end{pmatrix},$$

где Z_n, Z_m — треугольные матрицы порядка n и m соответсвенно, Z_{nm} — матрица размера $n \times m$, уравнение (5.2) можно переписать в виде совокупности матричных уравнений

$$Z_n^* Z_n = \Gamma_X(t),$$
$$Z_n^* Z_{nm} = \Gamma_{XW}(t),$$
$$Z_{nm}^* Z_{nm} + Z_m^* Z_m = \Gamma_W(t) + \Gamma_Y(t),$$

последовательно решая которые получим матрицу $Z(t)$.

Напомним, что, в силу положительной определенности матрицы $\Gamma(t)$ при каждом $t \geqslant 0$, матрица $Z(t)$ и, следовательно, матрицы $Z_n(t)$ и $Z_m(t)$ невырождены при всех $t \geqslant 0$.

Нетрудно проверить, что

$$Z^{-1}(t) = \begin{pmatrix} Z_n^{-1}(t) & -Z_n^{-1}(t) Z_{nm}(t) Z_m^{-1}(t) \\ 0 & Z_m^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем матрицу $B(t)$, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, асимимптотически подобной сужению системы (6.1) на подпространство $\mathfrak{S}^+$

$$B(t) = \dot{Z}(t) Z^{-1}(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} \dot{Z}_n Z_n^{-1} & -Z_n Z_n^{-1} Z_{nm} Z_m^{-1} + \dot{Z}_{nm} Z_m^{-1} \\ 0 & \dot{Z}_m Z_m^{-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \dot{Z}_n Z_n^{-1} & Z_n \dfrac{d}{dt}\big(Z_n^{-1} Z_{nm}\big) Z_m^{-1} \\ 0 & \dot{Z}_m Z_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 6.5. Рассмотрим систему вида (6.1) при $n = m = 1$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(t) x(t) + \gamma(t) y(t) + \displaystyle\int_{-1}^{0} y_t(s)\, dg(t,s), \\ \dot{y}(t) = \beta(t) y(t). \end{cases} \tag{6.4}$$

Согласно теореме 6.5 подпространство $\mathfrak{S}^+$ для системы (6.4) имеет размерность два. Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотически подобную сужению системы (6.4) на подпространство $\mathfrak{S}^+$.

Функции

$$s \to u^1(s) = \mathrm{col}(1, 0), \quad s \in [-1, 0],$$

$$s \to u^2(s) = \mathrm{col}(0, 1), \quad s \in [-1, 0],$$

рассматриваемые как начальные для системы (6.4) имеют конечные показатели. Выберем в качестве пространства начальных условий пространство $\mathfrak{S}^+ = \mathrm{lin}(u^1, u^2)$. Пусть $t_0 = 0$. Тогда при $t \geqslant 0$ компоненты соответствующих решений будут иметь вид

$$x^1(t) = \exp\Big(\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\Big), \quad y^1(t) = 0, \tag{6.5}$$

$$x^2(t) = \int_0^t \exp\Big(\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\Big)\varphi(s)ds, \quad y^2(t) = \exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big), \tag{6.6}$$

где $\varphi(t) = \gamma(t)\exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big) + \int_{-1}^0 \exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big)dg(t, s)$.

Для системы (6.4) матрицы (4.5) и (4.6) при $t \geqslant 1$ будут иметь вид

$$U_t(s) = \begin{pmatrix} x_t^1(s) & x_t^2(s) \\ 0 & y_t^2(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [-1, 0],$$

$$\mathit{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \|x_t^1\|_2^2 & \int_{-1}^0 x_t^1(s)x_t^2(s)ds \\ \int_{-1}^0 x_t^1(s)x_t^2(s)ds & \|x_t^2\|_2^2 + \|y_t^2\|_2^2 \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение (4.7), найдем элементы матрицы

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_{11}(t) & z_{12}(t) \\ 0 & z_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

При $t \geqslant 1$ эти элементы будут иметь следующие значения

$$z_{11}(t) = \|x_t^1\|_2, \quad z_{12}(t) = \|x_t^1\|_2^{-1} \int_{-1}^{0} x_t^1(s) x_t^2(s) ds, \tag{6.7}$$

$$z_{22}(t) = \left(\|x_t^2\|_2^2 + \|y_t^2\|_2^2 - \|x_t^1\|_2^{-2} \Big(\int_{-1}^{0} x_t^1(s) x_t^2(s) ds \Big)^2 \right)^{1/2}. \tag{6.8}$$

Далее вычисляем элементы матрицы $B(t)$

$$B(t) = \dot{Z}(t) Z^{-1}(t) =$$

$$= \frac{1}{z_{11}(t) z_{22}(t)} \begin{pmatrix} \dot{z}_{11}(t) & \dot{z}_{12}(t) \\ 0 & \dot{z}_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{22}(t) & -z_{12}(t) \\ 0 & z_{11}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\dot{z}_{11}(t)}{z_{11}(t)} & \dfrac{z_{11}(t)}{z_{22}(t)} \dfrac{d}{dt} \Big(\dfrac{z_{12}(t)}{z_{11}(t)} \Big) \\ 0 & \dfrac{\dot{z}_{22}(t)}{z_{22}(t)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотически подобная системе (6.4) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\xi} & = & \dfrac{\dot{z}_{11}(t)}{z_{11}(t)}\, \xi \; + \; \dfrac{z_{11}(t)}{z_{22}(t)} \dfrac{d}{dt} \Big(\dfrac{z_{12}(t)}{z_{11}(t)} \Big)\, \eta, \\ \dot{\eta} & = & \qquad\qquad\qquad \dfrac{\dot{z}_{22}(t)}{z_{22}(t)}\, \eta. \end{array} \right. \tag{6.9}$$

Общее решение системы (6.9) (напомним, что матрица $Z(t)$ является фундаментальной матрицей этой системы) может быть записано в виде

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \xi(t) & = & c_1 z_{11}(t) + c_2 z_{12}(t), \\ \eta(t) & = & \qquad\qquad\;\; c_2 z_{22}(t), \end{array} \right.$$

где c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные.

Таким образом, из приведенных рассуждений получаем следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{11}(t)}{t}\doteq\lambda_1,\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{22}(t)}{t}\doteq\lambda_2, \tag{6.10}$$

где функции $t\to z_{11}(t)$ *и* $t\to z_{22}(t)$ *определены равенствами* (6.7) *и* (6.8), *тогда:*

а) *система обыкновенных дифференциальных уравнений* (6.9) *правильная и ее показатели, и, следовательно, показатели системы с последействием* (6.4) *исчерпываются значениями*

$$\lambda_0=-\infty,\ \ \lambda_1,\ \ \lambda_2;$$

б) *если* $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, *то нулевое решение системы* (6.4) *экспоненциально устойчиво.*

Действительно, необходимым и достаточным условием правильности системы обыкновенных дифференциальных уравнений с треугольной матрицей коэффициентов с вещественной диагональю [10, гл. IV] является существование точных средних значений диагональных элементов матрицы. Для системы (6.9) это условие в силу равенств

$$\lambda_1(B)=\bar b_{11}=\lim_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\frac{\dot z_{11}(\tau)}{z_{11}(\tau)}\,d\tau=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{11}(t)}{t}=\lambda_1,$$

$$\lambda_2(B)=\bar b_{22}=\lim_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\frac{\dot z_{22}(\tau)}{z_{22}(\tau)}\,d\tau=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln z_{22}(t)}{t}=\lambda_2.$$

эквивалентно существованию пределов (6.10).

