МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИЖЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.934

МИЛИЧ НИКОЛАЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ И ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико–математических наук

Научный руководитель —
доктор физико–математических наук,
профессор Е. Л. Тонков

Ижевск – 2000 г.

Оглавление

Введение

Для управляемой системы

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{0.1}$$

и заданной начальной точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ обозначим $u(t; t_0, x_0)$ оптимальное в смысле быстродействия программное управление, переводящее точку (t_0, x_0) на прямую $\ell = \{(t, 0)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$. Пусть далее, $x(t; t_0, x_0)$ — решение системы (0.1) при управлении $u = u(t; t_0, x_0)$ (поскольку управление $u(t; t_0, x_0)$ не предполагается непрерывным, решения соответствующей системы понимаются в смысле Каратеодори), $\Theta(t_0, x_0)$ — время быстродействия: $x(t_0 + \Theta(t_0, x_0); t_0, x_0) = 0$.

Позиционным управлением, оптимальным в смысле быстродействия, будем называть функцию $\widehat{u}\colon \mathfrak{D} \to U$ переменных $(t, x) \in \mathfrak{D}$, определенную в некотором цилиндре $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| < r\}$, принимающую значения в U и такую, что выполнены следующие два условия:

1) всякое решение $x(t; t_0, x_0)$ замкнутой системы

$$\dot{x} = v(t, x, \widehat{u}(t, x)), \quad (t, x) \in \mathfrak{D}, \tag{0.2}$$

с начальной точкой $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}$ определено при всех $t \geqslant t_0$, не покидает шар $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| < r\}$ и обращается в нуль за конечное время (найдется $\vartheta(t_0, x_0) \geqslant 0$, что $x(t_0 + \vartheta(t_0, x_0); t_0, x_0) = 0$);

2) программное управление $u(t; t_0, x_0) \doteq \widehat{u}(t, x(t; t_0, x_0))$ оптимально в смысле быстродействия для системы (0.1) (если $t = t_0 + \vartheta(t_0, x_0)$ — первый момент обращения в нуль решения $x(t; t_0, x_0)$ системы (0.2), то $\vartheta(t_0, x_0) = \Theta(t_0, x_0)$).

Это определение позиционного управления не является строгим до тех пор, пока мы не укажем, в каком смысле следует понимать решения системы (0.2) (функция $\widehat{u}(t, x)$, как правило, разрывна не только по переменной t, но и по переменной x, поэтому определение решений системы (0.2) нуждается в уточнении). Мы будем понимать решения системы (0.2), как это сложилось исторически, в двух разных смыслах: в смысле К. Каратеодори [1, с. 7] или в смысле А. Ф. Филиппова [1, с. 40] и подчеркивать это обстоятельство записью $\widehat{u}_{\mathfrak{C}}(t, x)$ (в случае решений Каратеодори) или записью $\widehat{u}_{\mathfrak{F}}(t, x)$ (в случае решений Филиппова).

Напомним, что всякое абсолютно непрерывное решение системы интегральных уравнений

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s, x(s), \widehat{u}_{\mathcal{C}}(s, x(s)))ds,$$

называется решением Каратеодори ($\mathcal{C}$-решением) системы (0.2) при управлении $\widehat{u}(t,x) = \widehat{u}_{\mathcal{C}}(t,x)$, а всякое абсолютно непрерывное решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\operatorname{mes}\mu=0} \overline{\operatorname{conv}}\ w(O_\varepsilon(t,x) \setminus \mu),$$

где $w(t,x) = v(t,x,\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x))$, $O_\varepsilon(t,x)$ — ε-окрестность точки (t,x), $\operatorname{mes}\mu$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^{1+n}$, называется решением Филиппова ($\mathcal{F}$-решением) системы (0.2) (при управлении $\widehat{u}(t,x) = \widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x)$). В соответствии со сказанным будем говорить о $\mathcal{C}$-позиционном $\widehat{u}_{\mathcal{C}}(t,x)$ оптимальном в смысле быстродействия управлении, либо об $\mathcal{F}$-позиционном $\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x)$ оптимальном в смысле быстродействия управлении.

Из этих определений следует, что $\mathcal{F}$-позиционное управление нечувствительно к изменениям $\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x)$ на множествах нулевой меры Лебега в $\mathbb{R}^{1+n}$ (поэтому $\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x)$ достаточно задавать на множестве положительной меры). Недостатком $\mathcal{C}$-позиционного управления является внутренняя неустойчивость замкнутой системы (изменение $\widehat{u}_{\mathcal{C}}(t,x)$ на множестве меры нуль может привести к «разрушению» управляемой системы: может исчезнуть не только оптимальность в смысле быстродействия решений замкнутой системы, но и обращаемость в нуль за конечное время большинства как $\mathcal{C}$, так и $\mathcal{F}$-решений замкнутой системы). Ясно поэтому, что с точки зрения практики наибольший интерес представляют задачи, допускающие $\mathcal{F}$-позиционное управление. Оказывается при этом, что наличие $\mathcal{F}$-позиционного управления всегда влечет существование и $\mathcal{C}$-позиционного управления (достаточно «правильно» переопределить $\mathcal{F}$-позиционное управление на множестве меры нуль). Обратное утверждение неверно.

Рассмотрим два простых примера.

1. Система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leqslant 1,$$

допускает оптимальное $\mathcal{C}$-позиционное управление

$$\widehat{u}_{\mathcal{C}}(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{если } \ 2x_1\leqslant (x_2)^2, \quad x_2<0,\\ 1, & \text{если } \ 2x_1< -(x_2)^2, \quad x_2>0,\\ 0, & \text{если } \ x_1=0, x_2=0,\\ -1, & \text{если } \ 2x_1>(x_2)^2, \quad x_2<0,\\ -1, & \text{если } \ 2x_1\geqslant -(x_2)^2, \quad x_2>0,\end{cases}$$

и оптимальное $\mathcal{F}$-позиционное управление

$$\widehat{u}_{\mathcal{F}}(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{если } \ 2x_1< (x_2)^2, \quad x_2<0,\\ 1, & \text{если } \ 2x_1< -(x_2)^2, \quad x_2>0,\\ -1, & \text{если } \ 2x_1>(x_2)^2, \quad x_2<0,\\ -1, & \text{если } \ 2x_1> -(x_2)^2, \quad x_2>0.\end{cases}$$

2. Рассмотрим теперь систему (пример П. Бруновского [2, 3])

$$\dot{x}_1=-x_1+u_1, \quad \dot{x}_2=x_2+u_2, \tag{0.3}$$

где $u\in U\doteq\{u=(u_1,u_2): \ |u_1|+|u_2|\leqslant 1\}$. Легко убедиться, что множеством управляемости системы (0.3) является полоса

$$D=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon \ x_1\in\mathbb{R}, \ |x_2|<1\}.$$

В этой полосе система (0.3) допускает оптимальное в смысле быстродействия $\mathcal{C}$-позиционное управление

$$\widehat{u}_{\mathcal{C}}(x_1,x_2)=\begin{cases}(0,0), & \text{если } \ x_1=x_2=0,\\ (+1,0), & \text{если } \ x_1<0, x_2=0,\\ (-1,0), & \text{если } \ 0<x_1, x_2=0,\\ (0,-1), & \text{если } \ 0<x_2<1,\\ (0,+1), & \text{если } \ -1<x_2<0.\end{cases} \tag{0.4}$$

Это управление находится с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Между тем, всякое (начинающееся в D) нетривиальное $\mathcal{F}$-решение системы (0.3), замкнутой управлением (0.4), экспоненциально стремится к нулю при $t\to\infty$, но не входит в нуль за конечное время. Это происходит потому (см. рис. 0.1), что $\mathcal{C}$-решения системы (0.3) (замкнутой управлением (0.4)), начинающиеся на горизонтальной оси, являются решениями системы $\dot{x}_1=-x_1-1$, $\dot{x}_2=x_2$ (если $x_1^0>0$), а $\mathcal{F}$-решения — решениями системы $\dot{x}_1=-x_1$, $\dot{x}_2=x_2$ (при $x_1^0>0$). Следовательно, в данном примере не существует $\mathcal{F}$-позиционного управления.

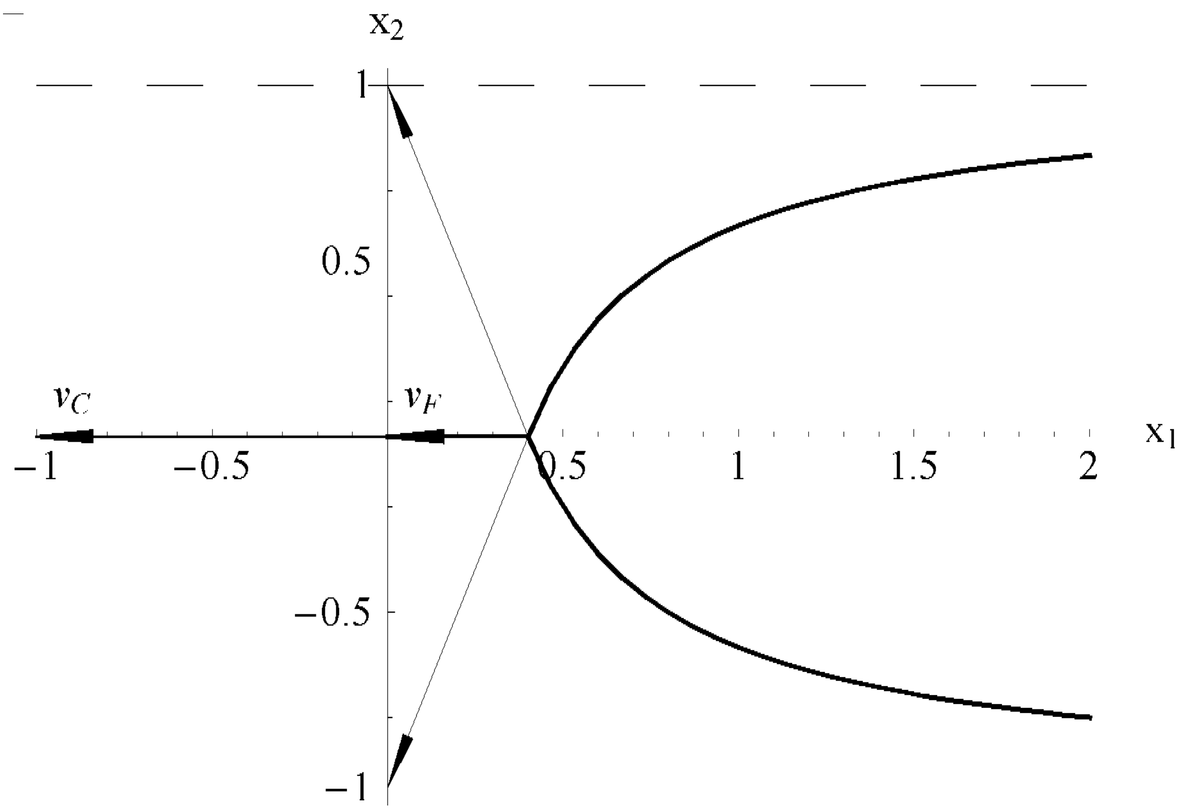

Рис. 0.1. Векторы скорости $v_{\mathcal{C}}$ и $v_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{C}$ и $\mathcal{F}$-решений системы (0.3), замкнутой управлением (0.4). Вектор v_F «упирается» в начало координат и не позволяет фазовым точкам войти в нуль за конечное время.

Вероятнее всего, ситуация, когда система (0.1) допускает $\mathcal{C}$-позиционное управление, но при этом отсутствует $\mathcal{F}$-позиционное управление, в некотором смысле, типична, а поскольку $\mathcal{C}$-позиционное управление не представляет большого интереса, то для таких систем имеет смысл говорить только о программном управлении, оптимальном в смысле быстродействия. Поэтому представляет практический интерес поиск систем, допускающих $\mathcal{F}$-позиционное управление. Среди таких систем, допускающих $\mathcal{F}$-позиционное управление, содержатся системы вида

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leqslant 1, \tag{0.5}$$

удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям.

Следует отметить, что задача быстродействия наиболее полно изучена для линейных стационарных систем (см. [4]–[11] и библиографию в [12]), для которых в ряде случаев удается построить $\mathcal{C}$-позиционное управление [4, гл. 1, § 5], [7, 13, 14] и $\mathcal{F}$-позиционное управление [2, 10, 15, 16].

Программное управление и $\mathcal{C}$-позиционное управление для нестационарной системы (0.5) изучались в работах [17]–[23], а вопросы существования и построения $\mathcal{F}$-позиционного управления рассматривались в работах [24]–[28].

Позиционное управление для линейных дифференциальных игр изучалось в работах [29, 30].

В этой работе продолжено изучение структуры множества управляемости и свойств функции быстродействия системы (0.5) в предположении неосцилляции сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ относительно гиперплоскости, определяемой нормальным вектором $b(t)$. Такие системы названы в [24] докритическими.

Показано, что функция быстродействия допускает дифференцирование во всех точках расширенного множества управляемости по направлению некоторых векторов как функция, действующая из $\mathbb{R}^{1+n}$ в $\mathbb{R}$. Для некоторого класса систем (обладающих так называемым свойством $\mathfrak{I}$) функция быстродействия имеет конечную или бесконечную производную в любой точке и вдоль любого направления. Полученные результаты являются дальнейшим развитием работ [24]-[28].

Доказанные свойства функции быстродействия позволили устранить пробел в доказательстве теоремы о $\mathcal{C}$-позиционном управлении возмущенной системой из работы [27]. Кроме того, используя эти свойства функции быстродействия, удалось доказать, что оптимальное в смысле быстродействия позиционное $\mathcal{F}$-управление, построенное для докритической системы (0.5), является $\mathcal{F}$-позиционным управлением для целого класса возмущенных систем, т. е. переводит за конечное время на ось t всякую точку некоторого множества в расширенном фазовом пространстве возмущенной системы.

Свойство докритичности определяется поведением специально введенной в [24] функции $\sigma(t)$. В диссертации подробно исследованы свойства этой функции. Это исследование опирается, в частности, на так назывемое свойство Q-приводимости, введенное в данной работе. Свойство Q-приводимости дает возможность успешно воспользоваться теорией квазидифференциальных уравнений и разработать численно–аналитические алгоритмы, позволяющие эффективно вычислять функцию $\sigma(t)$, а также находить промежутки докритичности системы (0.5).

Выяснены условия гладкости границы множества управляемости. Эти условия позволили доказать теорему о достаточных условиях трансверсальности на левом конце траектории, которая затем используется для исследования структуры так называемого множества управляемости второго порядка (введенного в данной работе).

Показано, что некоторые результаты о структуре множества управляемости, ранее полученные в работах [21, 24], справедливы и для множеств управляемости второго и более высоких порядков.

Многие определения и утверждения проиллюстрированы графиками, полученными при помощи численных алгоритмов.

Результаты диссертации опубликованы в работах [31]–[34].

Ниже приведены формулировки основных результатов работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, двенадцати параграфов (нумерация параграфов сквозная), 26 рисунков и списка литературы, насчитывающего 46 наименований. Объем диссертации 115 страниц.

В первом параграфе диссертации введены основные обозначения, используемые в работе.

Второй параграф посвящен исследованию свойств функции $\sigma(t)$.

Пусть $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$. Определим функции $\xi_i(t) \doteq \psi_i(t) b(t)$, где $i = 1, \ldots, n$. Для каждого t_0 обозначим через $\sigma(t_0)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций $\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, образует чебышевскую систему.

Система (0.5) называется **докритической** на интервале J, если $\sigma(t) > 0$ на этом интервале.

В третьем параграфе исследуются Q-приводимые системы.

Система (0.5), кинематически подобная некоторой системе вида

$$\dot{y} = F(t)y + g(t)u, \tag{0.6}$$

$$\text{где} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \ldots & f_{1,n-1}(t) & r_1(t) \\ -\beta_2(t) & f_{22}(t) & \ldots & f_{2,n-1}(t) & r_2(t) \\ 0 & -\beta_3(t) & \ldots & f_{3,n-1}(t) & r_3(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\beta_n(t) & r_n(t) \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \operatorname{col}\big(\beta_1(t) \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\big),$$

функции $f_{ik}(t)$, $r_i(t)$, $\beta_i(t)$ непрерывны и $\beta_i(t) > 0$ при всех $t \in J$, $i = 1, \ldots, n$, называется **Q-приводимой**.

Пусть $\mathfrak{L}\xi = 0$ — квазидифференциальное уравнение, соответствующее Q-приводимой системе (0.5), Пусть $t_0 \in J = (t_1, t_2)$. **Правой сопряженной точкой** $\mathsf{s}(t_0)$ уравнения $\mathfrak{L}\xi = 0$ называется наименьшее из двух чисел t_2 и $\mathbf{s}$, где $\mathbf{s}$ — точная верхняя грань таких $s > t_0$, что уравнение $\mathfrak{L}\xi = 0$ неосцилляционно на отрезке времени $[t_0, s]$.

Т е о р е м а 0.1. *Пусть система* (0.5) Q*-приводима на интервале* $J = (t_1, t_2)$, *и* $t \in J$. *Если* $\mathbf{s}(t) < t_2$, *то* $\mathbf{s}(t) = t + \sigma(t)$. *Если же* $\mathbf{s}(t) = t_2$, *то* $\mathbf{s}(t) \leqslant t + \sigma(t)$.

С л е д с т в и е 0.1. *Пусть система* (0.5) Q*-приводима на интервале* $J = (t_1, t_2)$. *Тогда функция* $\sigma(t)$ *непрерывна в тех точках* $t \in J$, *в которых* $t + \sigma(t) < t_2$.

Четвертый параграф посвящен некоторым свойствам функции $\sigma(t)$ для Q-приводимых систем, а также численно–аналитическим алгоритмам оценки функции $\sigma(t)$. Предложены два аналитических алгоритма приведения системы (0.5) к виду (0.6): алгоритм ортогонализации и алгоритм Гаусса. Доказаны следующие утверждения.

Т е о р е м а 0.2. *Если* $n = 2$, *и система* (0.5) Q*-приводима на* $J = (t_1, t_2)$, *то функция* $\sigma(t)$ *дифференцируема для всех таких* $t \in J$, *для которых выполнено неравенство* $\mathbf{s}(t) < t_2$.

Т е о р е м а 0.3. *Если преобразование* $\widehat{Q}(t)$, *задаваемое алгоритмом Гаусса, определено на интервале* J, *то система* (0.5) *докритическая на* J. *Если же* $\widehat{Q}(t)$ *не определено ни в одной точке* J, *то система* (0.5) *не является докритической ни в одной точке* J.

В пятом параграфе описывается процедура вычисления функции $\mathbf{s}(t)$ на компьютере и демонстрируются результаты этой процедуры для некоторых конкретных систем.

В шестом параграфе вводятся основные определения, связанные с функцией быстродействия и множествами управляемости первого и второго порядка. Исследуется структура множества управляемости и расширенного множества управляемости первого порядка. Получено более простое доказательство теоремы о структуре множества управляемости, чем в работах [21, 24].

Введем следующие определения.

Функция быстродействия в нуль:

$$\Theta(t_0, x_0) \doteq \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \{\theta \geqslant 0\colon\ x(t_0 + \theta, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\}.$$

Расширенное множество управляемости первого порядка:

$$\mathfrak{D}_1 \doteq \left\{(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}\colon\ \Theta(t_0, x_0) \leqslant \sigma(t_0)\right\}.$$

Функция быстродействия на замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$:

$$\Theta(t_0, x_0, G) \doteq \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \{\theta \geqslant 0\colon\ (t_0 + \theta, x(t_0 + \theta, t_0, x_0, u(\cdot))) \in G\}.$$

Расширенное множество управляемости второго порядка:

$$\mathfrak{D}_2 \doteq \left\{(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n} \setminus \mathfrak{D}_1\colon\ \Theta(t_0, x_0, \mathfrak{D}_1) \leqslant \sigma(t_0)\right\}.$$

Множества управляемости первого $D_1(t_0)$ и второго порядка $D_2(t_0)$ определяются как сечения соответствующих расширенных множеств управляемости, т. е.

$$D_\nu(t_0) \doteq \{x_0 \in \mathbb{R}^n\colon\ (t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_\nu\}, \quad \nu = 1, 2.$$

Для упрощения обозначений будем писать $\mathfrak{D} \doteq \mathfrak{D}_1$, $D(t_0) \doteq D_1(t_0)$. Множество управляемости за время ϑ:

$$D(t_0, \vartheta) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n\colon\ \Theta(t_0, x_0) \leqslant \vartheta\}.$$

Очевидно, $D(t_0, \sigma(t_0)) = D(t_0)$.

Для каждого $k = 0, \ldots, n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообразие $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$, вложенное в пространство $\mathbb{R}^{1+k}$, как множество всех таких точек расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}$, которые переводятся на ось t при помощи управления, оптимального в смысле быстродействия, принимающего значения $\{-1, +1\}$, имеющего ровно k переключений и начинающегося с $+1$. Аналогично определяется многообразие $\overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$, для которого оптимальное управление начинается с -1.

Введем следующие обозначения.

Сечения множеств $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ и $\overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ при фиксированном t :

$$\overset{+}{N}{}^{k}(t) \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ (t, x) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}\right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\overset{-}{N}{}^{k}(t) \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ (t, x) \in \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}\right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Сечения множеств $\overset{+}{N}{}^{k+1}(t)$ и $\overset{-}{N}{}^{k+1}(t)$ при фиксированном времени быстродействия:

$$\overset{+}{N}{}^{k}(t, \vartheta) \doteq \left\{x \in \overset{+}{N}{}^{k+1}(t)\colon\ \Theta(t, x) = \vartheta\right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n - 1,$$

$$\overset{-}{N}{}^{k}(t, \vartheta) \doteq \left\{x \in \overset{-}{N}{}^{k+1}(t)\colon\ \Theta(t, x) = \vartheta\right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n - 1.$$

Т е о р е м а 0.4. *Пусть система* (0.5) *докритическая, причем функции* $A(\cdot)$ *и* $b(\cdot)$ *принадлежат классу* C^r, *где* $r \geqslant 0$. *Тогда при любом* $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ *множество управляемости* $D(t_0, \vartheta)$ *есть строго выпуклое тело в* $\mathbb{R}^n$. *Его граница является объединением непересекающихся гладких (гладкости* $r{+}1$) *многообразий* $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ *и* $\overset{-}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ *размерности* k, *где* $k = 0, \ldots, n{-}1$. *Объединение* $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overset{+}{N}{}^i(t_0, \vartheta)\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overset{-}{N}{}^i(t_0, \vartheta)\right)$ *есть общий край многообразий* $\mathrm{cl}\,\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ *и* $\mathrm{cl}\,\overset{-}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$. *Кроме того, всякой точке* x_0 *из множества* $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta) \bigcup \overset{-}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ *отвечает единственное оптимальное управление, переводящее* x_0 *в нуль и имеющее ровно* k *переключений на интервале* $(t_0, t_0 + \vartheta)$.

В седьмом параграфе исследуются вопросы, связанные с углами между многообразиями, образующими границу множества управляемости, и с гладкостью границы множества управляемости. Доказаны следующие утверждения.

Т е о р е м а 0.5. *Если векторы* $X(t_0, t_0 + \sigma(t_0))b(t_0 + \sigma(t_0))$ *и* $b(t_0)$ *коллинеарны, то в каждой точке границы множества управляемости* $D(t_0)$ *существует касательное пространство к границе* $D(t_0)$.

Т е о р е м а 0.6. *Если* $\tau_n < \sigma(t_0)$, *то для любого* $k = 1, \ldots, n-1$ *угол между многообразиями* $\overset{+}{N}{}^k(t, \vartheta)$ *и* $\overset{-}{N}{}^k(t, \vartheta)$ *в любой точке* $x \in \mathrm{cl}\,\overset{+}{N}{}^k(t, \vartheta) \bigcap \mathrm{cl}\,\overset{-}{N}{}^k(t, \vartheta)$ *отличен от нуля. В этом случае граница множества управляемости* $D(t_0, \tau_n)$ *не может быть гладкой (т. е. имеет касательное пространство не во всякой точке границы).*

Т е о р е м а 0.7. *Если* $\tau_n < \sigma(t)$, *то многообразия* $\overset{-}{N}{}^k(t)$ *и* $\overset{-}{N}{}^k(t, \vartheta)$ *касаются в любой точке* $x \in \overset{-}{N}{}^k(t) \bigcap \mathrm{cl}\,\overset{-}{N}{}^k(t, \vartheta)$.

Аналогичная теорема справедлива для $\overset{+}{N}{}^k(t)$ и $\overset{+}{N}{}^k(t, \vartheta)$.

Восьмой параграф посвящен различным условиям трансверсальности. Доказана теорема о достаточных условиях трансверсальности на левом конце траектории.

Т е о р е м а 0.8. *Пусть* $\vartheta < \sigma(t_0)$, $x_0 \in \partial D(t_0, \vartheta)$, ψ *— единичный вектор нормали к произвольной опорной гиперплоскости* $\Gamma_{x_0} D(t_0, \vartheta)$, *причем множество $D(t_0,\vartheta)$ лежит в положительном полупространстве относительно вектора ψ. Тогда управление, заданное равенством $u(t,\psi)=\operatorname{sign}(\psi X(t_0,t)b(t))$, оптимально в смысле быстродействия переводит точку (t_0,x_0) на ось t.*

В девятом параграфе доказано, что оптимальное в смысле быстродействия позиционное управление, построенное для линейной докритической системы, является позиционным для некоторого класса нелинейных систем, близких к линейной, т. е. за конечное время переводит точки некоторого множества в расширенном фазовом пространстве возмущенной системы на ось t. Отдельно рассмотрены $\mathcal{C}$-позиционное и $\mathcal{F}$-позиционное управления.

Суперпозиционно измеримую функцию $u_{\mathcal{C}}\colon \mathfrak{D}\to U$ будем называть $\mathcal{C}$-**позиционным управлением для системы** (0.5), если для любой точки $(t_0,x_0)\in\operatorname{int}\mathfrak{D}$ решение в смысле Каратеодори $x(t,t_0,x_0)$ задачи

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)u,\quad x(t_0)=x_0 \tag{0.7}$$

при $u=u_{\mathcal{C}}(t,x)$ существует на полуоси $[t_0,+\infty)$ и попадает в нуль за конечное время. Если, кроме того, это решение единственно, и $x(t,t_0,x_0)\equiv 0$ для $t\geqslant t_0+\Theta(t_0,x_0)$, то такую функцию $u_{\mathcal{C}}$ будем называть **оптимальным в смысле быстродействия** $\mathcal{C}$-**позиционным управлением для системы** (0.5) (сокращенно, оптимальным $\mathcal{C}$-управлением).

Аналогично определяется $\mathcal{F}$-**позиционное управление** В этом случае функция $u_{\mathcal{F}}(t,x)$ должна быть определена для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{1+n}$) точек $(t,x)\in\operatorname{int}\mathfrak{D}$ и обеспечивать следующее свойство: каждому $(t_0,x_0)\in\operatorname{int}\mathfrak{D}$ отвечает решение в смысле Филиппова $x(t,t_0,x_0)$ задачи (0.7) с управлением $u=u_{\mathcal{F}}(t,x)$, попадающее в нуль за конечное время. Если, кроме того, это решение единственно, и $x(t,t_0,x_0)\equiv 0$ для $t\geqslant t_0+\Theta(t_0,x_0)$, то такую функцию $u_{\mathcal{F}}$ будем называть **оптимальным в смысле быстродействия** $\mathcal{F}$-**позиционным управлением для системы** (0.5) (сокращенно, оптимальным $\mathcal{F}$-управлением). В силу определения решений Филиппова (см. [1, с. 40]), для построения оптимального $\mathcal{F}$-управления нет необходимости определять $u_{\mathcal{F}}(t,x)$ в каждой точке внутренности расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}$; достаточно построить $u_{\mathcal{F}}(t,x)$ на множестве полной меры.

Пусть $G\subset\mathbb{R}^{1+n}$, $q\in G$. Будем называть **конусом Булигана** [35, с. 28] к множеству G в точке q множество $\mathfrak{T}_q(G)$ таких векторов $h\in\mathbb{R}^{1+n}$, что

$$\liminf_{\varepsilon\to+0}\frac{\rho_0(q+\varepsilon h,G)}{\varepsilon}=0,$$

где $\rho_0(q,G)$ — евклидово расстояние от точки q до множества G.

Т е о р е м а 0.9. *Пусть система* (0.5) *докритическая, а точка* $q_0=(t_0,x_0)\in\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$. *Тогда функция быстродействия* $\Theta:\mathfrak{D}\to\mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* q_0 *по направлению любого вектора* h *из* $\operatorname{int}\mathfrak{T}_{q_0}(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n})$. *Аналогичное утверждение справедливо и для множества* $\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$.

Будем говорить, что система (0.5) обладает **свойством $\mathfrak{I}$ на множестве $\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$**, если производная функции быстродействия во всякой точке $q_0\in\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{n}\subset\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$ по направлению любого вектора $h\notin\operatorname{int}\mathfrak{T}_{q_0}(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n})$ равняется $+\infty$. Аналогично определяется свойство $\mathfrak{I}$ на множестве $\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$. Если свойство $\mathfrak{I}$ выполнено на множестве $\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$, то, в силу симметрии, оно автоматически выполнено и на множестве $\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$, поэтому в дальнейшем мы будем говорить про свойство $\mathfrak{I}$, не указывая множество, на котором оно выполнено.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)u+w(t,x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad |u|\leqslant 1,\tag{0.8}$$

где функции $A:\mathbb{R}\to\mathbb{M}(n)$, $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ непрерывны, функция $w:\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $w(t,0)\equiv 0$, и существует такое $r>0$, что для линейной системы (0.5) при всех $t\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство $\sigma(t)\geqslant r$. Обозначим

$$\widehat{u}_{\mathfrak{C}}(t,x)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad (t,x)\in\mathcal{N}_+^{1+n}\bigcup\dots\bigcup\mathcal{N}_+^2,\\ 0, & \text{если}\quad (t,x)\in\mathcal{N}^1,\\ -1, & \text{если}\quad (t,x)\in\mathcal{N}_-^{1+n}\bigcup\dots\bigcup\mathcal{N}_-^2.\end{cases}$$

Пусть $\theta>0$. Непрерывную функцию $w:\mathfrak{D}\to\mathbb{R}^n$ будем называть допустимой в множестве $\mathfrak{D}_\theta$, если существует такое положительное α, что выполнены следующие условия:

1) для всех $(t,x)\in\mathfrak{D}_\theta$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x}w(t,x)\leqslant 1-\alpha;$$

2) для всех $k=1,\dots,n-1$ и всех $q=(t,x)\in\mathcal{N}^{1+k}$ таких, что $w(t,x)\in T_xN^k(t)$ выполнено неравенство

$$d_x\Theta(t,x)w(t,x)\leqslant 1-\alpha.$$

Т е о р е м а 0.10. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *система* (0.5) *докритическая и обладает свойством* $\mathfrak{I}$;

2) *существует положительное* θ *такое, что* $\mathfrak{D}_\theta \subseteq \mathfrak{D}$;

3) *функция* $w(t,x)$ *допустимая в множестве* $\mathfrak{D}_\theta$.

Тогда управление $\widehat{u}_{\mathcal{C}}(t,x)$ *является* $\mathcal{C}$*-позиционным управлением для системы* (0.8) *в области* $\operatorname{int}\mathfrak{D}_\theta$, *т. е. для каждой точки* $(t_0,x_0) \in \operatorname{int}\mathfrak{D}_\theta$ *найдется такой момент времени* $\vartheta(t_0,x_0) < \infty$, *что* $\mathcal{C}$*-решение* $x(t,t_0,x_0)$ *системы* (0.8) *с управлением* $u = \widehat{u}_{\mathcal{C}}(t,x)$ *существует, и* $x(t_0+\vartheta(t_0,x_0),t_0,x_0) = 0$. *Далее, для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *такое, что если* $|w(t,x)| \leqslant \delta$ *при* $(t,x) \in \mathfrak{D}_\theta$, *то* $|\Theta(t,x) - \vartheta(t,x)| \leqslant \varepsilon$.

Введем $\mathcal{F}$-позиционное управление

$$\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}_+^{1+n}, \\ -1, & \text{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}_-^{1+n} \end{cases}$$

Построим многозначные функции

$$\mathcal{U}(t,x) = \begin{cases} \widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x), & \text{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}^{1+n}, \\ [-1,+1], & \text{если} \quad (t,x) \in \mathfrak{N}^n, \end{cases}$$

$\mathcal{F}(t,x) = A(t)x + b(t)\mathcal{U}(t,x) + w(t,x)$. Тогда решения дифференциального включения $\dot{x} \in \mathcal{F}(t,x)$ являются $\mathcal{F}$-решениями системы (0.8) с управлением $\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x)$.

Т е о р е м а 0.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 0.10. *Тогда существует такое положительное* $\theta_1 \leqslant \theta$, *что управление* $\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x)$ *является* $\mathcal{F}$*-позиционным управлением для системы* (0.8) *в области* $\operatorname{int}\mathfrak{D}_{\theta_1}$, *т. е. для каждой точки* (t_0,x_0) *из* $\operatorname{int}\mathfrak{D}_{\theta_1}$ *найдется такой момент времени* $\vartheta(t_0,x_0) < \infty$, *что* $\mathcal{F}$*-решение* $x(t,t_0,x_0)$ *системы* (0.5) *с управлением* $\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x)$ *существует, причем* $x(t_0+\vartheta(t_0,x_0),t_0,x_0) = 0$. *Далее, для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *такое, что если* $|w(t,x)| \leqslant \delta$ *при* $(t,x) \in \mathfrak{D}_{\theta_1}$, *то* $|\Theta(t,x) - \vartheta(t,x)| \leqslant \varepsilon$.

Десятый параграф посвящен исследованию структуры расширенного множества управляемости второго порядка. В расширенном множестве управляемости выделены множества, аналогичные многообразиям, образующим расширенное множество управляемости первого порядка.

В одиннадцатом параграфе исследуется расположение нулей линейной комбинации функций чебышевской системы за пределами промежутка чебышевскости. Доказано, что при определенных условиях векторы, составленные из узлов такой линейной комбинации, образуют гладкое многообразие.

Зафиксируем числа t_0 и $\vartheta > 0$ и будем предполагать, что система (0.5) докритическая на промежутке $[t_0, +\infty)$. Определим следующие функции:

$$\sigma_0(t) \doteq 0,\ \sigma_1(t) \doteq \sigma(t),\ \sigma_{\ell+1}(t) \doteq \sigma\left(t + \sigma_1(t) + \cdots + \sigma_\ell(t)\right),$$

где $\ell \in \mathbb{N}$.

Пусть $\sigma_\infty(t_0)$ есть сумма (конечная или бесконечная) ряда

$$\sigma_0(t_0) + \sigma_1(t_0) + \cdots + \sigma_\ell(t_0) + \ldots.$$

Тогда промежуток $[t_0, t_0 + \sigma_\infty(t_0))$ оказывается разбитым на полуинтервалы вида

$$\left[t_0 + \sigma_0(t_0) + \cdots + \sigma_\ell(t_0), t_0 + \sigma_0(t_0) + \cdots + \sigma_{\ell+1}(t_0)\right),$$

на каждом из которых совокупность функций $\{\xi_i(t)\}_{i=1}^n$ образует T-систему.

Двенадцатый параграф посвящен исследованию структуры границ множеств управляемости высших порядков. Доказано, что на границах множеств управляемости высших порядков Q-приводимой системы можно выделить гладкие многообразия.

Т е о р е м а 0.12. *Пусть* $n = 2$, *система* (0.5) Q-*приводима на промежутке* $[t_0, +\infty)$, $\vartheta < \sigma_\infty(t_0)$, *а* m — *такое натуральное число, что*

$$\sum_{\ell=0}^{m} \sigma_\ell(t_0) < \vartheta \leqslant \sum_{\ell=0}^{m+1} \sigma_\ell(t_0).$$

Тогда справедливо представление

$$\partial D(t_0, \vartheta) = \mathrm{cl} \bigcup_{\nu \in J_m} \left(\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0, \vartheta) \cup \overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0, \vartheta) \right),$$

где J_m *есть множество* $(m+1)$*–мерных векторов, координаты которых принимают значения* 0 *и* 1, *причем хотя бы одна из координат равна единице, а* $\overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0, \vartheta)$ *и* $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0, \vartheta)$ — *дифференцируемые кривые.*

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99–01–00454) и конкурсным центром фундаментального естествознания (грант 97–0–1.9).

Глава 1. Докритичность и Q-приводимость

Эта глава посвящена исследованию свойств функции $\sigma(t)$, положительность которой имеет решающее значение для всей последующей теории. Системы, для которых $\sigma(t)$ положительна, называются докритическими. Инвариантность функции $\sigma(t)$ относительно преобразования кинематического подобия позволяет переходить к системам $\dot{y} = F(t)y + g(t)u$ с матрицей $F(t)$ и вектором $g(t)$ некоторого специального вида (системы, допускающие такое преобразование, называются Q-приводимыми). Используя эквивалентность Q-приводимых систем и квазидифференциальных уравнений, удается доказать некоторые дополнительные свойства функции $\sigma(t)$ и разработать численно–аналитические алгоритмы ее оценки. Эти алгоритмы реализованы на компьютере, приведены их результаты.