Следствие 6.2. *Если система* (6.9) *не предполагается правильной, то:*

а) *нулевое решение системы с последействием* (6.4) *устойчиво тогда и только тогда, когда функции*

$$t \to z_{11}(t) \ \text{ и } \ t \to \bigl(z_{12}^2(t) + z_{22}^2(t)\bigr) \tag{6.11}$$

ограничены на полуоси $\mathbb{R}^+$;

б) *нулевое решение системы* (6.4) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t\to+\infty} \bigl(z_{11}^2(t) + z_{12}^2(t) + z_{22}^2(t)\bigr) = 0. \tag{6.12}$$

Действительно, ограниченность функций (6.11) на полуоси $\mathbb{R}^+$ означает ограниченность всех решений системы (6.9) и, в силу асимптотитеского подобия системы (6.9) и сужения системы (6.4) на пространство начальных условий $\mathfrak{S}^+$, ограниченность всех решений системы (6.4), что в свою очередь означает устойчивость нулевого решения этих систем. Асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (6.4) следует из аналогичных рассуждений.

З а м е ч а н и е 6.18. В силу равенств (6.5) и (6.6) условие ограниченности на $\mathbb{R}^+$ функций (6.11) эквивалентно ограниченности функций $t \to \|x_t^1\|_2$, $t \to \|x_t^2\|_2$ и $t \to \|y_t^2\|_2$ на $\mathbb{R}^+$, а равенство (6.12) равенству

$$\lim_{t\to+\infty} \bigl(\|x_t^1\|_2 + \|x_t^2\|_2 + \|y_t^2\|_2\bigr) = 0.$$

В заключение этого параграфа приведём один простой пример устойчивой системы вида (6.1), у которой подсистема обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = D(t)y(t). \end{cases}$$

не является устойчивой. Таким свойством, как легко проверить, обладает, например, система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + \displaystyle\int_{-1}^{0} y_t(s)dg(t,s), \\ \dot{y}(t) = 0, \end{cases}$$

где $g(t,s)$ — любая функция, удовлетворяющая естественным условиям и такая, что функция $t \to \left(t + \int_0^t g(\tau, 0)d\tau\right)$ ограничена на $\mathbb{R}^+$. Например, в качестве функции $g(t,s)$ можно выбрать функцию, удовлетворяющую естественным условиям и такую, что $g(t,-1) \equiv 0$, $g(t,0) \equiv -1$.

Глава 3. Рекуррентные системы с последействием и их приводимость

§ 7. Рекуррентные системы с последействием

О п р е д е л е н и е 7.3. Функцию $(t,s) \to A(t,s)$ (или, что эквивалентно, систему $A \in \mathfrak{A}$), удовлетворяющую естественным условиям, будем называть *рекуррентной* (по переменной t), если для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ множество

$$\Theta_A(\varepsilon, T) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{|t|\leqslant T}\Big(|A(t+\vartheta, 0) - A(t,0)| + \\ + \int_{-r}^{0} |A(t+\vartheta, s) - A(t,s)|\, ds\Big) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$ (то есть найдется такая константа $l > 0$, что $[t, t+l] \bigcap \Theta_A(\varepsilon, T) \neq \varnothing$ для всех $t \in \mathbb{R}$).

З а м е ч а н и е 7.19. Рассмотрим систему с последействием и с конечным числом сосредоточенных запаздываний

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t - \vartheta_0(t)) + \dots + A_m(t)x(t - \vartheta_m(t)) \tag{7.1}$$

с совместно рекуррентными матричными функциями $t \to A_i(t)$, $i=0,\dots,m$, и запаздываниями $t \to \vartheta_i(t)$, $i = 0, \dots, m$, это означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ множество

$$\varXi_A(\varepsilon, T) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t|\leqslant T} \sum_{i=0}^{m}\Big(|A_i(t+\tau) - A_i(t)| + \\ + |\vartheta_i(t+\tau) - \vartheta_i(t)|\Big) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

Покажем, что система (7.1) является рекуррентной и в смысле определения 7.3.

В силу рекуррентности функций $t \to A_i(t)$, $i = 0, \ldots, m$, при некотором α и всех $i = 0, \ldots, m$ выполнены неравенства

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl(|A_i(t)|\bigr) \leqslant \alpha.$$

Напомним, что системе (7.1) в записи (1.1) соответствует функция

$$A(t, s) = A_0(t)\chi(s + \vartheta_0(t)) + \cdots + A_m(t)\chi(s + \vartheta_m(t)),$$

где $\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ 1, & \text{если } t \geqslant 0 \end{cases}.$

Для произвольных $\varepsilon_1 > 0$ и $T > 0$ построим множество $\varXi_A(\varepsilon_1, T)$. Тогда, если $\tau \in \varXi_A(\varepsilon_1, T)$, то для всех $|t| \leqslant T$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &|A(t+\tau, 0) - A(t, 0)| \leqslant \\ &\qquad \leqslant |A_0(t+\tau)\chi(\vartheta_0(t+\tau)) - A_0(t)\chi(\vartheta_0(t))| + \cdots + \\ &\qquad + |A_m(t+\tau)\chi(\vartheta_m(t+\tau)) - A_m(t)\chi(\vartheta_m(t))| \leqslant \varepsilon_1(m+1), \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-r}^{0} |A(t+\tau, s) - A(t, s)| ds \leqslant \\ &\quad \leqslant \int_{-r}^{0} \Bigl(|A_0(t+\tau)\chi(s + \vartheta_0(t+\tau)) - A_0(t)\chi(s + \vartheta_0(t))| + \cdots + \\ &\quad + |A_m(t+\tau)\chi(s + \vartheta_m(t+\tau)) - A_m(t)\chi(s + \vartheta_m(t))|\Bigr) ds \leqslant \\ &\quad \leqslant \varepsilon_1(m+1)(r+\alpha). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Неравенство (7.3) следует (при каждом $i = 0, \ldots, m$) из неравенств

$$\int_{-r}^{0}\Big(|A_i(t+\tau)\chi(s+\vartheta_i(t+\tau))-A_i(t)\chi(s+\vartheta_i(t))|\Big)ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-r}^{0}\Big(|A_i(t+\tau)-A_i(t)||\chi(s+\vartheta_i(t+\tau))|+$$
$$+|A_i(t)||\chi(s+\vartheta_i(t+\tau))-\chi(s+\vartheta_i(t))|\Big)ds \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon r+\alpha|\vartheta_i(t+\tau)-\vartheta_i(t)| \leqslant \varepsilon_1(r+\alpha).$$

Таким образом, из неравенств (7.2) и (7.3) следует, что $\tau \in \varTheta_A(\varepsilon, T)$, где $\varepsilon=\varepsilon_1(m+1)(r+\alpha+1)$, и, следовательно для любых $\varepsilon>0$ и $T>0$ множество $\varTheta_A(\varepsilon, T)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$, что означает рекуррентность системы (7.1) в смысле определения 7.3.

Лемма 7.7. Если система A рекуррентна, то для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ система A_{t_0}, где $A_{t_0}(t,s)=A(t+t_0,s)$, тоже рекуррентна и для любых $\varepsilon>0$, $T>0$ и $T_0>0$ найдется относительно плотное множество

$$\varTheta(\varepsilon,T,T_0,A) \doteq \{\vartheta\in\mathbb{R} : \max_{t,t_0}\Big(|A_{t_0}(t+\vartheta,0)-A_{t_0}(t,0)|+$$
$$+\int_{-r}^{0}|A_{t_0}(t+\vartheta,s)-A_{t_0}(t,s)|\,ds\Big)\leqslant\varepsilon,\ \ |t|\leqslant T,\ |t_0|\leqslant T_0\},$$

общее для всех систем A_{t_0} при $|t_0|\leqslant T_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для множества $\varTheta_{A_{t_0}}(\varepsilon,T)$, содержащего (ε,T)-почти периоды функции A_{t_0} справедливо равенство

$$\varTheta_{A_{t_0}}(\varepsilon,T)=\{\vartheta\in\mathbb{R} : \max_{|t|\leqslant T_0}\Big(|A_{t_0}(t+\vartheta,0)-A_{t_0}(t,0)|+$$
$$+\int_{-r}^{0}|A_{t_0}(t+\vartheta,s)-A_{t_0}(t,s)|\,ds\Big)\leqslant\varepsilon\}=$$
$$=\{\vartheta\in\mathbb{R} : \max_{|t-t_0|\leqslant T_0}\Big(|A(t+\vartheta,0)-A(t,0)|+\int_{-r}^{0}|A(t+\vartheta,s)-A(t,s)|\,ds\Big)\leqslant\varepsilon\}.$$

Таким образом, если $\vartheta \in \varTheta_A(\varepsilon, T+T_0)$ при произвольных $\varepsilon > 0$, $T > 0$ и $T_0 > 0$, то $\vartheta \in \varTheta_{A_{t_0}}(\varepsilon, T)$ при всех $t_0 \in [-T_0, T_0]$, поэтому

$$\varTheta_A(\varepsilon, T+T_0) \subseteq \varTheta(\varepsilon, T, T_0, A),$$

и, следовательно, множество $\varTheta(\varepsilon, T, T_0, A)$ относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$, так как содержит в себе относительно плоное множество $\varTheta_A(\varepsilon, T+T_0)$.

Лемма 7.8. *Пусть система* $A \in \mathfrak{A}$. *Тогда каждому* $T > 0$ *отвечает константа* $k(T)$ *такая, что для любой начальной функции* $u \in \mathfrak{S}$ *и всех* $(t, t_0) \in \Delta(T) \doteq \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T\}$ *выполнены неравенства*

$$\|x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leqslant k(T)\|u\|_0\,, \quad |\dot{x}_t(0, t_0, u)| \leqslant k(T)\|u\|_0\,. \tag{7.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что выполнено первое из неравенств (7.4).

А. Пусть сначала $t \in [t_0, t_0 + r]$. Тогда

$$x_t(s, t_0, u) = \begin{cases} u(s + t - t_0), & \text{если} \quad -r \leqslant s \leqslant t_0 - t, \\ x_t(s, t_0, u), & \text{если} \quad t_0 - t \leqslant s \leqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому, $|x_t(s, t_0, u)| \leqslant \|u\|_0$ при $s \in [t - t_0 - r, t_0 - t]$. Далее,

$$\dot{x}_t(0, t_0, u) = \int_{-r}^{0} dA(t, \tau) x_t(\tau, t_0, u) = f(t, u(\cdot)) + \\ + \int_{t_0 - t}^{0} dA(t, \tau) x_t(\tau, t_0, u), \tag{7.5}$$

где $f(t, u(\cdot)) = \displaystyle\int_{-r}^{t_0 - t} dA(t, \tau) u(\tau)$. Интегрируя (7.5), получим равенство

$$x_t(0, t_0, u) - u(0) = g(t, u(\cdot)) + \int_{t_0}^{t} \Big[\int_{t_0 - \xi}^{0} d_\tau A(\xi, \tau) x_\xi(\tau, t_0, u)\Big]\, d\xi, \tag{7.6}$$

где $g(t,u(\cdot)) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\xi,u(\cdot))\,d\xi$. Легко убедиться, что для некоторой константы k_0 при всех $t \in [t_0, t_0 + r]$ выполнено неравенство

$$|u(0)| + |g(t,u(\cdot))| \leqslant k_0 \|u\|_0.$$

Поэтому из (7.6) при всех $s \in [t_0 - t, 0]$ следует неравенство

$$|x_t(s,t_0,u)| \leqslant k_0\|u\|_0 + \Big|\int_{t_0}^{t+s}\Big[\int_{t_0-\xi}^{0} d_\tau A(\xi,\tau)x_\xi(\tau,t_0,u)\Big]\,d\xi\Big|. \qquad (7.7)$$

Обозначим $v(t) = \max\limits_{s\in[t_0-t,0]} |x_t(s,t_0,u)|$, $a = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \operatorname*{var}\limits_{s\in[-r,0]} |A(t,s)|$, тогда из (7.7) следуют неравенства

$$v(t) \leqslant k_0\|u\|_0 + a\int_{t_0}^{t+s} v(\xi)\,d\xi \leqslant k_0\|u\|_0 + a\int_{t_0}^{t} v(\xi)\,d\xi,$$

из которых, в силу леммы Гроноулла–Беллмана, получаем неравенство

$$v(t) = \max_{s\in[t_0-t,0]} |x_t(s,t_0,u)| \leqslant k_0\|u\|_0 \exp(ar) = k_1\|u\|_0,\ \ k_1 = k_0\exp(ar).$$

Тем самым доказано, что

$$\|x_t(\cdot,t_0,u)\|_0 \leqslant k_1\|u\|_0, \quad t \in [t_0, t_0 + r]. \qquad (7.8)$$

Б. Пусть $t \in [t_0 + r, t_0 + T]$ и $\tau \in [-r, 0]$. Интегрируя по переменной t равенство

$$\frac{d}{dt}x_t(\tau,t_0,u) = \int_{-r}^{0} d_s A(t+\tau,s)x_{t+\tau}(s,t_0,u), \quad \tau \in [-r,0],$$

в пределах от $t_0 + r$ до t, получим равенство

$$x_t(\tau,t_0,u) - x_{t_0+r}(\tau,t_0,u) = \int_{t_0+r}^{t}\Big[\int_{-r}^{0} d_s A(\xi+\tau,s)x_{\xi+\tau}(s,t_0,u)\Big]d\xi. \qquad (7.9)$$

Из (7.9) при $t \geqslant t_0 + r$ следует цепочка неравенств

$$|x_t(\tau, t_0, u)| \leqslant |x_{t_0+r}(\tau, t_0, u)| + a\int_{t_0+r}^{t} \max_{s\in[-r,0]} |x_{\xi+\tau}(s, t_0, u)|\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \|x_{t_0+r}(\cdot, t_0, u)\|_0 + a\int_{t_0+r+\tau}^{t+\tau} \|x_\xi(\cdot, t_0, u)\|_0\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant k_1\|u\|_0 + a\int_{t_0}^{t} \|x_\xi(\cdot, t_0, u)\|_0\, d\xi.$$

Поэтому, если $t \in [t_0 + r, t_0 + T]$, то с учетом (7.8), имеем:

$$\|x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leqslant k_1\|u\|_0 \exp a(t - t_0) \leqslant k(T)\|u\|_0, \quad k(T) = k_1 \exp(aT),$$

что и доказывает первое из неравенств (7.4).

В. Второе из неравенств (7.4) автоматически следует из (1.1). Действительно, для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$|\dot{x}(t, t_0, u)| \leqslant a \max_{s\in[-r,0]} |x_t(s, t_0, u)| = a\|x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leqslant ak(T)\|u\|_0.$$

Поэтому, выбирая из двух констант $k(T)$ и $ak(T)$ наибольшую (и обозначая ее $k(T)$), получим утверждение леммы 7.8. $\square$

§ 8. Распространение теоремы Перрона–Миллионщикова о триангуляции на системы с последействием

Напомним некоторые обозначения. Пространство начальных функций $\mathfrak{S}$ представим в виде прямой суммы $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-$, где

$$\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) = -\infty\}.$$

Тогда для всех ненулевых функций $u \in \mathfrak{S}^+$ выполнено неравенство $\varkappa(u) > -\infty$. Пусть $\mathbb{S}_0^p$ — p-мерное подпространство начальных функций из $\mathfrak{S}$.