§ 1. Основные обозначения

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$ ($*$ — операция транспонирования). Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x). Пространство $\mathbb{M}(n, m)$ линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с пространством матриц размерности $n \times m$ (если $n = m$, то пишем $\mathbb{M}(n)$). Группу $GL(n, \mathbb{R})$ вещественных невырожденных матриц порядка n обозначим $\mathbb{G}(n)$. Здесь $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Множество неотрицательных вещественных чисел обозначим $\mathbb{R}^+$. Символы diag и col используем для записи диагональных матриц и векторов-столбцов, соответственно. Кроме того, пусть δ_{ij} — символ Кронекера.

Символом $S^{n-1} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = 1\}$ будем обозначать $(n-1)$-мерную сферу. Если G — множество, то $\operatorname{cl} G$ есть замыкание этого множества, $\operatorname{int} G$ — его внутренность, а ∂G — его граница. Для выпуклого множества G обозначим через $\Gamma_x G$ опорную гиперплоскость к этому множеству, проходящую через точку $x \in \partial G$. Если M — многообразие, то через любую его точку x можно провести касательное $T_x M$ и нормальное $T_x^\perp M$ пространства. При необходимости будем обозначать касательное и нормальное пространства символами $T(x, M)$ и $T^\perp(x, M)$, соответственно. Линейную оболочку, построенную на векторах $h_1, \ldots, h_k$, обозначим $\mathcal{L}\{h_1, \ldots, h_k\}$, а операцию прямой суммы линейных пространств — символом $\oplus$.

Рассмотрим линейную управляемую нестационарную систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leqslant 1, \tag{1.1}$$

где матрица $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$ и вектор $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ предполагаются непрерывными. Будем отождествлять эту систему с парой (A, b). Допустимыми будем считать все измеримые функции $t \to u(t)$, модуль которых не превосходит единицы. Множество допустимых управлений обозначим символом $\mathcal{U}$. Решение системы (1.1), выходящее в момент времени t_0 из точки x_0 под действием фиксированного управления $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим $x_0(t) = x(t, t_0, x_0, u_0(\cdot))$. Такое решение представимо в виде

$$x_0(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, s)b(s)u_0(s)\, ds, \tag{1.2}$$

где $X(t,s)$ — матрица Коши системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Система

$$\dot{\psi} = -\psi A(t), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

называется сопряженной к системе (1.3).

Определим следующую функцию

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Если $u(\cdot)$ — оптимальное управление, то справедлив принцип максимума Понтрягина [4, 5, 6, 36]:

$$\max_{u \in U} \psi(t)b(t)u = \psi(t)b(t)u(t), \tag{1.5}$$

где $U = [-1, 1]$, а $\psi(t)$ — решение сопряженной системы (1.4).

§ 2. Функция $\sigma(\cdot)$ и ее свойства

В этом параграфе исследуется функция $\sigma(t)$, играющая в дальнейшем важную роль. Эта функция рассматривалась А. Ю. Левиным и ранее изучалась в работах [21, 24, 37]. В утверждении 2.7 доказывается инвариантность функции $\sigma(t)$ относительно преобразования кинематического подобия системы (1.1).

Пусть $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений системы (1.4). Определим функции $\xi_i(t) \doteq \psi_i(t)b(t)$, где $i = 1, \ldots, n$. Для каждого t_0 обозначим через $\sigma(t_0) \doteq \sigma(t_0; A, b)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $I_{t_0} \doteq [t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций $\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, образует чебышевскую систему (сокращенно T-систему). Это означает, что любая нетривиальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ имеет на I_{t_0} не более $n - 1$ геометрически различных (т. е. без учета кратностей) нулей [38, с. 50]. Таким образом, определена функция $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Очевидно, что эта функция не зависит от того, какая конкретно фундаментальная система решений системы (1.4) была выбрана.

Из определения $\sigma(t_0)$ следует, что для любого $\sigma \in [0, \sigma(t_0)]$ всякое нетривиальное решение системы (1.4) пересекает гиперплоскость $\gamma(t) \doteq \{\psi \in \mathbb{R}^n : \psi b(t) = 0\}$ не более $n - 1$ раз, когда t пробегает полуинтервал I_{t_0}. Это свойство названо в [17] свойством неосцилляции системы (1.4) на полуинтервале I_{t_0} относительно гиперплоскости $\gamma(t)$.

Удобно будет определить функцию $s(t) = t + \sigma(t)$. Ниже сформулированы и доказаны некоторые свойства функций $\sigma(t)$ и $s(t)$ [32].

Утверждение 2.1. *Функция $s(t)$ не убывает.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть на вещественной оси существуют точки t_1 и t_2 такие, что $t_1 < t_2$, но $s(t_1) > s(t_2)$. В силу неотрицательности функции $\sigma(t)$, возможны два случая: $\sigma(t_1) = 0$ или $\sigma(t_1) > 0$. Если $\sigma(t_1) = 0$, то $s(t_2) = t_2 + \sigma(t_2) > t_1 + 0 = s(t_1)$, что противоречит нашему предположению. В случае же, когда $\sigma(t_1) > 0$, функции $\xi_i(t)$ образуют на полуинтервале $[t_1, s(t_1))$ T-систему, однако не образуют T-систему на полуинтервале $[t_2, s(t_2))$. Это означает, что на $[t_1, s(t_1))$ любая нетривиальная линейная комбинация функций $\xi_i(t)$ имеет не более $(n - 1)$-го нуля, однако существует такая нетривиальная линейная комбинация функций $\xi_i(t)$, которая имеет по крайней мере n нулей на $[t_2, s(t_2))$. Заметив, что $[t_1, s(t_1)) \subset [t_2, s(t_2))$, придем к противоречию.

С л е д с т в и е 2.1. (см., также, [37, Лемма 1]). *В каждой точке* t_0 *функция* $\sigma(t)$ *удовлетворяет неравенствам* $\sigma(t_0-0) \leqslant \sigma(t_0) \leqslant \sigma(t_0+0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $s(t_0-0) = t_0 + \sigma(t_0-0)$. Из утверждения 2.1 следует неравенство $s(t_0-0) \leqslant s(t_0)$, откуда получаем $t_0+\sigma(t_0-0) \leqslant t_0+\sigma(t_0)$, из чего следует левое неравенство, которое требовалось доказать. Справедливость правого неравенства показывется аналогично.

Далее нам потребуется одно известное свойство Т-систем, известное под названием теоремы Бернштейна. Напомним (см. [38, с. 53]), что точка τ называется **узлом** непрерывной функции $\xi(t)$, если в этой точке функция $\xi(t)$ меняет знак.

У т в е р ж д е н и е 2.2. ([38, с. 53]). *Если совокупность непрерывных функций* $\xi_1(t),\dots,\xi_n(t)$ *является Т-системой на полуинтервале* $[t_0,t_1)$, *то для любого набора попарно различных точек* $\tau_1,\dots,\tau_{n-1}$ *из* $[t_0,t_1)$ *найдется линейная комбинация функций* $\xi_i(t)$, *имеющая узлы во всех точках* τ_j *и не имеющая других нулей на промежутке* $[t_0,t_1)$.

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть непрерывные функции* $\xi_1(t),\dots,\xi_n(t)$ *образуют Т-систему на полуинтервале* $[t_0,t_1)$, *содержащем попарно различные точки* $\tau_1,\dots,\tau_k$, *где* $1 \leqslant k \leqslant n-1$. *Тогда найдется нетривиальная линейная комбинация функций* $\xi_i(t)$, *имеющая узлы во всех точках* τ_j *и не имеющая других нулей на любом полуинтервале* $[t_0,t_2)$, *где* $t_0 < t_2 < t_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное $t_2 \in (t_0,t_1)$ и добавим к набору $\tau_1,\dots,\tau_k$ такие точки $\tau_{k+1},\dots,\tau_{n-1}$ из интервала (t_2,t_1), чтобы все точки $\tau_1,\dots,\tau_{n-1}$ были попарно различны. Теперь осталось применить утверждение 2.2.

Полезно, кроме того, иметь критерий чебышевскости, который сформулирован в следующем утверждении.

У т в е р ж д е н и е 2.3. ([38, с. 53]). *Функции* $\xi_1(t),\dots,\xi_n(t)$ *образуют Т-систему на полуинтервале* $[t_0,t_1)$ *тогда и только тогда, когда для любого набора точек* $\tau_1,\dots,\tau_n$ *таких, что* $t_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < t_1$, *определитель*

$$\begin{vmatrix} \xi_1(\tau_1) & \dots & \xi_n(\tau_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1(\tau_n) & \dots & \xi_n(\tau_n) \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

не равен нулю.

У т в е р ж д е н и е 2.4. *Пусть* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Если* $\xi_i(t_0) = 0$ *при всех* $i = 1, \dots, n$ *то* $\sigma(t_0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторое положительное ε и выберем на интервале $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ произвольные попарно различные точки $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. В силу утверждения 2.2, для этих точек найдется вектор $c \in \mathbb{R}^n$ такой, что функция $\xi(t, c) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \xi_i(t)$ будет обращаться в нуль в точках $t_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует нетривиальная линейная комбинация $\xi(t, c)$ функций $\xi_i(t)$, имеющая на интервале $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ ровно n геометрически различных нулей. По определению функции $\sigma(t)$ имеем $\sigma(t_0) = 0$.

У т в е р ж д е н и е 2.5. *Если* $\sigma(t_0 - 0) = 0$, *а функции* $\xi_i(t)$ *дифференцируемы, то существует такая их нетривиальная линейная комбинация* $\xi(t)$, *что* $\xi(t_0) = \dot{\xi}(t_0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, стремящуюся к нулю. Равенство $\sigma(t_0 - 0) = 0$ означает, что для любого k найдутся вектор $c_k \in S^{n-1}$ и точки $\tau_1^k, \tau_2^k \in (t_0 - \varepsilon_k, t_0 + \varepsilon_k)$ такие, что

$$\xi(\tau_1^k, c_k) = \xi(\tau_2^k, c_k) = 0 \tag{2.2}$$

(здесь, по-прежнему, $\xi(t, c) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \xi_i(t)$). По теореме Ролля для каждого k существует точка $\hat{\tau}^k \in (\tau_1^k, \tau_2^k)$, в которой

$$\dot{\xi}(\hat{\tau}^k, c_k) = 0. \tag{2.3}$$

В силу компактности сферы S^{n-1}, из последовательности $\{c_k\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору c_0 из S^{n-1}. Эту подпоследовательность для краткости снова обозначим $\{c_k\}$. Переходя в равенствах (2.2) и (2.3) к пределу при $k \to \infty$, получим требуемые равенства $\xi(t_0, c_0) = \dot{\xi}(t_0, c_0) = 0$. Утверждение 2.5 доказано.

Пусть функции $\xi_i(t)$ непрерывно дифференцируемы $n-1$ раз. Определим следующий вронскиан:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \xi_1(t) & \dot{\xi}_1(t) & \dots & \xi_1^{(n-1)}(t) \\ \xi_2(t) & \dot{\xi}_2(t) & \dots & \xi_2^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n(t) & \dot{\xi}_n(t) & \dots & \xi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

У т в е р ж д е н и е 2.6. *Если $\sigma(t_0-0)=0$, а функции $\xi_i(t)$ непрерывно дифференцируемы $n-1$ раз, то $W(t_0)=0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ стремится к нулю. Равенство $\sigma(t_0-0)=0$ означает, что для любого k найдутся вектор $c_k \in S^{n-1}$ и точки $\tau_1^k,\dots,\tau_n^k \in (t_0-\varepsilon_k, t_0+\varepsilon_k)$ такие, что

$$\xi(\tau_i^k, c_k) = 0, \quad i = 1,\dots,n. \tag{2.4}$$

По теореме Ролля для каждого k существуют такие точки $\hat{\tau}_1^k,\dots,\hat{\tau}_{n-1}^k$ из интервала $(t_0-\varepsilon_k, t_0+\varepsilon_k)$, что при $i=1,\dots,n-1$

$$\xi^{(i)}(\hat{\tau}_i^k, c_k) = 0. \tag{2.5}$$

Из последовательности $\{c_k\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору $c_0 \in S^{n-1}$. Эту подпоследовательность снова обозначим через $\{c_k\}$. Переходя в равенствах (2.4) и (2.5) к пределу при $k\to\infty$, получим $\xi^{(i)}(t_0,c_0)=0$ для всех $i=0,\dots,n-1$, т. е. векторы $\operatorname{col}\Big(\xi_1^{(i)}(t_0),\dots,\xi_n^{(i)}(t_0)\Big)$ ортогональны одному вектору c_0 и не образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. Следовательно, они линейно зависимы, откуда $W(t_0)=0$.

З а м е ч а н и е 2.1. Здесь функции $\xi_i(t)$ получаются из решения системы (1.4). Тем не менее, можно рассматривать произвольные непрерывные функции $\xi_i\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ и для них таким же образом определить функцию $\sigma(t)$. При этом все утверждения, сформулированные выше в этом параграфе, останутся справедливыми.

Систему (1.1) будем называть **докритической** [21, 24] на интервале J, если для всех $t\in J$ выполнено неравенство $\sigma(t;A,b)>0$.

Пусть матрица $Q\colon \mathbb{R}\to\mathbb{G}(n)$ непрерывно дифференцируема, а преобразование $x=Q(t)y$ переводит систему (A,b) в систему (A_Q,b_Q), имеющую вид $\dot{y}=A_Q(t)y+b_Q(t)u$. Легко видеть, что

$$A_Q(t) = Q^{-1}(t)A(t)Q(t) - Q^{-1}(t)\dot{Q}(t), \quad b_Q(t) = Q^{-1}(t)b(t).$$

Системы (A, b) и (A_Q, b_Q) будем называть **кинематически подобными**, а соответствующее преобразование — преобразованием **кинематического подобия**.

У т в е р ж д е н и е 2.7. *Пусть системы* (A, b) *и* (A_Q, b_Q) *кинематически подобны. Тогда* $\sigma(t; A, b) = \sigma(t; A_Q, b_Q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему

$$\dot{\varphi} = -\varphi A_Q(t) \tag{2.6}$$

и заметим, что решения сопряженных систем (1.4) и (2.6) связаны равенством

$$\varphi = \psi Q(t). \tag{2.7}$$

Действительно, дифференцируя (2.7), получим

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} Q + \psi \dot{Q} = -\psi A Q + \psi \dot{Q} = -\varphi Q^{-1} A Q + \varphi Q^{-1} \dot{Q} = -\varphi A_Q.$$

Пусть $\varphi(t)$ — произвольное нетривиальное решение системы (2.6). В силу тождества (2.7),

$$\xi_Q(t) \doteq \varphi(t) b_Q(t) = \psi(t) Q^{-1}(t) Q(t) b(t) = \psi(t) b(t) = \xi(t),$$

где $\psi(t)$ — матричное решение системы (1.4), откуда следует требуемое равенство $\sigma(t; A, b) = \sigma(t; A_Q, b_Q)$.

С л е д с т в и е 2.3. *Функции* $\xi_i(t)$ *инвариантны относительно преобразования кинематического подобия.*

§ 3. Q-приводимые системы

В этом параграфе определяются и изучаются Q-приводимые системы. Используя связь Q-приводимых систем и квазидифференциальных уравнений, удается доказать важные свойства линейных комбинаций функций $\xi_i(t)$ и функции $\sigma(t)$ для Q-приводимых систем.

Систему (A, b), кинематически подобную некоторой системе вида

$$\dot{y} = F(t)y + g(t)u, \tag{3.1}$$

$$\text{где} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1,n-1}(t) & r_1(t) \\ -\beta_2(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2,n-1}(t) & r_2(t) \\ 0 & -\beta_3(t) & \dots & f_{3,n-1}(t) & r_3(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_n(t) & r_n(t) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$g(t) = \operatorname{col}\begin{pmatrix}\beta_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

функции $f_{ik}(t)$, $r_i(t)$, $\beta_i(t)$ непрерывны и $\beta_i(t) > 0$ при всех $t \in J$, $i = 1, \dots, n$, будем называть **Q-приводимой** [32, 31].

Утверждение 3.1. (см. [32]). *Пусть система* (1.1) *кинематически подобна системе* (3.1) *с матрицей преобразования* $Q(t)$, *причем матрица* $F(t)$ *и вектор* $g(t)$ *имеют вид* (3.2), *функции* $f_{ik}(t)$, $r_i(t)$, $\beta_i(t)$ *непрерывны, и* $\beta_i(t) \neq 0$ *при всех* $t \in J$, $i = 1, \dots, n$. *Тогда система* (1.1) Q-*приводима.*

Доказательство. Из непрерывности функций $\beta_i(t)$ следует, что они сохраняют знак на J. Пусть $P = \operatorname{diag}(p_1, \dots, p_n)$, где $p_i = \prod\limits_{k=1}^{i} \operatorname{sign} \beta_k$. Легко видеть, что преобразование $y = Pw$ переводит систему (3.1) в систему $\dot{w} = C(t)w + d(t)u$,

$$\text{где} \quad C(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t)p_1p_2 & \dots & f_{1,n-1}(t)p_1p_{n-1} & r_1(t)p_1p_n \\ -\beta_2(t)p_1p_2 & f_{22}(t) & \dots & f_{2,n-1}(t)p_2p_{n-1} & r_2(t)p_2p_n \\ 0 & -\beta_3(t)p_2p_3 & \dots & f_{3,n-1}(t)p_3p_{n-1} & r_3(t)p_3p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_n(t)p_{n-1}p_n & r_n(t) \end{pmatrix},$$

$$d(t) = \operatorname{col}\begin{pmatrix}\beta_1(t)p_1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

причем $\beta_1(t)p_1 = |\beta_1(t)| > 0$, $\beta_i(t)p_{i-1}p_i = \beta_i(t)\operatorname{sign}\beta_i = |\beta_i(t)| > 0$, $i = 2, \dots, n$. Осталось заметить, что преобразование $x = Q(t)Pw$

является преобразованием кинематического подобия, а система (C,d) удовлетворяет всем условиям, сформулированным в определении Q-приводимости. Утверждение 3.1 доказано.

Термин «Q-приводимость» выбран неслучайно. Оказывается, что если система (1.1), обладает свойством Q-приводимости, то соответствующие ей функции $\xi_i(t)$ образуют фундаментальную систему решений некоторого квазидифференциального уравнения [39]. Буква «Q» в нашем термине соответствует первой букве слова «quasidifferential».

Т е о р е м а 3.1. (см. [39]). *Имеют место следующие утверждения:*

1. *Система* (1.1) *является* Q*-приводимой в том и только том случае, если существуют непрерывные на* J *скалярные функции* $\beta_1,\ldots,\beta_n$; f_{11}; f_{12},f_{22}; $\ldots$ $f_{1,n-1},\ldots,f_{n-1,n-1}$ (*заполняющие вектор* g *и матрицу* F) *такие, что* $\beta_i(t)>0$ *при* $t\in J$, $i=1,\ldots,n$, *и матрица* $Q(t)=(q_1(t),\ldots,q_n(t))$, *столбцы которой определены равенствами*

$$q_1(t)=\frac{b(t)}{\beta_1(t)},\ldots,q_{k+1}(t)=\frac{1}{\beta_{k+1}(t)}(\dot q_k(t)-A(t)q_k(t)+ \\ +f_{1,k}(t)q_1(t)+\cdots+f_{k,k}(t)q_k(t)),\quad (3.3)$$

невырождена при всех $t\in J$. *Далее, преобразование кинематического подобия имеет вид* $x=Q(t)y$, *а вектор* $r(t)\doteq\operatorname{col}(r_1(t),\ldots,r_n(t))$, *образующий последний стобец матрицы* $F(t)$, *является решением алгебраической системы* $Q(t)r=A(t)q_n(t)-\dot q_n(t)$.

2. *Система*

$$\dot\varphi=-\varphi F(t) \quad (3.4)$$

эквивалентна квазидифференциальному уравнению

$$\mathfrak{L}\,\xi\equiv\frac{d}{dt}(\ell_{n-1}\xi)(t)+r_1(t)(\ell_0\xi)(t)+\cdots+r_n(t)(\ell_{n-1}\xi)(t)=0, \quad (3.5)$$

где квазипроизводные $\ell_0,\ldots,\ell_{n-1}$ *определены равенствами*

$$\begin{gathered}(\ell_0\xi)(t)=\beta_1^{-1}(t)\xi(t),\\ (\ell_1\xi)(t)=\frac{1}{\beta_2(t)}\left(\frac{d}{dt}(\ell_0\xi)(t)+f_{11}(t)(\ell_0\xi)(t)\right),\\ (\ell_k\xi)(t)=\frac{1}{\beta_{k+1}(t)}\left(\frac{d}{dt}(\ell_{k-1}\xi)(t)+f_{k,k}(t)(\ell_{k-1}\xi)(t)+\right.\\ \left.+f_{k-1,k}(t)(\ell_{k-2}\xi)(t)+\cdots+f_{1,k}(t)(\ell_0\xi)(t)\right),\quad k=2,\ldots,n-1\end{gathered} \quad (3.6)$$

(*каждому решению* $\varphi(t) = \big(\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)\big)$ *системы* (3.4) *отвечает решение* $\xi(t) = \beta_1(t)\varphi^1(t)$ *уравнения* (3.5), *и каждому решению* $\xi(t)$ *уравнения* (3.5) *отвечает решение* $\varphi(t) = ((\ell_0\xi)(t), \dots, (\ell_{n-1}\xi)(t))$ *системы* (3.4)).

3. *Всякая* Q-*приводимая система докритична на* J.

Пусть дифференцируемая функция $\xi(t)$ обращается в нуль в точке t_0. Назовем точку t_0 **простым нулем** функции $\xi(t)$, если $\dot{\xi}(t_0) \neq 0$. В противном случае назовем точку **кратным нулем**.

Из равенств (3.6) следует, что нулевая квазипроизводная функции $\xi(t)$ обращается в нуль в тех и только тех точках, которые являются нулями функции $\xi(t)$. Это дает нам право ввести следующее определение. Будем говорить, что функция $\xi(t)$, определенная на интервале $J = (t_1, t_2)$ (возможно, совпадающем с числовой прямой $\mathbb{R}$) и допускающая достаточное число квазипроизводных $(\ell_i\xi)(t)$, имеет в точке $t_0 \in J$ **нуль квазикратности** k, если для всех $i = 0, \dots, k-1$ квазипроизводные $(\ell_i\xi)(t)$ обращаются в нуль при $t = t_0$ и $(\ell_k\xi)(t_0) \neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{m}(\xi, I)$ и $\mathfrak{n}(\xi, I)$ количество нулей функции $\xi(t)$ на промежутке $I \subseteq J$ с учетом и без учета квазикратности, соответственно. Уравнение $\mathfrak{L}\xi = 0$ называется **неосцилляционным** на промежутке $I \subseteq J$, если для любого его нетривиального решения $\xi(\cdot)$ справедливо неравенство $\mathfrak{m}(\xi, I) \leqslant n - 1$.

Л е м м а 3.1. (см. [40]). *Пусть J — открытый или полуоткрытый интервал. Тогда для всякого нетривиального решения $\xi(t)$ уравнения $\mathfrak{L}\xi = 0$ неравенства $\mathfrak{n}(\xi, J) \leqslant n - 1$ и $\mathfrak{m}(\xi, J) \leqslant n - 1$ эквивалентны.*

У т в е р ж д е н и е 3.2. (см. [32]). *Пусть система* (1.1) Q-*приводима к системе* (3.1) *на промежутке J, причем функция $\beta_1(t)$ дифференцируема на J. Если при некотором $c \in S^{n-1}$ функция $\xi(t, c)$ имеет на промежутке $I \subseteq J$ в точности $n - 1$ геометрически различных нулей, то эти нули простые.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 2.3 и теоремы 3.1, функция $\xi(t, c)$ является решением уравнения $\mathfrak{L}\xi = 0$. Как уже отмечалось, нулевая квазипроизводная функции $\xi(t, c)$ имеет нули в тех и только тех точках, где сама функция $\xi(t, c)$ обращается в нуль. Поэтому из условия утверждения следует, что $\mathfrak{n}(\xi, I) = n-1$. Известно, что функции $\beta_1(t)$ и, следовательно, $\xi(t, c)$ дифференцируемы, поэтому первая квазипроизводная функции $\xi(t,c)$ равна

$$(\ell_1\xi)(t,c)=\frac{1}{\beta_2(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\beta_1(t)}\right)\xi(t,c)+\frac{1}{\beta_1(t)}\dot{\xi}(t,c)+\frac{f_{11}(t)}{\beta_1(t)\beta_2(t)}\xi(t,c).$$

Предположим, что в некоторой точке t_0 функция $\xi(t,c)$ имеет кратный нуль, т. е. $\xi(t_0,c)=\dot{\xi}(t_0,c)=0$. Тогда $(\ell_1\xi)(t_0,c)=0$, т. е. мы имеем дело с нулем первой квазикратности. Поэтому $\mathfrak{m}(\xi,I)\geqslant n$, что противоречит лемме 3.1. Утверждение 3.2 доказано.

Пусть $t_0\in J=(t_1,t_2)$. Правой сопряженной точкой $\mathbf{s}(t_0)$ уравнения $\mathfrak{L}\xi=0$ называется наименьшее из двух чисел t_2 и $\mathbf{s}$, где $\mathbf{s}$ — точная верхняя грань таких $s>t_0$, что уравнение $\mathfrak{L}\xi=0$ неосцилляционно на отрезке времени $[t_0,s]$. Формулируемая ниже теорема устанавливает связь между характеристиками $\mathbf{s}(t)$ и $\sigma(t)$ для Q-приводимой системы (A,b). Отметим, что для систем вида (A,b), не являющихся Q-приводимыми, понятие правой сопряженной точки вообще отсутствует (в силу того, что не определено понятие квазикратности нуля), а характеристика $\sigma(t;A,b)$ имеет смысл (поскольку при подсчете $\sigma(t;A,b)$ квазикратность нулей не учитывается).

Следующая теорема получается непосредственно из утверждения 2.7 и леммы 3.1.

Т е о р е м а 3.2. (см. [32]). *Пусть система* (1.1) Q-*приводима на интервале* $J=(t_1,t_2)$, *и* $t\in J$. *Если* $\mathbf{s}(t)<t_2$, *то* $\mathbf{s}(t)=t+\sigma(t)$. *Если же* $\mathbf{s}(t)=t_2$, *то* $\mathbf{s}(t)\leqslant t+\sigma(t)$.

В работе [40] доказано следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 3.3. *Функция* $\mathbf{s}(t)$ *непрерывна.*

Из утверждения 3.3 и теоремы 3.2 получается следствие.

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть система* (1.1) Q-*приводима к системе* (3.1) *на промежутке* $J=(t_1,t_2)$. *Тогда функция* $\sigma(t)$ *непрерывна в тех точках* $t\in J$, *в которых* $t+\sigma(t)<t_2$.

§ 4. Оценка функции $\sigma(\cdot)$ для Q-приводимых систем

В этом параграфе предлагается способ оценки функции $\sigma(t)$ для Q-приводимых систем, основанный на эквивалентности таких систем и квазидифференциальных уравнений, а также на способе вычисления длины промежутка неосцилляции квазидифференциального уравнения, предложенном в работе [40]. Кроме того, предлагаются аналитические алгоритмы построения системы (3.1) по системе (1.1). В теореме 4.1 доказывается дифференцируемость функции $\sigma(t)$ Q-приводимой системы для $n = 2$.

Метод построения функции $\mathbf{s}(t)$ в произвольной точке t_0 основан на следующем утверждении (см., например, [40]).

Утверждение 4.1. *Пусть* $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^n$ *— фундаментальная система решений уравнения* $\mathfrak{L}\,\xi = 0$, *удовлетворяющая начальным условиям* $(\ell_{i-1}\xi_k)(t_0) = \delta_{k,n-i+1}$, $i = 1, \ldots, n$ *(единицы на побочной диагонали). Для всех* $k = 1, \ldots, n-1$ *вычислим определители*

$$w_k(t) = \begin{vmatrix} (\ell_0\xi_1)(t) & \ldots & (\ell_0\xi_k)(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\ell_{k-1}\xi_1)(t) & \ldots & (\ell_{k-1}\xi_k)(t) \end{vmatrix}$$

и положим $\mathbf{s}_k(t_0) = \min\{t\colon\, w_k(t) = 0,\ t > t_0\}$. *Тогда*

$$\mathbf{s}(t_0) = \min\{t_2, \mathbf{s}_1(t_0), \ldots, \mathbf{s}_{n-1}(t_0)\}.$$

Аналогичным образом строится функция $\sigma(t)$ для системы (3.4) (это построение опирается на теоремы 3.1 и 3.2) [34]. Пусть $Y(t,s)$ — матрица Коши, соответствующая системе (3.1). Определим матрицу D с элементами $d_{i,j} = \delta_{i,n-j+1}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Тогда матрица $\Xi(t,s) = DY(t,s)$ удовлетворяет условиям $\xi_{i,j}(t,s)\big|_{s=t} = \delta_{i,n-j+1}$ и, как функция переменного s, является фундаментальной матрицей системы $d\xi/ds = -\xi F(s)$. Определители $w_k(t,s)$ будут главными диагональными минорами матрицы $\Xi(t,s)$, т. е.

$$w_k(t,s) = \begin{vmatrix} \xi_{11}(t,s) & \ldots & \xi_{1,k}(t,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{k,1}(t,s) & \ldots & \xi_{k,k}(t,s) \end{vmatrix}.$$

Вычислим $\mathbf{s}_k(t) = \min\{s\colon\, w_k(t,s) = 0,\ s > t\}$, и если $\mathbf{s}_i(t) < t_2$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$, то $\sigma(t) = \mathbf{s}(t) - t$, где $\mathbf{s}(t) = \min\{\mathbf{s}_1(t), \ldots, \mathbf{s}_{n-1}(t)\}$.

Т е о р е м а 4.1. (см. [34]). *Если $n = 2$, и система (1.1) Q-приводима на $J = (t_1, t_2)$, то функция $\sigma(t)$ дифференцируема для всех таких $t \in J$, для которых выполнено неравенство $\mathbf{s}(t) < t_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $n = 2$, то

$$\sigma(t) = \min\{s\colon\ \xi_{11}(t,s) = 0,\ s > t\} - t.$$

Так как функция $\xi_{11}(t,s)$ непрерывно дифференцируема по обоим аргументам, то, в силу теоремы о неявной функции, для дифференцируемости функции $\sigma(t)$ необходимо, чтобы производная $\dfrac{\partial \xi_{11}(t,s)}{\partial s}$ не обращалась в нуль (как функция переменного s при фиксированном t) одновременно с $\xi_{11}(t,s)$. Из построения матрицы $\Xi(t,s)$ следует, что

$$\frac{\partial \xi_{11}(t,s)}{\partial s} = -\xi_{11}(t,s) f_{11}(s) + \xi_{12}(t,s)\beta_2(s).$$

Поэтому, если $\left.\dfrac{\partial \xi_{11}(t,s)}{\partial s}\right|_{s=s_0} = 0$, то $\xi_{11}(t,s_0) f_{11}(s_0) = \xi_{12}(t,s_0)\beta_2(s_0)$. Допустим, что $\xi_{11}(t,s_0) = 0$. Тогда, с учетом неравенства $\beta_2(s_0) > 0$, следует равенство $\xi_{12}(t,s_0) = 0$, приводящее к вырожденности матрицы $\Xi(t,s)$ при $s = s_0$, что противоречит ее определению. Теорема 4.1 доказана.

Если система (1.1) является Q-приводимой к системе (3.1), то мы можем оценить функцию $\sigma(t)$ снизу функцией $\mathbf{s}(t) - t$, которая эффективно вычисляется. Однако для исчерпывающего решения задачи об оценке функции $\sigma(t)$ для заданной системы (1.1) необходимо уметь строить систему (3.1) по системе (1.1). Ниже приведены аналитические алгоритмы построения преобразования кинематического подобия $x = Q(t)y$ и системы (3.1) [34].

Один из алгоритмов (назовем его **алгоритмом ортогонализации**) построения преобразования $x = Q(t)y$ основан на первом утверждении теоремы 3.1. Он доставляет эффективные достаточные условия Q-приводимости. Опишем этот алгоритм. Предположим, что функции $t \to A(t)$ и $t \to b(t)$ имеют достаточную гладкость на интервале J (обеспечивающую непрерывность построенных ниже векторов $q_i(t)$), и выполнено неравенство $|b(t)| > 0$. Выберем $\beta_1(t) = |b(t)|$ и построим $q_1(t) = b(t)/\beta_1(t)$, тогда $|q_1(t)| = 1$. Далее, определим на J функции

$$f_{11}(t) = q_1^*(t)\left(A(t)q_1(t) - \dot q_1(t)\right) \quad \text{и} \quad p_1(t) = \dot q_1(t) - A(t)q_1(t) + f_{11}(t)q_1(t).$$

Построим теперь функцию $\beta_2(t) = |p_1(t)|$. Если $\beta_2(t) > 0$ при всех $t \in J$, то определена функция $q_2(t) = p_1(t)/\beta_2(t)$, причем $|q_2(t)| = 1$ и $q_2^*(t)q_1(t) = 0$. Продолжая этот процесс, последовательно построим функции $q_3(t), \dots, q_n(t)$, удовлетворяющие условиям $q_i^*(t)q_k(t) = \delta_{i,k}$. Если для некоторого $k < n-1$ построены функции $q_1(t), \dots, q_k(t)$, то для всех $i = 1, \dots, k$ построим функции $f_{i\,k}(t) = q_i^*(t)\left(A(t)q_k(t) - \dot{q}_k(t)\right)$, а затем функции

$$p_k(t) = \left(\dot{q}_k(t) - A(t)q_k(t) + f_{1,k}(t)q_1(t) + \dots + f_{k,k}(t)q_k(t)\right), \qquad (4.1)$$

и $\beta_{k+1}(t) = |p_k(t)|$. Если $\beta_{k+1}(t) > 0$ на интервале J, то можно построить $q_{k+1}(t) = p_k(t)/\beta_{k+1}(t)$. Таким образом, построена ортогональная матрица $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, позволяющая определить коэффициенты

$$r_i(t) = q_i^*(t)\left(A(t)q_n(t) - \dot{q}_n(t)\right), \quad i = 1, \dots, n, \qquad (4.2)$$

уравнения (3.5) и одновременно последний столбец матрицы $F(t)$.

С л е д с т в и е 4.1. *Допустим, что функции* $A : J \to \mathbb{M}(n)$ *и* $b \colon J \to \mathbb{R}^n$, *задающие систему* (1.1)*, имеют достаточную гладкость на интервале* J, *и каждая из функций* $p_k : J \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, n$, *определенных равенствами* (4.1)*, не имеет нулей на интервале* J (*здесь* $f_{i\,k}(t) = q_i^*(t)\left(A(t)q_k(t) - \dot{q}_k(t)\right)$, $i = 1, \dots, k$). *Тогда ортогональная матрица* $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, *столбцы которой задаются равенствами* (3.3)*, приводит систему* (1.1) *к системе* (3.1)*, где* $\beta_{k+1}(t) = |p_k(t)|$, *а координаты вектора* $r(t) = \mathrm{col}\,(r_1(t), \dots, r_n(t))$ *определены равенствами* (4.2).

Рассмотренный выше алгоритм не применим, если какая-нибудь из функций $p_k(t)$ обращается в нуль на интервале J. Ниже предлагается еще один алгоритм приведения системы (1.1) к виду (3.1) (дополняющий алгоритм ортогонализации). Этот алгоритм (назовем его **алгоритмом Гаусса**) позволяет сделать определенные выводы о системе (1.1) и в том случае, когда условия применимости алгоритма Гаусса не выполняются.

Алгоритм Гаусса заключается в последовательных элементарных преобразованиях системы (1.1). Эти преобразования подразделяются на два типа: преобразования первого типа приводят вектор $b(t)$ к требуемому виду (при этом все его координаты, кроме первой, становятся нулевыми), затем преобразования второго типа, оставляя вектор неизменным, действуют на матрицу системы.

Зафиксируем $k \in \{2, \dots, n\}$ и зададим элементарное преобразование первого типа равенством

$$y_k = b_1(t)x_k - b_k(t)x_1. \tag{4.3}$$

При условии, что $b_1(t) \neq 0$ для всех $t \in J$, выразим

$$x_k = \frac{y_k + b_k(t)x_1}{b_1(t)}. \tag{4.4}$$

Тогда из (4.3) и (4.4) следует равенство

$$\begin{aligned}\dot{y}_k = \frac{\dot{b}_1(t)(y_k + b_k(t)x_1)}{b_1(t)} - \dot{b}_k(t)x_1 + \\ + b_1(t)\left(\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j}(t)x_j + \frac{a_{k,k}(t)(y_k + b_k(t)x_1)}{b_1(t)}\right) - \\ - b_k(t)\left(\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{1,j}(t)x_j + \frac{a_{1,k}(t)(y_k + b_k(t)x_1)}{b_1(t)}\right),\end{aligned}$$

Таким образом, преобразование (4.4) приводит систему (A, b) к системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \left(\frac{a_{i,k}(t)b_k(t)}{b_1(t)} + a_{i,1}(t)\right)x_1 + \sum_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^{n} a_{i,j}(t)x_j + \frac{a_{i,k}(t)}{b_1(t)}y_k + b_i(t)u, \quad i \neq k,\\ \dot{y}_k &= \left(\frac{a_{k,k}(t)b_k(t)}{b_1(t)} + a_{k,1}(t)\right)x_1 + \sum_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^{n} a_{k,j}(t)x_j + \frac{a_{k,k}(t)}{b_1(t)}y_k\end{aligned}$$

с матрицей

$$A^k(t) = \begin{pmatrix} \frac{a_{1,k}b_k}{b_1} + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & \frac{a_{1,k}}{b_1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \frac{a_{2,k}b_k}{b_1} + a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & \frac{a_{2,k}}{b_1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{k-1,k}b_k}{b_1} + a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,k-1} & \frac{a_{k-1,k}}{b_1} & a_{k-1,k+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ \frac{a_{k,k}b_k}{b_1} + a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k-1} & \frac{a_{k,k}}{b_1} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \\ \frac{a_{k+1,k}b_k}{b_1} + a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k-1} & \frac{a_{k+1,k}}{b_1} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n,k}b_k}{b_1} + a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k-1} & \frac{a_{n,k}}{b_1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

и вектором $b^k(t) = \mathrm{col}(b_1(t), \dots, b_{k-1}(t), 0, b_{k+1}(t), \dots, b_n(t))$. Итак, равенство (4.4) задает преобразование кинематического подобия с матрицей

$$Q_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{b_k}{b_1} & 0 & \dots & 0 & \dfrac{1}{b_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

переводящее систему (A, b) в систему (A^k, b^k). Легко видеть, что преобразование $y = Q_n(t)Q_{n-1}(t)\cdots Q_2(t)x$ переведет систему (A, b) в систему (C, g), где $g(t) = \mathrm{col}(\beta_1(t), 0, \dots, 0)$. Если $n = 2$, то полученная система имеет такой вид, какой требуется в определении Q-приводимости, в противном случае требуется применить к ней элементарные преобразования второго типа.