При каждом фиксированном $s \in [-r, 0]$ сдвиг функции $t \to A(t, s)$ на константу τ обозначим $A_\tau(t, s) \doteq A(t + \tau, s)$. Пусть далее, $\mathcal{R}(A)$ — замыкание множества $\{A_\tau(t, s) : \tau \in \mathbb{R}\}$ сдвигов функции A в локально открытой топологии. Это означает, что $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ в том и только в том случае, если для некоторой последовательности $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ и любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такой номер i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leqslant T}\Big(|A_{\tau_i}(t, 0) - \widehat{A}(t, 0)| + \int_{-r}^{0} |A_{\tau_i}(t, s) - \widehat{A}(t, s)|\, ds\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Зафиксируем подпространство $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$ и для каждой системы $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ полный набор $\mathbb{L}_2$-показатель Ляпунова обозначим $\lambda_1(\widehat{A}), \ldots, \lambda_p(\widehat{A})$. Будем считать, что $\lambda_1(\widehat{A}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p(\widehat{A})$.

Формулируемую ниже теорему можно рассматривать, как частичное распространение теоремы В. М. Миллионщикова [21] на линейные системы уравнений с последействием.

Теорема 8.6. *Пусть $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$, система $A \in \mathfrak{A}$ рекуррентна и для всех $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ и некоторой константы $\varkappa > -\infty$ выполнено неравенство $\lambda_1(\widehat{A}) \geqslant \varkappa$. Тогда найдутся система B с непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$*

верхней треугольной матрицей $B(t)$ *и обобщенное ляпуновское преобразование* L, *приводящее сужение* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *системы* A *на подпространство* $\mathbb{S}_0^p$ *к системе* B.

Прежде, чем приступить к изложению доказательства теоремы 8.6, которое во многом повторяет доказательство теоремы 4.4, докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 8.9. *Если функция* $t \to A(t,s)$ *рекуррентна, то для любых* $\varepsilon > 0$, $T > r$, $T_0 > 0$ *и всякой непрерывно дифференцируемой на* $[-r, 0]$ *начальной функции* $u \in \mathfrak{S}$, *множество*

$$\Xi_u(\varepsilon, T, T_0) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \|x_{t+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_1 \leqslant \varepsilon\},$$

где $\Delta_1(T, T_0) \doteq \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 + r \leqslant t \leqslant t_0 + T,\ |t_0| \leqslant T_0\}$ *(см. рисунок* 8.1*)*, $\|u\|_1 = \max\{\|u\|_0, \|\dot{u}\|_0\}$, *относительно плотно на прямой* $\mathbb{R}$.

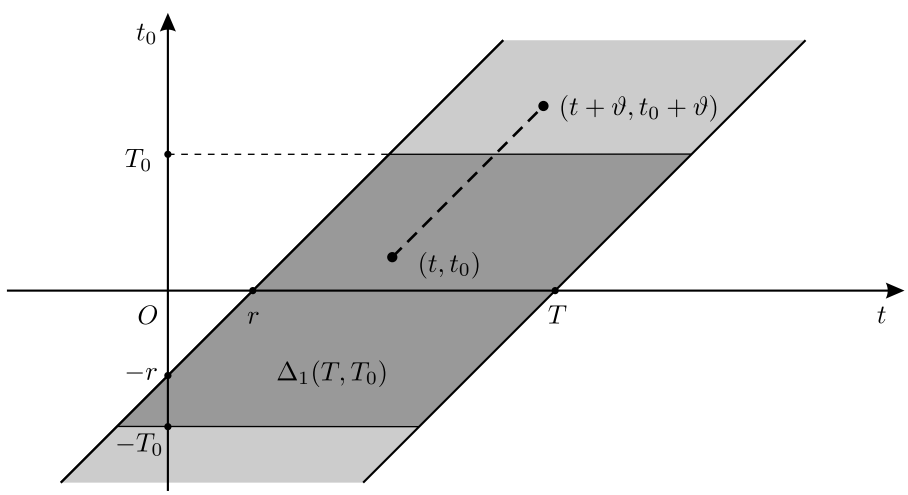

Рис. 8.1. Множество $\Delta_1(T, T_0)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя по переменной t равенства

$$\dot{x}(t,t_0,u)=\int_{-r}^{0}dA(t,s)x_t(s,t_0,u),\quad t\geqslant t_0,$$

$$\dot{x}(t+\vartheta,t_0+\vartheta,u)=\int_{-r}^{0}dA(t+\vartheta,s)x_{t+\vartheta}(s,t_0+\vartheta,u),\quad t\geqslant t_0,$$

и почленно вычитая, получим:

$$\begin{aligned}&x_{t+\vartheta}(0,t_0+\vartheta,u)-x_t(0,t_0,u)=\\&=\int_{t_0}^{t}\Big[\int_{-r}^{0}dA(\xi+\vartheta,s)x_{\xi+\vartheta}(s,t_0+\vartheta,u)-\int_{-r}^{0}dA(\xi,s)x_\xi(s,t_0,u)\Big]d\xi=\\&\qquad=\int_{t_0}^{t}\Big[\int_{-r}^{0}d_s\Big(A(\xi+\vartheta,s)-A(\xi,s)\Big)x_{\xi+\vartheta}(s,t_0+\vartheta,u)\Big]d\xi+\\&\qquad+\int_{t_0}^{t}\Big[\int_{-r}^{0}dA(\xi,s)\Big(x_{\xi+\vartheta}(s,t_0+\vartheta,u)-x_\xi(s,t_0,u)\Big)\Big]d\xi=\\&\qquad\qquad=\int_{t_0}^{t}I_1(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t}I_2(\xi)d\xi.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Для оценки интеграла $I_1(\xi)$ воспользуемся следующим утверждением (см. [22, с. 322]):

для любых $\varepsilon_1>0$ и $T>0$ найдется такое $\delta>0$, что из неравенства

$$\max_{|\xi-t_0|\leqslant T}\Big(|A(\xi+\vartheta,0)-A(\xi,0)|+\int_{-r}^{0}|A(\xi+\vartheta,s)-A(\xi,s)|\,ds\Big)\leqslant\delta\tag{8.2}$$

следует неравенство

$$\begin{aligned}&\max_{0\leqslant\xi-t_0\leqslant T}|I_1(\xi)|=\\&\quad=\max_{0\leqslant\xi-t_0\leqslant T}\Big|\int_{-r}^{0}d_s\Big(A(\xi+\vartheta,s)-A(\xi,s)\Big)x_{\xi+\vartheta}(s,t_0+\vartheta,u)\Big|\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned}\tag{8.3}$$

Поэтому, если $\vartheta\in\Theta(\delta,T,T_0,A)$, то $\int_{t_0}^{t}|I_1(\xi)|d\xi\leqslant\int_{t_0}^{t_0+T}|I_1(\xi)|d\xi\leqslant\varepsilon_1 T$, для любого $t_0\in[-T_0,T_0]$.

В свою очередь, для второго интеграла имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{t} |I_2(\xi)| d\xi \leqslant a \int_{t_0}^{t} \|x_{\xi+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_\xi(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi.$$

Поэтому из (8.1) следует неравенство

$$|x_{t+\vartheta}(0, t_0+\vartheta, u) - x_t(0, t_0, u)| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1 T + a \int_{t_0}^{t} \|x_{\xi+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_\xi(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi,$$

меняя в котором t на $t+s$, $s \in [-r, 0]$, получим при всех $(t, t_0) \in \Delta_1(T, T_0)$ неравенства

$$|x_{t+\vartheta}(s, t_0+\vartheta, u) - x_t(s, t_0, u)| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1 T + a \int_{t_0}^{t+s} \|x_{\xi+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_\xi(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1 T + a \int_{t_0}^{t} \|x_{\xi+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_\xi(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi.$$

Следовательно, если $\vartheta \in \varTheta(\delta, T, T_0, A)$, то (в силу леммы Гронуолла–Беллмана) получаем

$$\|x_{t+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leqslant \varepsilon_1 T \exp(aT).$$

Докажем теперь, что если $(t, t_0) \in \Delta_1(T, T_0)$ и $\vartheta \in \varTheta(\delta, T, T_0, A)$, где $\delta > 0$ выбрано по заданному $\varepsilon_1 > 0$, то выполнено неравенство

$$\|\dot{x}_{t+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - \dot{x}_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leqslant \varepsilon_1 \big(1 + aT \exp(aT)\big). \tag{8.4}$$

Действительно, при $t \geqslant t_0$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{t+\vartheta}(0, t_0+\vartheta, u) - \dot{x}_t(0, t_0, u) = \\
&\qquad = \int_{-r}^{0} d_\tau A(t+\vartheta, \tau) x_{t+\vartheta}(\tau, t_0+\vartheta, u) - \int_{-r}^{0} d_\tau A(t, \tau) x_t(\tau, t_0, u) = \\
&\qquad\qquad = \int_{-r}^{0} d_\tau \Big(A(t+\vartheta, \tau) - A(t, \tau)\Big) x_{t+\vartheta}(\tau, t_0+\vartheta, u) + \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_{-r}^{0} d_\tau A(t, \tau) \Big(x_{t+\vartheta}(\tau, t_0+\vartheta, u) - x_t(\tau, t_0, u)\Big).
\end{aligned}$$

Поэтому, при $\vartheta \in \Theta(\delta, T, T_0, A)$, из (8.2) и (8.3) следует неравенство

$$|\dot{x}_{t+\vartheta}(0, t_0+\vartheta, u) - \dot{x}_t(0, t_0, u)| \leqslant \varepsilon_1 + a\|x_{t+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_0,$$

из которого, в свою очередь, при замене t на $t+s$, где $s \in [-r, 0]$, получаем при всех $(t, t_0) \in \Delta_1(T, T_0)$ неравенство (8.4).

Таким образом, если для заданных $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ положительное ε_1 выбрано так, что $\varepsilon_1\big(1 + aT\exp(aT)\big) \leqslant \varepsilon$ и по ε_1 построено $\delta > 0$, обеспечивающее при $\vartheta \in \Theta(\delta, T, T_0, A)$ неравенство (8.3), то выполнено неравенство $\|x_{t+\vartheta}(\cdot, t_0+\vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_1 \leqslant \varepsilon$, что и доказывает лемму 8.9. $\square$

Зафиксируем в пространстве $\mathbb{S}_0^p$ ортонормированный базис $u^1, \ldots, u^p$, то есть, если $U(s) \doteq (u^1(s), \ldots, u^p(s))$— функциональная матрица, столбцами которой являются функции $u^i : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$, то постоянная квадратная матрица $\displaystyle\int_{-r}^{0} U^*(s)U(s)\, ds$ порядка p совпадает с единичной матрицей. Предположим кроме того, что функции $s \to u^i(s)$ непрерывно дифференцируемы на $[-r, 0]$.

Далее, для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$, любого $t \geqslant t_0$ и всех $s \in [-r, 0]$ построим $(n \times p)$-матрицу

$$V_t(s, t_0) \doteq \big(x_t^1(s, t_0), \ldots, x_t^p(s, t_0)\big), \tag{8.5}$$

где $x_t^i(s,t_0)=x_t(s,t_0,u^i)$, и постоянную $(p\times p)$-матрицу

$$\varGamma(t,t_0)\doteq\int_{-r}^{0}V_t^*(s,t_0)V_t(s,t_0)\,ds,\quad t\geqslant t_0.$$

При необходимости будем подчеркивать, что $V_t(\cdot,t_0)$ зависит от U, при этом будем писать $V_t(\cdot,t_0,U)$.

Напомним, что в силу линейной независимости столбцов матрицы (8.5) для всех $t\geqslant t_0$ (см. лемму 4.5), при каждом фиксированном $t\geqslant t_0$ матрица $\varGamma(t,t_0)$ положительно определена. Кроме того, $\varGamma(t_0,t_0)=I_p$, где I_p— единичная матрица порядка p.

Лемма 8.10. *Для любых $\varepsilon>0$, $T>r$ и $T_0>0$ множество*

$$\varXi_\varGamma(\varepsilon,T,T_0)\doteq\{\vartheta\in\mathbb{R}:\max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)}\Big(|\varGamma(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\varGamma(t,t_0)|+ \\ +|\dot\varGamma(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\dot\varGamma(t,t_0)|\Big)\leqslant\varepsilon\},$$

где $\Delta_1(T,T_0)\doteq\{(t,t_0):t_0+r\leqslant t\leqslant t_0+T,\ |t_0|\leqslant T_0\}$ (см. рисунок 8.1), относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы достаточно применить леммы 7.8 и 8.9 к равенствам

$$\varGamma(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\varGamma(t,t_0)=\int_{-r}^{0}\Big[V_{t+\vartheta}^*(s,t_0+\vartheta)\big[V_{t+\vartheta}(s,t_0+\vartheta)-V_t(s,t_0)\big]+ \\ +\big[V_{t+\vartheta}(s,t_0+\vartheta)-V_t(s,t_0)\big]^*V_t(s,t_0)\Big]\,ds,$$

$$\dot\varGamma(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\dot\varGamma(t,t_0)=\int_{-r}^{0}\Big[\dot V_{t+\vartheta}^*(s,t_0+\vartheta)\big[V_{t+\vartheta}(s,t_0+\vartheta)-V_t(s,t_0)\big]+ \\ +\big[\dot V_{t+\vartheta}(s,t_0+\vartheta)-\dot V_t(s,t_0)\big]^*V_t(s,t_0)\Big]\,ds+ \\ +\int_{-r}^{0}\Big[V_{t+\vartheta}^*(s,t_0+\vartheta)\big[\dot V_{t+\vartheta}(s,t_0+\vartheta)-\dot V_t(s,t_0)\big]+ \\ +\big[V_{t+\vartheta}(s,t_0+\vartheta)-V_t(s,t_0)\big]^*\dot V_t(s,t_0)\Big]\,ds.$$

Лемма 8.11. *Если функция $t \to A(t,s)$ рекуррентна, то для каждого $T > r$ найдется такая константа $\mathit{\Gamma}_0$, что при всех $(t,t_0) \in \Delta_2(T) \doteq \doteq \{(t,t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 + r \leqslant t \leqslant t_0 + T\}$ имеет место неравенство*

$$|\mathit{\Gamma}(t,t_0)| \leqslant \mathit{\Gamma}_0. \tag{8.6}$$

Если, в дополнение к сказанному, для каждой системы $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ и некоторой константы $\varkappa > -\infty$ выполнено неравенство $\lambda_1(\widehat{A}) \geqslant \varkappa$, где $\lambda_1(\widehat{A})$ — наименьший $\mathbb{L}_2$-показатель Ляпунова системы $(\mathbb{S}_0^p, \widehat{A}\,)$, то для каждого $T > r$ найдется такая константа $\gamma_0 > 0$, что при всех $(t,t_0) \in \Delta_2(T) \doteq \{(t,t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 + r \leqslant t \leqslant t_0 + T\}$ имеет место неравенство

$$|\mathit{\Gamma}(t,t_0)| \geqslant \gamma_0. \tag{8.7}$$

Доказательство.