Вводя элементарные преобразования второго типа, будем считать, что преобразования первого типа уже применены к системе (A, b), поэтому вектор $b(t) = \mathrm{col}(\beta_1(t), 0, \dots, 0)$. Пусть $n \geqslant 3$; для каждой фиксированной пары $k \in \{3, \dots, n\}$ и $s \in \{2, \dots, n-1\}$, удовлетворяющей неравенству $k > s$, положим

$$y_k = a_{s,s-1}(t)x_k - a_{k,s-1}(t)x_s. \tag{4.5}$$

При условии, что $a_{s,s-1}(t) \neq 0$ для всех $t \in J$, выразим

$$x_k = \frac{y_k + a_{k,s-1}(t)x_s}{a_{s,s-1}(t)}. \tag{4.6}$$

Тогда из (4.5) и (4.6) следует равенство

$$\begin{aligned} \dot{y}_k = {} & \frac{\dot{a}_{s,m}(t)(y_k + a_{k,m}(t)x_s)}{a_{s,m}(t)} - \dot{a}_{k,m}(t)x_s + \\ & + a_{s,m}(t)\left(\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j}(t)x_j + \frac{a_{k,k}(t)(y_k + a_{k,m}(t)x_s)}{a_{s,m}(t)}\right) - \\ & - a_{k,m}(t)\left(\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{s,j}(t)x_j + \frac{a_{s,k}(t)(y_k + a_{k,m}(t)x_s)}{a_{s,m}(t)}\right), \end{aligned} \tag{4.7}$$

где для краткости обозначено $m = s-1$. Таким образом, преобразование (4.6) приводит систему (A, b) к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 = &\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s,k}}^{n} a_{1,j}(t)x_j + \left(\frac{a_{1,k}(t)a_{k,m}(t)}{a_{s,m}(t)} + a_{1,s}(t)\right)x_s + \frac{a_{1,k}(t)}{a_{s,m}(t)}y_k + \beta_1(t)u,\\
\dot{x}_i = &\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s,k}}^{n} a_{i,j}(t)x_j + \left(\frac{a_{i,k}(t)a_{k,m}(t)}{a_{s,m}(t)} + a_{i,s}(t)\right)x_s + \frac{a_{i,k}(t)}{a_{s,m}(t)}y_k, \quad i\neq 1,k\\
\dot{y}_k = &\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k,s,m}}^{n} (a_{s,m}(t)a_{k,j}(t) - a_{k,m}(t)a_{s,j}(t))x_j + \Bigg(a_{s,m}(t)a_{k,s}(t) - \dot{a}_{k,m}(t) +\\
&+ \frac{\dot{a}_{s,m}(t)a_{k,m}(t) - a_{k,m}^2(t)a_{s,k}(t)}{a_{s,m}(t)} + a_{k,m}(t)(a_{k,k}(t) - a_{s,s}(t))\Bigg)x_s +\\
&+ \left(\frac{\dot{a}_{s,m}(t) - a_{k,m}(t)a_{s,k}(t)}{a_{s,m}(t)} + a_{k,k}(t)\right)y_k
\end{aligned}
$$

с матрицей $A_{k,s}(t) =$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11} & \dots & \dfrac{a_{1,k}a_{k,m}}{a_{s,m}} + a_{1,s} & a_{1,s+1} & \dots & a_{1,k-1} & \dfrac{a_{1,k}}{a_{s,m}} & \dots & a_{1,n}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{k-2,1} & \dots & \dfrac{a_{k-2,k}a_{k,m}}{a_{s,m}} + a_{k-2,s} & a_{k-2,s+1} & \dots & a_{k-2,k-1} & \dfrac{a_{k-2,k}}{a_{s,m}} & \dots & a_{k-2,n}\\
a_{k-1,1} & \dots & \dfrac{a_{k-1,k}a_{km}}{a_{s,m}} + a_{k-1,s} & a_{k-1,s+1} & \dots & a_{k-1,k-1} & \dfrac{a_{k-1,k}}{a_{s,m}} & \dots & a_{k-1,n}\\
d_{k,1} & \dots & d_{k,k} & d_{k,k+1} & \dots & d_{k,s-1} & d_{k,s} & \dots & d_{k,n}\\
a_{k+1,1} & \dots & \dfrac{a_{k+1,k}a_{km}}{a_{s,m}} + a_{k+1,s} & a_{k+1,s+1} & \dots & a_{k+1,k-1} & \dfrac{a_{k+1,k}}{a_{s,m}} & \dots & a_{k+1,n}\\
a_{k+2,1} & \dots & \dfrac{a_{k+2,k}a_{km}}{a_{s,m}} + a_{k+2,s} & a_{k+2,s+1} & \dots & a_{k+2,k-1} & \dfrac{a_{k+2,k}}{a_{s,m}} & \dots & a_{k+2,n}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{n,1} & \dots & \dfrac{a_{n,k}a_{k,m}}{a_{s,m}} + a_{n,s} & a_{n,s+1} & \dots & a_{n,k-1} & \dfrac{a_{n,k}}{a_{s,m}} & \dots & a_{n,n}
\end{pmatrix},
$$

и вектором $b(t) = \mathrm{col}(\beta_1(t), 0, \dots, 0)$, где k-ая строка матрицы $A_{k,s}(t)$ заполнена элементами

$$
d_{k,s} = \frac{\dot{a}_{s,m}a_{k,m} - a_{k,m}^2 a_{s,k}}{a_{s,m}} + a_{s,m}a_{k,s} + a_{k,m}(a_{k,k} - a_{s,s}) - \dot{a}_{k,m},
$$

$$
d_{k,k} = \frac{\dot{a}_{s,m} - a_{k,m}a_{s,k}}{a_{s,m}} + a_{k,k},
$$

$$
d_{k,j} = a_{s,m}a_{k,j} - a_{k,m}a_{s,j},\ j\neq k,\ j\neq s, \quad m = s-1.
$$

Важно, что элемент $d_{k,s-1}(t)$ матрицы $A_{k,s}(t)$ тождественно равен нулю. Более того, если при некотором j таком, что $j \neq k$, элементы $a_{k,j}(t)$

и $a_{s,j}(t)$ исходной матрицы $A(t)$ тождественно равны нулю на интервале J, то $d_{k,j}(t) \equiv 0$. Следует также отметить, что $d_{i,j}(t) \equiv a_{i,j}(t)$, если $i < k,\ j < k$.

Таким образом, построено преобразование кинематического подобия

$$Q_{k,s}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dfrac{a_{k,s-1}}{a_{s,s-1}} & \dots & \dfrac{1}{a_{s,s-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

приводящее систему (A, b) к системе $(A_{k,s}, b)$.

Нетрудно убедиться, что преобразование

$$\begin{aligned} Q(t) = Q_{n,n-1}(t)Q_{n,n-2}(t)Q_{n-1,n-2}(t)Q_{n,n-3}(t)\cdots Q_{n-2,n-3}(t)\times \\ \times Q_{n,n-4}(t)\cdots Q_{n,2}(t)\cdots Q_{32}(t)Q_n(t)Q_{n-1}(t)\cdots Q_2(t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

приводит исходную систему (A, b) к системе (F, g) с матрицей $F(t)$ и вектором $g(t)$ вида (3.2). В силу (4.8), алгоритм Гаусса следует начинать с построения преобразования $Q_2(t)$ (см. (4.4)) и, если оно не вырождено (т. е. $b_1(t) \neq 0,\ t \in J$), двигаться вдоль (4.8) справа налево. Построив все элементарные преобразования первого типа (до $Q_n(t)$), нужно начинать построение элементарных преобразований второго типа (начиная с $Q_{32}(t)$), если они существуют.

На рис. 4.1 показан процесс применения алгоритма Гаусса для $n = 4$. Вертикальная черта отделяет вектор от матрицы. Элементы матрицы и вектора, оказывающиеся в знаменателе равенств (4.4) и (4.6), обозначены звездочками.

Преобразование $Q(t)$ было построено таким образом, чтобы соответствующие элементы матрицы $F(t)$ и вектора $g(t)$ были нулевыми. Из равенства (4.4) следует, что преобразование $Q(t)$ невырождено, если только $b_1(t) \neq 0$ на J. Далее мы покажем, что если преобразование $Q(t)$ невырождено на J, то функции $\beta_i(t) = -f_{i,i-1}(t)$, где $i = 2, \dots, n-1$ отличны от нуля на J. Зафиксируем k и s и перепишем равенство (4.8) в виде

$$\begin{gathered} Q(t) = S_1(t)S_2(t), \\ \text{где} \quad S_1(t) = Q_{n,n-1}(t)\cdots Q_{k,s}(t), \quad S_2(t) = S_1^{-1}(t)Q(t). \end{gathered} \tag{4.9}$$

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \arrow[r, "Q_2(t)"] \& \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \arrow[r, "Q_3(t)"] \& \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \arrow[r, "Q_4(t)"] \& \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right) \arrow[d, "Q_{32}(t)"] \\
\& \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & * & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right) \& \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right) \arrow[l, "Q_{43}(t)"'] \& \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right) \arrow[l, "Q_{42}(t)"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 4.1. Применение алгоритма Гаусса для $n = 4$.

Тогда
$$\begin{aligned} F(t) &= Q^{-1}(t)A(t)Q(t) - Q^{-1}(t)\dot{Q}(t) = \\ &= S_1^{-1}(t)V(t)S_1(t) - S_1^{-1}(t)\dot{S}_1(t), \\ \text{где} \quad V(t) &= S_2^{-1}(t)A(t)S_2(t) - S_2^{-1}(t)\dot{S}_2(t). \end{aligned} \tag{4.10}$$
Непосредственной проверкой можно убедиться, что $V(t)$ имеет вид

$$V(t) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1,s-2} & v_{1,s-1} & v_{1,s} & \dots & v_{1,n-1} & v_{1,n} \\ -\beta_2 & v_{22} & \dots & v_{2,s-2} & v_{2,s-1} & v_{2,s} & \dots & v_{2,n-1} & v_{2,n} \\ 0 & -\beta_3 & \dots & v_{3,s-2} & v_{3,s-1} & v_{3,s} & \dots & v_{3,n-1} & v_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_{s-1} & v_{s-1,s-1} & v_{s-1,s} & \dots & v_{s-1,n-1} & v_{s-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_s & v_{s,s} & \dots & v_{s,n-1} & v_{s,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_{s+1,s-1} & v_{s+1,s} & \dots & v_{s+1,n-1} & v_{s+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_{n,s-1} & v_{n,s} & \dots & v_{n,n-1} & v_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, преобразование $Q(t)$ и матрица $F(t)$ будут определены на интервале J только в том случае, если функция $v_{s,s-1}(t) = -\beta_s(t)$ не обращается в нуль на J.

В последнем из преобразований $Q_{n,n-1}(t)$, входящих в равенство (4.8), функция $\beta_{n-1}(t)$ оказывается в знаменателе. Поэтому из существования преобразования $Q(t)$ следует неравенство $\beta_{n-1}(t) \neq 0$. А функция $\beta_n(t)$ никогда не оказывается в знаменателе в процессе применения преобразования $Q(t)$. Поэтому для того, чтобы система (1.1) была Q-приводима, необходимо дополнительно потребовать выполнения неравенства $\beta_n(t) \neq 0$. Таким образом, с учетом утверждения 3.1 доказано следующее.

У т в е р ж д е н и е 4.2. (см. [34]). *Если преобразование $Q(t)$ определено для всех $t \in J$ и приводит систему (A, b) к системе (F, g), причем функция $\beta_n(t) = f_{n,n-1}(t)$ отлична от нуля на интервале J, то система (A, b) Q-приводима на J.*

Теперь рассмотрим случай, когда преобразование $Q(t)$ вырождено в каждой точке интервала J. Это может произойти, если вырожденным является любое из элементарных преобразований первого типа, либо вырождено какое-нибудь из преобразований второго типа.

Пусть вырождено преобразование первого типа. В этом случае, согласно равенству (4.4), функция $b_1(t) \equiv 0$ на J. Но если существует i такое, что $2 \leqslant i \leqslant n$ и $b_i(t) \neq 0$ на J, то, применив к системе (A, b) преобразование $T_{1,i}$, меняющее местами переменные x_1 и x_i, получим систему (A_T, b_T), в которой первая координата вектора $b_T(t)$ не обращается в нуль на J, и к которой уже можно применить все преобразования первого типа. Если же вектор $b(t)$ тождественно равен нулю, то в соответствии с определением докритичности система (A, b) не является докритической на J.

Теперь рассмотрим случай, когда преобразование второго типа $Q_{k,s}(t)$ вырождено в каждой точке интервала J, т. е. $v_{s,s-1}(t) \equiv 0$. Будем считать (см. (4.9), (4.10)), что к системе (A, b) уже применено преобразование $S_2(t)$, которое перевело эту систему в (V, g). Если существует i такое, что $s+1 \leqslant i \leqslant n$ и $v_{i,s-1}(t) \neq 0$ на J, то, применив к системе (V, g) преобразование $T_{i,s}$, меняющее местами переменные x_i и x_s, мы получим систему (P, g), коэффициенты которой удовлетворяют неравенству $p_{s,s-1}(t) \neq 0$. Для системы (P, g) уже можно построить преобразование $Q_{k,s}(t)$ и все последующие преобразования из равенства (4.8) со вторым индексом s.

Тем не менее, не исключен случай, когда для всех таких i, что $s \leqslant i \leqslant n$, выполнены тождества $v_{i,s-1}(t) \equiv 0$, т. е. матрица $V(t)$ выглядит следующим образом:

$$V(t) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1,s-2} & v_{1,s-1} & v_{1,s} & \dots & v_{1,n-1} & v_{1,n} \\ -\beta_2 & v_{22} & \dots & v_{2,s-2} & v_{2,s-1} & v_{2,s} & \dots & v_{2,n-1} & v_{2,n} \\ 0 & -\beta_3 & \dots & v_{3,s-2} & v_{3,s-1} & v_{3,s} & \dots & v_{3,n-1} & v_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_{s-1} & v_{s-1,s-1} & v_{s-1,s} & \dots & v_{s-1,n-1} & v_{s-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & v_{s,s} & \dots & v_{s,n-1} & v_{s,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & v_{s+1,s} & \dots & v_{s+1,n-1} & v_{s+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & v_{n,s} & \dots & v_{n,n-1} & v_{n,n} \end{pmatrix}$$

Однако в этом случае найдется нетривиальное решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi V(t)$, имеющее вид $\psi(t) = (0, \dots, 0, \psi_s(t), \dots, \psi_n(t))$. Поэтому $\psi(t)b \equiv 0$. Следовательно, система (A, b) не является докритической ни в одной точке интервала J.

Определим преобразование T_1 следующим образом. Если $b_1 \equiv 0$ на J, но существует i такое, что $2 \leqslant i \leqslant n$ и $b_i(t) \neq 0$ на J, то положим $T_1 = T_{1,i}$. В противном случае пусть T_1 тождественное преобразование. Теперь для каждого s такого, что $2 \leqslant s \leqslant n-1$, определим преобразование T_s. Если $v_{s,s-1}(t) \equiv 0$ на J (матрица $V(t)$ получается в соответствии с равенствами (4.9) и (4.10) после применения преобразования $Q_{n,s-1}(t)$ и перед применением преобразования $Q_{k,s}(t) = Q_{s+1,s}(t)$), но существует i такое, что $s+1 \leqslant i \leqslant n$ и $v_{i,s-1}(t) \neq 0$ на J, то положим $T_s = T_{s,i}$. В противном случае T_s есть тождественное преобразование. Наконец, рассмотрим вместо преобразования $Q(t)$, заданного равенством (4.8), преобразование

$$\widehat{Q}(t) \doteq Q_{n,n-1}(t)T_{n-1}Q_{n,n-2}(t)Q_{n-1,n-2}(t)T_{n-2} \times \cdots \times \\ \times Q_{n,2}(t) \cdots Q_{32}(t)T_2 Q_n(t)Q_{n-1}(t) \cdots Q_2(t)T_1 \quad (4.11)$$

Т е о р е м а 4.2. *Если преобразование* $\widehat{Q}(t)$, *задаваемое равенством* (4.11), *определено на интервале* J (*т. е. определены все преобразования, входящие в* (4.11)), *то система* (1.1) *докритическая на* J. *Если же* $\widehat{Q}(t)$ *не определено ни в одной точке* J, *то система* (1.1) *не является докритической ни в одной точке* J.

З а м е ч а н и е 4.1. При некоторых дополнительных предположениях в алгоритме Гаусса можно избавиться от преобразований первого типа следующим образом. Будем предполагать, что функция $t \to b(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале J, выполнено неравенство $|b(t)| > 0$, и существуют дифференцируемые функции $\eta_i\colon\ J \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\eta_i(t)b(t) = 0$ для всех $i = 2, \dots, n$, $t \in J$. Тогда легко видеть, что преобразование $x = S(t)y$, где строки матрицы $S(t)$ образованы векторами $\eta_1(t) \doteq b^*(t)/|b(t)|^2, \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)$, приводит систему (A, b) к системе (A_S, b_S), где вектор $b_S = \mathrm{col}(1, 0, \dots, 0)$. Это предварительное преобразование системы (1.1) упрощает алгоритм Гаусса.

З а м е ч а н и е 4.2. Легко видеть, что преобразование $x_1 = y_1\beta_1(t)$ переводит систему (F, g) вида (3.1) в систему (F_β, g_β), в которой вектор g_β имеет вид $g_\beta = \mathrm{col}(1, 0, \dots, 0)$. Такое преобразование определено на промежутке Q-приводимости системы, поскольку на этом промежутке

$\beta_1(t) \neq 0$, поэтому это преобразование можно применять к системе, полученной при помощи алгоритма ортогонализации или алгоритма Гаусса.

Замечание 4.2 позволяет избавиться от условия на функцию $\beta_1(t)$ в утверждении 3.2 и сформулировать следствие этого утверждения.

С л е д с т в и е 4.2. *Пусть система* (1.1) Q-*приводима к системе* (3.1) *на промежутке* J. *Если при некотором* $c \in S^{n-1}$ *функция*

$$\xi(t, c) = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i(t)$$

имеет на промежутке $I \subseteq J$ *в точности* $n - 1$ *геометрически различных нулей, то эти нули простые.*

§ 5. Применение предложенных алгоритмов

В этом параграфе описывается процедура вычисления функции $\mathbf{s}(t)$ на компьютере и демонстрируются результаты этой процедуры для некоторых конкретных систем.

На основе предложенных выше алгоритмов разработан комплекс программ, осуществляющих преобразование системы (1.1) к виду (3.1) и вычисляющих функцию $\mathbf{s}(t)$ на заданном промежутке. Там, где выполняются условия теоремы 3.2, интересующая нас функция $\sigma(t)$ совпадает с $\mathbf{s}(t)-t$. Далее описывается процедура вычисления функции $\mathbf{s}(t)$ при помощи этого программного комплекса.

1. Задаются матрица $A(t)$ и вектор $b(t)$ в аналитическом виде.

2. Программа, реализующая алгоритм ортогонализации или алгоритм Гаусса, аналитически вычисляет преобразование $Q(t)$ и матрицу $F(t)$. Результаты этих программ имеют смысл на интервалах Q-приводимости системы (1.1). После применения алгоритма Гаусса используется преобразование, указанное в замечании 4.2.

3. Одновременно вычисляются функция $\beta_0(t)=\beta_1(t)\cdots\beta_n(t)$ (являющаяся произведением $\beta_1(t),\ldots,\beta_n(t)$) и интервалы, на которых $\beta_0(t)$ не обращается в нуль. На этих интервалах система (A,b) является Q-приводимой. Все дальнейшие процедуры проводятся численно.

4. Задается промежуток J_0, на котором требуется вычислить значения функции $\mathbf{s}(t)$. Исходя из расположения нулей функции $\beta_0(t)$, определяются интервалы Q-приводимости системы (1.1), расположенные внутри промежутка J_0. Для этого промежуток J_0 покрывается сеткой $\{t_i\}$, и для каждого i производится поиск ближайшего нуля функции $\beta_0(t)$ справа от точки t_i. Обозначим символом $\mu(t_i)$ координату этого нуля. Тогда система (A,b) Q-приводима на интервале $(t_i,\mu(t_i))$.

5. Далее строится матрица Коши системы (3.1). В нетривиальных случаях матрица $F(t)$ имеет весьма громоздкий вид, поэтому стоимость вычисления матрицы Коши достаточно высока. Чтобы уменьшить вычислительные затраты, значения матрицы $F(t)$ находятся в точках сетки $\{t_i\}$. После этого на J_0 решается уравнение $\dot{\xi}=-\xi\widehat{F}(t)$, где матрица $\widehat{F}(t)$ является аппроксимацией матрицы $F(t)$ кубическими сплайнами. Полученную матрицу Коши обозначим $Y(t,s)$.

6. Для каждой точки t_i вычисляются значения матрицы $DY(t_i,t)$ и ее главных диагональных миноров $w_k(t)$ на сетке.

7. Для каждого минора $w_k(t)$ производится поиск первого нуля справа от точки t_i. Обозначим такие нули $\nu_k(t_i)$.

8. Значение функции $\mathbf{s}(t)$ в точке t_i считается равным

$$\mathbf{s}(t_i) = \min\{\mu(t_i), \nu_1(t_i), \ldots, \nu_{n-1}(t_i)\}.$$

Одной из основных проблем, возникающих при вычислении $\mathbf{s}(t)$ указанным способом, является проблема поиска ближайшего нуля функции справа от заданной точки. Для отыскания ближайшего нуля используется последовательный перебор значений заданной функции на сетке. Поскольку функция $w_k(t)$ не обязана менять знак в точке, где она обращается в нуль, необходимо следить не только за знаком функции, но и за знаком ее производной, которая приближенно вычисляется по формулам численного дифференцирования первого порядка. Для повышения точности функция аппроксимируется квадратичным полиномом в окрестности нуля.

Все необходимые программы, кроме программы поиска ближайшего нуля, написаны в системе Matlab. С целью уменьшения времени вычислений программа поиска ближайшего нуля написана на языке C в виде mex-файла.

Ниже приведены примеры управляемых систем и результаты предложенных алгоритмов, примененных к этим системам. Вычисления производились на компьютере с процессором Celeron-300A.

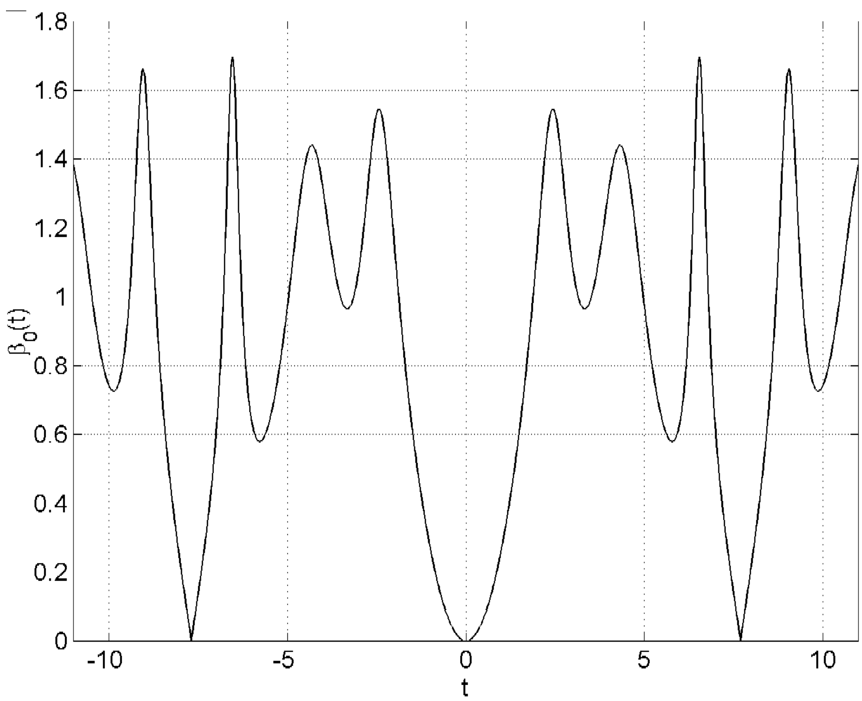

Рис. 5.1. График функции $\beta_0(t)$ для системы (5.1).

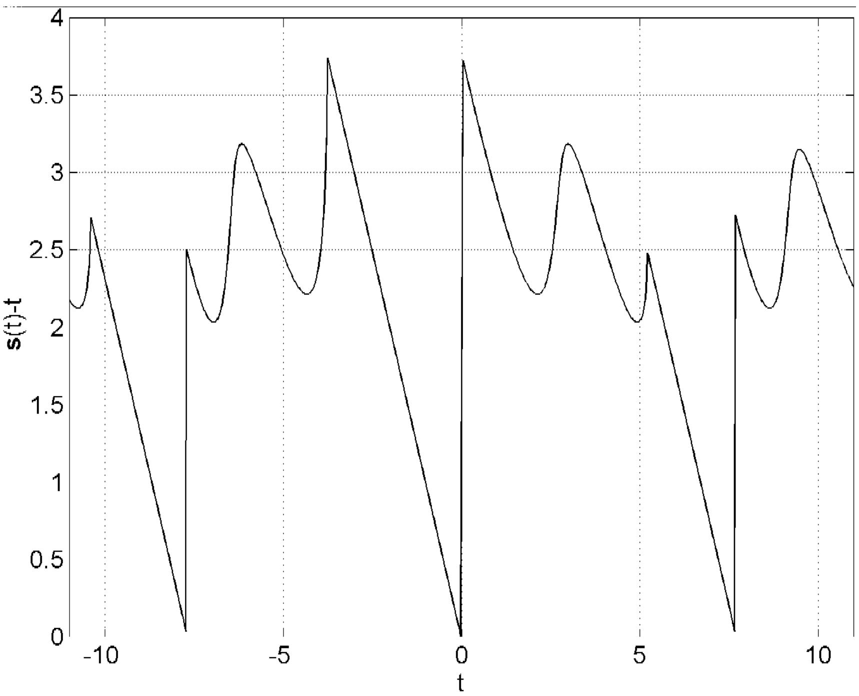

Рис. 5.2. График функции $\mathbf{s}(t) - t$ для системы (5.1).

Преобразование системы

$$\dot{x}_1 = u \sin t, \quad \dot{x}_2 = u \sin \sqrt{2} t. \tag{5.1}$$

к (F, g) системе при помощи алгоритма ортогонализации заняло 4 секунды. Элементы матриц $Q(t)$, $F(t)$ и вектора $g(t)$ имеют вид:

$$\beta_1(t) = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 \sqrt{2} t}, \quad q_{11} = \frac{\sin t}{\beta_1(t)}, \quad q_{21} = \frac{\sin \sqrt{2} t}{\beta_1(t)},$$

$$q_{12} = -\operatorname{sign}\left(\cos t \sin \sqrt{2} t - \sqrt{2} \sin t \cos \sqrt{2} t\right) q_{21}(t),$$

$$q_{22} = \operatorname{sign}\left(\cos t \sin \sqrt{2} t - \sqrt{2} \sin t \cos \sqrt{2} t\right) q_{11}(t), \quad f_{11}(t) = 0,$$

$$r_1(t) = \frac{\left|\cos t \sin \sqrt{2} t - \sqrt{2} \sin t \cos \sqrt{2} t\right|}{\sin^2 t + \sin^2 \sqrt{2} t}, \quad r_2(t) = 0, \quad \beta_2(t) = r_1(t).$$

График функции $\beta_0(t)$ для системы (5.1) изображен на рис. 5.1.

Вычисление матрицы Коши для системы, получившейся в результате приведения системы (5.1), заняло 35 секунд. Значения функции $\mathbf{s}(t)$ на сетке были получены за 240 секунд. График функции $\mathbf{s}(t) - t$ для системы (5.1) показан на рис. 5.2. Система (5.1) является Q-приводимой на интервале $(0, \hat{t}_1)$, где $\hat{t}_1 \approx 7.7$. Функция $\sigma(t)$ совпадает с $\mathbf{s}(t) - t$ и является дифференцируемой на интервале $(0, \hat{t}_2)$, где $\hat{t}_2 \approx 5.2$.

Можно заметить, что производная функции $\mathbf{s}(t)-t$ нигде не становится меньше -1, что согласуется с утверждением 2.1. Для системы (5.1) имеем $z(t)=\mathrm{col}(\sin t, \sin\sqrt{2}t)$, следовательно, $z(0)=0$. Легко видеть, что $\sigma(0)=0$, что может служить иллюстрацией утверждения 2.4.

Для приведения системы (A,b) к системе (F,g) с помощью алгоритма Гаусса потребовалась 1 секунда. При этом получились следующие матрицы $Q(t)$ и $F(t)$:

$$Q(t)=\begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \sin\sqrt{2}t & \dfrac{1}{\sin t} \end{pmatrix},$$

$$F(t)=\begin{pmatrix} -\operatorname{ctg} t & 0 \\ \cos t\sin\sqrt{2}t-\sqrt{2}\sin t\cos\sqrt{2}t & \operatorname{ctg} t \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы имеют более простой вид, чем аналогичные матрицы, полученные в результате алгоритма ортогонализации, но при этом метод Гаусса приводит к меньшим промежуткам Q-приводимости, чем алгоритм ортогонализации.

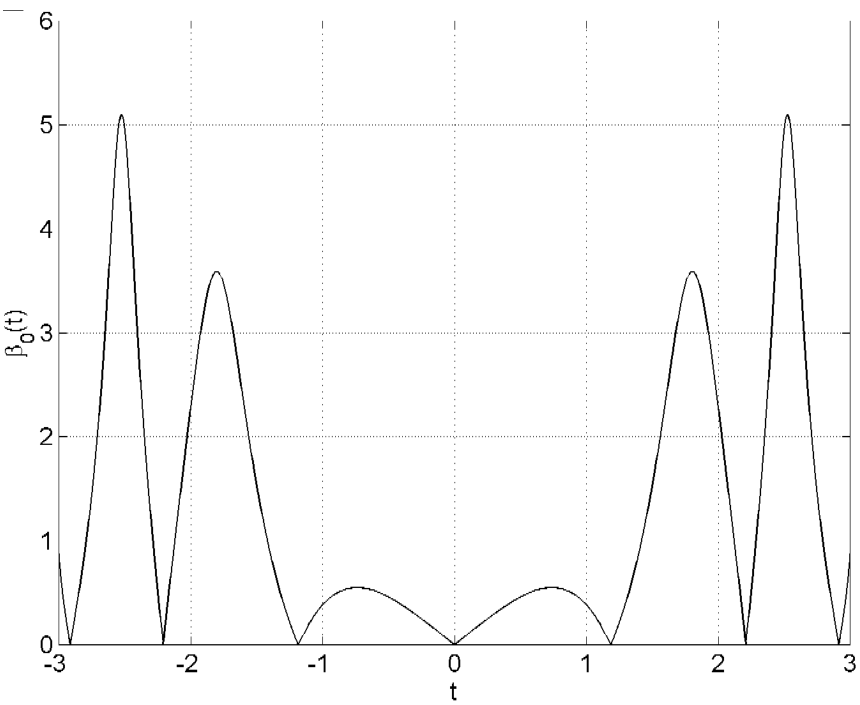

Рис. 5.3. График функции $\beta_0(t)$ для системы (5.2).

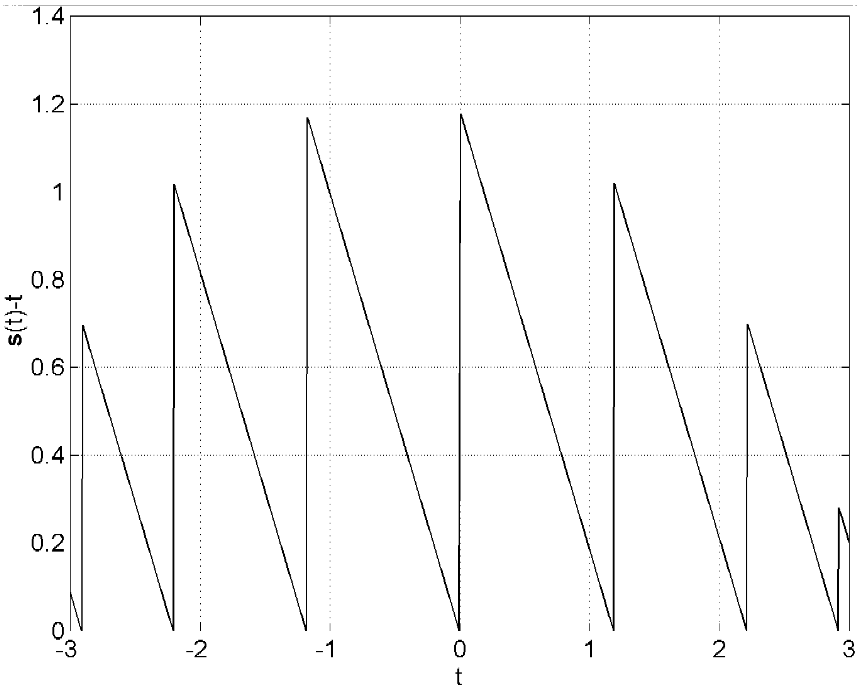

Рис. 5.4. График функции $\mathbf{s}(t) - t$ для системы (5.2).

Система

$$\dot{x}_1 = u \sin t, \quad \dot{x}_2 = u \sin t^2. \tag{5.2}$$

была преобразована к системе вида (3.1) при помощи алгоритма ортогонализации за 4 секунды. Элементы матриц $Q(t)$, $F(t)$ и вектора $g(t)$ имеют вид:

$$\beta_1(t) = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t^2}, \quad q_{11}(t) = \frac{\sin t}{\beta_1(t)}, \quad q_{21}(t) = \frac{\sin t^2}{\beta_1(t)},$$
$$q_{12}(t) = -\operatorname{sign}\left(2t \sin t \cos t^2 - \cos t \sin t^2\right) q_{21}(t),$$
$$q_{22}(t) = \operatorname{sign}\left(2t \sin t \cos t^2 - \cos t \sin t^2\right) q_{11}(t), \quad f_{11}(t) = 0,$$
$$r_1(t) = \frac{|2t \sin t \cos t^2 - \cos t \sin t^2|}{\beta_1(t)}, \quad r_2(t) = 0, \quad \beta_2(t) = r_1(t).$$

График функции $\beta_0(t)$ для системы (5.2) изображен на рис. 5.3.

Вычисление матрицы Коши для системы, получившейся в результате приведения системы (5.2), заняло 20 секунд. Значения функции $\mathbf{s}(t)$ на сетке были получены за 65 секунд. График функции $\mathbf{s}(t) - t$ для системы (5.2) показан на рис. 5.4.

Применение алгоритма Гаусса к системе (5.2) заняло 4 секунды.

При этом получились следующие матрицы $Q(t)$ и $F(t)$:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \sin t^2 & \dfrac{1}{\sin t} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{ctg} t & 0 \\ \cos t \sin t^2 - 2t \sin t \cos t^2 & \operatorname{ctg} t \end{pmatrix}.$$

График соответствующей функции $\beta_0(t)$ изображен на рис. 5.5. Функция $\mathbf{s}(t)$ для алгоритма Гаусса совпадает с функцией $\mathbf{s}(t)$ для алгоритма ортогонализации (см. рис. 5.4).