А. Покажем, что для любого $T > r$ при всех $(t,t_0) \in \Delta_2(T)$ выпонено неравенство (8.6).

Из леммы 8.10 следует, что функция $\tau \to \mathit{\Gamma}(t+\tau,\tau) \doteq G_t(\tau)$ рекуррентна при каждом $t \in [r,T]$, так как для любых $\varepsilon > 0$ и $T_0 > 0$ множество

$$\mathit{\Xi}_{G_t}(\varepsilon,T_0) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{|\tau| \leqslant T_0} |G_t(\tau+\vartheta) - G_t(\tau)| \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$, причем $\mathit{\Xi}(\varepsilon,T,T_0) \subseteq \mathit{\Xi}_{G_t}(\varepsilon,T_0)$ при всех $t \in [r,T]$, поэтому в силу свойств рекуррентных функций [23, стр. 402] для любых $\varepsilon > 0$ и $T > r$ найдется такое $\eta > 0$, что для каждой точки $(t,t_0) \in \Delta_2(T)$ найдется точка (t^*,t_0^*), принадлежащая множеству $\Delta_0(\eta,T) \doteq \{(t,t_0) \in \Delta_2(T) : 0 \leqslant t_0 \leqslant \eta\}$ (см. рисунок 8.2), и такая, что выполено неравенство

$$|\mathit{\Gamma}(t^*,t_0^*) - \mathit{\Gamma}(t,t_0)| \leqslant \varepsilon.$$

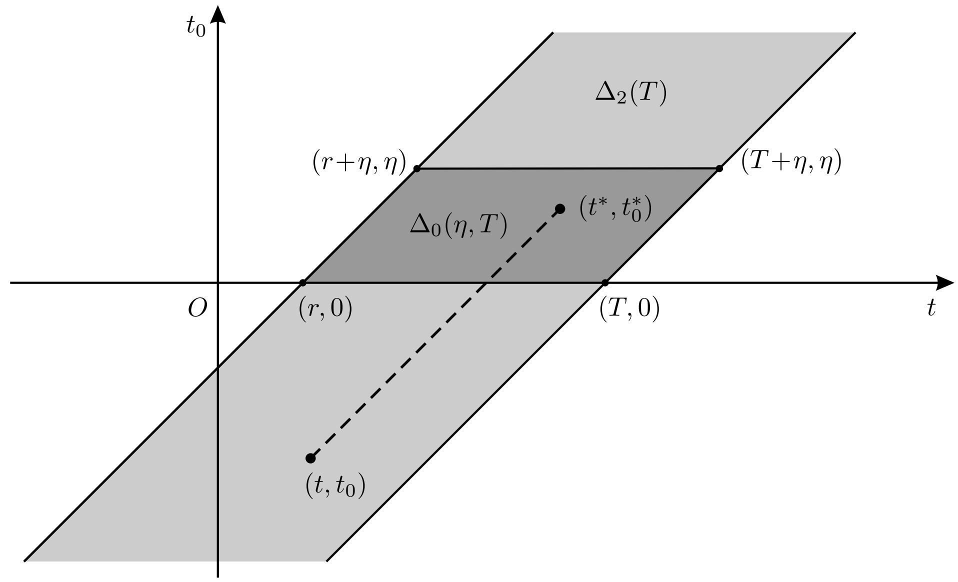

Рис. 8.2. Множества $\Delta_0(\eta,T)$ и $\Delta_2(T)$

Зафиксируем $\varepsilon_0>0$ и для этого ε_0 и произвольного $T>r$ найдем положительную константу η, о которой говорилось выше. В силу своей непрерывности функция $(t,t_0)\to|\mathit{\Gamma}(t,t_0)|$ ограничена на множестве $\Delta_0(\eta,T)$.

Таким образом, требуемое неравенство следует из неравенств

$$|\mathit{\Gamma}(t,t_0)|\leqslant|\mathit{\Gamma}(t^*,t_0^*)|+|\mathit{\Gamma}(t,t_0)-\mathit{\Gamma}(t^*,t_0^*)|\leqslant M+\varepsilon_0\doteq\mathit{\Gamma}_0.$$

Б. Покажем теперь, что для каждого $T>r$ при всех $(t,t_0)\in\Delta_1(T)$ выпонено неравенство $|\mathit{\Gamma}(t,t_0)|\geqslant\gamma_0>0$. Так как $|\mathit{\Gamma}(t,t_0)|=\sqrt{\Lambda(t,t_0)}$, где $\Lambda(t,t_0)$ — наибольшее собственное значение матрицы $\mathit{\Gamma}(t,t_0)$, то при некотором $h=\mathrm{col}(h_1\dots h_p)\in\mathbb{R}^p$, $|h|=1$, имеют место равенства

$$|\mathit{\Gamma}(t,t_0)|=\Lambda^2(t,t_0)=h^*\mathit{\Gamma}(t,t_0)h=\|x_t(\cdot,t_0,u)\|_2^2.$$

Здесь $t\to x_t(\cdot,t_0,u)$ — движение системы $(\mathbb{S}_0^p,A)$, отвечающее решению $t\to x(t,t_0,u)$ задачи Коши

$$\dot x(t)=\int_{-r}^0 dA(t,s)x_t(s),\quad x_t(s)\big|_{t=t_0}=u(s),\quad s\in[-r,0],\quad t\geqslant t_0,$$

при $u = h_1 u^1 + \dots + h_p u^p \in \mathbb{S}_0^p$. Поэтому, после замены времени, $t - t_0 \to t$ получаем, что движение $t \to x_t(\cdot, A_{t_0}, u)$ отвечает решению $t \to x(t, A_{t_0}, u)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA_{t_0}(t,s) x_t(s), \quad x_t(s)\big|_{t=0} = u(s), \quad s \in [-r, 0], \quad t \geqslant 0, \tag{8.8}$$

где $A_\tau(t,s) = A(t+\tau, s)$.

Если $|\mathit{\Gamma}(t_i, \tau_i)| \to 0$ для некоторой последовательности $\{(t_i, \tau_i)\}_{i=1}^{\infty}$, $(t_i, \tau_i) \in \Delta_1(T)$, то найдется такая последовательность $\{h^i\}$, $|h^i| = 1$, что $\|x_{t_i}(\cdot, A_{\tau_i}, v^i)\|_2 \to 0$, где $v^i = h_1^i u^1 + \dots + h_p^i u^p$.

Отметим теперь, что $\mathit{\Gamma}(t, \tau) = \mathit{\Gamma}(t, A_\tau)$, где

$$\mathit{\Gamma}(t, A_\tau) = \int_{-r}^{0} V_t^*(s, A_\tau) V_t(s, A_\tau) ds,$$

а столбцы матрицы $V_t(s, A_\tau)$ состоят из решений $x_t(s, A_\tau, u^k)$ задачи (8.8) при $t_0 = \tau$, $u = u_k$, $k = 1 \dots p$. Следовательно, если $|\mathit{\Gamma}(t_i, \tau_i)| \to 0$ при $i \to \infty$, то $|\mathit{\Gamma}(t_i, A_{\tau_i})| \to 0$, причем $t_i \in [r, T]$.

В силу компактности пространства $\mathcal{R}(A)$, из последовательности $\{(t_i, A_{\tau_i}, h^i)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, для которой мы сохраним прежнее обозначение. Предел этой сходящейся подпоследовательности обозначим $(\widehat{t}, \widehat{A}, \widehat{h})$. Тогда $x_{t_i}(\cdot, A_{\tau_i}, v^i) \to x_{\widehat{t}}(\cdot, \widehat{A}, \widehat{v}) = 0$, где $\widehat{v} = \widehat{h}_1 u^1 + \dots + \widehat{h}_p u^p$. Следовательно, найдутся система $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ и движение $t \to x_t(\cdot, \widehat{A}, \widehat{v})$ этой системы, обращающееся в нуль за конечное время (при $t = \widehat{t}$). Это означает, что найдется $\mathbb{L}_2$-показатель системы $\widehat{A}$, равный $-\infty$, что противоречит условию леммы. $\square$

З а м е ч а н и е 8.20. Если функция $t \to A(t,s)$ рекуррентна, то для каждого $T > r$ найдется такая константа $\mathit{\Gamma}_1$, что при всех $(t, t_0) \in \Delta_2(T)$ имеет место неравенство

$$|\dot{\mathit{\Gamma}}(t, t_0)| \leqslant \mathit{\Gamma}_1. \tag{8.9}$$

Доказательство этого утверждения аналогично первой части доказательства леммы 8.11.

Лемма 8.12. *Для всех $t \geqslant t_0$ существует единственная верхняя треугольная $p \times p$-матрица $Z(t, t_0)$ с положительными диагональными элементами $z_{ii}(t, t_0)$, являющаяся решением матричного уравнения*

$$Z^* Z = \mathit{\Gamma}(t, t_0) \tag{8.10}$$

и удовлетворяющая условию $Z(t_0, t_0) = I_p$. Это решение непрерывно дифференцируемо по t при всех $t \geqslant t_0 + r$.

З а м е ч а н и е 8.21. Доказательство леммы 8.12 полностью повторяет доказательство леммы 5.6.

З а м е ч а н и е 8.22. В силу неравенств (8.6), (8.7) и равенства

$$|Z(t, t_0)|^2 = |\mathit{\Gamma}(t, t_0)|$$

решение $Z(t, t_0)$ уравнения (8.10) в полосе $\Delta_2(T)$ удовлетворяет следующим неравенствам

$$0 < \sqrt{\gamma_0} \leqslant |Z(t, t_0)| \leqslant \sqrt{\mathit{\Gamma}_0},$$

и, следовательно, в силу теоремы об обратном операторе, выполнено неравенство

$$|Z^{-1}(t, t_0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}.$$

Лемма 8.13. *Пусть $Z(t, t_0)$ — решение уравнения* (8.10)*, существование которого утверждается в лемме* 8.12*. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $T > r$ и $T_0 > 0$ множества*

$$\mathit{\Xi}_Z(\varepsilon, T, T_0) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0) \in \Delta_1(T, T_0)} \Big(|Z(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - Z(t, t_0)| + \\ + |\dot{Z}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{Z}(t, t_0)| \Big) \leqslant \varepsilon\},$$

$$\mathit{\Xi}_{Z^{-1}}(\varepsilon,T,T_0) \doteq \{\vartheta\in\mathbb{R} : \max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)}\Big(|Z^{-1}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-Z^{-1}(t,t_0)|+$$
$$+|\dot Z^{-1}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\dot Z^{-1}(t,t_0)|\Big)\leqslant\varepsilon\},$$

где $\Delta_1(T,T_0)\doteq\{(t,t_0) : t_0+r\leqslant t\leqslant t_0+T,\ |t_0|\leqslant T_0\}$, *относительно плотны на прямой* $\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $p=1$ для решения

$$z_{11}(t,t_0)=\sqrt{\gamma_{11}(t,t_0)}$$

уравнения (8.10), в силу свойств матрицы $\mathit{\Gamma}(t,t_0)$ (см. лемму 8.10 и замечание 8.20) справедливо неравенство $z_{11}(t,t_0)\geqslant\sqrt{\gamma_0}$ при $t\geqslant t_0$, из которого следует, что

$$|z_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-z_{11}(t,t_0)|\leqslant(2\sqrt{\gamma_0})^{-1}|\gamma_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\gamma_{11}(t,t_0)|,$$

$$|z_{11}^{-1}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-z_{11}^{-1}(t,t_0)|=\frac{|z_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-z_{11}(t,t_0)|}{|z_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)||z_{11}(t,t_0)|}\leqslant$$
$$\leqslant(2\gamma_0\sqrt{\gamma_0})^{-1}|\gamma_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\gamma_{11}(t,t_0)|.$$

Далее, так как $\dot z_{11}(t,t_0)=\dfrac{\dot\gamma_{11}(t,t_0)}{2z_{11}(t,t_0)}$, $\dot z_{11}^{-1}(t,t_0)=-\dfrac{\dot\gamma_{11}(t,t_0)}{2z_{11}^3(t,t_0)}$, то для всех $(t,t_0)\in\Delta_2(T)$ выполнены неравенства

$$|\dot z_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\dot z_{11}(t,t_0)|\leqslant$$
$$\leqslant(2\gamma_0)^{-1}\big(\mathit{\Gamma}_0|\dot\gamma_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\dot\gamma_{11}(t,t_0)|+$$
$$+\mathit{\Gamma}_1(2\sqrt{\gamma_0})^{-1}|\gamma_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\gamma_{11}(t,t_0)|\big),$$

$$|\dot z_{11}^{-1}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\dot z_{11}^{-1}(t,t_0)|\leqslant$$
$$\leqslant(2\gamma_0^3)^{-1}\big(\mathit{\Gamma}_0^3|\dot\gamma_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\dot\gamma_{11}(t,t_0)|+$$
$$+3\mathit{\Gamma}_0^2\mathit{\Gamma}_1(2\sqrt{\gamma_0})^{-1}|\gamma_{11}(t+\vartheta,t_0+\vartheta)-\gamma_{11}(t,t_0)|\big).$$

Поэтому, если $\vartheta \in \varXi_{\varGamma}(\varepsilon, T, T_0)$, то

$$\max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \Big(|z_{11}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - z_{11}(t,t_0)| + \\ + |\dot z_{11}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - \dot z_{11}(t,t_0)|\Big) \leqslant \beta\varepsilon,$$

$$\max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \Big(|z_{11}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - z_{11}^{-1}(t,t_0)| + \\ + |\dot z_{11}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - \dot z_{11}^{-1}(t,t_0)|\Big) \leqslant \beta_1\varepsilon,$$

где β и β_1— некоторые константы, и следовательно, множества $\varXi_Z(\varepsilon, T, T_0)$ и $\varXi_{Z^{-1}}(\varepsilon, T, T_0)$ относительно плотны на прямой $\mathbb{R}$.

Допустим, что лемма доказана для каждого $p = 2, \ldots, k$, то есть решение $Z_k(t,t_0)$ уравнения $Z_k^* Z_k = \varGamma_k(t,t_0)$, где $\varGamma_k(t,t_0)$ — главный диагональный минор порядка k матрицы $\varGamma(t,t_0)$, обладает требуемыми свойствами, это означает, что для любых $\varepsilon > 0$, $T > r$ и $T_0 > 0$ множества $\varXi_{Z_k}(\varepsilon, T, T_0)$, $\varXi_{Z_k^{-1}}(\varepsilon, T, T_0)$ относительно плотны на $\mathbb{R}$.