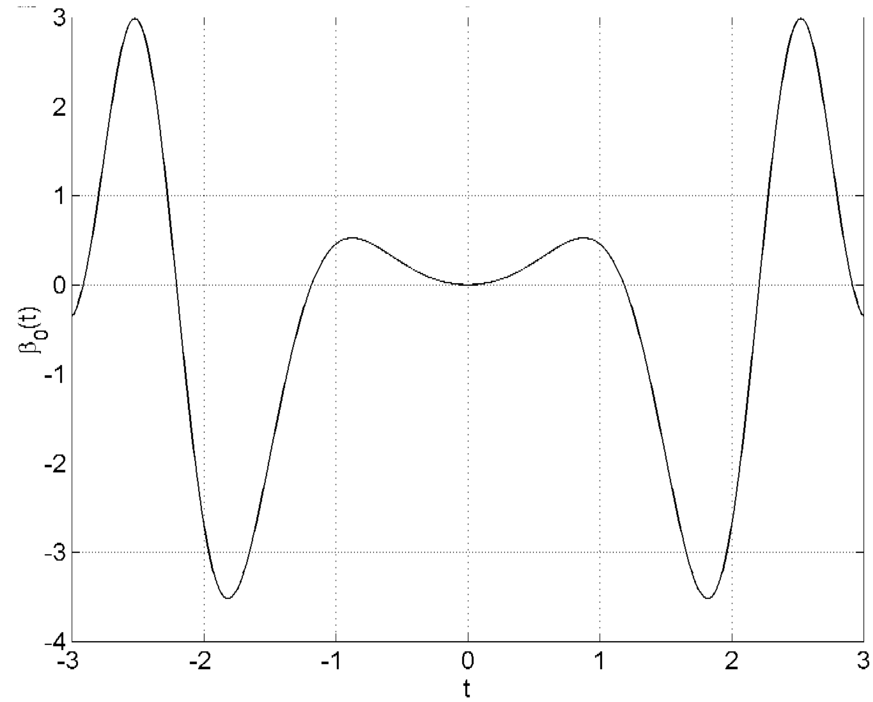

Рис. 5.5. График функции $\beta_0(t)$ для системы (5.2), преобразованной при помощи алгоритма Гаусса.

Система

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_1 \sin t + x_2 \sin \sqrt{2} t + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 \cos \sqrt{2} t + x_3 \sin t, \quad \dot{x}_3 = x_1 \cos t. \end{gathered} \tag{5.3}$$

была преобразована к системе вида (3.1) при помощи алгоритма ортогонализации за 7 секунд. Элементы матриц $Q(t)$ и $F(t)$ имеют вид:

$$q_{11}(t) = 1, \quad q_{12}(t) = q_{13}(t) = q_{21}(t) = q_{31}(t) = 0,$$

$$q_{22}(t) = -\frac{\cos(\sqrt{2}t)}{\sqrt{\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2 + \left(\cos(t)\right)^2}},$$

$$q_{32}(t) = -\frac{\cos(t)}{\sqrt{\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2 + (\cos(t))^2}},$$

$$q_{23}(t) = \operatorname{sign}\Big(\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\cos(t) - \sin(t)\cos(\sqrt{2}t) +$$
$$+ (\cos(t))^2\sin(t)\Big)\, q_{32}(t),$$

$$q_{33}(t) = -\operatorname{sign}\Big(\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\cos(t) - \sin(t)\cos(\sqrt{2}t) +$$
$$+ (\cos(t))^2\sin(t)\Big)\, q_{22}(t),$$

$$f_{11}(t) = f_{31}(t) = 0, \quad f_{12}(t) = \frac{\sin(t+\sqrt{2}t)}{\sqrt{\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2 + (\cos(t))^2}},$$

$$r_1(t) = \Big(\cos(\sqrt{2}t)\cos(t)\,(\sin(t))^2 - \sin(t)\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2\sin(\sqrt{2}t) -$$
$$-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^2\sin(t) + \sqrt{2}\cos(t)\cos(\sqrt{2}t)\left(\sin(\sqrt{2}t)\right)^2 -$$
$$-(\cos(t))^3(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2\sin(t)\sin(\sqrt{2}t)\cos(\sqrt{2}t)\Big) \Big/$$
$$\sqrt{\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2 + (\cos(t))^2}\,\Big[\left(\sqrt{2}\cos(t)\sin(\sqrt{2}t) - \cos(\sqrt{2}t)\sin(t)\right)^2 +$$
$$+2\sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^3\sin(t) - 2\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^2(\sin(t))^2 +$$
$$+(\cos(t))^4(\sin(t))^2\Big]^{1/2},$$

$$\beta_2(t) = \sqrt{\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2 + (\cos(t))^2}, \quad f_{22}(t) = \frac{\cos(\sqrt{2}t)\cos(t)\sin(t)}{\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2 + (\cos(t))^2},$$

$$r_2(t) = \Big(\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\sin(t))^2 + \left(\sin(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^2 -$$
$$-\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^2(\sin(t))^2 - 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\cos(t)\sin(t)\cos(\sqrt{2}t) +$$
$$+\sqrt{2}\sin(t)\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2\sin(\sqrt{2}t)\cos(t) + 3\,(\cos(t))^2 +$$
$$+\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\sin(t))^2 - \left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^4 +$$
$$+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^3\sin(t)\Big) \Big/$$

$$\left(\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2+(\cos(t))^2\right)\left[\left(\sqrt{2}\cos(t)\sin(\sqrt{2}t)-\cos(\sqrt{2}t)\sin(t)\right)^2+\right.$$
$$+2\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^3\sin(t)-2\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^2\,(\sin(t))^2+$$
$$\left.+\,(\cos(t))^4\,(\sin(t))^2\right]^{1/2},$$
$$\beta_3(t)=\left[\left(\sqrt{2}\cos(t)\sin(\sqrt{2}t)-\cos(\sqrt{2}t)\sin(t)\right)^2+\right.$$
$$+2\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^3\sin(t)-2\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^2\,(\sin(t))^2+$$
$$\left.+\,(\cos(t))^4\,(\sin(t))^2\right]^{1/2}\left(\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2+(\cos(t))^2\right),$$
$$r_3(t)=\Big(\cos(\sqrt{2}t)\cos(t)\,\Big(2\,(\cos(t))^{10}\sin(t)-(\cos(t))^{12}\sin(t)-$$
$$-\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4\sin(t)+24\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^4\sin(t)-$$
$$-8\,(\cos(t))^5\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+11\,(\cos(t))^8\sin(t)-4\,(\cos(t))^4\sin(t)-$$
$$-12\,(\cos(t))^6\sin(t)-12\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^3\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+$$
$$+12\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^9\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}-$$
$$-16\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^3\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+$$
$$+4\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^5\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+$$
$$+32\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^5\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+$$
$$+4\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\cos(t)-$$
$$-20\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^7\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+$$
$$+12\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^5\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+$$
$$+8\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^3\cos(\sqrt{2}t)-$$
$$-24\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^7\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}-17\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4(\cos(t))^4\sin(t)+$$
$$+4\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^2\sin(t)-32\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^4\sin(t)+$$
$$+14\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4(\cos(t))^2\sin(t)+4\,(\cos(t))^7\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+$$

$$+8\,(\cos(t))^9\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+4\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^{10}\sin(t)-$$
$$-12\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^2\sin(t)-20\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^6\sin(t)-$$
$$-8\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^8\sin(t)-18\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^8\sin(t)-$$
$$-4\,(\cos(t))^{11}\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}+24\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^6\sin(t)+$$
$$+28\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^6\sin(t)+14\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^4\sin(t)\Big)\Big)\Big/$$
$$\Big(4\,(\cos(t))^6+(\cos(t))^{14}-11\,(\cos(t))^{10}+12\,(\cos(t))^8+$$
$$+17\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^6(\cos(t))^4-28\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^5(\cos(t))^6-$$
$$-14\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^6(\cos(t))^2+8\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^{10}+$$
$$+20\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^8-4\,\cos(\sqrt{2}t)\,(\cos(t))^{12}-$$
$$-4\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^{10}+13\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4(\cos(t))^2+$$
$$+52\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^6-35\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^8-$$
$$-28\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4(\cos(t))^4-7\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4(\cos(t))^6-$$
$$-24\,(\cos(t))^6\cos(\sqrt{2}t)-2\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^6+$$
$$+16\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^4-28\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^4-$$
$$-4\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^5(\cos(t))^2-20\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^8+$$
$$+18\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4(\cos(t))^8+16\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^{10}+$$
$$+32\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^5(\cos(t))^4+12\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^7\sin(t)\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3+$$
$$+12\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^9\sin(t)\cos(\sqrt{2}t)-$$
$$-4\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^5\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\cos(t)\sin(t)+$$
$$+12\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^3\sin(t)+$$
$$+8\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^7\sin(t)-$$

$$-12\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^7\sin(t)\cos(\sqrt{2}t)+$$
$$+20\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^5\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\sin(t)-$$
$$-12\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^3(\cos(t))^3\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\sin(t)-$$
$$-8\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^5\sin(t)\cos(\sqrt{2}t)+$$
$$+4\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^9\sin(t)-4\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^{11}\sin(t)-$$
$$-4\,\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\,(\cos(t))^9\sin(t)\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2-$$
$$-20\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^4(\cos(t))^5\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\sin(t)-$$
$$-16\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2(\cos(t))^7\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\sin(t)+$$
$$+12\,\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^5(\cos(t))^3\sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2}\sin(t)+$$
$$\left.+\,(\cos(t))^{12}\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^2-2\,(\cos(t))^{12}+\left(\cos(\sqrt{2}t)\right)^6\right).$$

График функции $\beta_0(t)$ для системы (5.3) изображен на рис. 5.7.

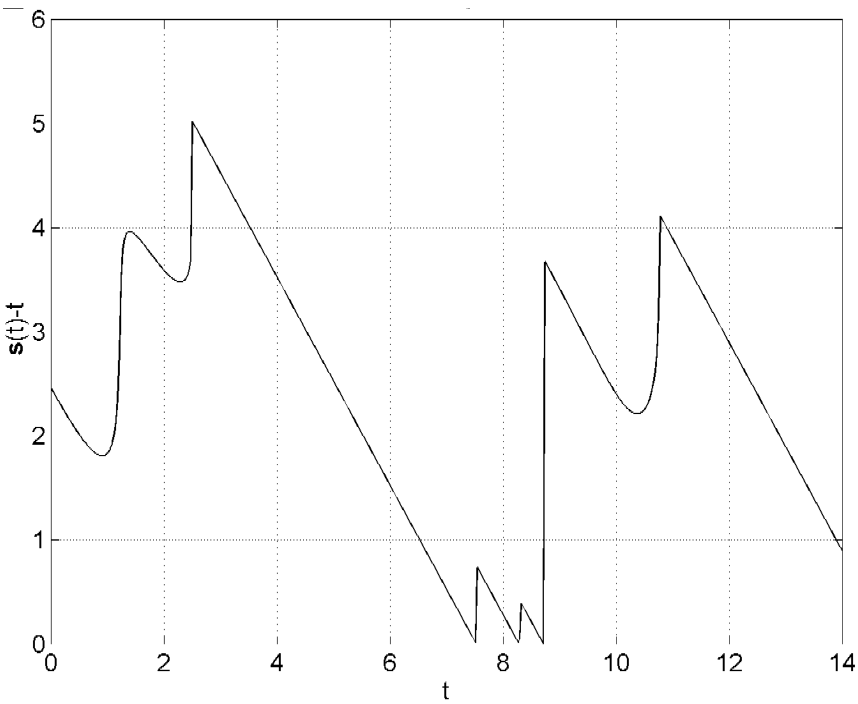

Рис. 5.6. График функции $\mathbf{s}(t)-t$ для системы (5.3).

Вычисление матрицы Коши для системы, получившейся в результате приведения системы (5.3), заняло 200 секунд. Значения функции

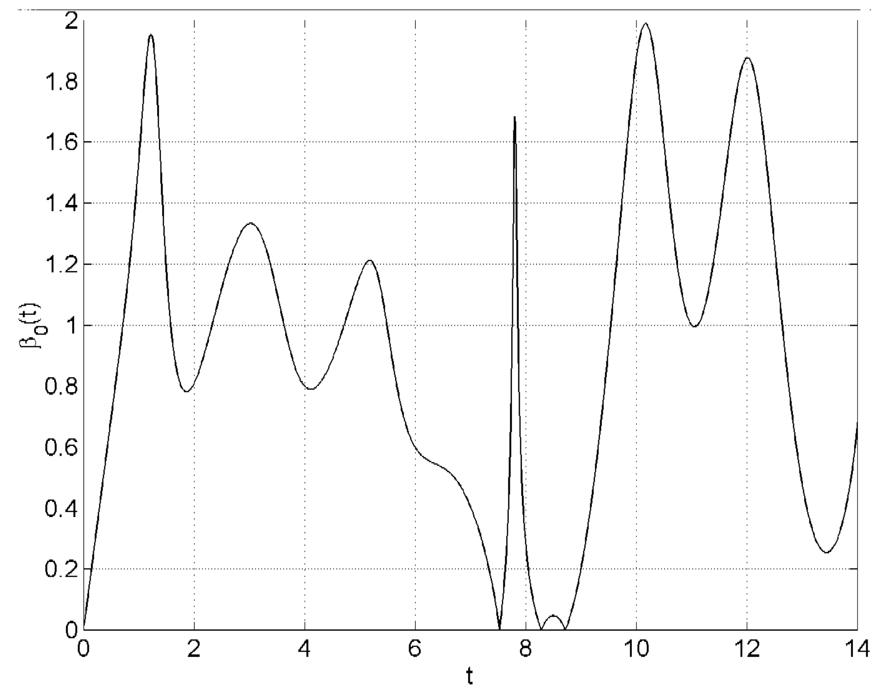

Рис. 5.7. График функции $\beta_0(t)$ для системы (5.3).

$\mathbf{s}(t)$ на сетке были получены за 635 секунд. График функции $\mathbf{s}(t) - t$ для системы (5.3) показан на рис. 5.6.

Для преобразования системы (5.3) с помощью алгоритма Гаусса потребовалось 1 секунда. В этом случае получились матрицы $Q(t)$ и $F(t)$:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos t}{\cos\sqrt{2}t} & \dfrac{1}{\cos\sqrt{2}t} \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sin t + \cos t \operatorname{tg}\sqrt{2}t & \operatorname{tg}\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t & \dfrac{\sin t \cos t}{\cos\sqrt{2}t} & \dfrac{\sin t}{\cos\sqrt{2}t} \\ 0 & -\sqrt{2}\cos t \operatorname{tg}\sqrt{2}t - \sin t + \dfrac{\sin t \cos^2 t}{\cos\sqrt{2}t} & -\sqrt{2}\operatorname{tg}\sqrt{2}t - \dfrac{\sin t \cos t}{\cos\sqrt{2}t} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что длины промежутков Q-приводимости в этом случае меньше длин промежутков Q-приводимости для алгоритма ортогонализации.

Оказывается, что алгоритм Гаусса требует меньше вычислительных ресурсов и приводит к менее громоздким результатам по сравнению с алгоритмом ортогонализации. Однако промежутки Q-приводимости в алгоритме ортогонализации получаются больше, чем в алгоритме Гаусса, что приводит к более точной оценке (снизу) функции $\sigma(t)$. Последнее объясняется тем, что в алгоритме Гаусса производится деление на компоненты матриц, тогда как в алгоритме ортогонализации требуется деление на модули некоторых векторов. Исходя из всего сказанного, можно предложить использовать алгоритм ортогонализации для систем малой размерности при компьютерных расчетах, а алгоритм Гаусса для систем большой размерности и при расчетах вручную.

Глава 2. Структура множества управляемости и позиционное управление

В этой главе вводятся основные определения, связанные с множествами управляемости, функцией быстродействия и позиционным управлением. Все рассуждения проводятся в предположении докритичности системы. Доказана слабая инвариантность расширенного множества управляемости. Для теоремы о структуре множества управляемости первого порядка получено более простое доказательство. Исследованы условия гладкости границы множества управляемости, при помощи которых затем получены достаточные условия трансверсальности на левом конце траектории. Доказана дифференцируемость функции быстродействия по направлениям, не являющимся элементами касательных пространств к соответствующим многообразиям.

Факт дифференцируемости функции быстродействия в любом направлении позволяет устранить пробел в доказательстве теоремы о $\mathcal{C}$-позиционном управлении возмущенной системой, а также доказать теорему об $\mathcal{F}$-позиционном управлении возмущенной системой. Эти теоремы утверждают, что оптимальное в смысле быстродействия позиционное управление, построенное для линейной системы, является позиционным для целого класса нелинейных систем близких к исходной линейной, т. е. переводит на ось t за конечное время любую точку из некоторого множества в расширенном фазовом пространстве нелинейной системы.

Многие определения и теоремы этой главы снабжены иллюстрирующими рисунками и примерами, для которых проведен численный расчет и построены графики.

§ 6. Множество управляемости

В этом параграфе вводятся основные определения, связанные с множествами управляемости первого и второго порядка, и изучается структура множества управляемости первого порядка в предположении докритичности системы (1.1). Теорема 6.1 является модификацией соответствующей теоремы из работ [21, 24].

Функцией быстродействия в нуль называется функция

$$\Theta(t_0, x_0) \doteq \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \{\theta \geqslant 0\colon\ x(t_0+\theta, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\}.$$

Определим расширенное множество управляемости первого порядка равенством

$$\mathfrak{D}_1 \doteq \left\{(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}\colon\ \Theta(t_0, x_0) \leqslant \sigma(t_0)\right\}.$$

Функция быстродействия на замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$ определяется следующим образом:

$$\Theta(t_0, x_0, G) \doteq \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \{\theta \geqslant 0\colon\ (t_0+\theta, x(t_0+\theta, t_0, x_0, u(\cdot))) \in G\}.$$

Расширенным множеством управляемости второго порядка будем называть множество

$$\mathfrak{D}_2 \doteq \left\{(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n} \setminus \mathfrak{D}_1\colon\ \Theta(t_0, x_0, \mathfrak{D}_1) \leqslant \sigma(t_0)\right\}.$$

Функции быстродействия в нуль и на множество показывают, за какое минимальное время можно из заданной точки (t_0, x_0) расширенного фазового пространства попасть на ось t или на заданное множество, соответственно. Расширенные множества управляемости первого и второго порядка состоят из всех тех точек, из которых можно попасть на ось t или на расширенное множество управляемости первого порядка, соответственно, при помощи управления, имеющего не более $(n-1)$-го переключения.

Множества управляемости первого $D_1(t_0)$ и второго порядка $D_2(t_0)$ определяются как сечения соответствующих расширенных множеств управляемости, т. е.

$$D_\nu(t_0) \doteq \{x_0 \in \mathbb{R}^n\colon\ (t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_\nu\}, \quad \nu = 1, 2.$$

Для упрощения обозначений будем писать $\mathfrak{D} \doteq \mathfrak{D}_1$, $D(t_0) \doteq D_1(t_0)$. Кроме того, нам понадобится множество управляемости за время ϑ

$$D(t_0, \vartheta) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n\colon\ \Theta(t_0, x_0) \leqslant \vartheta\}.$$

Очевидно, $D(t_0, \sigma(t_0)) = D(t_0)$.

Множества управляемости для $n = 2$ схематично изображены на рис. 6.1. Фрагмент расширенного множества управляемости первого порядка $\mathfrak{D}$ для системы (5.1) показан на рис. 6.2.

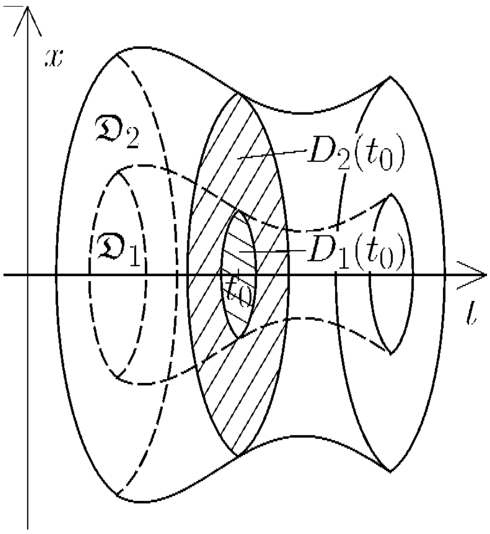

Рис. 6.1. Множества управляемости для $n = 2$.

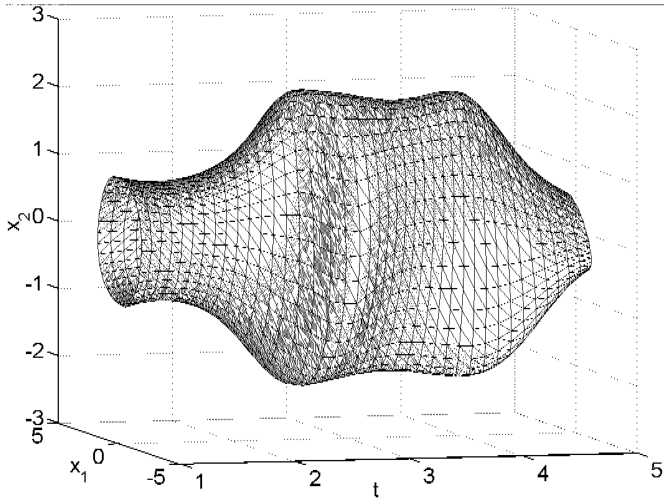

Рис. 6.2. Фрагмент множества $\mathfrak{D}$ для системы (5.1).

Напомним, что множество $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется **слабо инвариантным**, если для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ найдется такое допустимое управление $u(\cdot)$, что траектория $(t, x(t, t_0, x_0, u(\cdot)))$ не покидает множество G для всех $t \geqslant t_0$.

Утверждение 6.1. (см. [32]). *Множества $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_1 \bigcup \mathfrak{D}_2$ слабо инвариантны.*

Доказательство. Проведем сначала доказательство слабой инвариантности множества $\mathfrak{D}_1$. Пусть точка (t_0, x_0) принадлежит множеству $\mathfrak{D}_1$. По определению множества управляемости $x_0 \in D_1(t_0)$, т. е. существуют момент времени $t_1 \in [t_0, s(t_0)]$ и допустимое управление $u(\cdot)$ такие, что $x(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0$ для любого $t \geqslant t_1$. Выберем произвольное $t_2 > t_0$, и пусть $x_2 = x(t_2, t_0, x_0, u(\cdot))$.

Если $t_2 \geqslant t_1$, то $x_2 = 0$, откуда следует, что $(t_2, x_2) \in \mathfrak{D}_1$ по определению множества $\mathfrak{D}_1$.

Теперь предположим, что $t_2 < t_1$. Тогда для любого $t \geqslant t_1$ будем иметь $x(t, t_2, x_2, u(\cdot)) = x(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0$. Из утверждения 2.1 следует, что $t_1 \leqslant s(t_0) \leqslant s(t_2)$, т. е. точка (t_2, x_2) есть элемент множества

$\mathfrak{D}_1$. Таким образом, для любого $t_2 > t_0$ имеем $(t_2, x(t_2, t_0, x_0, u(\cdot))) \in \mathfrak{D}_1$, что доказывает слабую инвариантность множества $\mathfrak{D}_1$.

Аналогично докажем слабую инвариантность множества $\mathfrak{D}_1 \bigcup \mathfrak{D}_2$. Действительно, пусть $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_2$. Тогда $x_0 \in D_2(t_0)$, т. е. существуют минимальный момент времени $t_1 \in (t_0, s(t_0)]$ и допустимое управление $u(\cdot)$ такие, что $x(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ принадлежит $D_1(s(t_0))$ для любого $t \geqslant t_1$. Выберем произвольное $t_2 \in (t_0, t_1)$, и пусть $x_2 = x(t_2, t_0, x_0, u(\cdot))$. Тогда для любого $t \geqslant t_1$ имеем

$$x(t, t_2, x_2, u(\cdot)) = x(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \in D_1(s(t_0)).$$

Из утверждения 2.1 следует, что $t_1 \leqslant s(t_0) \leqslant s(t_2)$, т. е. точка (t_2, x_2) есть элемент множества $\mathfrak{D}_1 \bigcup \mathfrak{D}_2$. Утверждение 6.1 доказано.

Далее в этом параграфе будут изучаться только множества управляемости первого порядка.

Для каждого $k = 0, \ldots, n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообразие $M^k(t)$, вложенное в пространство $\mathbb{R}^k$:

$$M^0(t) \doteq \{0\}, \quad M^k(t) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k+1}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n)\colon \\ 0 < \tau_{n-k+1} < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n < \sigma(t)\},$$

$$\mathcal{M}^{1+k} = \{(t, x)\colon\ x \in M^k(t)\}.$$

Всякой точке $p = (t, \tau)$, где $\tau = (\tau_{n-k+1}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n)$ поставим в соответствие точку $q = (t, x)$, где $x = 0$ при $k = 0$, а при $k \in \{1, \ldots, n\}$ точка $x(p) = \overset{+}{F}{}_0^k(p)$ определена равенством

$$\overset{+}{F}{}_0^k(p) = \overset{+}{F}{}_0^k(t, \tau) \doteq -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}} X(t, s) b(s)\, ds, \tag{6.1}$$

где $\tau_{n-k} = 0$. Таким образом, для каждого k задана функция $q = \overset{+}{F}{}^k(p)$. Пусть, теперь, $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \doteq \overset{+}{F}{}^k\left(\mathcal{M}^{1+k}\right)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$. При $k = 0$ пусть $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^1 = \overset{-}{\mathcal{N}}{}^1 \doteq \{(t, 0) :\ t \in \mathbb{R}\}$. Аналогично определим функции $\overset{-}{F}{}^k$ и множества $\overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$. Кроме того, для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$ определим многообразия $\mathcal{N}^{1+k} = \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \bigcup \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$.

В силу принципа максимума (1.5) и условия докритичности системы (1.1), оптимальное управление, переводящее точку $(t, x) \in \mathfrak{D}$ в точку $(t + \Theta(t, x), 0)$, принимает значения ± 1 и имеет не более $(n-1)$-го переключения (моменты переключения оптимального управления совпадают с узлами функции $\xi(t) = \psi(t)b(t)$, где $\psi(t)$ — нетривиальное решение сопряженной системы (1.4)). Таким образом, для любой точки $(t, x) \in \mathfrak{D}$ найдется целое k, $1 \leqslant k \leqslant n$ и вектор $\tau \in \mathcal{M}^{1+k}$ такие, что соответствующее оптимальное управление имеет переключения в точках $t + \tau_i$, $i = n - k + 1, \ldots, n - 1$ и переводит точку (t, x) в точку $(t + \Theta(t, x), 0)$ за время τ_n. Множеству $\mathcal{M}^2$ соответствуют управления без переключений.

Рассмотрим управление $u(\cdot, p)\colon\ [t, t+\tau_n] \to \{-1, 1\}$, начинающееся с $+1$ и имеющее переключения в моменты $t+\tau_i$, где $i = n-k+1, \ldots, n-1$ (будем считать $u(t + \tau_i, p) = 1$). Равенство (6.1) можно переписать в виде

$$x(p) = -\int_t^{t+\tau_n} X(t, s)b(s)u(s, p)\, ds. \tag{6.2}$$

Из равенства (6.2) и формулы Коши (1.2) следует

$$\begin{aligned} x(t + \tau_n, t, x(p), u(\cdot, p)) = -X(t + \tau_n, t) \int_t^{t+\tau_n} X(t, s)b(s)u(s, p)\, ds+ \\ + \int_t^{t+\tau_n} X(t + \tau_n, s)b(s)u(s, p)\, ds = 0, \end{aligned}$$

т. е. управление $u(\cdot, p)$ переводит точку $x(p)$ в нуль за время $\tau_n < \sigma(t)$, поэтому $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \subset \mathfrak{D}$.

Далее определим следующие множества (см. рис. 6.3 и рис. 6.4). Сечения множеств $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ и $\overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ при фиксированном t :

$$\overset{+}{N}{}^{k}(t) \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n\colon\ (t, x) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\overset{-}{N}{}^{k}(t) \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n\colon\ (t, x) \in \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Сечения множеств $\overset{+}{N}{}^{k+1}(t)$ и $\overset{-}{N}{}^{k+1}(t)$ при фиксированном времени быстродействия:

$$\begin{aligned} \overset{+}{N}{}^{k}(t, \vartheta) \doteq \left\{ x \in \overset{+}{N}{}^{k+1}(t)\colon\ \Theta(t, x) = \vartheta \right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n - 1, \\ \overset{-}{N}{}^{k}(t, \vartheta) \doteq \left\{ x \in \overset{-}{N}{}^{k+1}(t)\colon\ \Theta(t, x) = \vartheta \right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n - 1. \end{aligned} \tag{6.3}$$

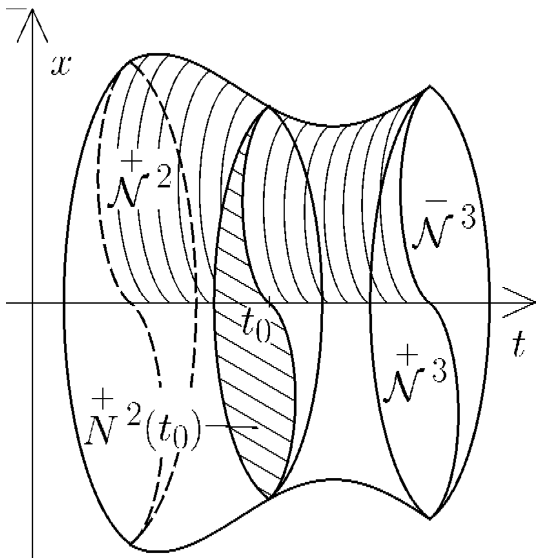

Рис. 6.3. Структура расширенного множества управляемости для $n = 2$.

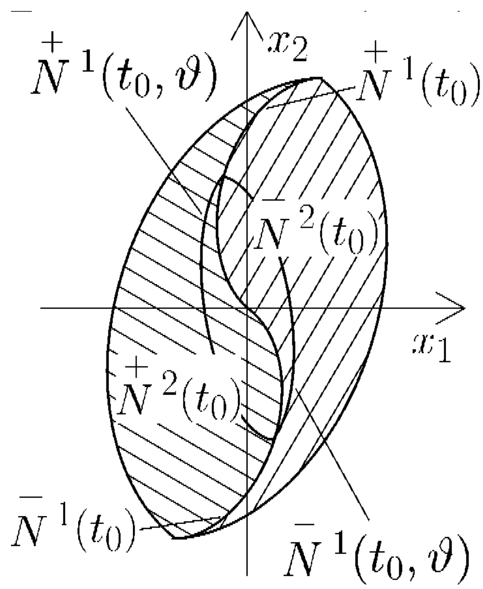

Рис. 6.4. Структура множества управляемости для $n = 2$.

Легко видеть, что множества $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ и $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ являются подмножествами множества управляемости $D(t,\vartheta)$ и состоят из всех точек фазового пространства $\mathbb{R}^n$, которые можно перевести в нуль за время ϑ при помощи оптимального в смысле быстродействия управления, имеющего ровно k переключений и начинающегося с $+1$ или -1, соответственно. Множества $\overset{+}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ были определены при условии $\vartheta < \sigma(t)$. При $\vartheta = \sigma(t)$ определим их как множества точек фазового пространства $\mathbb{R}^n$, которые переводятся в нуль за время $\sigma(t_0)$ при помощи оптимального в смысле быстродействия управления, имеющего ровно k переключений и начинающегося с $+1$ или -1, соответственно. Кроме того, нам потребуются множества $N^k(t_0,\vartheta) \doteq \overset{+}{N}{}^k(t_0,\vartheta) \bigcup \overset{-}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$.

В работах [21, 24] множества $\overset{+}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ обозначались при помощи символов $N_+^k(t_0,\vartheta)$ и $N_-^k(t_0,\vartheta)$, соответственно. Ниже сформулирована и доказана теорема о структуре множества управляемости $D(t_0,\vartheta)$, аналогичная теореме из этих работ. Приведенное здесь доказательство более простое, чем в указанных работах.

Напомним, что множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется **телом**, если его внутренность непуста, и **строго выпуклым**, если для любых $x_1, x_2 \in G$ и для любого $\lambda \in (0,1)$ точка $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \operatorname{int} G$.

Т е о р е м а 6.1. *Пусть система* (1.1) *докритическая, причем функции* $A(\cdot)$ *и* $b(\cdot)$ *принадлежат классу* C^r, *где* $r \geqslant 0$. *Тогда при любом* $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ *множество управляемости* $D(t_0, \vartheta)$ *есть строго выпуклое тело в* $\mathbb{R}^n$. *Его граница является объединением непересекающихся гладких* (*гладкости* $r{+}1$) *многообразий* $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ *и* $\overset{-}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ *размерности* k, *где* $k = 0, \ldots, n{-}1$. *Объединение* $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overset{+}{N}{}^i(t_0, \vartheta)\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overset{-}{N}{}^i(t_0, \vartheta)\right)$ *есть общий край многообразий* $\operatorname{cl} \overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ *и* $\operatorname{cl} \overset{-}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$. *Кроме того, всякой точке* x_0 *из множества* $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta) \bigcup \overset{-}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ *отвечает единственное оптимальное управление, переводящее* x_0 *в нуль и имеющее ровно* k *переключений на интервале* $(t_0, t_0 + \vartheta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы проведем все рассуждения лишь для множеств $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$. В силу симметрии, все полученные результаты будут справедливы и для множеств $\overset{-}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$.

Сначала будем доказывать включение $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta) \subset \partial D(t_0, \vartheta)$. Известно, что $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta) \subset D(t_0, \vartheta)$. Предположим, что существует точка $x_0 \in \overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$, не принадлежащая $\partial D(t_0, \vartheta)$. Тогда $x_0 \in \operatorname{int} D(t_0, \vartheta)$, и для времени быстродействия $\Theta(t_0, x_0)$ выполнено неравенство $\Theta(t_0, x_0) < \vartheta$. Соответствующее оптимальное управление обозначим $u_0(t)$. С другой стороны, из определения множества $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ следует, что существует управление $u(t, p)$, которое переводит точку x_0 в нуль за время ϑ (здесь $p = (t_0, \tau)$). Доопределим $u_0(t)$ на $(t_0 + \Theta(t_0, x_0), t_0 + \vartheta]$ тождественным нулем, и пусть $v(t) \doteq u(t, p) - u_0(t)$. Рассмотрим функцию $w(t) \doteq v(t) u(t, p)$. Функция $u(t, p)$ принимает значения ± 1. Если $u(t, p) = 1$, то

$$w(t) = u^2(t, p) - u_0(t) u(t, p) = 1 - u_0(t) \geqslant 0,$$

поскольку $|u_0(t)| \leqslant 1$. Если же $u(t, p) = -1$, то $w(t) = 1 + u_0(t) \geqslant 0$. Таким образом, функция $w(t)$ неотрицательна, т. е. знаки функций $v(t)$ и $u(t, p)$ совпадают. Легко видеть, что функция $y(t) = x(t, t_0, x_0, u(t, p)) - x(t, t_0, x_0, u_0(t))$ является решением задачи

$$\dot{y} = A(t) y + b(t) v(t), \quad y(t_0) = y(t_0 + \vartheta) = 0.$$

По формуле Коши (1.2) имеем

$$\int_{t_0}^{t_0 + \vartheta} X(t_0, s) b(s) v(s)\, ds = 0. \tag{6.4}$$

Управление $u(t,p)$ имеет переключения в моменты времени $t+\tau_i$, где $i=n-k+1,\dots,n-1$. В силу следствия 2.2, существует вектор $\psi\in S^{n-1}$ такой, что функция $\xi(t)=\psi X(t_0,t)b(t)$ имеет узлы в точках $t+\tau_i$, причем $\xi(t)u(t,p)\geqslant 0$, т. е. $\xi(t)v(t)\geqslant 0$. Умножая равенство (6.4) на ψ, получим

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta}\xi(s)v(s)\,ds=0, \tag{6.5}$$

причем подынтегральное выражение неотрицательно. Поэтому $v(t)$ есть нуль, т. е. управления $u(t,p)$ и $u_0(t)$ совпадают, что противоречит нашему предположению. Поэтому $\overset{+}{N}{}^k(t_0,\vartheta)\subset\partial D(t_0,\vartheta)$.

Доказательство единственности управления $u(t,p)$, переводящего точку $x_0\in\overset{+}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ в нуль, проводится аналогично. Если предположить, что существует другое управление $u_1(t)$, которое переводит x_0 в нуль, то, рассмотрев функцию $v_1(t)\doteq u(t,p)-u_1(t)$, придем к равенству вида (6.5) и получим $u(t,p)\equiv u_1(t)$. Мы доказали, что множества $\overset{+}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ попарно не пересекаются, а управление $u(t,p)$ оптимально в смысле быстродействия. Далее будем считать, что всякое оптимальное управление принимает значение $+1$ в моменты переключения. Это обеспечивает единственность оптимального управления.

Теперь докажем, что множества $\overset{+}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ являются многообразиями размерности k и гладкости $r+1$. Дифференцируя функции $\overset{+}{F}{}_0^k(t,\tau)$ по компонентам вектора τ, получим

$$\frac{\partial\overset{+}{F}{}_0^k(t,\tau)}{\partial\tau_i}=2(-1)^{i-n+k}h_i,\quad i=n-k+1,\dots,n-1, \tag{6.6}$$

где $h_i=X(t_0,t_0+\tau_i)b(t_0+\tau_i)$. Докажем, что векторы h_i, $i=1,\dots,n-1$, линейно независимы. Предположим противное, т. е. пусть существуют числа $c_1,\dots,c_{n-1}$, не равные нулю одновременно такие, что

$$c_1h_1+\dots+c_{n-1}h_{n-1}=0.$$

Поэтому для всякого $\psi\in\mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$c_1\xi(\tau_1)+\dots+c_{n-1}\xi(\tau_{n-1})=0, \tag{6.7}$$

где $\xi(t)=\psi X(t_0,t)b(t)$. Пусть $c_j\neq 0$. По утверждению 2.2 найдется такой вектор $\psi\neq 0$, что функция $\xi(t)$ имеет нули в точках $t+\tau_i$ при $i\neq j$, но $\xi(t+\tau_j) \neq 0$. Из равенства (6.7) следует, что $c_j\xi(t_0+\tau_j) = 0$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость векторов $h_1, \ldots, h_n$.