Решение $Z_{k+1}(t,t_0)$ уравнения

$$Z_{k+1}^* Z_{k+1} = \varGamma_{k+1}(t,t_0)$$

состоит из следующих блоков: $Z_k(t,t_0)$ — главный диагональный блок порядка k, $z = \operatorname{col}(z_{1,k+1} \ldots z_{k,k+1})$ — вектор-столбец, занимающий вместе с $z_{k+1,k+1}$ последний столбец матрицы Z_{k+1}, причем

$$z^*(t,t_0) = \gamma(t,t_0) Z_k^{-1}(t,t_0),$$

где $\gamma(t,t_0) = \big(\gamma_{1,k+1}(t) \ldots \gamma_{k,k+1}(t)\big)$ — вектор-строка, занимающая вместе с функцией $(t,t_0) \to \gamma_{k+1,k+1}(t,t_0)$ последнюю строку матрицы $\varGamma_{k+1}(t,t_0)$, а $z_{k+1,k+1}(t,t_0) = \dfrac{\sqrt{\det \varGamma_{k+1}(t,t_0)}}{z_{11}(t,t_0)\cdots z_{k,k}(t,t_0)}$.

Таким образом, в силу относительной плотности множеств

$$\varXi_{\varGamma}(\varepsilon, T, T_0) \quad \text{и} \quad \varXi_{Z_k^{-1}}(\varepsilon, T, T_0),$$

для любых $\varepsilon > 0$, $T > r$ и $T_0 > 0$ множества

$$\{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \Big(|z(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - z(t,t_0)| + \\ + |\dot z(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - \dot z(t,t_0)| \Big) \leqslant \varepsilon\},$$

$$\{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0)\in\Delta_1(T,T_0)} \Big(|z_{k+1,k+1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - z_{k+1,k+1}(t,t_0)| + \\ + |\dot z_{k+1,k+1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - \dot z_{k+1,k+1}(t,t_0)| \Big) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотны на прямой $\mathbb{R}$.

Далее, в силу ограниченности матрицы $Z_{k+1}^{-1}(t,t_0)$ в полосе $\Delta_2(T)$, относительная плотность множества $\varXi_{Z_{k+1}^{-1}}(\varepsilon, T, T_0)$ следует из равенств

$$Z_{k+1}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - Z_{k+1}^{-1}(t,t_0) = \\ = Z_{k+1}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta)\big(Z_{k+1}(t,t_0) - Z_{k+1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta)\big) Z_{k+1}^{-1}(t,t_0),$$

$$\dot Z_{k+1}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta) - \dot Z_{k+1}^{-1}(t,t_0) = \\ = \big(Z_{k+1}^{-1}(t,t_0) - Z_{k+1}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta)\big)\dot Z_{k+1}(t,t_0) Z_{k+1}^{-1}(t,t_0) + \\ + Z_{k+1}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta)\big(\dot Z_{k+1}(t,t_0) - \dot Z_{k+1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta)\big) Z_{k+1}^{-1}(t,t_0) + \\ + Z_{k+1}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta)\dot Z_{k+1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta)\big(Z_{k+1}^{-1}(t,t_0) - Z_{k+1}^{-1}(t+\vartheta, t_0+\vartheta)\big).$$

Таким образом, лемма полностью доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теотемы 8.6. Пусть $Z(t,t_0)$ — решение матричного уравнения (8.10) (при фиксированном t_0), существование которого утверждается в лемме 8.12. Обозначим $B(t) = \dot Z(t,t_0) Z^{-1}(t,t_0)$, $t \geqslant t_0$. Тогда $B(t)$ — верхняя треугольная матрица, непрерывная и, в силу леммы 8.13, ограниченная при $t \geqslant t_0 + r$.

Теперь несложно проверить, что при каждом $t \geqslant t_0$ сужение оператора $L(t) : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^p$, определенного равенством

$$L(t)u = Z(t, t_0)\mathit{\Gamma}^{-1}(t, t_0) \int_{-r}^{0} V_t^*(s, t_0)x_t(s, u)\, ds,$$

на подпространство $\mathbb{S}_t^p$, является обобщеннем преобразованием Ляпунова, приводящим систему $(A, \mathbb{S}_0^p)$ с рекуррентной $A(t, s)$ к системе B с ограниченной $B(t)$.

Список литературы

1. Адрианова Л. Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета. 1992. 240 с.

2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений. — М.: Наука. 1991. 280 с.

3. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь. Изд. Пермского ун-та. 2001. 230 с.

4. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. О ляпуновской приводимости системы с последействием // Известия ИМИ. № 2(25). 2002. Ижевск: Изд-во УдГУ. С. 27–30.

5. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 731–737.

6. Быкова Т. С. Ляпуновская приводимость системы с последействием // Вестник Тамбовского Университета. Тамбов. 2003. Том 8, вып. 3. С. 355–356.

7. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Распространение теоремы Перрона–Миллионщикова о триангуляции на линейные системы с последействи-

ем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. 2004. № 1. С. 51–66.

8. Быкова Т. С. О ляпуновской приводимости систем с последействием // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения — XV». Воронеж. 2004. С. 41–42.

9. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Приводимость линейной системы с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН — 2005. Т. 11. № 1. С. 53–64.

10. Былов Б. Ю., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука. 1966. 576 с.

11. Виноград Р. Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // ДАН СССР, 91, 1953, 999-1002.

12. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука. 1967. 472 с.

13. Долгий Ю. Ф., Шиманов С. Н. Устойчивость периодической системы дифференциальных уравнений нейтрального типа // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск. 1982. С.32-39.

14. Долгий Ю. Ф. Асимптотика собственных чисел оператора монодромии для периодических уравнений с запаздыванием // Изв. ВУЗ-ов. Математика. 1994. № 11. С.64-72.

15. Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Дис. на соискание степени доктора физ.-мат. наук. Екатеринбург — 1994. 296 с.

16. Долгий Ю. Ф., Тарасян В. С. Конечномерные операторы монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием // Изв. УрГУ. Математика. 2000. № 18. С. 18-27.

17. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука. 1981. 544 с.

18. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения (линейные системы). — М.: Гос. издат. физ.-матем. лит. 1959. 211 с.

19. Макаров Е. К. Об асимптотической классификации абстрактных линейных систем // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. 1999. Т. 3, С. 79–88.

20. Макаров Е. К. Асимптотические инварианты линейных дифференциальных систем. Дисс. на соискание степени д. ф.-м. н. Минск. 2001. 218 с.

21. Миллионщиков В. М. О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем спочти периодическими коэффициентами. // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2127–2134.

22. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука. 1972. 352 с.

23. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ. 1949. 550 с.

24. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997, Т.33, № 2, С.226 - 235.

25. Попова С. Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем. Дисс. на соискание степени доктора физ.-матем наук. Екатеринбург — 2004, 264 с.

26. Тонков Е. Л. Динамические задачи выживания // Вестник Пермского гос. технич. ун-та. Функционално-дифференциальные уравнения (специальный выпуск). — 1997. № 4. С. 138–148.

27. Тонков Е. Л. Канонический представитель линейной управляемой системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. 2003. С. 113–128.

28. Тонков Е. Л. Показатели Ляпунова и ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. 2001. № 3. С. 13–30.

29. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир. 1984. 421 с.

30. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. 655 с.

31. Шиманов С. Н. Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием // В сб. «Пятая летняя матем. школа», Киев. 1968. С. 473–549.

32. Azbelev N. V., Simonov P. M. Stability of differential equations wihs aftereffect. London and Ney York, Taylor and Francis. 2002. 222 p.

33. Perron O. Uber lineare Differentialgleichunder, bei denen die unabhangige Variable reell ist // J. reine u. angel. Math., 142, 1913, p. 254–270.

34. Stokes A. Floquet theory for functional-differential equations // Proc. Nat. Ac. of Sci., 48:8, 1962, p. 1330–1334.