Из линейной независимости векторов h_i следует линейная независимость производных (6.6), поэтому матрица

$$\left(\frac{\partial \overset{+}{F}{}_0^k(t,\tau)}{\partial \tau_{n-k+1}}, \ldots, \frac{\partial \overset{+}{F}{}_0^k(t,\tau)}{\partial \tau_{n-1}} \right)$$

имеет ранг $k-1$ (размерность этой матрицы, очевидно, равна $n \times (k-1)$). В силу теоремы об обратной функции, отображение $\overset{+}{F}{}_0^{k+1} : \mathcal{M}^{1+k}(\vartheta) \to \overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ биективно. Таким образом, множество $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ представляет собой дифференцируемое многообразие размерности k. Легко видеть, что векторы h_i как функции вектора τ принадлежат классу C^r. Поэтому многообразие $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ имеет гладкость $r+1$.

Непосредственно из того, что, как легко видеть, объединение $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \mathcal{M}^{1+i}$ является краем многообразия $\operatorname{cl}\mathcal{M}^{1+k}$, получается утверждение о том, что объединение $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overset{+}{N}{}^i(t_0,\vartheta)\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overset{-}{N}{}^i(t_0,\vartheta)\right)$ есть общий край многообразий $\operatorname{cl}\overset{+}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$ и $\operatorname{cl}\overset{-}{N}{}^k(t_0,\vartheta)$.

Очевидно, что если $0 < \theta < \vartheta$, то $D(t_0,\theta) \subset \operatorname{int} D(t_0,\vartheta)$, т. е. множество $D(t_0,\vartheta)$ является телом. Осталось доказать его строгую выпуклость. Пусть $x_0, x_1 \in \partial D(t_0,\vartheta)$. Предположим, что существует такое $\lambda \in (0,1)$, что $x_\lambda = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \in \partial D(t_0,\vartheta)$. По формуле Коши (1.2)

$$\begin{aligned} X(t_0+\vartheta,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0+\vartheta,s)b(s)u_0(s)\,ds = 0, \\ X(t_0+\vartheta,t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0+\vartheta,s)b(s)u_1(s)\,ds = 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

где $u_0(t)$ и $u_1(t)$ — оптимальные управления для точек x_0 и x_1, соответственно. Умножая равенства (6.8) на λ и $(1-\lambda)$ и складывая, получим

$$X(t_0+\vartheta,t_0)x_\lambda + \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0+\vartheta,s)b(s)u_\lambda(s)\,ds = 0,$$

где $u_\lambda(t) = \lambda u_0(t) + (1-\lambda)u_1(t)$. Поскольку управление $u_\lambda(t)$ переводит точку $x_\lambda \in \partial D(t_0, \vartheta)$ в нуль за время ϑ, то управление $u_\lambda(t)$ является оптимальным и удовлетворяет принципу максимума. Поэтому $|u_\lambda(t)| = 1$. Управления $u_0(t)$ и $u_1(t)$ не совпадают, т. е. найдется точка t_1, в которой $u_0(t_1) \neq u_1(t_1)$. Следовательно, $u_\lambda(t_1) \in (-1, 1)$, что приводит к противоречию. Таким образом, строгая выпуклость множества управляемости доказана, и доказательство теоремы 6.1 завершено.

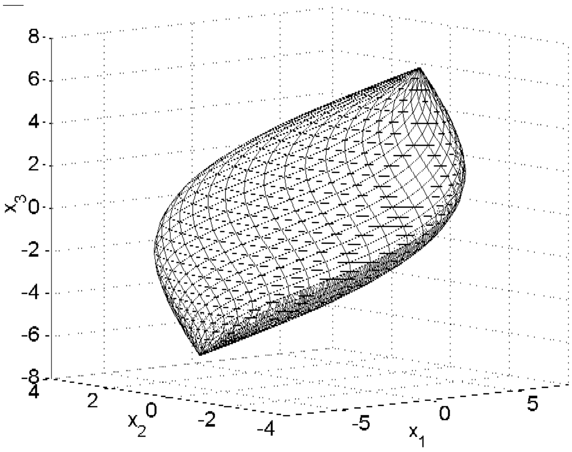

Рис. 6.5. Множество $D(0, \pi)$ для системы (6.9).

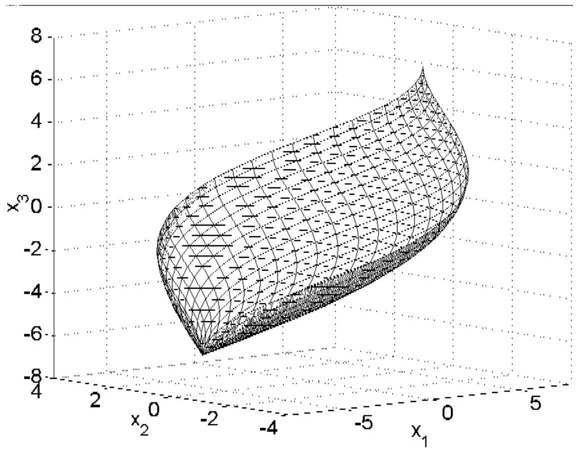

Рис. 6.6. Многообразие $\overset{+}{N}{}^2(0, \pi)$ для системы (6.9).

На рис. 6.5 и рис. 6.6 изображены множество управляемости $D(0, \pi)$ и многообразие $\overset{+}{N}{}^2(0, \pi)$ для системы

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \quad \dot{x}_3 = u. \tag{6.9}$$

На рис. 6.7 и рис. 6.8 показаны многообразия $\overset{+}{N}{}^2(0)$ и $\overset{-}{N}{}^2(0)$ для системы (6.9).

Т е о р е м а 6.2. *Пусть система* (1.1) *докритическая, причем функции* $A(\cdot)$ *и* $b(\cdot)$ *принадлежат классу* C^r, *где* $r \geqslant 0$. *Тогда ее расширенное множество управляемости можно представить в следующем виде:* $\mathfrak{D} = \mathrm{cl}\left(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n} \bigcup \overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}\right)$, *где*

$$\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+k} = \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \bigcup \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{k} \bigcup \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{N}^1,$$

$$\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+k} = \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \bigcup \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{k} \bigcup \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{N}^1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

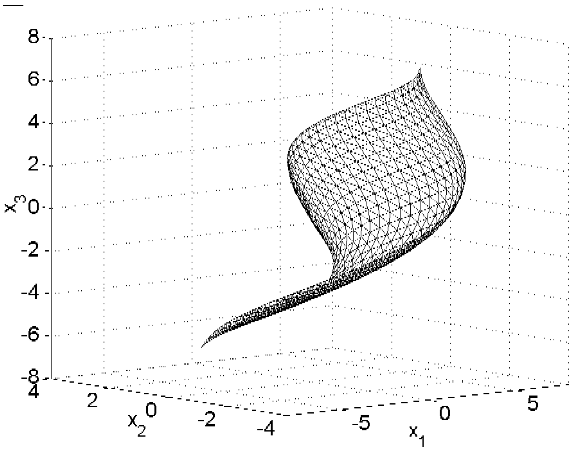

Рис. 6.7. Многообразие $\overset{+}{N}^{2}(0)$ для системы (6.9).

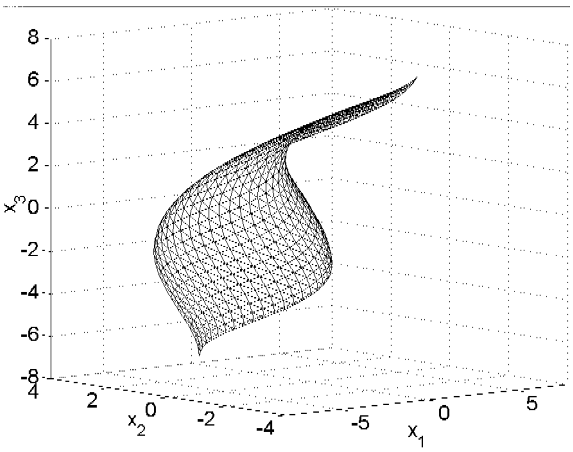

Рис. 6.8. Многообразие $\overset{-}{N}^{2}(0)$ для системы (6.9).

Многообразия $\overset{+}{\mathcal{N}}^{1+k}$ *и* $\overset{-}{\mathcal{N}}^{1+k}$ *имеют гладкость* $r+1$. *Множества* $\overset{+}{\mathfrak{N}}^{1+k}$, $\overset{-}{\mathfrak{N}}^{1+k}$ *слабо инвариатны, и для каждого* $k = 0, \ldots, n$ *множество* $\overset{+}{\mathfrak{N}}^{k} \bigcup \overset{-}{\mathfrak{N}}^{k}$ *является общим краем многообразий* $\operatorname{cl} \overset{+}{\mathcal{N}}^{1+k}$ *и* $\operatorname{cl} \overset{-}{\mathcal{N}}^{1+k}$.

На рис. 6.9 и 6.10 изображены фрагменты множеств $\overset{+}{\mathcal{N}}^{2}$ и $\overset{-}{\mathcal{N}}^{2}$ для системы (5.1).

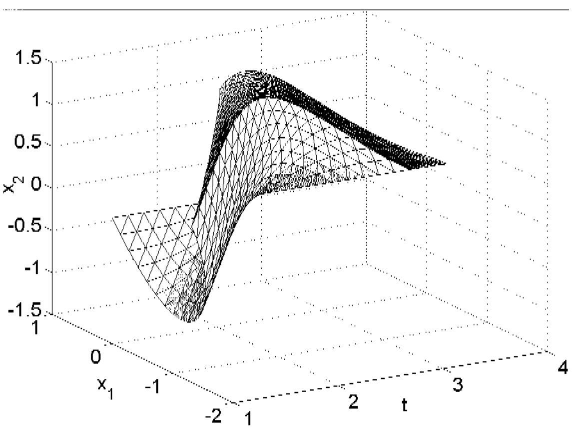

Рис. 6.9. Фрагмент множества $\overset{+}{\mathcal{N}}^{2}$ для системы (5.1).

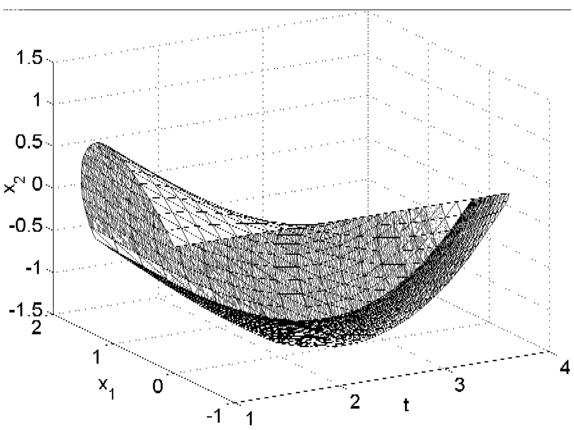

Рис. 6.10. Фрагмент множества $\overset{-}{\mathcal{N}}^{2}$ для системы (5.1).

§ 7. Угол между многообразиями, составляющими границу множества управляемости

В этом параграфе изучается вопрос об угле между многообразиями $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$. В частности доказано, что граница множества $D(t_0,\vartheta)$ не может быть гладкой при $\vartheta<\sigma(t_0)$, и найдены условия гладкости границы множества $D(t_0,\sigma(t_0))$. Результаты этого параграфа опубликованы в [32].

Под углом между многообразиями $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ в заданной точке $\hat{x}\in \operatorname{cl}\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)\bigcap \operatorname{cl}\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ будем понимать угол между предельными положениями касательных пространств $T_x\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$, $T_x\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ к многообразиям $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ при приближении точки x к $\hat{x}$ по многообразию $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ и многообразию $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$, соответственно.

Зафиксируем произвольную точку $\hat{x}\in\overset{+}{N}{}^{k-1}(t,\vartheta)$. Этой точке соответствует вектор $\hat{\tau}\in M^k(t)$ и $\hat{x}=\overset{-}{F}{}_0^k(t,\hat{\tau})$. В силу теоремы 6.1, $\hat{x}\in \operatorname{cl}\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)\bigcap \operatorname{cl}\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$. Поэтому существуют две последовательности $\{x^+\}\subset\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ и $\{x^-\}\subset\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$, сходящиеся к $\hat{x}$. Соответствующие им последовательности из $M^{k+1}(t)$ обозначим $\{\tau^+\}$ и $\{\tau^-\}$.

Докажем, что в качестве элементов последовательности $\{\tau^+\}$ можно выбрать векторы вида $\tau^+=(\tau^+_{n-k},\hat{\tau}_{n-k+1},\ldots,\hat{\tau}_{n-1},\hat{\tau}_n)$, где $\tau^+_{n-k}\to 0$, $\hat{\tau}_n=\vartheta$. Действительно, равенство (6.1) можно переписать в виде

$$\overset{+}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^+)=-\int_t^{t+\tau^+_{n-k}}X(t,s)b(s)\,ds+\int_{t+\hat{\tau}_{n-k}}^{t+\hat{\tau}_{n-k+1}}X(t,s)b(s)\,ds-$$
$$-\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k+1}\int_{t+\hat{\tau}_i}^{t+\hat{\tau}_{i+1}}X(t,s)b(s)\,ds. \quad (7.1)$$

Переходя в выражении (7.1) к пределу, получим

$$\lim_{\tau^+_{n-k}\to 0}\overset{+}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^+)=\int_t^{t+\hat{\tau}_{n-k+1}}X(t,s)b(s)\,ds-$$
$$-\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k+1}\int_{t+\hat{\tau}_i}^{t+\hat{\tau}_{i+1}}X(t,s)b(s)\,ds=\overset{-}{F}{}_0^k(t,\hat{\tau}),$$

следовательно

$$\hat{x}=\lim_{\tau^+_{n-k}\to 0}\overset{+}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^+). \quad (7.2)$$

В качестве элементов последовательности $\{\tau^-\}$ выберем векторы вида $\tau^- = (\hat\tau_{n-k+1}, \hat\tau_{n-k+2}, \dots, \hat\tau_{n-1}, \tau^-_{n-1}, \hat\tau_n)$, где $\tau^-_{n-1} \to \vartheta$, $\hat\tau_n = \vartheta$. Справедливо равенство

$$\overset{-}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^-) = \int_t^{t+\hat\tau_{n-k+1}} X(t,s)b(s)\,ds + \\ + \sum_{i=n-k+1}^{n-2} (-1)^{i-n+k} \int_{t+\hat\tau_i}^{t+\hat\tau_{i+1}} X(t,s)b(s)\,ds + \\ + (-1)^{k-1} \int_{t+\hat\tau_{n-1}}^{t+\tau^-_{n-1}} X(t,s)b(s)\,ds + (-1)^k \int_{t+\tau^-_{n-1}}^{t+\hat\tau_n} X(t,s)b(s)\,ds.$$

При предельном переходе оно дает

$$\lim_{\tau^-_{n-1}\to\vartheta} \overset{-}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^-) = \int_t^{t+\hat\tau_{n-k+1}} X(t,s)b(s)\,ds + \\ + \sum_{i=n-k+1}^{n-2} (-1)^{i-n+k} \int_{t+\hat\tau_i}^{t+\hat\tau_{i+1}} X(t,s)b(s)\,ds + \\ + (-1)^{k-1} \int_{t+\hat\tau_{n-1}}^{t+\hat\tau_n} X(t,s)b(s)\,ds = \overset{-}{F}{}_0^{k}(t,\hat\tau),$$

т. е.

$$\hat x = \lim_{\tau^-_{n-1}\to\vartheta} \overset{-}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^-). \tag{7.3}$$

Из (7.2) и (7.3) получим

$$\lim_{\tau^+_{n-k}\to 0} \overset{+}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^+) = \lim_{\tau^-_{n-1}\to\vartheta} \overset{-}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^-) = \overset{-}{F}{}_0^{k}(t,\tau) = \hat x. \tag{7.4}$$

Найдем теперь предельные положения соответствующих касательных пространств. Для этого достаточно вычислить пределы производных функций $\overset{+}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^+)$ и $\overset{-}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^-)$. Для любого $k \in \{1,\dots,n-1\}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{+}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau)}{\partial\tau} &= (h_{n-k}(t,\tau),\dots,h_n(t,\tau)), \\ \frac{\partial \overset{-}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau)}{\partial\tau} &= (-h_{n-k}(t,\tau),\dots,-h_n(t,\tau)), \end{aligned} \tag{7.5}$$

где $\tau = (\tau_{n-k},\dots,\tau_n)$, а векторы $h_i(t,\tau)$ определены равенствами

$$h_i(t,\tau) = 2(-1)^{i-n+k+1} X(t,t+\tau_i)b(t+\tau_i), \quad i = n-k,\dots,n-1,$$

$$h_n(t,\tau) = (-1)^{k+1} X(t, t+\tau_n) b(t+\tau_n).$$

Из равенств (7.5) легко вывести, что

$$\lim_{\tau^+_{n-k}\to 0} \frac{\partial \overset{+}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^+)}{\partial\tau} = (h_0(t), h_{n-k+1}(t,\hat\tau),\ldots,h_n(t,\hat\tau)), \tag{7.6}$$

$$\lim_{\tau^-_{n-1}\to\vartheta} \frac{\partial \overset{-}{F}{}_0^{k+1}(t,\tau^-)}{\partial\tau} =$$
$$= (-h_{n-k+1}(t,\hat\tau),\ldots,-h_{n-1}(t,\hat\tau),-h_n(t,\hat\tau),-h_n(t,\hat\tau)), \tag{7.7}$$

где $h_0(t) = \lim\limits_{\tau_{n-k}\to 0} h_{n-k}(t,\tau) = -2b(t)$. Линейная оболочка, построенная на всех векторах матрицы (7.6) кроме последнего, представляет собой предельное положение касательного пространства к многообразию $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ и может быть записана в виде (для сокращения записи аргументы здесь и далее опущены)

$$\overset{+}{L}{}^k(t,\hat\tau) \doteq \mathcal{L}\left\{h_0, h_{n-k+1},\ldots,h_{n-1}\right\}. \tag{7.8}$$

Аналогично можно построить линейную оболочку на столбцах матрицы (7.7). Эта линейная оболочка является предельным положением касательного пространства к многообразию $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$.

$$\overset{-}{L}{}^k(t,\hat\tau) \doteq \mathcal{L}\left\{h_{n-k+1},\ldots,h_{n-1},h_n\right\}. \tag{7.9}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\left\{h_{n-k+1},\ldots,h_{n-1}\right\}$. Тогда выражения (7.8) и (7.9) можно записать следующим образом:

$$\overset{+}{L}{}^k(t,\hat\tau) = \widehat{\mathcal{L}} \oplus \mathcal{L}\left\{h_0^0\right\}, \quad \overset{-}{L}{}^k(t,\hat\tau) = \widehat{\mathcal{L}} \oplus \mathcal{L}\left\{h_n^0\right\}, \tag{7.10}$$

где

$$h_0^0 = \frac{1}{\|\hat h_0\|}\hat h_0, \quad \hat h_0 = h_0 - \mathrm{Pr}_{\widehat{\mathcal{L}}}\, h_0,$$
$$h_n^0 = \frac{1}{\|\hat h_n\|}\hat h_n, \quad \hat h_n = h_n - \mathrm{Pr}_{\widehat{\mathcal{L}}}\, h_n.$$

Из равенств (7.10) следуют равенства

$$\overset{+}{L}{}^k(t,\hat\tau) \setminus \overset{-}{L}{}^k(t,\hat\tau) = \mathcal{L}\left\{h_0^0\right\}, \quad \overset{-}{L}{}^k(t,\hat\tau) \setminus \overset{+}{L}{}^k(t,\hat\tau) = \mathcal{L}\left\{h_n^0\right\}.$$

Очевидно, что угол между многообразиями $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ равен углу между векторами h_0^0 и h_n^0. Таким образом, получаем лемму.

Л е м м а 7.1. *Угол между* $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ *и* $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ *в любой точке* $\hat{x} \in \operatorname{cl} \overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta) \bigcap \operatorname{cl} \overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ *равен* $\varphi = \arccos \left| \left(h_0^0(t,\hat{\tau}), h_n^0(t,\hat{\tau}) \right) \right|$.

Непосредственно из леммы 7.1 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 7.1. *Если векторы* $X(t_0, t_0 + \sigma(t_0))b(t_0 + \sigma(t_0))$ *и* $b(t_0)$ *коллинеарны, то в каждой точке границы множества управляемости* $D(t_0)$ *существует касательное пространство к границе* $D(t_0)$.

Если $\vartheta < \sigma(t_0)$, то векторы $h_0, h_{n-k+1}, \ldots, h_n$ линейно независимы (см. доказательство теоремы 6.1). Поэтому получаем еще одно следствие леммы 7.1.

Т е о р е м а 7.2. *Если* $\tau_n < \sigma(t_0)$, *то для любого* $k = 1, \ldots, n-1$ *угол между многообразиями* $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$ *и* $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ *в любой точке* $x \in \operatorname{cl} \overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta) \bigcap \operatorname{cl} \overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ *отличен от нуля. В этом случае граница множества управляемости* $D(t_0, \tau_n)$ *не может быть гладкой (т. е. имеет касательное пространство не во всякой точке границы).*

Как видно из равенств (7.5) и (7.9), предельное положение касательного пространства к многообразию $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ совпадает с касательным пространством к $\overset{-}{N}{}^k(t)$, поэтому имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 7.3. *Если* $\tau_n < \sigma(t)$, *то многообразия* $\overset{-}{N}{}^k(t)$ *и* $\overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$ *касаются в любой точке* $x \in \overset{-}{N}{}^k(t) \bigcap \operatorname{cl} \overset{-}{N}{}^k(t,\vartheta)$.

Аналогичная теорема справедлива для $\overset{+}{N}{}^k(t)$ и $\overset{+}{N}{}^k(t,\vartheta)$.

§ 8. Условия трансверсальности

В этом параграфе получены необходимые условия трансверсальности на левом и правом концах траектории (утверждение 8.1 и его следствия 8.1 и 8.2) и достаточные условия трансверсальности (теоремы 8.1, 8.2 и утверждение 8.2). Следует отметить, что в несколько иной форме необходимые условия трансверсальности на левом и правом концах и достаточные условия на правом конце траектории были известны ранее (см., например, [41, 42]). В этом параграфе условия трансверсальности сформулированы в удобном для нас виде. Достаточное условие трансверсальности на левом конце траектории получено в работе [32] (см. теоремы 8.1 и 8.2 диссертации).

Из результатов [41, с. 364] получается следующее утверждение.

Утверждение 8.1. *Пусть* $N \subset \mathbb{R}^n$ *— заданное гладкое многообразие,* $u(t)$ *— оптимальное в смысле быстродействия управление, переводящее точку* (t_0, x_0) *на многообразие* $\mathbb{R} \times N$*, а* $x(t)$ *— решение системы* (1.1)*, отвечающее управлению* $u(t)$*. Пусть далее,* $\theta = t_1 - t_0$ *— соответствующее время быстродействия. Тогда существует ненулевое решение* $\psi(t)$*,* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$*, сопряженной системы* (1.4)*, удовлетворяющее вместе с управлением* $u(t)$ *принципу максимума* (1.5) *и условию трансверсальности на правом конце траектории, т. е. вектор* $\psi(t_1)$ *ортогонален касательному пространству* $T_{x(t_1)}N$*, и* $\psi(t_1)\dot{x}(t_1) \geqslant 0$.

Следствие 8.1. *Пусть* $C \subset \mathbb{R}^n$ *— заданное выпуклое множество,* $u(t)$ *— оптимальное в смысле быстродействия управление, переводящее точку* (t_0, x_0) *на множество* $\mathbb{R} \times C$*, а* $x(t)$ *— решение системы* (1.1)*, отвечающее управлению* $u(t)$*. Пусть далее,* $\theta = t_1 - t_0$ *— соответствующее время быстродействия. Тогда существует ненулевое решение* $\psi(t)$*,* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$*, сопряженной системы* (1.4)*, удовлетворяющее вместе с управлением* $u(t)$ *принципу максимума* (1.5) *и условию трансверсальности на правом конце траектории, т. е. существует опорная гиперплоскость* $\Gamma_{x(t_1)}(C)$ *к множеству* C *такая, что вектор* $\psi(t_1)$ *ортогонален* $\Gamma_{x(t_1)}(C)$*, и* $\psi(t_1)\dot{x}(t_1) \geqslant 0$.

Определим функцию быстродействия с многообразия $N \subset \mathbb{R}^n$ в нуль равенством $\Theta(t, N) \doteq \min_{x \in N} \Theta(t, x)$.

Следствие 8.2. *Пусть* $N \subset \mathbb{R}^n$ *— заданное гладкое многообразие, момент времени* t_0 *фиксирован, а* x_0 *— точка, в которой* *выполнено равенство* $\Theta(t_0, x_0) = \Theta(t_0, N)$. *Пусть далее,* $u(t)$ *— оптимальное управление, переводящее точку* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times N$ *в точку* $(t_1, 0)$, *а* $x(t)$ *— решение системы* (1.1), *отвечающее управлению* $u(t)$. *Тогда существует ненулевое решение* $\psi(t)$ *сопряженной системы* (1.4), *удовлетворяющее вместе с управлением* $u(t)$ *принципу максимума* (1.5) *и условию трансверсальности на левом конце траектории, т. е. вектор* $\psi(t_0)$ *ортогонален касательному пространству* $T_{x_0}N$, *и* $\psi(t_0)\dot{x}(t_0) \geqslant 0$.

При $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ каждую точку $x_0 \in \partial D(t_0, \vartheta)$ можно оптимально перевести в нуль при помощи единственного управления. Если точка x_0 находится на одном из многообразий $\overset{+}{N}{}^{n-1}(t_0, \vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^{n-1}(t_0, \vartheta)$, то существует единственный вектор ψ, ортогональный касательному пространству $T_{x_0} \overset{+}{N}{}^{n-1}(t_0, \vartheta)$ или $T_{x_0} \overset{-}{N}{}^{n-1}(t_0, \vartheta)$ и удовлетворяющий неравенству $\psi\dot{x}(t_0) \geqslant 0$. Поэтому следствие 8.2 позволяет однозначно определить соответствующее решение сопряженной системы $\psi(t)$, и необходимые условия, сформулированные в следствии 8.2, становятся и достаточными. Оказывается (см. [32]), что они являются достаточными для любой точки $x_0 \in \partial D(t_0, \vartheta)$. Ниже мы строго сформулируем и докажем это.

Л е м м а 8.1. *Пусть* $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *и через точку* $x_0 \in \overset{+}{N}{}^{k}(t_0, \vartheta)$ *проведена опорная гиперплоскость* $\Gamma_{x_0} D(t_0, \vartheta)$ *с нормальным вектором* ψ. *Тогда* ψ *находится в нормальном пространстве* $T^{\perp}\Big(x_0, \overset{+}{N}{}^{k}(t_0, \vartheta)\Big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $D(t_0, \vartheta)$ лежит в положительном полупространстве относительно вектора ψ. Выберем произвольный вектор y из $T_{x_0} \overset{+}{N}{}^{k}(t_0, \vartheta)$. На многообразии $\overset{+}{N}{}^{k}(t_0, \vartheta)$ проведем такую кривую $x(\varepsilon)$, что $x(0) = x_0$, и $\dot{x}(0) = y$. Пусть последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ стремится к нулю. Тогда

$$\psi \frac{x(\varepsilon_i) - x_0}{\varepsilon_i} \geqslant 0, \quad \psi \frac{x(-\varepsilon_i) - x_0}{\varepsilon_i} \geqslant 0. \tag{8.1}$$

Переходя в неравенствах (8.1) к пределу при $i \to \infty$, получим неравенства $\psi y \geqslant 0$ и $-\psi y \geqslant 0$, откуда $\psi y = 0$.

Легко видеть, что справедлив и аналог леммы 8.1 для многобразия $\overset{-}{N}{}^{k}(t_0, \vartheta)$.

Т е о р е м а 8.1. *Пусть* $\vartheta < \sigma(t_0)$, $x_0 \in \partial D(t_0, \vartheta)$, ψ — *единичный вектор нормали к произвольной опорной гиперплоскости* $\Gamma_{x_0} D(t_0, \vartheta)$, *причем множество* $D(t_0, \vartheta)$ *лежит в положительном полупространстве относительно вектора* ψ. *Тогда управление, заданное равенством* $u(t, \psi) = \operatorname{sign}(\psi X(t_0, t) b(t))$, *оптимально в смысле быстродействия переводит точку* (t_0, x_0) *на ось* t.

З а м е ч а н и е 8.1. Опорная гиперплоскость, проходящая через точку x_0, может быть не единственна. Тогда создается впечатление, что в точке x_0 нарушается единственность оптимального управления. На самом деле, нарушения единственности оптимального управления не происходит, поскольку в этом случае все такие управления совпадают на интервале $(t_0, t_0 + \vartheta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 8.1. Пусть, для определенности, точка x_0 лежит на многообразии $\overset{+}{N}{}^{k}(t_0, \vartheta)$, где $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ фиксировано. Если $k = n-1$, то оптимальность управления $u(t, \psi)$ получается непосредственно из следствия 8.2. Пусть далее, $k \in \{0, \ldots, n-2\}$. Построим последовательность $\left\{x_{\ell_1}^{+}\right\}_{\ell_1=1}^{\infty}$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) для любого натурального ℓ_1 точка $x_{\ell_1}^{+}$ находится на многообразии $\overset{+}{N}{}^{k+1}(t_0, \vartheta)$, размерность которого на единицу больше размерности исходного многообразия $\overset{+}{N}{}^{k}(t_0, \vartheta)$; 2) $x_{\ell_1}^{+} \to x_0$ при $\ell_1 \to \infty$. Аналогично построим последовательность $\left\{x_{\ell_1}^{-}\right\}_{\ell_1=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям: 1) $x_{\ell_1}^{-} \in \overset{-}{N}{}^{k+1}(t_0, \vartheta)$; 2) $x_{\ell_1}^{-} \to x_0$ при $\ell_1 \to \infty$. Далее можно построить сходящиеся к точкам $x_{\ell_1}^{+}$ последовательности $\left\{x_{\ell_1 \ell_2}^{++}\right\}_{\ell_2=1}^{\infty} \subset \overset{+}{N}{}^{k+2}(t_0, \vartheta)$ и $\left\{x_{\ell_1 \ell_2}^{+-}\right\}_{\ell_2=1}^{\infty} \subset \overset{-}{N}{}^{k+2}(t_0, \vartheta)$. Вообще, пусть всякая последовательность $\left\{x_{\ell_1 \ldots \ell_j}^{\pi_1 \ldots \pi_j}\right\}_{\ell_j=1}^{\infty} \subset N^{k+j}(\pi_j)$ сходится к $x_{\ell_1 \ldots \ell_{j-1}}^{\pi_1 \ldots \pi_{j-1}}$, где для удобства записи через $N^{k+j}(\pi_j)$ обозначено $\overset{\pi_j}{N}{}^{k+j}(t_0, \vartheta)$, а π_j — знак «+» или «−». Последовательности вида $\left\{x_{\ell_1 \ldots \ell_{n-k-1}}^{\pi_1 \ldots \pi_{n-k-1}}\right\}_{\ell_{n-k-1}=1}^{\infty}$ лежат в $\overset{+}{N}{}^{n-1}(t_0, \vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^{n-1}(t_0, \vartheta)$.

Для краткости введем векторы индексов $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_{n-k-1})$ и $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_{n-k-1})$. Точки x_ℓ^π находятся на многообразиях $\overset{+}{N}{}^{n-1}(t_0, \vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^{n-1}(t_0, \vartheta)$. В каждой точке x_ℓ^π существует единичный вектор нормали ψ_ℓ^π к многообразию $N^{n-1}(\pi_{n-k-1})$, где π_{n-k-1} — последняя компонента вектора индексов π, такой, что множество $D(t_0, \vartheta)$ лежит в положи-

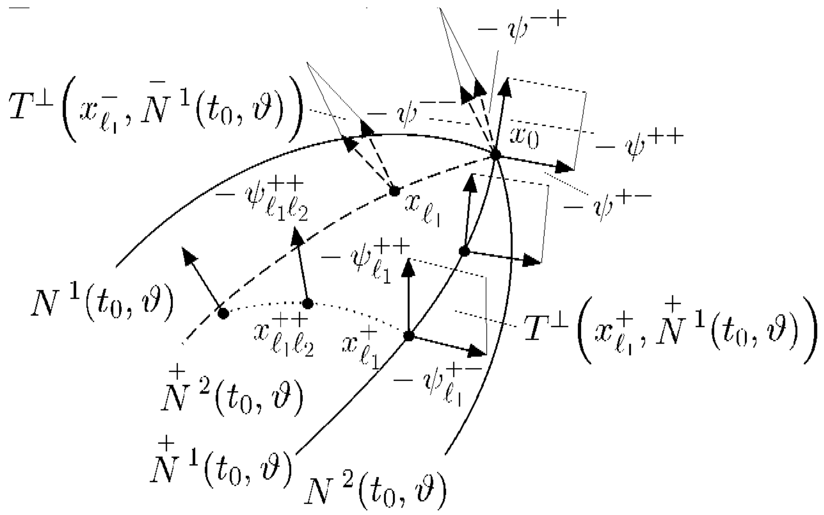

Рис. 8.1. Иллюстрация к теореме 8.1 для случая $n = 3$, $k = 0$.

тельном полупространстве, определяемом этим вектором. Из этих векторов нормали можно составить последовательности $\{\psi^{\pi}_{\ell}\}^{\infty}_{\ell_{n-k-1}=1}$, которые, в силу гладкости $\overset{+}{N}{}^{n-1}(t_0,\vartheta)$ и $\bar{N}{}^{n-1}(t_0,\vartheta)$, сходятся к векторам $\psi^{\pi}_{\ell_1\ldots\ell_{n-k-2}}$. Вообще, пусть для всякого $j = 1,\ldots,n-k-2$

$$\lim_{\ell_{j+1}\to\infty}\psi^{\pi}_{\ell_1\ldots\ell_{j+1}} = \lim_{\substack{\ell_{j+1}\to\infty\\ \cdots\\ \ell_{n-k-1}\to\infty}}\psi^{\pi}_{\ell} = \psi^{\pi}_{\ell_1\ldots\ell_j}, \quad \text{и} \quad \lim_{\ell_1\to\infty}\psi^{\pi}_{\ell_1} = \lim_{\substack{\ell_1\to\infty\\ \cdots\\ \ell_{n-k-1}\to\infty}}\psi^{\pi}_{\ell} = \psi^{\pi}.$$

Все указанные пределы существуют в силу гладкости $\overset{+}{N}{}^{n-1}(t_0,\vartheta)$ и $\bar{N}{}^{n-1}(t_0,\vartheta)$.

Напомним, что символом $\mathcal{L}\{h_1,\ldots,h_n\}$ мы обозначаем линейную оболочку, построенную на векторах $h_1,\ldots,h_n$, а символом $\oplus$ — операцию прямой суммы линейных пространств. Из следствия 7.2 и условия $\psi^{\pi}_{\ell} \in T^{\perp}\Big(x^{\pi}_{\ell}, N^{n-1}(\pi_{n-k-1})\Big)$ получается

$$T^{\perp}\Big(x^{\pi_1\ldots\pi_{n-k-2}}_{\ell_1\ldots\ell_{n-k-2}}, N^{n-2}(\pi_{n-k-2})\Big) = \bigoplus_{\pi_{n-k-1}}\mathcal{L}\left\{\psi^{\pi}_{\ell_1\ldots\ell_{n-k-2}}\right\} =$$
$$= \mathcal{L}\left\{\psi^{\pi_1\ldots\pi_{n-k-2}+}_{\ell_1\ldots\ell_{n-k-2}}\right\} \oplus \mathcal{L}\left\{\psi^{\pi_1\ldots\pi_{n-k-2}-}_{\ell_1\ldots\ell_{n-k-2}}\right\},$$

$$T^{\perp}\Big(x^{\pi_1\ldots\pi_j}_{\ell_1\ldots\ell_j}, N^{k+j}(\pi_j)\Big) = \bigoplus_{\substack{\pi_{j+1}\\ \cdots\\ \pi_{n-k-1}}}\mathcal{L}\left\{\psi^{\pi}_{\ell_1\ldots\ell_j}\right\}, \quad j = 1,\ldots,n-k-2,$$

$$T^{\perp}\Big(x_0, \overset{+}{N}{}^{k}(t_0,\vartheta)\Big) = \bigoplus_{\pi}\mathcal{L}\left\{\psi^{\pi}\right\}. \tag{8.2}$$

Лемма 8.1 и разложение (8.2) позволяют представить вектор ψ в виде

$$\psi = \sum_{\pi} \lambda_\pi \psi^\pi. \tag{8.3}$$

Докажем, что в разложении (8.3) все коэффициенты λ_π неотрицательны. Сначала рассмотрим случай $k = n-2$. Для любых индексов ℓ_1 и π_1 справедливо неравенство

$$\psi \frac{x_{\ell_1}^{\pi_1} - x_0}{\|x_{\ell_1}^{\pi_1} - x_0\|} \geqslant 0. \tag{8.4}$$

Элементы последовательности $y_{\ell_1}^{\pi_1} = \dfrac{x_{\ell_1}^{\pi_1} - x_0}{\|x_{\ell_1}^{\pi_1} - x_0\|}$ лежат на единичной сфере S^{n-1}, поэтому из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, которую для простоты снова обозначим $y_{\ell_1}^{\pi_1}$. Переходя в неравенстве (8.4) к пределу при $\ell_1 \to \infty$, получим $\psi y^{\pi_1} \geqslant 0$, где вектор $y^{\pi_1} = \lim\limits_{\ell_1 \to \infty} y_{\ell_1}^{\pi_1}$ ортогонален вектору ψ^{π_1}. Следовательно,

$$\psi y^+ = \lambda_+ \psi^+ y^+ + \lambda_- \psi^- y^+ = \lambda_- \psi^- y^+ \geqslant 0,$$
$$\psi y^- = \lambda_+ \psi^+ y^- + \lambda_- \psi^- y^- = \lambda_+ \psi^+ y^- \geqslant 0,$$

откуда $\lambda_+ \geqslant 0$ и $\lambda_- \geqslant 0$.

Пусть теперь $0 \leqslant k \leqslant n-3$. Вектор ψ представим в виде $\psi = \widehat{\lambda}_+ \widehat{\psi}^+ + \widehat{\lambda}_- \widehat{\psi}^-$, где $\widehat{\psi}^{\pi_1} = \lim\limits_{\ell_1 \to \infty} \widehat{\psi}_{\ell_1}^{\pi_1}$, $\widehat{\psi}_{\ell_1}^{\pi_1} \in T^\perp\Big(x_{\ell_1}^{\pi_1}, N^{k+1}(\pi_1)\Big)$, причем множество $D(t_0, \vartheta)$ лежит в положительном полупространстве относительно каждого вектора $\widehat{\psi}_{\ell_1}^{\pi_1}$. Существуют сходящиеся последовательности $\left\{y_{\ell_1}^{\pi_1}\right\}_{\ell_1}^{\infty}$, пределы которых обозначим через y^{π_1} такие, что $y_{\ell_1}^{\pi_1}$ ортогональны $\widehat{\psi}_{\ell_1}^{\pi_1}$, и $\widehat{\psi}_{\ell_1}^{+} y_{\ell_1}^{-} \geqslant 0$, $\widehat{\psi}_{\ell_1}^{-} y_{\ell_1}^{+} \geqslant 0$. Из равенств

$$\psi y^+ = \widehat{\lambda}_+ \left(\lim_{\ell_1 \to \infty} \widehat{\psi}_{\ell_1}^{+} y_{\ell_1}^{+} \right) + \widehat{\lambda}_- \left(\lim_{\ell_1 \to \infty} \widehat{\psi}_{\ell_1}^{-} y_{\ell_1}^{+} \right) = \widehat{\lambda}_- \widehat{\psi}^- y^+ \geqslant 0,$$

$$\psi y^- = \widehat{\lambda}_+ \left(\lim_{\ell_1 \to \infty} \widehat{\psi}_{\ell_1}^{+} y_{\ell_1}^{-} \right) + \widehat{\lambda}_- \left(\lim_{\ell_1 \to \infty} \widehat{\psi}_{\ell_1}^{-} y_{\ell_1}^{-} \right) = \widehat{\lambda}_+ \widehat{\psi}^+ y^- \geqslant 0$$

следует, что $\widehat{\lambda}_+ \geqslant 0$ и $\widehat{\lambda}_- \geqslant 0$. Если векторы $\widehat{\psi}^{\pi_1}$ раскладываются по формуле вида (8.3) с неотрицательными коэффициентами, то и коэффициенты разложения ψ будут неотрицательны. По индукции получаем неотрицательность всех λ_π.

Теперь зафиксируем некоторое π и докажем оптимальность управления $u(t, \psi^\pi)$. Из следствия 8.2 получается, что оптимальное управление, переводящее точку x_ℓ^π в нуль, имеет следующий вид: $u(t, \psi_\ell^\pi) = \operatorname{sign}\left(\psi_\ell^\pi X(t_0, t)b(t)\right)$. Поэтому

$$X(t_0+\vartheta, t_0)x_\ell^\pi + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \int_{t_0+\tau_i^\ell}^{t_0+\tau_{i+1}^\ell} X(t_0+\vartheta, s)b(s)\,ds = 0,$$

где $\tau_0^\ell = 0$, $\tau_n^\ell = \vartheta$, причем вектор $\tau^\ell = (\tau_1^\ell, \cdots, \tau_{n-1}^\ell)$ задает моменты переключения оптимального управления. В силу непрерывной зависимости τ^ℓ от x_ℓ^π, при $\ell_1 \to \infty, \ldots, \ell_{n-k-1} \to \infty$ имеем

$$X(s(t_0), t_0)x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \int_{t_0+\tilde{\tau}_i}^{t_0+\tilde{\tau}_{i+1}} X(s(t_0), s)b(s)\,ds = 0, \tag{8.5}$$

где $\tilde{\tau}_0 = 0$, $\tilde{\tau}_n = \vartheta$, $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_1, \cdots, \tilde{\tau}_{n-1}) = \lim\limits_{\substack{\ell_1\to\infty\\ \cdots\\ \ell_{n-k+1}\to\infty}} \tau^\ell$. Координаты вектора $\tilde{\tau}$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \tilde{\tau}_1 \leqslant \cdots \leqslant \tilde{\tau}_{n-1} \leqslant \vartheta$. Исключив из координат вектора $\tilde{\tau}$ повторяющиеся, можно построить вектор τ^0 (может быть нулевой размерности), координаты которого задают моменты переключения управления $u(t, \psi^\pi)$. Равенство (8.5) позволяет утверждать, что это управление является оптимальным.

Наконец, рассмотрим функцию $\xi(t, \psi) = \psi X(t_0, t)b(t)$. Равенство (8.3) приводит к представлению $\xi(t, \psi) = \sum\limits_\pi \lambda_\pi \xi(t, \psi^\pi)$. Из единственности оптимального управления, переводящего точку $x_0 \in \overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$ в нуль (см. теорему 6.1), следует, что для всех π функции $\xi(t, \psi^\pi)$ имеют один и тот же знак (или одновременно обращаются в нуль) при каждом t. Следовательно, знак функции $\xi(t, \psi)$ совпадает со знаком $\xi(t, \psi^\pi)$, т. е. управление $u(t, \psi) = \operatorname{sign}\xi(t, \psi) = \operatorname{sign}\xi(t, \psi^\pi)$ оптимально. Теорема 8.1 доказана.

Формулируемое ниже обобщение теоремы 8.1 легко доказывается для $n = 2$. Для произвольного $n > 2$ его доказательство пока неизвестно.

Т е о р е м а 8.2. *Пусть* $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$, $x_0 \in \partial D(t_0, \vartheta)$, ψ *— единичный вектор нормали к некоторой опорной гиперплоскости* $\Gamma_{x_0} D(t_0, \vartheta)$, *причем множество* $D(t_0, \vartheta)$ *лежит в положительном полупространстве относительно вектора* ψ. *Тогда управление, заданное равенством* $u(t, \psi) = \operatorname{sign}(\psi X(t_0, t)b(t))$, *оптимально в смысле быстродействия переводит точку* (t_0, x_0) *на ось* t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство для $n = 2$. Пусть, для определенности, точка x_0 лежит на многообразии $\overset{+}{N}{}^k(t_0, \vartheta)$, где $k \in \{0, 1\}$ фиксировано. Если $k = 1$, то оптимальность управления $u(t, \psi)$ получается непосредственно из следствия 8.2. Пусть далее, $k = 0$. Построим последовательность $\left\{x_\ell^+\right\}_{\ell=1}^\infty$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) для любого натурального ℓ точка x_ℓ^+ находится на многообразии $\overset{+}{N}{}^1(t_0, \vartheta)$; 2) $x_\ell^+ \to x_0$ при $\ell \to \infty$. Аналогично построим последовательность $\left\{x_\ell^-\right\}_{\ell=1}^\infty$, удовлетворяющую условиям: 1) $x_\ell^- \in \overset{-}{N}{}^1(t_0, \vartheta)$; 2) $x_\ell^- \to x_0$ при $\ell \to \infty$. В каждой точке x_ℓ^π, где π — знак «+» или знак «−», существует единичный вектор нормали ψ_ℓ^π к многообразию $N^{n-1}(\pi)$ такой, что множество $D(t_0, \vartheta)$ лежит в положительном полупространстве, определяемом этим вектором. Из этих векторов нормали можно составить последовательности $\{\psi_\ell^\pi\}_{\ell=1}^\infty$, которые, в силу гладкости $\overset{+}{N}{}^1(t_0, \vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^1(t_0, \vartheta)$, сходятся к векторам ψ^π.

Если $\psi^+ = \psi^-$, то через точку x_0 можно провести единственную опорную гиперплоскость $\Gamma_{x_0} D(t_0, \vartheta)$ с вектором нормали $\psi = \psi^+ = \psi^-$. Также, как в теореме 8.1, доказывается, что управление $u(t, \psi^\pi) = \operatorname{sign}(\psi^\pi X(t_0, t) b(t))$ оптимально в смысле быстродействия переводит точку x_0 в начало координат.

Если же $\psi^+ \neq \psi^-$, то дальнейшее доказательство проводится также, как в теореме 8.1. Сначала доказывается, что вектор ψ можно представить в виде $\psi = \lambda_+ \psi^+ + \lambda_- \psi^-$, где коэффициенты λ_+ и λ_- неотрицательны. Затем можно доказать, что два управления $u(t, \psi^+) = \operatorname{sign}(\psi^+ X(t_0, t) b(t))$ и $u(t, \psi^-) = \operatorname{sign}(\psi^- X(t_0, t) b(t))$ являются оптимальными для точки x_0. На последнем этапе доказывается оптимальность управления $u(t, \psi)$. Как отмечалось в замечании 8.1, это оптимальное управление единственно. Теорема доказана.

Выше были приведены утверждения, соответствующие трем видам условий трансверсальности: 1) необходимым условиям на правом конце траектории; 2) необходимым условиям на левом конце траектории; 3) достаточным условиям на левом конце траектории. Следующее утверждение приводится здесь для полноты изложения. Оно доставляет четвертый вид условий трансверсальности: достаточные условия трансверсальности на правом конце траектории.

У т в е р ж д е н и е 8.2. ([42, с. 379]). *Пусть C — компактное вы-*

пуклое множество такое, что для любой точки $\hat{x} \in C$ *и любого момента времени* $\hat{t}$ *существует допустимое управление* $\hat{u}(\cdot)$, *навсегда переводящее траекторию* $x(t, \hat{t}, \hat{x}, \hat{u}(\cdot))$ *во внутренность* C. *Пусть* $u(t)$ *— допустимое управление с соответствующей траекторией* $x(t)$, *переводящее точку* $x(t_0) = x_0$ *в* $x(t_1) = x_1 \in \partial C$ *и удовлетворяющее принципу максимума* (1.5). *Также потребуем, чтобы соответствующее решение сопряженной системы* $\psi(t)$ *удовлетворяло условию трансверсальности на правом конце траектории, т. е. вектор* $\psi(t_1)$ *ортогонален опорной гиперплоскости* $\Gamma_{x_1}(C)$, *и* $\psi(t_1)\dot{x}(t_1) \geqslant 0$. *Тогда процесс* $(u(t), x(t, t_0, x_0, u(\cdot)))$ *является оптимальным в смысле быстродействия на множество* C.

§ 9. Свойства функции быстродействия и позиционное управление

В этом параграфе изучается дифференцируемость функции быстродействия на многообразиях $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ и $\overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ вдоль различных направлений. Теорема 9.2 была доказана в [33] и дополняет теорему 9.1 из работ [27, 28]. Далее вводится понятие оптимального в смысле быстродействия позиционного управления. Отдельно рассмотрены управления, соответствующие решению системы (1.1) в смысле Каратеодори и в смысле Филиппова. Сформулированы теоремы из работ [24, 27, 28] о позиционном управлении системой (1.1) и возмущенной системой. В доказательстве теоремы о позиционном управлении возмущенной системой устранен пробел (см. [33]).

Обозначим символом $d\Theta(q)$ производную функции $q \to \Theta(q)$ на гладком многообразии $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ в точке $q = (t,x) \in \mathcal{N}$ [43, с. 12]. Дифференцирование $\Theta(q)$ на многообразии $\mathcal{N}$ предполагает, что мы рассматриваем сужение функции $q \to \Theta(q)$ на многообразие $\mathcal{N}$; для такого сужения $\Theta : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ мы сохраним прежнее обозначение. Следовательно, $d\Theta(q)v$ есть значение линейного оператора $d\Theta(q) : T_q\mathcal{N} \to \mathbb{R}$ на векторе $v \in T_q\mathcal{N}$, лежащем в пространстве $T_q\mathcal{N}$, касательном к многообразию $\mathcal{N}$ в точке $q \in \mathcal{N}$. Будем отличать от указанной производной производную по направлению вектора $h \in \mathbb{R}^{1+n}$ функции $q \to \Theta(q)$, как функции, действующей из $\mathbb{R}^{1+n}$ в $\mathbb{R}$:

$$\frac{d\Theta(q)}{dq}h = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\Theta(q+\alpha h) - \Theta(q)}{\alpha}.$$

Если $\mathcal{N} = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}, x \in N(t)\}$, где $N(t)$ — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, то производную $d\Theta(q)$ можно представить в виде вектора

$$d\Theta(q) = d\Theta(t,x) = (d_t\Theta(t,x), d_x\Theta(t,x)),$$

компоненты которого есть производные функции $\Theta(t,x)$ на многообразии $\mathcal{N}$ при фиксированных t и x, соответственно. Таким образом, запись $d_x\Theta(t,x)v_x$ означает значение линейного оператора $d_x\Theta(t,x)$: $T_xN(t) \to \mathbb{R}$ на векторе $v_x \in T_xN(t)$. Аналогично,

$$\frac{d\Theta(q)}{dq}h = \left(\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial t}h_t, \frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x}h_x\right),$$

где $h = (h_t, h_x) \in \mathbb{R}^{1+n}$.

Т е о р е м а 9.1. (см. [27, 28]). *Пусть система* (1.1) *докритическая. Тогда функция быстродействия* $\Theta(t,x)$:

1) *непрерывна в* $\operatorname{int}\mathfrak{D}$;

2) *непрерывно дифференцируема в* $\mathcal{N}^{1+n}$;

3) *при* $k \in \{0, \dots, n-1\}$ *дифференцируема как функция, действующая из* $\mathcal{N}^{1+k}$ *в* $\mathbb{R}$;

4) *для каждого* $k \in \{0, \dots, n-1\}$ *в любой точке* $(t,x) \in \mathcal{N}^{1+k}$ *удовлетворяет уравнению* $d\theta(t,x)h(t,x) = -1$, *где* $d\theta(t,x)h(t,x)$ — *производная функции* $\theta(t,x)$ *на многообразии* $\mathcal{N}^{1+k}$ *в точке* $q = (t,x)$ *вдоль направления вектора* $h(t,x) = (1, A(t)x + \nu(t,x)b(t))$, *принадлежащего касательному пространству* $T_q\mathcal{N}^{1+k}$,

$$\nu(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (t,x) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+n} \bigcup \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{n} \bigcup \dots \bigcup \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{2}, \\ 0, & \text{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}^{1}, \\ -1, & \text{если} \quad (t,x) \in \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+n} \bigcup \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{n} \bigcup \dots \bigcup \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{2}; \end{cases}$$

5) *при* $(t,x) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+n}$ *функция* $\Theta(t,x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial\theta(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\theta(t,x)}{\partial x}(A(t)x + b(t)) = -1,$$

а при $(t,x) \in \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+n}$ — *уравнению*

$$\frac{\partial\theta(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\theta(t,x)}{\partial x}(A(t)x - b(t)) = -1.$$

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, $q \in G$. Будем называть **конусом Булигана** [35, с. 28] к множеству G в точке q множество $\mathfrak{T}_q(G)$ таких векторов $h \in \mathbb{R}^{1+n}$, что

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\rho_0(q + \varepsilon h, G)}{\varepsilon} = 0, \tag{9.1}$$

где $\rho_0(q, G)$ — евклидово расстояние от точки q до множества G. Непосредственно из (9.1) следует (см., например, [44, с. 57]), что если $q \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+n}$, то $\mathfrak{T}_q(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}) = \mathbb{R}^{1+n}$; если же $q \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \subset \overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$ при некотором $k \in \{0, \dots, n-1\}$, то $T_q\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \subset \mathfrak{T}_q(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n})$. Аналогичные равенство и включение справедливы и для $\mathfrak{T}_q(\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+n})$.

Т е о р е м а 9.2. *Пусть система* (1.1) *докритическая, а точка* $q_0 = (t_0, x_0) \in \overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$. *Тогда функция быстродействия* $\Theta : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* q_0 *по направлению любого вектора* $h \in \operatorname{int}\mathfrak{T}_{q_0}(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n})$. *Аналогичное утверждение справедливо и для множества* $\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $q_0 \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k} \subset \overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$, где $k \in \{0,\ldots,n\}$ фиксировано. Если $k = n$, то утверждение леммы следует из теоремы 9.1.

Пусть далее $k < n$, $h = (h_t, h_x) \in \operatorname{int} \mathfrak{T}_{q_0}(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n})$, а ε — малое положительное число. Тогда точка

$$q_1 = q_0 + \varepsilon h = (t_1, x_1) = (t_0 + \varepsilon h_t, x_0 + \varepsilon h_x)$$

близка к точке q_0, и найдется такое $m > k$, что q_1 принадлежит одному из многообразий $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+m}$ или $\overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+m}$. Не уменьшая общности, будем предполагать, что $q_1 \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+m} \subset \overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$. Найдутся векторы $\tau^0 = (\tau^0_{n-k+1}, \ldots, \tau^0_n)$ и $\tau^1 = (\tau^1_{n-m+1}, \ldots, \tau^1_n)$ такие, что

$$x_0 = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_0+\tau^0_i}^{t_0+\tau^0_{i+1}} X(t_0, s) b(s)\, ds, \tag{9.2}$$

$$x_1 = -\sum_{i=n-m}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_1+\tau^1_i}^{t_1+\tau^1_{i+1}} X(t_1, s) b(s)\, ds,$$

где $\tau^0_{n-k} = \tau^1_{n-m} = 0$. Формула линеаризации позволяет записать

$$X(t_1, s) = X(t_0, s) + \varepsilon h_t A(t_0) X(t_0, s) + o(\varepsilon),$$

откуда

$$\begin{aligned} x_1 = &-\sum_{i=n-m}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_1+\tau^1_i}^{t_1+\tau^1_{i+1}} X(t_0, s) b(s)\, ds - \\ &- \varepsilon h_t A(t_0) \sum_{i=n-m}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_1+\tau^1_i}^{t_1+\tau^1_{i+1}} X(t_0, s) b(s)\, ds + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Вычитая (9.2) из (9.3), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon h_x = &-\sum_{i=n-m}^{n-k-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_1+\tau^1_i}^{t_1+\tau^1_{i+1}} z(s)\, ds - \\ &- \int_{t_1+\tau^1_{n-k}}^{t_1+\tau^1_{n-k+1}} z(s)\, ds + \int_{t_0}^{t_0+\tau^0_{n-k+1}} z(s)\, ds - \\ &- \sum_{i=n-k+1}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \left(\int_{t_1+\tau^1_i}^{t_1+\tau^1_{i+1}} z(s)\, ds - \int_{t_0+\tau^0_i}^{t_0+\tau^0_{i+1}} z(s)\, ds \right) - \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon h_t A(t_0)\sum_{i=n-m}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\int_{t_1+\tau_i^1}^{t_1+\tau_{i+1}^1} z(s)\,ds+o(\varepsilon)=\\
&\qquad\qquad=-\sum_{i=n-m}^{n-k-1}(-1)^{i-n+k}\int_{t_1+\tau_i^1}^{t_1+\tau_{i+1}^1} z(s)\,ds-\\
&\qquad\qquad-\int_{t_1+\tau_{n-k}^1}^{t_0} z(s)\,ds-\int_{t_0+\tau_{n-k+1}^0}^{t_1+\tau_{n-k+1}^1} z(s)\,ds-\\
&\quad-\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\left(\int_{t_1+\tau_i^1}^{t_0+\tau_i^0} z(s)\,ds+\int_{t_0+\tau_{i+1}^0}^{t_1+\tau_{i+1}^1} z(s)\,ds\right)-\\
&-\varepsilon h_t A(t_0)\left(\int_{t_1}^{t_1+\tau_{n-m+1}^1} z(s)\,ds+\sum_{i=n-m+1}^{n-k-1}(-1)^{i-n+k}\int_{t_1+\tau_i^1}^{t_1+\tau_{i+1}^1} z(s)\,ds+\right.\\
&\quad+\int_{t_1+\tau_{n-k}^1}^{t_0} z(s)\,ds+\int_{t_0}^{t_0+\tau_{n-k+1}^0} z(s)\,ds+\int_{t_0+\tau_{n-k+1}^0}^{t_1+\tau_{n-k+1}^1} z(s)\,ds+\\
&\quad+\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\left(\int_{t_1+\tau_i^1}^{t_0+\tau_i^0} z(s)\,ds+\int_{t_0+\tau_i^0}^{t_0+\tau_{i+1}^0} z(s)\,ds+\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.\left.+\int_{t_0+\tau_{i+1}^0}^{t_1+\tau_{i+1}^1} z(s)\,ds\right)\right)+o(\varepsilon), \qquad (9.4)
\end{aligned}
$$

где $z(s)\doteq X(t_0,s)b(s)$. Из теорем о среднем следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} z(s)\,ds=(t_1-t_0)z(t_0)+o(t_1-t_0),$$

где разность t_1-t_0 мала, поэтому (9.4) можно переписать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon h_x=&-\tau_{n-m+1}^1 z(t_1)+o(\tau_{n-m+1}^1)-\\
&-\sum_{i=n-m+1}^{n-k-1}(-1)^{i-n+k}\left((\tau_{i+1}^1-\tau_i^1)z(t_1+\tau_i^1)+o(\tau_{i+1}^1-\tau_i^1)\right)+\\
&\qquad+(\varepsilon h_t+\tau_{n-k}^1)z(t_1+\tau_{n-k}^1)+o(\varepsilon h_t+\tau_{n-k}^1)-\\
&-(\varepsilon h_t+\tau_{n-k+1}^1-\tau_{n-k+1}^0)z(t_0+\tau_{n-k+1}^0)+o(\varepsilon h_t+\tau_{n-k+1}^1-\tau_{n-k+1}^0)-\\
&\qquad-\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\left((\tau_i^0-\tau_i^1-\varepsilon h_t)z(t_1+\tau_i^1)+\right.\\
&\qquad\left.+(\varepsilon h_t+\tau_{i+1}^1-\tau_{i+1}^0)z(t_0+\tau_{i+1}^0)+o(\varepsilon h_t+\tau_{i+1}^1-\tau_{i+1}^0)\right)-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
-\varepsilon h_t A(t_0)\left(\int_{t_0}^{t_0+\tau^0_{n-k+1}} z(s)\,ds+\right.\\
\left.+\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\int_{t_0+\tau^0_i}^{t_0+\tau^0_{i+1}} z(s)\,ds\right)+o(\varepsilon), \quad (9.5)
\end{gathered}
$$

Введем обозначения:

$$
\begin{gathered}
\delta_{n-m+1}\doteq\tau^1_{n-m+1},\ldots,\delta_{n-k}\doteq\tau^1_{n-k},\\
\delta_{n-k+1}\doteq\tau^1_{n-k+1}-\tau^0_{n-k+1},\ldots,\delta_n\doteq\tau^1_n-\tau^0_n,\\
d\doteq(\varepsilon,\delta_{n-m+1},\ldots,\delta_n),\\
y(t_0,\tau^0)=A(t_0)\left(\int_{t_0}^{t_0+\tau^0_{n-k+1}} z(s)\,ds+\right. \qquad (9.6)\\
\left.+\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\int_{t_0+\tau^0_i}^{t_0+\tau^0_{i+1}} z(s)\,ds\right).
\end{gathered}
$$

Поскольку точки x_0 и x_1 близки, то все δ_i малы. С учетом обозначений (9.6) и равенства $z(t_0+\delta_i)=z(t_0)+O(\delta_i)$ соотношение (9.5) принимает вид

$$
\begin{gathered}
\varepsilon h_x=-\delta_{n-m+1}z(t_0)-\sum_{i=n-m+1}^{n-k-1}(-1)^{i-n+k}(\delta_{i+1}-\delta_i)z(t_0)+\\
+(\varepsilon h_t+\delta_{n-k})z(t_0)-(\varepsilon h_t+\delta_{n-k+1})z(t_0+\tau^0_{n-k+1})-\\
-\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\big(-(\varepsilon h_t+\delta_i)z(t_0+\tau^0_i)+\\
+(\varepsilon h_t+\delta_{i+1})z(t_0+\tau^0_{i+1})\big)-\varepsilon h_t y(t_0,\tau^0)+o(|d|)=\\
=-\delta_{n-m+1}z(t_0)+\sum_{i=n-m+2}^{n-k}(-1)^{i-n+k}\delta_i z(t_0)+\\
+\sum_{i=n-m+1}^{n-k-1}(-1)^{i-n+k}\delta_i z(t_0)+(\varepsilon h_t+\delta_{n-k})z(t_0)-\\
-(\varepsilon h_t+\delta_{n-k+1})z(t_0+\tau^0_{n-k+1})+\\
+\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}(\varepsilon h_t+\delta_i)z(t_0+\tau^0_i)+
\end{gathered}
$$

$$+\sum_{i=n-k+2}^{n}(-1)^{i-n+k}(\varepsilon h_t+\delta_i)z(t_0+\tau_i^0)+\varepsilon h_t y(t_0,\tau^0)+o(|d|)=$$

$$=2\left(\sum_{i=n-m+1}^{n-k}(-1)^{i-n+k}\delta_i\right)z(t_0)+$$

$$+2\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\delta_i z(t_0+\tau_i^0)+(-1)^k\delta_n z(t_0+\tau_n^0)+$$

$$+\varepsilon h_t y_1(t_0,\tau^0)+o(|d|),$$

где $\quad y_1(t_0,\tau^0)=y(t_0,\tau^0)+z(t_0)+$

$$+2\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}z(t_0+\tau_i^0)+z(t_0+\tau_n^0). \quad (9.7)$$

Таким образом,

$$\varepsilon(h_x-h_t y_1(t_0,\tau^0))=2\left(\sum_{i=n-m+1}^{n-k}(-1)^{i-n+k}\delta_i\right)z(t_0)+$$

$$+2\sum_{i=n-k+1}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\delta_i z(t_0+\tau_i^0)+(-1)^k\delta_n z(t_0+\tau_n^0)+o(|d|). \quad (9.8)$$

Поскольку $k<n$, то векторы $z(t_0), z(t_0+\tau_{n-k+1}),\ldots,z(t_0+\tau_n)$ линейно независимы (см. [21, 24]). Поэтому приращение функции быстродействия δ_n зависит от ε линейно с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, и функция $\Theta(t,x)$ дифференцируема в точке q_0 по направлению вектора h. Теорема 9.2 доказана.

Теперь коснемся вопроса о дифференцируемости функции быстродействия в точке $q_0\in\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$ по направлению вектора, не принадлежащего $\operatorname{int}\mathfrak{T}_{q_0}(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n})$. Сначала рассмотрим в качестве примера систему

$$\dot x_1=u,\quad \dot x_2=tu. \quad (9.9)$$

Для системы (9.9) имеем $\sigma(t)\equiv+\infty$. В соответствии с равенством (6.1), многообразия, входящие в расширенное множество управляемости $\mathfrak{D}$, можно задать параметрически:

$$\overset{+}{\mathcal{N}}{}^3=\left\{(t,\tau_2-2\tau_1,\tau_2^2/2+t\tau_2-\tau_1^2-2t\tau_1)\colon\ (t,\tau_1,\tau_2)\in\mathcal{M}^3\right\},$$

$$\overset{+}{\mathcal{N}}{}^2 = \left\{(t, -\tau_2, -\tau_2^2/2 - t\tau_2) \colon (t, \tau_2) \in \mathcal{M}^2\right\}. \tag{9.10}$$

Решая системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \tau_2 - 2\tau_1, \\ x_2 = \tau_2^2/2 + t\tau_2 - \tau_1^2 - 2t\tau_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = -\tau_2, \\ x_2 = -\tau_2^2/2 - t\tau_2 \end{cases}$$

относительно τ_2, получим, что функция быстродействия на этих многообразиях равна

$$\Theta(t, x_1, x_2) = \begin{cases} -x_1 + \sqrt{2x_1^2 - 4tx_1 + 4x_2}, & (t, x_1, x_2) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^3, \\ -x_1, & (t, x_1, x_2) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^2. \end{cases} \tag{9.11}$$

График функции быстродействия для системы (9.9) изображен на рис. 9.1.

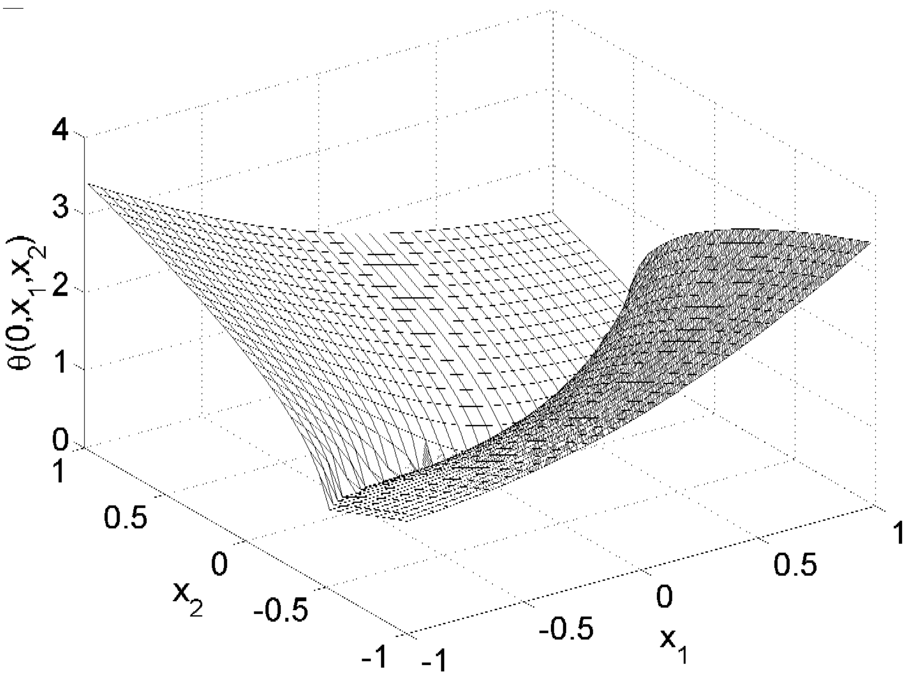

Рис. 9.1. График функции $\Theta(t, x)$ при $t = 0$ для системы (9.9).

Пусть точка $q_0 = (t, x_1, x_2)$ принадлежит многообразию $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^2$, а вектор $h = (h_t, h_1, h_2)$ направлен в многообразие $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^3$, (т. е. $q_0 + \varepsilon h \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^3$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$). Таким образом, $q_0 \in \overset{+}{\mathfrak{N}}{}^3$, однако $h \notin \operatorname{int} \mathfrak{T}_{q_0}(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^3)$. Вычислим производную функции $\Theta(t, x_1, x_2)$ в точке q_0 по направлению вектора h. При малых положительных ε имеем

$$\Delta\Theta(q_0) = \Theta(t + \varepsilon h_t, x_1 + \varepsilon h_1, x_2 + \varepsilon h_2) - \Theta(t, x_1, x_2) =$$
$$= -\varepsilon h_1 + \sqrt{2(x_1 + \varepsilon h_1)^2 - 4(t + \varepsilon h_t)(x_1 + \varepsilon h_1) + 4(x_2 + \varepsilon h_2)}.$$

Из выражения (9.10) следует, что если $(t, x_1, x_2) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^2$, то

$$2x_1^2 - 4tx_1 + 4x_2 = 0,$$

поэтому

$$\Delta\Theta(q_0) = -\varepsilon h_1 + \\ + \sqrt{4x_1\varepsilon h_1 + 2\varepsilon^2 h_1^2 - 4t\varepsilon h_1 - 4\varepsilon h_t x_1 - 4\varepsilon^2 h_1 h_t + 4\varepsilon h_2} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

причем $\Delta\Theta(q_0) > 0$ при малых ε. Таким образом, производная по направлению $\dfrac{d\Theta(q_0)}{dq} h = +\infty$. В силу симметрии, такой же результат получается и для множества $\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^3$.

Будем говорить, что система (1.1) обладает **свойством $\mathfrak{I}$ на множестве $\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$**, если производная функции быстродействия во всякой точке $q_0 \in \overset{-}{\mathfrak{N}}{}^n \subset \overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$ по направлению любого вектора $h \notin \operatorname{int} \mathfrak{T}_{q_0}(\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n})$ равняется $+\infty$. Аналогично определяется свойство $\mathfrak{I}$ на множестве $\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$. Если свойство $\mathfrak{I}$ выполнено на множестве $\overset{+}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$, то, в силу симметрии, оно автоматически выполнено и на множестве $\overset{-}{\mathfrak{N}}{}^{1+n}$, поэтому в дальнейшем мы будем говорить про свойство $\mathfrak{I}$, не указывая множество, на котором оно выполнено. Автору неизвестно, обладает ли всякая докритическая система (1.1) свойством $\mathfrak{I}$.

Суперпозиционно измеримую функцию $u_{\mathfrak{C}} \colon \mathfrak{D} \to U$ будем называть **$\mathfrak{C}$-позиционным управлением для системы** (1.1), если для любой точки $(t_0, x_0) \in \operatorname{int} \mathfrak{D}$ решение в смысле Каратеодори $x(t, t_0, x_0)$ задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x_0 \tag{9.12}$$

при $u = u_{\mathfrak{C}}(t, x)$ существует на полуоси $[t_0, +\infty)$ и попадает в нуль за конечное время. Если, кроме того, это решение единственно, и $x(t, t_0, x_0) \equiv 0$ для $t \geqslant t_0 + \Theta(t_0, x_0)$, то такую функцию $u_{\mathfrak{C}}$ будем называть **оптимальным в смысле быстродействия $\mathfrak{C}$-позиционным управлением для системы** (1.1) (сокращенно, оптимальным $\mathfrak{C}$-управлением).

Аналогично определяется **$\mathfrak{F}$-позиционное управление** В этом случае функция $u_{\mathfrak{F}}(t, x)$ должна быть определена для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{1+n}$) точек $(t, x) \in \operatorname{int} \mathfrak{D}$ и обеспечивать следующее свойство: каждому $(t_0, x_0) \in \operatorname{int} \mathfrak{D}$ отвечает решение в смысле Филиппова $x(t, t_0, x_0)$ задачи (9.12) с управлением $u = u_{\mathfrak{F}}(t, x)$, попадающее в нуль за конечное время. Если, кроме того, это решение единственно, и $x(t, t_0, x_0) \equiv 0$ для $t \geqslant t_0 + \Theta(t_0, x_0)$, то такую функцию $u_{\mathcal{F}}$ будем называть **оптимальным в смысле быстродействия $\mathcal{F}$-позиционным управлением для системы** (1.1) (сокращенно, оптимальным $\mathcal{F}$-управлением). В силу определения решений Филиппова (см. [1, с. 40]), для построения оптимального $\mathcal{F}$-управления нет необходимости определять $u_{\mathcal{F}}(t, x)$ в каждой точке внутренности расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}$; достаточно построить $u_{\mathcal{F}}(t, x)$ на множестве полной меры.

Теорема 9.3. (см. [24, 28]). *Пусть система* (1.1) *докритическая. Тогда функция*

$$\widehat{u}_{\mathcal{C}}(t,x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}_+^{1+n} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{N}_+^2, \\ 0, & \textit{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}^1, \\ -1, & \textit{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}_-^{1+n} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{N}_-^2 \end{cases} \tag{9.13}$$

доставляет оптимальное $\mathcal{C}$-управление, а функция

$$\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}_+^{1+n}, \\ -1, & \textit{если} \quad (t,x) \in \mathcal{N}_-^{1+n} \end{cases} \tag{9.14}$$

— оптимальное $\mathcal{F}$-управление для системы (1.1).

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leqslant 1, \tag{9.15}$$

где функции $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, функция $w : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $w(t, 0) \equiv 0$, и существует такое $r > 0$, что для линейной системы (1.1) при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\sigma(t) \geqslant r$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$ — некоторое множество, а $(t, x(t))$ — траектория системы (9.15) с некоторым управлением. Будем называть точку t_1 **точкой выхода траектории** $(t, x(t))$ **из множества** G, если выполнено хотя бы одно из двух условий (см., также, [45]):

1) $(t_1, x(t_1)) \in G$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется момент $t(\varepsilon) \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$ такой, что $(t(\varepsilon), x(t(\varepsilon))) \notin G$;

2) существует $\delta > 0$, что $(t, x(t)) \in G$ для всех $t \in (t_1 - \delta, t_1)$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t(\varepsilon) \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$ такой, что $(t(\varepsilon), x(t(\varepsilon))) \notin G$.

Назовем точку t_1 **точкой входа траектории** $(t, x(t))$ **в множество** G, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

1) $(t_1, x(t_1)) \in G$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется момент $t(\varepsilon) \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$ такой, что $(t(\varepsilon), x(t(\varepsilon))) \notin G$;

2) существует $\delta > 0$, что $(t, x(t)) \in G$ для всех $t \in (t_1, t_1 + \delta)$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t(\varepsilon) \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$ такой, что $(t(\varepsilon), x(t(\varepsilon))) \notin G$.

Второй пункт предыдущих двух определений имеет смысл, только если $(t_1, x(t_1)) \notin G$.

Пусть $\theta > 0$. Непрерывную функцию $w : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^n$ будем называть допустимой в множестве $\mathfrak{D}_\theta$, если существует такое положительное α, что выполнены следующие условия:

1) для всех $(t, x) \in \mathfrak{D}_\theta$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} w(t, x) \leqslant 1 - \alpha; \tag{9.16}$$

2) для всех $k = 1, \ldots, n-1$ и всех $q = (t, x) \in \mathcal{N}^{1+k}$ таких, что $w(t, x) \in T_x N^k(t)$ выполнено неравенство

$$d_x \Theta(t, x) w(t, x) \leqslant 1 - \alpha. \tag{9.17}$$

В статье [27] было показано, что управление $\widehat{u}_{\mathcal{C}}(t, x)$ является $\mathcal{C}$-позиционным управлением для системы (9.15). Однако доказательство соответствующей теоремы из [27] содержит пробел. Ниже сформулирована и доказана теорема о позиционном управлении, в которой указанный пробел устранен.

Т е о р е м а 9.4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *система* (1.1) *докритическая и обладает свойством* $\mathfrak{I}$;

2) *существует положительное* θ *такое, что* $\mathfrak{D}_\theta \subseteq \mathfrak{D}$;

3) *функция* $w(t, x)$ *допустимая в множестве* $\mathfrak{D}_\theta$.

Тогда управление $\widehat{u}_{\mathcal{C}}(t, x)$, *определенное равенством* (9.13), *является* $\mathcal{C}$-*позиционным управлением для системы* (9.15) *в области* $\operatorname{int} \mathfrak{D}_\theta$, *т. е. для каждой точки* $(t_0, x_0) \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_\theta$ *найдется такой момент времени* $\vartheta(t_0, x_0) < \infty$, *что* $\mathcal{C}$-*решение* $x(t, t_0, x_0)$ *системы* (9.15) *с управлением* $\widehat{u}_{\mathcal{C}}(t, x)$ *существует, и* $x(t_0 + \vartheta(t_0, x_0), t_0, x_0) = 0$. *Далее, для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *такое, что если* $|w(t, x)| \leqslant \delta$ *при* $(t, x) \in \mathfrak{D}_\theta$, *то* $|\Theta(t, x) - \vartheta(t, x)| \leqslant \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_\theta$. Сначала докажем, что траектория $(t, x(t))$, начинающаяся в точке (t_0, x_0), не выходит из множества $\mathfrak{D}_\theta$. Для этого предположим противное, т. е. найдется такой наименьший момент времени $t_1 > t_0$, который является точкой выхода этой траектории из множества $\mathfrak{D}_\theta$. Поскольку множество $\mathfrak{D}_\theta$ замкнутое, то $(t_1, x(t_1)) \notin \mathfrak{D}_\theta$ Тогда на промежутке $[t_0, t_1)$ эта траектория находится внутри множества $\mathfrak{D}_\theta$, и, следовательно, внутри множества $\mathfrak{D}$. Поэтому в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1)$ точка $(t, x(t))$ находится на одном из многообразий $\mathcal{N}_+^{1+k}$, $\mathcal{N}_-^{1+k}$, $k = 0, \ldots, n$.

Пусть $\rho(t) \doteq \Theta(t, x(t))$ — «расстояние» точки $x(t)$ от нуля, а $h_w(t, x) = (1, A(t)x + b(t)\widehat{u}_{\mathfrak{C}}(t, x) + w(t, x))$. Если $(t, x(t)) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$, и точка t не является точкой входа в многообразие $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ и не является точкой выхода из этого многообразия, то в силу теоремы 9.1 и условия (9.17), производная функции $\rho(t)$ равна

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}(t) = \frac{d\Theta(q)}{dq} h_w(t, x)\Big|_{x=x(t)} = \\
&= d\Theta(t, x(t))h(t, x(t)) + d_x\Theta(t, x)w(t, x(t)) = \\
&= -1 + d_x\Theta(t, x)w(t, x(t)) \leqslant -1 + 1 - \alpha = -\alpha, \quad (9.18)
\end{aligned}
$$

где $h(t, x) = (1, A(t)x + b(t)\widehat{u}_{\mathfrak{C}}(t, x))$, а $d_x\Theta(t, x)w(t, x(t))$ — производная функции $\Theta(t, x)$ вдоль многообразия $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$. Такое же неравенство выполнено и для случая, когда $(t, x(t)) \in \overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$. Легко видеть, что для любого момента времени $t \in (t_0, t_1)$ вектор $h(t, x(t))$ направлен вдоль соответствующего многообразия, поэтому существует производная функции $\Theta(t, x)$ по направлению этого вектора $d\Theta(t, x(t))h(t, x(t))$. Кроме того, в соответствии с теоремой 9.2, существует $d_x\Theta(t, x)w(t, x(t))$.

Если же точка t является точкой входа в $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ или точкой выхода из $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$, то

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}(t) = \frac{d\Theta(q)}{dq} h_w(t, x)\Big|_{x=x(t)} = \\
&= d\Theta(t, x(t))h(t, x(t)) + \frac{\partial\Theta(t, x)}{\partial x} w(t, x(t)) = \\
&= -1 + \frac{\partial\Theta(t, x)}{\partial x} w(t, x(t)) \leqslant -1 + 1 - \alpha = -\alpha,
\end{aligned}
$$

Производная $\dfrac{\partial\Theta(t, x)}{\partial x} w(t, x(t))$ существует в силу справедливости свойства $\mathfrak{I}$.

Таким образом, функция $\rho(t)$ дифференцируема, и справедливо неравенство

$$
\rho(t) \leqslant \rho(t_0) - \alpha(t - t_0). \quad (9.19)
$$

Известно, что $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_\theta$, т. е. $\rho(t_0) \leqslant \theta$. При $t = t_1$ из неравенства (9.19) получаем $\rho(t_1) \leqslant \theta$, откуда $(t_1, x(t_1)) \in \mathfrak{D}_\theta$, что противоречит нашему предположению. Мы доказали, что траектория $(t, x(t))$ не выходит из множества $\mathfrak{D}_\theta$.

Теперь докажем, что решение $x(t)$ достигает нуля за конечное время. Рассмотрим интервал $(t_0, +\infty)$. Повторяя все предыдущие рассуждения, получим, что неравенство $\dot{\rho}(t) \leqslant -\alpha$ справедливо для всех t из интервала $(t_0, +\infty)$, откуда следует неравенство (9.19). Таким образом, решение $x(t)$ достигает нуля за время $\vartheta(t_0, x_0) \leqslant \Theta(t_0, x_0)/\alpha$. Поэтому

$$|\Theta(t, x) - \vartheta(t, x)| \leqslant \alpha^{-1}(1-\alpha)\Theta(t, x), \quad (t, x) \in \mathfrak{D}_\theta. \tag{9.20}$$

Если возмущение $w(t, x)$ близко к нулю, то из условия (9.17) следует близость α к единице, а из неравенства (9.20) — близость модуля разности $|\Theta(t, x) - \vartheta(t, x)|$ к нулю. Теорема доказана.

Построим многозначные функции

$$\mathcal{U}(t, x) = \begin{cases} \widehat{u}_{\mathcal{F}}(t, x), & \text{если} \quad (t, x) \in \mathcal{N}^{1+n}, \\ [-1, +1], & \text{если} \quad (t, x) \in \mathfrak{N}^n, \end{cases}$$

$\mathcal{F}(t, x) = A(t)x + b(t)\mathcal{U}(t, x) + w(t, x)$. Тогда решения дифференциального включения $\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x)$ являются $\mathcal{F}$-решениями системы (9.15) с управлением $\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t, x)$. Следующая теорема отвечает на вопрос о существовании $\mathcal{F}$-позиционного управления для системы (9.15).

Т е о р е м а 9.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.4. *Тогда существует такое положительное* $\theta_1 \leqslant \theta$, *что управление* $\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t, x)$, *определенное равенством* (9.14), *является* $\mathcal{F}$-*позиционным управлением для системы* (9.15) *в области* $\operatorname{int}\mathfrak{D}_{\theta_1}$, *т. е. для каждой точки* (t_0, x_0) *из* $\operatorname{int}\mathfrak{D}_{\theta_1}$ *найдется такой момент времени* $\vartheta(t_0, x_0) < \infty$, *что* $\mathcal{F}$-*решение* $x(t, t_0, x_0)$ *системы* (9.15) *существует, причем* $x(t_0 + \vartheta(t_0, x_0), t_0, x_0) = 0$. *Далее, для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *такое, что если* $|w(t, x)| \leqslant \delta$ *при* $(t, x) \in \mathfrak{D}_{\theta_1}$, *то* $|\Theta(t, x) - \vartheta(t, x)| \leqslant \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_{\theta_1}$, где θ_1 — достаточно малое положительное число. Сначала докажем, что траектория $(t, x(t))$, начинающаяся в точке (t_0, x_0), не выходит из множества $\mathfrak{D}_{\theta_1}$. Для этого предположим, что найдется такой наименьший момент времени $t_1 > t_0$, который является точкой выхода этой траектории из множества $\mathfrak{D}_{\theta_1}$. На промежутке $[t_0, t_1)$ эта траектория находится внутри множества $\mathfrak{D}_{\theta_1}$, поэтому в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1)$ точка $(t, x(t))$ находится на одном из многообразий $\mathcal{N}_+^{1+k}$, $\mathcal{N}_-^{1+k}$, $k = 0, \ldots, n$.

Пусть $\rho(t) \doteq \Theta(t, x(t))$ — «расстояние» точки $x(t)$ от нуля. Если точка $(t, x(t)) \in \mathcal{N}^{1+n}$, то, в силу теоремы 9.1, функция быстродействия $\Theta(t, x)$ дифференцируема в этой точке вдоль любого направления, поэтому

$$\dot{\rho}(t) = \left(\frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} (A(t)x + b(t)\widehat{u}_{\mathfrak{F}}(t, x) + w(t, x)) \right)\Bigg|_{x = x(t)} =$$
$$= -1 + \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} w(t, x(t)) \leqslant -1 + 1 - \alpha = -\alpha, \quad (9.21)$$

Пусть теперь $(t, x(t)) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (рассуждения для многообразия $\overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ аналогичны). Сначала рассмотрим случай, когда точка t не является точкой выхода траектории из многообразия $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ и не является точкой входа в это многообразие. Таким образом, вектор скорости $h_v(t) = (1, v(t))$ в этой точке лежит в касательном пространстве $T_{x(t)} \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$. В соответствии с конструкцией Филиппова [1, с. 40], $v(t)$ есть выпуклая комбинация векторов

$$v_+(t) = A(t)x(t) + b(t) + w(t, x(t)), \quad v_-(t) = A(t)x(t) - b(t) + w(t, x(t)),$$

$$\text{т. е.} \quad v(t) = \lambda(t)v_+(t) + (1 - \lambda(t))v_-(t) =$$
$$= A(t)x(t) + (2\lambda(t) - 1)b(t) + w(t, x(t)) =$$
$$= A(t)x(t) + b(t) + 2(\lambda(t) - 1)b(t) + w(t, x(t)),$$

где $\lambda(t) \in [0, 1]$. Такая ситуация имеет место, если вектор $w(t, x(t))$ направлен вдоль многообразия $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ или внутрь многообразия $\overset{-}{\mathcal{N}}{}^{1+n}$. Базис касательного пространства $T_{x(t)} \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$ состоит из следующих векторов [21, 24]:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ A(t)x(t) + b(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ h_{n-k+1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ h_n(t) \end{pmatrix},$$

где $h_i(t) = X(t, t + \tau_i) b(t + \tau_i)$. Поэтому

$$v(t) = A(t)x(t) + b(t) + c_{n-k+1}(t)h_{n-k+1}(t) + \cdots + c_n(t)h_n(t),$$

откуда

$$-\varkappa(t)b(t) + w(t, x(t)) = c_{n-k+1}(t)h_{n-k+1}(t) + \cdots + c_n(t)h_n(t),$$

$$\varkappa(t)b(t) + c_{n-k+1}(t)h_{n-k+1}(t) + \dots + c_n(t)h_n(t) = w(t, x(t)), \qquad (9.22)$$

где $\varkappa(t) = 2(1 - \lambda(t))$. По построению система уравнений (9.22) относительно вектора $c(t) = \mathrm{col}(\varkappa(t), c_{n-k+1}(t), \dots, c_n(t))$ является совместной, поэтому $c(t) = H^{-1}(t)w(t, x(t))$, где

$$H(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & h^1_{n-k+1}(t) & \dots & h^1_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k+1}(t) & h^{k+1}_{n-k+1}(t) & \dots & h^{k+1}_n(t). \end{pmatrix}$$

Матрица $H(t)$ обратима (см. доказательство теоремы (6.1)). Поскольку функция $w(t, x)$ непрерывна по x, и $w(t, 0) = 0$, то при достаточно малом θ_1 значения $w(t, x(t))$ и $\varkappa(t)$ также будут малыми. Пусть θ_1 настолько мало, что $d_x\Theta(t, x)\big(w(t, x(t)) - \varkappa(t)b(t)\big) \leqslant 1 - \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot\rho(t) = \frac{d\Theta(q)}{dq}h_v(t) = \\ = d\Theta(t, x(t))h(t, x(t)) + d_x\Theta(t, x)\big(w(t, x(t)) - \varkappa(t)b(t)\big) \leqslant \\ \leqslant -1 + 1 - \alpha = -\alpha, \quad (9.23) \end{aligned}$$

где $h_v(t, x(t)) = (1, A(t)x(t) + b(t))$. Все производные в равенстве (9.23) существуют в силу теоремы 9.1.

Пусть по-прежнему $(t, x(t)) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$, где $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. Рассмотрим случай, когда точка t является точкой выхода траектории из многообразия $\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$. В соответствии с теоремой 9.1 и теоремой 9.2 функция $\Theta(t, x)$ как функция, действующая из $\mathbb{R}^{1+n}$ в $\mathbb{R}$, имеет в точке $(t, x(t))$ конечную или бесконечную производную по любому направлению. Если вектор скорости в этой точке $h_v(t) = (1, v(t))$ лежит в касательном пространстве $T_{x(t)}\overset{+}{\mathcal{N}}{}^{1+k}$, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \dot\rho(t) = \frac{d\Theta(q)}{dq}h_w(t, x)\bigg|_{x=x(t)} = \\ = d\Theta(t, x(t))h(t, x(t)) + \frac{\partial\Theta(t, x)}{\partial x}\big(w(t, x(t)) - \varkappa(t)b(t)\big) \leqslant \\ \leqslant -1 + 1 - \alpha = -\alpha, \quad (9.24) \end{aligned}$$

где $h_w(t, x) = (1, A(t)x(t) + b(t) + w(t, x))$, в противном случае имеем неравенство

$$\dot{\rho}(t) = \frac{d\Theta(q)}{dq}h_w(t,x)\bigg|_{x=x(t)} =$$
$$= d\Theta(t,x(t))h(t,x(t)) + \frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x}w(t,x(t)) =$$
$$= -1 + \frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x}w(t,x(t)) \leqslant -1 + 1 - \alpha = -\alpha. \quad (9.25)$$

Из неравенств (9.21),(9.23),(9.24),(9.25) следует, что $\dot{\rho}(t) \leqslant \alpha$ для всех t. Дальнейшее доказательство проводится также, как в теореме 9.4. Теорема доказана.

Поведение решения системы (9.15) может быть очень сложным. Ниже будет построен пример, *в котором пересечение траектории системы и множества $\mathfrak{N}^n$ есть нигде не плотное множество положительной меры.* Тем не менее, эта траектория приходит на ось t за конечное время. Более того, время быстродействия для этой траектории совпадает со временем быстродействия для соответствующей траектории невозмущенной системы (1.1). Здесь решение понимается в смысле Каратеодори.

Сначала построим нигде не плотное на отрезке $[0,1]$ множество положительной меры. На первом шаге выбросим из середины отрезка $[0,1]$ открытый интервал длиной $\delta_1 = 1/2$, начинающийся в точке λ_1. На втором шаге выбросим из середины каждого из полученных отрезков открытый интервал длиной $\delta_2 = \delta_3 = 1/8$, начальные точки этих интервалов обозначим λ_2 и λ_3. На шаге с номером k выбросим 2^{k-1} открытых интервалов длиной 2^{1-2k}. Пусть, вообще, выброшенный интервал G_i с номером i имеет длину δ_i и начальную точку λ_i. Продолжим процесс до бесконечности. Обозначим символом G объединение всех выброшенных интервалов, и пусть $F \doteq [0,1]\backslash G$. Множество F является нигде не плотным на отрезке $[0,1]$ замкнутым множеством меры $1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1/3$.

Рассмотрим функцию $\gamma_0(t,c) = c(t^4 - 2t^3 + t^2)$ с параметром c, заданную на отрезке $[0,1]$. Нетрудно убедиться, что эта функция вместе со своей производной обращается в нуль на концах этого отрезка. Определим функцию

$$\gamma(t,c) = \begin{cases} \delta_i\gamma_0\left(\dfrac{t-\lambda_i}{\delta_i}, c(1-\lambda_i-\delta_i)\right), & t \in G_i, \\ 0, & t \in F. \end{cases}$$

Функция $\gamma(t)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим систему (9.9) и возмущение

$$w(t,x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2(t,x_1,x_2) \end{pmatrix},$$

$$\text{где} \quad w_2(t,x_1,x_2) = \frac{\Theta(t,x_1,x_2)\dot{\gamma}(t,c)}{\Theta\left(t, t-1, \frac{t^2-1}{2} + \gamma(t,c)\right)}, \tag{9.26}$$

$\Theta(t,x_1,x_2)$ — функция быстродействия системы (9.9). Легко видеть, что $w(t,0,0)=0$. Из (9.11) следует, что при $t \to 1$ знаменатель дроби (9.26) ведет себя как $1-t$, а функция $\dot{\gamma}(t,c)$ не превосходит $c_1(1-t)$, где c_1 — постоянная, зависящая только от параметра c. Поэтому функция $w_2(t,x_1,x_2)$ непрерывна по каждому аргументу при $t \in [0,1]$. Для других t ее можно продолжить непрерывным образом. Соответствующая возмущенная система имеет вид

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = tu + w_2(t,x_1,x_2). \tag{9.27}$$

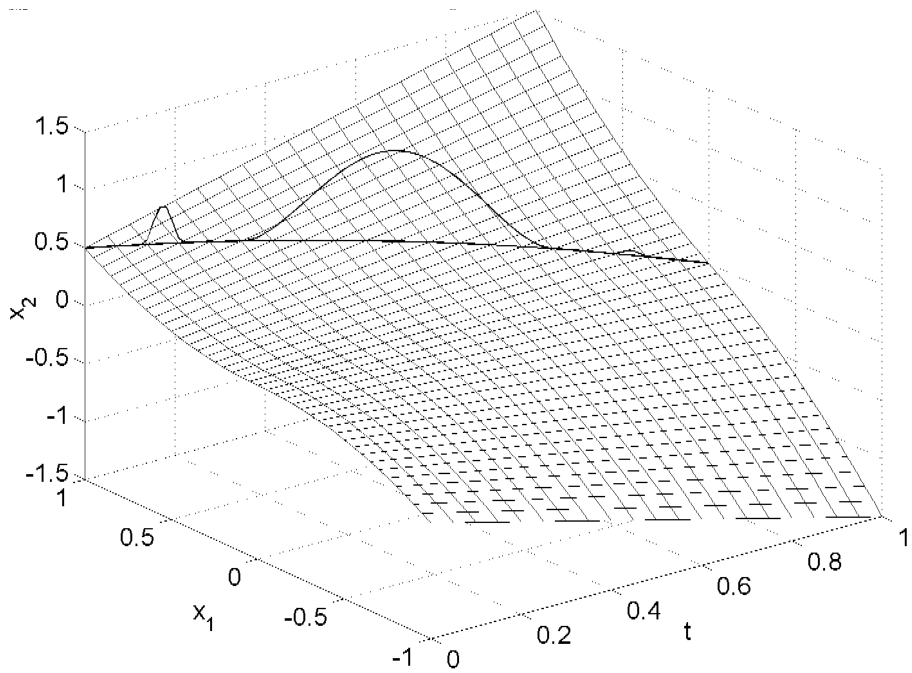

Рис. 9.2. Фрагмент множества $\mathcal{N}^2$ для системы (9.9), оптимальная траектория системы (9.9) и соответствующая траектория возмущенной системы (9.27) для $c = 100$.

Функция $x(t)$ с компонентами $x_1(t) = t-1$ и $x_2(t) = \dfrac{t^2-1}{2} + \gamma(t,c)$ является решением системы (9.27) на отрезке $[0,1]$ с начальным условием $x(0) = (1, 1/2)$ и оптимальным $\mathcal{C}$-управлением. Соответствующая траектория для $c = 100$, а также траектория невозмущенной системы показаны на рис. 9.2.

Глава 3. Множества управляемости высших порядков

В этой главе некоторые результаты о структуре множества управляемости первого порядка перенесены на множества управляемости второго и высших порядков. Для этого проведено исследование расположения нулей чебышевской системы функций за пределами промежутка чебышевскости. Доказано, что в множествах управляемости высших порядков можно выделить гладкие многообразия. Для случая $n = 2$ получено представление границы множества управляемости высокого порядка в виде замыкания объединения гладких кривых.

§ 10. Расширенное множество управляемости второго порядка

В этом параграфе исследуется структура расширенного множества управляемости второго порядка $\mathfrak{D}_2$. Определяется отображение, задающее взаимно однозначное соответствие между многообразиями $\mathcal{M}^{1+k}$ и некоторыми подмножествами $\mathfrak{D}_2$. Исследуется дифференцируемость этого отображения. Результаты параграфа опубликованы в [32].

В соответствии с приципом максимума (1.5) для каждой точки $q = (t, x) \in \mathfrak{D}_2$ найдутся целое k, $1 \leqslant k \leqslant n$, и точка $p = (t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$ такие, что оптимальное управление переводит q на $\mathfrak{D}_1$ за время τ_n, принимает значения $+1$ и -1 и имеет переключения только в точках $t + \tau_i$, $i = n - k + 1, \ldots, n - 1$.

Пусть для каждого $k = 1, \ldots, n$ множество $\overset{+}{\mathcal{N}}{}_2^{1+k}$ состоит из всех таких точек $q_0 = (t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_2$, для каждой из которых найдется точка $p_0 = (t_0, \tau^0) \in \mathcal{M}^{1+k}$ такая, что соответствующее оптимальное управление $u(t)$ переводит точку q_0 на $\mathfrak{D}_1$ за время τ_n^0, имеет переключения только в моменты времени $t_0 = t_0 + \tau_i^0$, и до первого момента переключения $u(t) = +1$. Множества $\overset{-}{\mathcal{N}}{}_2^{1+k}$ определяются аналогично.

Выберем произвольную точку $q_0 = (t_0, x_0) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}_2^{1+k}$. Для этой точки найдется точка $p_0 = (t_0, \tau^0) \in \mathcal{M}^{1+k}$ такая, что под действием оптимального управления $u(\cdot, \tau^0)\colon [t_0, t_0 + \tau_n^0] \to \{-1, 1\}$, имеющего переключения в моменты времени $t + \tau_i^0$, траектория, выходящая в момент t_0 из точки x_0, попадает в точку границы множества $D_1(t_0 + \tau_n^0)$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x(t_0 + \tau_n^0, t_0, x_0, u(\cdot, \tau^0)) = \\
&= X(t_0 + \tau_n^0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\tau_n^0} X(t_0 + \tau_n^0, t)b(t)u(t, \tau^0)\, dt. \quad (10.1)
\end{aligned}
$$

Найдется такое $\psi \in S^{n-1}$, что $u(t, \tau^0) = \operatorname{sign}\left(\psi X(t_0 + \tau_n^0, t)b(t)\right)$. Далее под действием оптимального управления $u_1(\cdot, \tau^0)\colon [t_0 + \tau_n^0, s(t_0 + \tau_n^0)] \to \{-1, 1\}$ траектория системы попадает из точки x_1 в нуль:

$$
0 = X(s(t_0+\tau_n^0), t_0+\tau_n^0)x_1 + \int_{t_0+\tau_n^0}^{s(t_0+\tau_n^0)} X(s(t_0+\tau_n^0), t)b(t)u_1(t, \tau^0)\, dt, \quad (10.2)
$$

где $s(t_0) = t_0 + \sigma(t_0)$. В силу следствия 8.1, вектор ψ ортогонален некоторой опорной гиперплоскости $\Gamma_{x_1}\left(D_1(t_0 + \tau_n^0)\right)$, а теорема 8.2 позволяет записать $u_1(t, \tau^0) = \operatorname{sign}\left(\psi X(t_0 + \tau_n^0, t)b(t)\right) = u(t, \tau^0)$. Положим

$\psi_0 = \psi X(t_0 + \tau_n^0, t_0)$. Тогда $u(t, \tau^0) = \mathrm{sign}\,(\psi_0 X(t_0, t) b(t))$, т. е. справедливо следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 10.1. *Для любой точки* $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}_2$ *существуют такая точка* $x_1 \in \partial D(t_0 + \tau_n^0)$ *и такой вектор* ψ_0, *что управление, заданное равенством* $u(t, \tau^0) = \mathrm{sign}\,(\psi_0 X(t_0, t) b(t))$, *оптимально переводит точку* (t_0, x_0) *в точку* $(t_0 + \tau_n^0, x_1)$, *а точку* $(t_0 + \tau_n^0, x_1)$ *— в точку* $(s(t_0 + \tau_n^0), 0)$.

Объединяя равенства (10.1) и (10.2), получим

$$0 = X(s(t_0 + \tau_n^0), t_0) x_0 + \int_{t_0}^{s(t_0+\tau_n^0)} X(s(t_0 + \tau_n^0), t) b(t) u(t, \tau^0)\, dt,$$

откуда имеем отображение $F\colon \mathcal{M}^{1+k} \to \overset{+}{\mathcal{N}}{}_2^{1+k}$ такое, что $q_0 = F(p_0) = (t_0, F_0(t_0, \tau^0))$, где

$$F_0(t_0, \tau^0) = -\int_{t_0}^{s(t_0+\tau_n^0)} X(t_0, t) b(t) u(t, \tau^0)\, dt. \tag{10.3}$$

Для того, чтобы изучить свойства множеств $\overset{+}{\mathcal{N}}{}_2^{1+k}$, необходимо исследовать отображение $F(t, \tau)$.

У т в е р ж д е н и е 10.2. *Отображение* F *биективно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения множеств $\overset{+}{\mathcal{N}}{}_2^{1+k}$ видно, что отображение F является сюръективным.

Докажем инъективность отображения F_0. Для этого предположим, что существуют такие точки $q_0 = (t_0, x_0) \in \overset{+}{\mathcal{N}}{}_2^{1+k}$, $p_0 = (t_0, \tau^0)$, $p' = (t_0, \tau') \in \mathcal{M}^{1+k}$, что $q_0 = F_0(t_0, \tau^0) = F_0(t_0, \tau')$. Будем считать, что $s(t_0 + \tau_n') \leqslant s(t_0 + \tau_n^0)$. Управление $u(t, \tau')$ можно доопределить нулем на промежутке $(s(t_0 + \tau_n'), s(t_0 + \tau_n^0)]$. Пусть $v(t) \doteq u(t, \tau^0) - u(t, \tau')$. Рассмотрим функцию $w(t) \doteq v(t) u(t, \tau^0)$. Функция $u(t, \tau^0)$ принимает значения ± 1. Если $u(t, \tau^0) = 1$, то

$$w(t) = u^2(t, \tau^0) - u(t, \tau^0) u(t, \tau') = 1 - u(t, \tau') \geqslant 0,$$

поскольку $|u(t, \tau')| \leqslant 1$. Если же $u(t, \tau^0) = -1$, то $w(t) = 1 + u(t, \tau') \geqslant 0$. Таким образом, функция $w(t)$ неотрицательна, т. е. знаки функций $v(t)$ и $u(t, \tau^0)$ совпадают.

Из равенств

$$X(t_0+\tau_n^0,t_0)x_0+\int_{t_0}^{s(t_0+\tau_n^0)}X(t_0,t)b(t)u(t,\tau)\,dt=0,$$

$$X(t_0+\tau_n^0,t_0)x_0+\int_{t_0}^{s(t_0+\tau_n^0)}X(t_0,t)b(t)u(t,\tau')\,dt=0$$

следует $\int\limits_{t_0}^{s(t_0+\tau_n^0)} X(t_0,t)b(t)v(t)\,dt=0$, откуда для любого $\psi\in S^{n-1}$

$$\int_{t_0}^{s(t_0+\tau_n^0)}\psi X(t_0,t)b(t)v(t)\,dt=0. \tag{10.4}$$

В силу утверждения 10.1, можно выбрать такой вектор ψ, чтобы управление имело вид $u(t,\tau^0)=\operatorname{sign}\left(\psi X(t_0,t)b(t)\right)$. Тогда $w(t)\geqslant 0$ есть подынтегральная функция в интеграле (10.4). Следовательно, $v(t)\equiv 0$, откуда следует инъективность отображения F. Утверждение 10.2 доказано.

Для $k=n$ равенство (10.3), задающее отображение $F_0(t,\tau)$, можно записать в развернутом виде:

$$F_0(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\int_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}}X(t,s)b(s)\,ds+ \\ +\sum_{j=0}^{m}(-1)^{n+j}\int_{t+\hat\tau_j}^{t+\hat\tau_{j+1}}X(t,s)b(s)\,ds, \tag{10.5}$$

где $\tau_0=0$, $\hat\tau_0=\tau_n$, $\hat\tau_{m+1}=\tau_n+\sigma(t+\tau_n)$; $t+\hat\tau_j$ $(j=1,\dots,m)$ — моменты переключения оптимального управления на промежутке $[t+\tau_n,s(t+\tau_n))$, m — количество этих переключений. Заметим, что m и $\hat\tau_j$ зависят от τ, поэтому зафиксируем m и будем рассматривать функцию $F_0(\cdot,\cdot)$ на таком максимальном открытом подмножестве $\mathcal{M}_m^{1+n}$ многообразия $\mathcal{M}^{1+n}$, что для любой точки $p=(t,\tau)\in\mathcal{M}_m^{1+n}$ соответствующее оптимальное управление имеет на промежутке $[t+\tau_n,s(t+\tau_n))$ ровно m переключений. Формально дифференцируя равенство (10.5) по τ_i, получим

$$\frac{\partial F_0}{\partial\tau_i}=2(-1)^iX(t,t+\tau_i)b(t+\tau_i)+ \\ +2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{n+j+1}X(t,t+\hat\tau_j)b(t+\hat\tau_j)\frac{\partial\hat\tau_j}{\partial\tau_i}. \tag{10.6}$$

Нам предстоит выяснить условия существования производных $\dfrac{\partial\hat{\tau}_j}{\partial\tau_i}$ и выразить их через известные функции.

Пусть ψ — такой вектор из S^{n-1}, что функция $\psi X(t,s)b(s)$ имеет узлы в точках $s=t+\tau_i$, $i=1,\ldots,n-1$, и до первого узла неотрицательна. Таким образом, ψ зависит от τ. Обозначим $h_i = X(t,t+\tau_i)b(t+\tau_i)$, $g_j = X(t,t+\hat{\tau}_j)b(t+\hat{\tau}_j)$. Тогда имеем систему уравнений

$$\psi h_\ell = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{k=1}^{n} \psi^k h_\ell^k = 0, \quad \ell = 1,\ldots,n-1,$$

где ψ^k и h_ℓ^k — компоненты векторов ψ и h_ℓ. Дифференцируя по τ_i, получим

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial\psi^k}{\partial\tau_i} h_\ell^k + \dfrac{\partial h_\ell}{\partial\tau_\ell} = 0, & \ell = i, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial\psi^k}{\partial\tau_i} h_\ell^k = 0, & \ell \neq i. \end{array} \tag{10.7}$$

Из векторов h_ℓ можно составить матрицу $H = (h_1 \ \ldots \ h_{n-1})$, которая позволяет записать уравнения (10.7) следующим образом:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau_i} H = -\left(\psi \frac{\partial h_i}{\partial\tau_i}\right) e_i^*, \tag{10.8}$$

где $e_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ — вектор-столбец такой, что $e_i^j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера).

Пусть $k \in \{1,\ldots,n\}$ фиксирована, а $\widehat{\mathcal{M}}_m^{1+n} \subseteq \mathcal{M}_m^{1+n}$ — такое максимальное открытое множество, для любой точки (t,τ) из которого, координата ψ^k вектора ψ отлична от нуля. Дальнейшие рассуждения проведем для $k=n$. Для других значений k рассуждения аналогичны. Далее будем рассматривать функцию $F_0(\cdot,\cdot)$ на множестве $\widehat{\mathcal{M}}_m^{1+n}$.

Если из матрицы H исключить последнюю строку, то получится квадратная матрица $\widetilde{H}$. Отброшенную строку обозначим через $\varkappa$. Кроме того, нам понадобится вектор $\widetilde{\psi} = (\psi^1,\ldots,\psi^{n-1})$. Используя введенные обозначения, уравнение (10.8) можно привести к виду

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\tau_i}\widetilde{H} = -\left(\psi\frac{\partial h_i}{\partial\tau_i}\right) e_i^* - \frac{\partial\psi^n}{\partial\tau_i}\varkappa. \tag{10.9}$$

Теперь воспользуемся тем, что вектор ψ единичный. Дифференцируя равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\psi^k\right)^2 = 1,$$

получим $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \psi^k}{\partial \tau_i} \psi^k = 0$, откуда выражаем

$$\frac{\partial \psi^n}{\partial \tau_i} = -\frac{1}{\psi^n} \cdot \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \tau_i} \widetilde{\psi}^*. \tag{10.10}$$

Как уже отмечалось, ψ^n отлично от нуля.

Подстановка (10.10) в (10.9) дает нам следующее:

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \tau_i} \widetilde{H} = -\left(\psi \frac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right) e_i^* + \frac{1}{\psi^n} \cdot \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \tau_i} \widetilde{\psi}^* \varkappa.$$

Из последнего уравнения и уравнения (10.10) находим, что

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \tau_i} = -\psi^n \left(\psi \frac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right) e_i^* \left(\psi^n \widetilde{H} - \widetilde{\psi}^* \varkappa\right)^{-1}, \tag{10.11}$$

$$\frac{\partial \psi^n}{\partial \tau_i} = \left(\psi \frac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right) e_i^* \left(\psi^n \widetilde{H} - \widetilde{\psi}^* \varkappa\right)^{-1} \widetilde{\psi}^*. \tag{10.12}$$

Обратимость матрицы $\psi^n \widetilde{H} - \widetilde{\psi}^* \varkappa$ будет доказана ниже.

Продифференцировав систему уравнений

$$\psi g_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

по ψ^ℓ, получим $g_j^\ell + \dfrac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial \psi^\ell} \psi \dfrac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j} = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial \psi^\ell} = -\left(\psi \frac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j}\right)^{-1} g_j^\ell. \tag{10.13}$$

Введя обозначение $\widetilde{G}_j = (g_j^1, \ldots, g_j^{n-1})$, можно записать

$$\frac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial \widetilde{\psi}} = -\left(\psi \frac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j}\right)^{-1} \widetilde{G}_j. \tag{10.14}$$

Подставляя (10.11)–(10.14) в равенство $\dfrac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial \tau_i} = \dfrac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \tau_i} \cdot \dfrac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial \widetilde{\psi}} + \dfrac{\partial \psi^n}{\partial \tau_i} \cdot \dfrac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial \psi^n}$, получим

$$\frac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial \tau_i} = \left(\psi \frac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right) \left(\psi \frac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j}\right)^{-1} e_i^* \left(\psi^n \widetilde{H} - \widetilde{\psi}^* \varkappa\right)^{-1} \left(\psi^n \widetilde{G}_j - g_j^n \widetilde{\psi}^*\right).$$

Нам удобнее будет транспонировать предыдущее выражение. Тогда

$$\frac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial \tau_i} = \left(\psi \frac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right) \left(\psi \frac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j}\right)^{-1} \left(\psi^n \widetilde{G}_j^* - g_j^n \widetilde{\psi}\right) \left(\psi^n \widetilde{H}^* - \varkappa^* \widetilde{\psi}\right)^{-1} e_i. \tag{10.15}$$

Л е м м а 10.1. *Пусть* $\mathcal{K}(H) = \psi^n \widetilde{H}^* - \varkappa^* \widetilde{\psi}$, $\widehat{H} = (h_1 \ \ldots \ h_{n-1} \ \psi^*)$. *Тогда* $\det(\mathcal{K}(H)) = \dfrac{1}{\psi^n} \det \widehat{H}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В развернутом виде

$$\mathcal{K}(H) = \begin{pmatrix} \psi^n h_1^1 - \psi^1 h_1^n & \ldots & \psi^n h_1^{n-1} - \psi^{n-1} h_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^n h_{n-1}^1 - \psi^1 h_{n-1}^n & \ldots & \psi^n h_{n-1}^{n-1} - \psi^{n-1} h_{n-1}^n \end{pmatrix}.$$

Из равенства

$$\begin{pmatrix} h_1^1 & \ldots & h_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1}^1 & \ldots & h_{n-1}^n \\ \psi^1 & \ldots & \psi^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \\ -\psi^1/\psi^n & -\psi^2/\psi^n & \ldots & -\psi^{n-1}/\psi^n & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\psi^n} \begin{pmatrix} \psi^n h_1^1 - \psi^1 h_1^n & \ldots & \psi^n h_1^{n-1} - \psi^{n-1} h_1^n & \psi^n h_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \psi^n h_{n-1}^1 - \psi^1 h_{n-1}^n & \ldots & \psi^n h_{n-1}^{n-1} - \psi^{n-1} h_{n-1}^n & \psi^n h_{n-1}^n \\ 0 & \ldots & 0 & (\psi^n)^2 \end{pmatrix}$$

получаем $\det \widehat{H} = \psi^n \det \mathcal{K}(H)$, что доказывает лемму.

При доказательстве теоремы 6.1 было получено, что векторы h_ℓ, образующие матрицу H, линейно независимы. Кроме того, вектор ψ ортогонален всем h_ℓ. Таким образом, матрица $\widehat{H}$ невырождена, и получаем следствие леммы 10.1.

С л е д с т в и е 10.1. *Матрица* $\mathcal{K}(H)$ *обратима.*

Рассмотрим случай, когда $m = n - 1$. Тогда, с учетом введенных обозначений и равенства (10.15), выражение (10.6) принимает вид

$$\frac{\partial F_0}{\partial \tau_i} = 2(-1)^i h_i +$$
$$+ 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j+1} \left(\psi \frac{\partial h_i}{\partial \tau_i} \right) \left(\psi \frac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j} \right)^{-1} \left(\left(\psi^n \widetilde{G}_j^* - g_j^n \widetilde{\psi} \right) \mathcal{K}^{-1}(H) e_i \right) g_j.$$

Введя в рассмотрение матрицу $G = (g_1 \ \dots \ g_{n-1})$, можно записать

$$\frac{\partial F_0}{\partial \tau_i} = 2(-1)^i h_i +$$
$$+ 2G\left((-1)^{n+j+1}\left(\psi\frac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right)\left(\psi\frac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j}\right)^{-1}\left(\psi^n \widetilde{G}_j^* - g_j^n\widetilde{\psi}\right)\mathcal{K}^{-1}(H)e_i\right)_{j=1}^{n-1} =$$
$$= 2(-1)^i h_i + 2(-1)^{n+1}\left(\psi\frac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right)G\times$$
$$\times\left((-1)^j\left(\psi\frac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j}\right)^{-1}\left(\psi^n \widetilde{G}_j^* - g_j^n\widetilde{\psi}\right)\right)_{j=1}^{n-1}\mathcal{K}^{-1}(H)e_i.$$

Определим матрицы $I = \operatorname{diag}\left((-1)^j\right)_{j=1}^{n-1}$, $\mathcal{L}(G) = \operatorname{diag}\left(\psi\dfrac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j}\right)_{j=1}^{n-1}$, $\mathcal{K}(G) = \psi^n\widetilde{G}^* - \lambda^*\widetilde{\psi}$, где матрица $\widetilde{G}$ получается из G путем отбрасывания последней строки, которую обозначим символом λ. Тогда

$$\frac{\partial F_0}{\partial \tau_i} = 2(-1)^i h_i + 2(-1)^{n+1}\left(\psi\frac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right)GI\mathcal{L}^{-1}(G)\mathcal{K}(G)\mathcal{K}^{-1}(H)e_i. \quad (10.16)$$

Теперь можно объединить все производные (10.16) в одну матрицу:

$$\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{\tau}} = 2HI + 2(-1)^{n+1}GI\mathcal{L}^{-1}(G)\mathcal{K}(G)\mathcal{K}^{-1}(H)\mathcal{L}(H), \quad (10.17)$$

где $\tilde{\tau} = \operatorname{col}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$, $\mathcal{L}(H) = \operatorname{diag}\left(\psi\dfrac{\partial h_i}{\partial \tau_i}\right)_{i=1}^{n-1}$. Если выполнены условия утверждения 3.2, то произведения $\psi\dfrac{\partial h_i}{\partial \tau_i}$ и $\psi\dfrac{\partial g_j}{\partial \hat{\tau}_j}$ не могут обращаться в нуль. В противном случае среди нулей функции $\psi X(t,s)b(s)$ в точках $s = t + \tau_i$ или $s = t + \hat{\tau}_j$ были бы кратные. Таким образом, матрицы $\mathcal{L}(H)$ и $\mathcal{L}(G)$ обратимы.

Утверждение 10.3. *Пусть система* (1.1) Q-*приводима к системе вида* (3.1), *для которой первая компонента* $\beta_1(t)$ *вектора* $g(t)$ *непрерывно дифференцируема. Тогда матрица* $\dfrac{\partial F_0}{\partial \tilde{\tau}}$ *определена и непрерывна на множестве* $\widehat{\mathcal{M}}_{n-1}^{1+n}$.

Функция $F_0(\cdot,\cdot)$ рассматривалась нами на множестве $\widehat{\mathcal{M}}_{n-1}^{1+n}$, на котором ψ^n отлично от нуля. Если же рассматривать F_0 на тех подмножествах $\mathcal{M}_{n-1}^{1+n}$, на которых в нуль не обращаются другие компоненты вектора ψ, то выражение для производной $\dfrac{\partial F_0}{\partial \tilde{\tau}}$ будет отличаться от (10.17) только индексами. Поэтому утверждение 10.3 можно обобщить.

У т в е р ж д е н и е 10.4. *Пусть система* (1.1) Q-*приводима к системе вида* (3.1), *для которой первая компонента* $\beta_1(t)$ *вектора* $g(t)$ *непрерывно дифференцируема. Тогда матрица* $\dfrac{\partial F_0}{\partial \tilde{\tau}}$ *определена и непрерывна на множестве* $\mathcal{M}_{n-1}^{1+n}$.

§ 11. Простые нули функций $\xi(t,c)$ вне промежутка чебышевскости

В этом параграфе исследуется расположение простых нулей линейных комбинаций функций $\xi_i(t)$ за пределами промежутка чебышевскости. Теорема 11.1 утверждает, что векторы, соответствующие простым нулям, образуют гладкие многообразия. Результаты параграфа опубликованы в статье [31].

Зафиксируем числа t_0 и $\vartheta > 0$ и будем предполагать, что система (1.1) докритическая на промежутке $[t_0, +\infty)$. Определим следующие функции:

$$\sigma_0(t) \doteq 0,\ \sigma_1(t) \doteq \sigma(t),\ \sigma_{\ell+1}(t) \doteq \sigma\left(t + \sigma_1(t) + \dots + \sigma_\ell(t)\right),$$

где $\ell \in \mathbb{N}$.

Пусть $\sigma_\infty(t_0)$ есть сумма (конечная или бесконечная) ряда

$$\sigma_0(t_0) + \sigma_1(t_0) + \dots + \sigma_\ell(t_0) + \dots .$$

Тогда промежуток $[t_0, t_0 + \sigma_\infty(t_0))$ оказывается разбитым на полуинтервалы вида

$$\left[t_0 + \sigma_0(t_0) + \dots + \sigma_\ell(t_0), t_0 + \sigma_0(t_0) + \dots + \sigma_{\ell+1}(t_0)\right),$$

на каждом из которых совокупность функций $\{\xi_i(t)\}_{i=1}^n$ образует T-систему.

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 11.1. *Если система* (1.1) *является докритической на полуинтервале* $[t_0, +\infty)$, *то для любого положительного* $\vartheta < \sigma_\infty(t_0)$ *найдется некоторое натуральное* m *такое, что*

$$\sum_{\ell=0}^{m} \sigma_\ell(t_0) < \vartheta \leqslant \sum_{\ell=0}^{m+1} \sigma_\ell(t_0).$$

Далее будем предполагать, что $\vartheta < \sigma_\infty(t_0)$.

Пусть $\hat{\sigma}_\ell(t) \doteq \sum\limits_{i=0}^{\ell} \sigma_i(t)$, где $\ell = 0, \dots, m$, и $\hat{\sigma}_{m+1}(t) \doteq \vartheta$. Напомним, что для $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\xi(t,c) = c_1\xi_1(t) + \dots + c_n\xi_n(t).$$

Пусть $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_m)$ — вектор, координаты которого есть целые числа от 0 до $n-1$, $\lambda(\nu) = \sum\limits_{\ell=0}^{m} \nu_\ell$. Для каждого ν определим множества $M^\nu(t_0, \vartheta)$ следующим образом. При $\nu = (0, \ldots, 0)$ положим

$$M^\nu(t_0, \vartheta) \doteq \{0\}.$$

Для всех остальных ν множество $M^\nu(t_0, \vartheta)$ будет состоять из таких векторов

$$\tau = \big(\tau_{n-\nu_0}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_{2n-\nu_1-1}, \ldots, \tau_{2n-2}, \ldots,\\ \tau_{(m+1)(n-1)-\nu_m+1}, \ldots, \tau_{(m+1)(n-1)}\big) \in \mathbb{R}^{\lambda(\nu)},$$

координаты которых удовлетворяют условию

$$\hat{\sigma}_\ell(t_0) < \tau_{(\ell+1)(n-1)-\nu_\ell+1} < \cdots < \tau_{(\ell+1)(n-1)} < \hat{\sigma}_{\ell+1}(t_0),$$

и для каждого τ существует некоторое $c \in \mathbb{R}^n$ такое, что функция $\xi(t, c)$ имеет простые нули во всех точках $t_0 + \tau_i$, где τ_i — координаты вектора τ, и не имеет других нулей на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Для удобства обозначим множество индексов координат вектора $\tau \in M^\nu(t_0, \vartheta)$ через $\mathcal{I}^\nu(t_0, \vartheta)$.

Все вышесказанное можно проиллюстрировать рисунком 11.1, на котором точками изображены простые нули функции $\xi(t, c)$ при некотором фиксированном c.

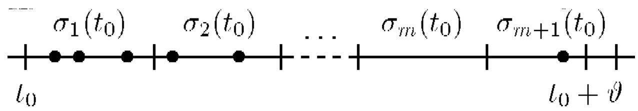

Рис. 11.1. Простые нули функции $\xi(t, c)$.

Нам понадобится следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 11.2. ([46, с. 232]). *Пусть функция $f(x, y)$ действует из $X \times Y$ в $\mathbb{R}$, где X — компактное множество, а Y — открытое множество в вещественном евклидовом пространстве, и является непрерывной по совокупности аргументов. Тогда функция $g(y) = \inf_{x \in X} f(x, y)$ непрерывна.*

Т е о р е м а 11.1. *Пусть система* (1.1) *докритическая, а функции $A(t)$ и $b(t)$ имеют гладкость $r \geqslant 1$. Если $\max\{\nu_0, \ldots, \nu_m\} = n - 1$, и множество $M^\nu(t_0, \vartheta)$ не пусто, то оно представляет собой многообразие гладкости r и размерности $n - 1$, вложенное в пространство $\mathbb{R}^{\lambda(\nu)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\nu_k = n-1$. Зададим функцию $\varphi\colon M^\nu(t_0,\vartheta) \to M^{n-1}(t_0+\hat\sigma_k(t_0))$ покоординатно:

$$\varphi_i(\tau) = \tau_{k(n-1)+i} - \hat\sigma_k(t_0), \quad \text{где} \quad i = 1,\dots,n-1.$$

Пусть $\varrho \in M^{n-1}(t_0+\hat\sigma_k(t_0))$. Для того, чтобы точки

$$t_0 + \hat\sigma_k(t_0) + \varrho_j,$$

где $j = 0,\dots,n-1$, были нулями функции $\xi(t,c)$, необходимо, чтобы вектор c удовлетворял системе уравнений

$$\sum_{i=1}^n c_i\xi_i(t_0+\hat\sigma_k(t_0)+\varrho_j) = 0, \;\; j = 1,\dots,n-1, \tag{11.1}$$

Из этой системы c определяется с точностью до постоянного множителя, причем этот множитель не влияет на положение нулей $\xi(t,c)$. Если добавить к системе (11.1) уравнение

$$\sum_{i=1}^n c_i\xi_i(t_0+\hat\sigma_k(t_0)) = 1,$$

то c определится однозначно из равенства $c(\varrho) = \Xi^{-1}(\varrho)e$, где матрица $\Xi(\varrho)$ и вектор e заданы следующим образом:

$$\Xi(\varrho) = \begin{pmatrix} \xi_1(t_0+\hat\sigma_k(t_0)) & \dots & \xi_n(t_0+\hat\sigma_k(t_0)) \\ \xi_1(t_0+\hat\sigma_k(t_0)+\varrho_1) & \dots & \xi_n(t_0+\hat\sigma_k(t_0)+\varrho_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1(t_0+\hat\sigma_k(t_0)+\varrho_{n-1}) & \dots & \xi_n(t_0+\hat\sigma_k(t_0)+\varrho_{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$e = \operatorname{col}(1,0,\dots,0).$$

Поскольку определитель $\det\Xi(\varrho)$ имеет вид (2.1), то из утверждения 2.3 следует непрерывность функции $c(\varrho)$.

Пусть теперь $\varrho^0 = (\varrho^0_1,\dots,\varrho^0_{n-1})$ — произвольный элемент множества $\varphi(M^\nu(t_0,\vartheta))$, а точка $t_0+\tau_i$ — некоторый нуль функции $\xi(t,c(\varrho^0))$, причем $\tau_i \in (\hat\sigma_\ell(t_0),\hat\sigma_{\ell+1}(t_0))$, $\ell > 0$. Из построения множества $M^\nu(t_0,\vartheta)$ следует, что $\xi(t,c(\varrho^0))$ удовлетворяет условиям

$$\xi(t_0+\tau_i,c(\varrho^0)) = 0, \quad \frac{\partial\xi(t_0+\tau_i,c(\varrho^0))}{\partial t} \neq 0.$$

По теореме о неявной функции существует открытое в $M^{n-1}(t_0+\hat\sigma_k(t_0))$ множество $U_i(\varrho^0)$ и положительное число δ_i такие, что для любого $\varrho \in U_i(\varrho^0)$ на интервале

$$B_i = (t_0+\tau_i-\delta_i, t_0+\tau_i+\delta_i)$$

существует единственный нуль $z_i(\varrho)$ функции $\xi(t, c(\varrho))$, причем $z_i(\varrho) \in (\hat{\sigma}_\ell(t_0), \hat{\sigma}_{\ell+1}(t_0))$, и для любого ϱ из $U_i(\varrho^0)$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial \xi(z_i(\varrho), c(\varrho))}{\partial t} \neq 0.$$

Если теперь положить

$$U(\varrho^0) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}^\nu(t_0, \vartheta)} U_i(\varrho^0), \quad B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}^\nu(t_0, \vartheta)} B_i,$$

то окажется, что для любого $\varrho \in U(\varrho^0)$ во множестве B будет находиться ровно $\lambda(\nu)$ простых нулей функции $\xi(t, c(\varrho))$.

Рассмотрим множество $C = [t_0, t_0 + \vartheta] \setminus B$. Очевидно, что оно является замкнутым. Пусть $\hat{\xi}(t, \varrho) = |\xi(t, c(\varrho))|$, где ϱ принадлежит $U(\varrho^0)$. Очевидно, что функция $\hat{\xi}(t, \varrho)$ непрерывна по совокупности аргументов. Из утверждения 11.2 следует, что функция $\eta(\varrho) = \inf_{t \in C} \hat{\xi}(t, \varrho)$ также является непрерывной. Поэтому существует число δ такое, что из неравенства $\|\varrho - \varrho^0\| < \delta$ следует $\eta(\varrho^0) - \eta(\varrho) < \eta(\varrho^0)/2$.

Таким образом, при $\varrho \in \mathcal{B}(\varrho^0, \delta) \cap U(\varrho^0)$, где $\mathcal{B}(\varrho^0, \delta)$ открытый шар с центром ϱ^0 и радиусом δ, множество C не содержит нулей функции $\xi(t, \varrho)$.

Положив

$$\hat{U}(\varrho^0) = U(\varrho^0) \cap \mathcal{B}\left(\varrho^0, \delta\right),$$

получим, что справедливо включение $\hat{U}(\varrho^0) \subseteq \varphi(M^\nu(t_0, \vartheta))$, т. е. множество $\varphi(M^\nu(t_0, \vartheta))$ открыто в $M^{n-1}(t_0 + \hat{\sigma}_k(t_0))$.

Теперь в области $\hat{U}(\varrho^0)$ мы можем покоординатно выписать функцию, обратную к φ. Для индексов i между $k(n-1)+1$ и $(k+1)(n-1)$ имеем

$$\varphi_i^{-1}(\varrho) = \varrho_{i-k(n-1)} + \hat{\sigma}_k(t_0),$$

для остальных индексов $\varphi_i^{-1}(\varrho) = z_i(\varrho)$. Очевидно, что φ — гомеоморфизм.

Найдем производную функции φ^{-1}. При i от $k(n-1)+1$ до $(k+1)(n-1)$ имеем

$$\frac{\partial \varphi_i^{-1}(\varrho)}{\partial \varrho_j} = \begin{cases} 0, & j \neq i - k(n-1), \\ 1, & j = i - k(n-1). \end{cases}$$

Для остальных i поступим следующим образом. Путем дифференцирования тождества $\xi(z_i(\varrho), c(\varrho)) \equiv 0$ по ϱ_j получим

$$\frac{\partial \xi(z_i(\varrho), c(\varrho))}{\partial t} \cdot \frac{\partial z_i(\varrho)}{\partial \varrho_j} + \frac{\partial \xi(z_i(\varrho), c(\varrho))}{\partial c} \cdot \frac{\partial c(\varrho)}{\partial \varrho_j} = 0,$$

откуда можно выразить интересующую нас производную:

$$\frac{\partial z_i(\varrho)}{\partial \varrho_j} = -\left(\frac{\partial \xi(z_i(\varrho), c(\varrho))}{\partial t}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \xi(z_i(\varrho), c(\varrho))}{\partial c} \cdot \frac{\partial c(\varrho)}{\partial \varrho_j}. \tag{11.2}$$

Теперь выпишем все производные, входящие в равенство (11.2).

$$\frac{\partial \xi(z_i(\varrho), c(\varrho))}{\partial t} = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell(\varrho)\xi'_\ell(t_0 + z_i(\varrho)),$$

$$\frac{\partial \xi(z_i(\varrho), c(\varrho))}{\partial c} = \begin{pmatrix} \xi_1(t_0 + z_i(\varrho)) & \dots & \xi_n(t_0 + z_i(\varrho)) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial c(\varrho)}{\partial \varrho_j} = -\Xi(\varrho)^{-1}\frac{\partial \Xi(\varrho)}{\partial \varrho_j}\Xi(\varrho)^{-1}e = -\Xi(\varrho)^{-1}\frac{\partial \Xi(\varrho)}{\partial \varrho_j}c(\varrho),$$

$$\frac{\partial \Xi(\varrho)}{\partial \varrho_j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \xi'_1(t_0 + \hat{\sigma}_k(t_0) + \varrho_j) & \dots & \xi'_n(t_0 + \hat{\sigma}_k(t_0) + \varrho_j) \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В последней матрице от нуля отлична только строка с номером $j+1$. Наконец, можно подставить все записанные выражения в равенство (11.2). Тогда получится следующее:

$$\frac{\partial z_i(\varrho)}{\partial \varrho_j} = \frac{\sum\limits_{\ell=1}^{n} c_\ell(\varrho)\xi'_\ell(t_0 + \hat{\sigma}_k(t_0) + \varrho_j)\sum\limits_{\ell=1}^{n} A_{\ell,j+1}(\varrho)\xi_\ell(t_0 + z_i(\varrho))}{\Delta(\varrho)\sum\limits_{\ell=1}^{n} c_\ell(\varrho)\xi'_\ell(t_0 + z_i(\varrho))} \tag{11.3}$$

где $\Delta(\varrho)$ — определитель матрицы $\Xi(\varrho)$, а $A_{\ell,j}$ — алгебраические дополнения ее элементов.

Поскольку знаменатель равенства (11.3) не обращается в нуль в $\hat{U}(\varrho_0)$, то матрица $\frac{\partial \varphi^{-1}(\varrho)}{\partial \varrho}$ имеет гладкость r в области $\hat{U}(\varrho_0)$. Кроме того, она имеет размерность $\lambda(\nu) \times (n-1)$ и содержит единичную подматрицу размерности $(n-1)\times(n-1)$. Поэтому φ^{-1} — иммерсия гладкости r.

Из всего вышесказанного следует, что множество $M^\nu(t_0, \vartheta)$ есть многообразие гладкости r и размерности $n-1$, что и требовалось доказать.

§ 12. Граница множества управляемости

В этом параграфе доказано, что множества $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ являются подмножествами границы множества управляемости $D(t_0,\vartheta)$, и существует взаимно однозначное соответствие между точками этих множеств и оптимальными управлениями (см. утверждение 12.1). Теорема 12.1 утверждает, что некоторые из множеств $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ являются гладкими многообразиями. Для случая $n = 2$ получено представление границы множества управляемости в виде замыкания объединения гладких кривых. Результаты параграфа опубликованы в статье [31].

Обозначим для каждого ν символом $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ множество всех точек $x_0 \in D(t_0,\vartheta)$, для которых существует вектор τ из $M^{\nu}(t_0,\vartheta)$ такой, что оптимальное управление $u(t,x_0)$, переводящее $x(t_0) = x_0$ в $x(t_0+\vartheta) = 0$, имеет переключения в точках $t_0 + \tau_i$, где $i \in \mathcal{I}^{\nu}(t_0,\vartheta)$, и до первого момента переключения $u(t,x_0) = +1$. Аналогично множествам $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ определим множества $\overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$, которым соответствуют оптимальные управления, начинающиеся с -1. Далее будем рассматривать только множества $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$, имея в виду, что все свойства множеств $\overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ совершенно аналогичны свойствам $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$.

Следующее утверждение аналогично свойству 1 из статей [21, 24].

Утверждение 12.1. *Если множество $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ непусто, то справедливо включение $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta) \subseteq \partial D(t_0,\vartheta)$, и для любой точки x_0 из $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ существует единственный вектор $\tau \in M^{\nu}(t_0,\vartheta)$ такой, что управление $u(t,\tau)$, оптимально в смысле быстродействия переводит $x(t_0) = x_0$ в $x(t_0+\vartheta) = 0$.*

Доказательство. Пусть x_0 принадлежит множеству $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$. Предположим, что $x_0 \notin \partial D(t_0,\vartheta)$. Из включения $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta) \subseteq D(t_0,\vartheta)$ следует, что x_0 принадлежит внутренности множества $D(t_0,\vartheta)$. Тогда $\Theta(t_0,x_0) < \vartheta$, и соответствующее управление $u_0(t)$ удовлетворяет принципу максимума (1.5).

По определению множества $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ найдется вектор $\tau \in M^{\nu}(t_0,\vartheta)$ такой, что управление $u(t,\tau)$, равное по модулю единице и имеющее переключения в точках τ_{i_p}, где i_p пробегает множество $\mathcal{I}^{\nu}(t_0,\vartheta)$, переводит x_0 в начало координат. Доопределим $u_0(t)$ на полуинтервале

$(t_0+\Theta(t_0,x_0),t_0+\vartheta]$ тождественным нулем и рассмотрим функцию $v(t)=u(t,\tau)-u_0(t)$. Также, как в теореме 6.1 и утверждении 10.2, доказывается, что $v(t)$ сохраняет знак на интервалах $(t_0+\tau_{i_p},t_0+\tau_{i_{p+1}})$, где $p=0,\ldots,q(\nu)$, $\tau_{i_0}=0$, $\tau_{i_{q(\nu)+1}}=\vartheta$, причем $(-1)^p v(t)\geqslant 0$ на интервале $(t_0+\tau_{i_p},t_0+\tau_{i_{p+1}})$, где $q(\nu)$ — количество индексов в множестве $\mathcal{I}^\nu(t_0,\vartheta)$.

Пусть $y(t)=x(t,t_0,x_0,u(\cdot,\tau))-x(t,t_0,x_0,u_0(\cdot))$. Функция $y(t)$ является решением задачи

$$\dot y = A(t)y+b(t)v(t),\quad y(t_0)=y(t_0+\vartheta)=0.$$

Из формулы Коши следует

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)v(t)\,dt=0. \tag{12.1}$$

По определению множества $M^\nu(t_0,\vartheta)$ найдется такой вектор $\psi\neq 0$, что функция $\xi(t)=\psi X(t_0,t)b(t)$ имеет нули в точках τ_{i_p}, где $i_p\in\mathcal{I}^\nu(t_0,\vartheta)$, причем $\xi(t)v(t)\geqslant 0$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\vartheta$. Умножив равенство (12.1) на ψ слева, получим

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta}\xi(t)v(t)\,dt=0,$$

откуда $v(t)\equiv 0$, т. е. $u(t,\tau)\equiv u_0(t)$ на отрезке $[t_0,t_0+\vartheta]$, что противоречит нашему предположению.

Доказательство единственности управления $u(t,\tau)$ можно провести аналогично. Утверждение доказано.

Утверждение 12.1 позволяет говорить о функции

$$f_\nu^{-1}\colon \overset{+}{N}{}^\nu(t_0,\vartheta)\to M^\nu(t_0,\vartheta),$$

ставящей в соответствие точке $x_0\in\overset{+}{N}{}^\nu(t_0,\vartheta)$ точку τ из множества $M^\nu(t_0,\vartheta)$, задающую моменты переключений оптимального управления $u(t,\tau)$. Пользуясь формулой Коши, можно выразить обратную функцию $f_\nu\colon M^\nu(t_0,\vartheta)\to\overset{+}{N}{}^\nu(t_0,\vartheta)$ следующим образом:

$$f_\nu(\tau)=\sum_{\ell=0}^{m}\sum_{p=(\ell+1)(n-1)-\nu_\ell}^{(\ell+1)(n-1)-1}(-1)^{\gamma(p,\ell,\nu)}\int_{t_0+\tau_p}^{t_0+\tau_{p+1}}X(t_0,t)b(t)\,dt, \tag{12.2}$$

$$\text{где}\quad \gamma(p,\ell,\nu)=\sum_{j=0}^{\ell}\nu_j+p-(\ell+1)(n-1)+1,$$

$$\tau_{(\ell+1)(n-1)-\nu_\ell} = \tau_{\ell(n-1)}, \quad \tau_0 = 0.$$

Т е о р е м а 12.1. *Пусть система* (1.1) *докритическая, а функции* $A(t)$ *и* $b(t)$ *имеют гладкость* $r \geqslant 1$. *Если* $\max\{\nu_0, \ldots, \nu_m\} = n-1$, *то всякое непустое множество* $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0, \vartheta)$ *представляет собой многообразие гладкости* r *и размерности* $n-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что функция $f_\nu(\tau)$ непрерывна, поэтому нам осталось доказать непрерывность $f_\nu^{-1}(\cdot)$, r раз непрерывную дифференцируемость $f_\nu(\tau)$ и инъективность производной $\dfrac{\partial f_\nu(\tau)}{\partial \tau}$.

Дифференцируя равенство (12.2) по τ_i, получим

$$\frac{\partial f_\nu(\tau)}{\partial \tau_i} = 2(-1)^{\gamma(i,\ell,\nu)-1} X(t_0, t_0+\tau_i) b(\tau_i),$$

откуда следует, что функция $f_\nu(\tau)$ имеет гладкость $r+1$.

Пусть $\nu_k = n-1$. Предположим, что векторы

$$h(\tau_i) = X(t_0, t_0+\tau_i) b(\tau_i),$$

где $i = k(n-1)+1, \ldots, (k+1)(n-1)$, линейно зависимы. Тогда существует их нетривиальная линейная комбинация

$$\sum_{i=k(n-1)+1}^{(k+1)(n-1)} c_i h(\tau_i) = 0,$$

поэтому для всякого $\psi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{i=k(n-1)+1}^{(k+1)(n-1)} c_i \xi(t_0+\tau_i) = 0, \tag{12.3}$$

где $\xi(t_0+\tau_i) = \psi X(t_0, t_0+\tau_i) b(t_0+\tau_i)$. Если какое-нибудь c_j отлично от нуля, то по утверждению 2.2 найдется такое $\psi \neq 0$, что функция $\xi(t)$ имеет нули в точках $t_0+\tau_i$,

$$\text{где} \quad i = k(n-1)+1, \ldots, (k+1)(n-1), \quad i \neq j,$$

причем $\xi(t_0+\tau_j) \neq 0$. Поэтому из равенства (12.3) следует

$$c_j \xi(t_0+\tau_j) = 0,$$

что противоречит нашему предположению.

Из линейной независимости векторов $h(\tau_i)$ при i между $k(n-1)+1$ и $(k+1)(n-1)$ следует неравенство нулю определителя

$$\det\left(\frac{\partial f_\nu(\tau)}{\partial \tau_{k(n-1)+1}} \quad \dots \quad \frac{\partial f_\nu(\tau)}{\partial \tau_{(k+1)(n-1)}}\right).$$

Из теоремы 11.1 и теоремы о неявной функции следует непрерывнось функции $f_\nu^{-1}(\cdot)$ и инъективность производной $\dfrac{\partial f_\nu(\tau)}{\partial \tau}$. Теорема доказана.

Кроме того, справедливо следующее очевидное утверждение.

Утверждение 12.2. *Множества* $\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ *и* $\overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)$ *непусты тогда и только тогда, когда* $M^\nu(t_0,\vartheta)$ *непусто.*

На рис. 12.1 изображено множество управляемости $D(0,3\pi)$ для системы (6.9). Здесь $\sigma(t)\equiv 2\pi$. Голубым цветом показаны множества $\overset{+}{N}{}^{(2,2)}(0,3\pi)$ и $\overset{+}{N}{}^{(2,2)}(0,3\pi)$, желтым — $\overset{+}{N}{}^{(2,1)}(0,3\pi)$ и $\overset{+}{N}{}^{(2,1)}(0,3\pi)$, пурпурным — $\overset{+}{N}{}^{(2,0)}(0,3\pi)$ и $\overset{+}{N}{}^{(2,0)}(0,3\pi)$.

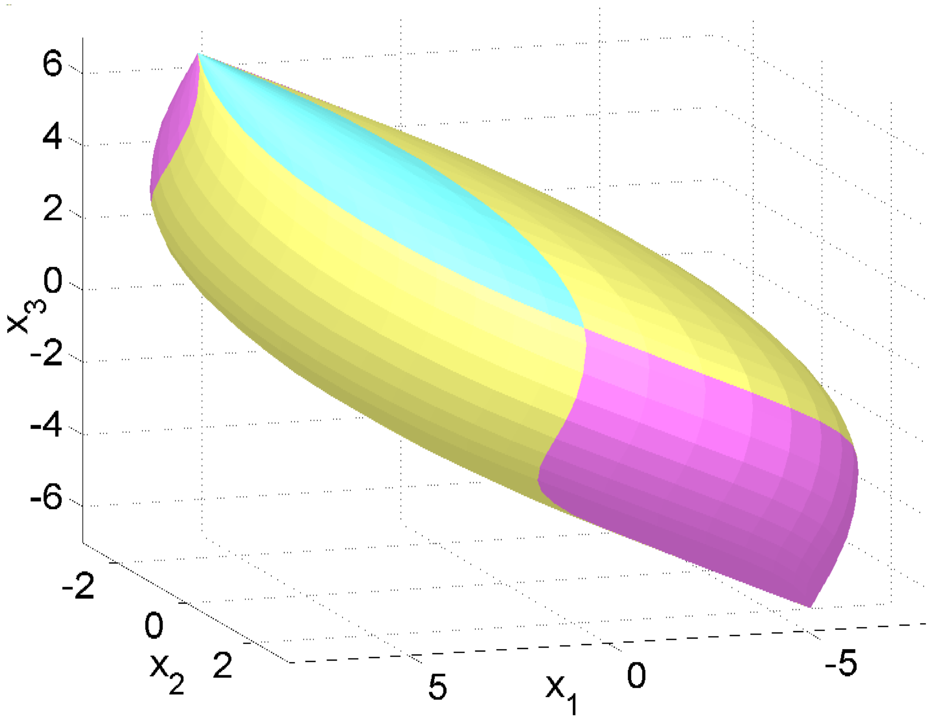

Рис. 12.1. Множество управляемости $D(0,3\pi)$ для системы (6.9).

Далее будем предполагать, что $\sigma_1(t_0)<\vartheta<\sigma_\infty(t_0)$, а $n=2$. Из утверждения 3.2 следует, что для любого $c\neq 0$ все нули функции $\xi(t,c)$ на отрезке $[t_0,t_0+\vartheta]$ являются простыми.

У т в е р ж д е н и е 12.3. *Множества* $\overset{+}{N}{}^{(0,\dots,0)}(t_0,\vartheta)$ *и* $\overset{-}{N}{}^{(0,\dots,0)}(t_0,\vartheta)$ *пусты.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что множество $\mathcal{M}^{0,\dots,0}(t_0,\vartheta)$ пусто и воспользоваться утверждением 12.2.

Предположим противное. Тогда существует некоторый вектор c_0 такой, что функция $\xi(t,c_0)$ положительна на отрезке $[t_0,t_0+\vartheta]$. Если определить функцию

$$\eta(c)=\inf_{t\in[t_0,t_0+\vartheta]}\xi(t,c),$$

где $c\in S^1$, то будем иметь два неравенства:

$$\eta(c_0)>0,\quad \eta(-c_0)<0.$$

Из утверждения 11.2 следует непрерывность функции $\eta(c)$, а теорема Больцано–Коши позволяет утверждать, что существует $c\in S^1$, для которого $\eta(c)=0$, что означает существование кратных нулей у функции $\xi(t,c)$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Теорема 12.1 и следующая теорема позволяют представить границу множества управляемости в виде замыкания объединения многообразий размерности 1 и гладкости r.

Т е о р е м а 12.2. *Пусть* $n=2$, *система* (1.1) Q-*приводима на промежутке* $[t_0,+\infty)$, *и* $\vartheta<\sigma_\infty(t_0)$. *Тогда справедливо представление*

$$\partial D(t_0,\vartheta)=\mathrm{cl}\bigcup_{\nu\in J_m}\left(\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)\cup\overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)\right),$$

где J_m *есть множество* $(m+1)$*–мерных векторов, координаты которых принимают значения* 0 *или* 1, *причем хотя бы одна из координат равна единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для краткости введем обозначение

$$A=\bigcup_{\nu\in J_m}\left(\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)\cup\overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0,\vartheta)\right).$$

Из утверждения 12.1 следует включение $\partial D(t_0,\vartheta)\supseteq A$. Выберем некоторую точку x_0 из множества $\partial D(t_0,\vartheta)$, не принадлежащую множеству

A. Ей соответствует оптимальное управление $u(t, x_0)$, переводящее x_0 в нуль и имеющее от 1 до m переключений. Заметим, кроме того, что точки переключения $t_0 + \tau_i$ управления $u(t, x_0)$ являются простыми нулями функции $\xi(t, c)$ при некотором фиксированном c.

Если бы ни одна из точек $t_0 + \tau_i$ не совпадала бы с точкой вида $t_0 + \hat{\sigma}_\ell(t_0)$, где $\ell = 0, \ldots, m$, то все $t_0 + \tau_i$ лежали бы внутри интервалов

$$(t_0 + \hat{\sigma}_\ell(t_0), t_0 + \hat{\sigma}_{\ell+1}(t_0)), \tag{12.4}$$

причем в каждом из этих интервалов было бы не более одной точки переключения. Поэтому нашлось бы такое $\nu \in J_m$, что x_0 принадлежала бы $\left(\overset{+}{N}{}^{\nu}(t_0, \vartheta) \cup \overset{-}{N}{}^{\nu}(t_0, \vartheta)\right)$, и мы пришли бы к противоречию. Таким образом, существуют индексы i_0 и ℓ_0, для которых имеем $\tau_{i_0} = \hat{\sigma}_{\ell_0}(t_0)$.

Из определения чебышевской системы функций получается, что на полуинтервале $[t_0 + \hat{\sigma}_{\ell_0}(t_0), t_0 + \hat{\sigma}_{\ell_0+1}(t_0))$ нет других нулей функции $\xi(t, c)$ кроме $t_0 + \tau_{i_0}$. По утверждению 2.2 вектор c определяется точкой $t_0 + \tau_{i_0}$ с точностью до умножения на константу. Следовательно, все остальные нули функции $\xi(t, c)$ на промежутке $[t_0, t_0 + \vartheta)$ определяются однозначно. Можно показать (см. теорему 11.1), что координаты этих нулей непрерывно зависят от τ_{i_0}. Если определить вектор $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\lambda)$, координатами которого являются нули функции $\xi(t, c)$, упорядоченные по возрастанию, то с точностью до знака можно записать следующее равенство:

$$x_0 = f(\tau_{i_0}) = \pm \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^i \int_{t_0+\tau_i(\tau_{i_0})}^{t_0+\tau_{i+1}(\tau_{i_0})} X(t_0, s) b(s)\, ds,$$

где $\tau_0 = 0$, откуда следует непрерывная зависимость x_0 от τ_{i_0}. Поэтому существует последовательность $\left\{\varrho_{j_0}^0\right\}$, сходящаяся к τ_{i_0} и целиком лежащая в $[t_0 + \hat{\sigma}_{\ell_0}(t_0), t_0 + \hat{\sigma}_{\ell_0+1}(t_0))$ такая, что $f(\varrho_{j_0}^0)$ стремится к x_0 при $j_0 \to \infty$.

Если для любого j_0 (или для бесконечного их числа) все $\tau_i(\varrho_{j_0}^0)$ лежат внутри интервалов (12.4), то $x_0 \in \operatorname{cl} A$. В противном случае, для каждого j_0 (или для бесконечного их числа) существуют индексы $i_1(j_0)$ и $\ell_1(j_0)$, для которых имеем $\tau_{i_1(j_0)} = \hat{\sigma}_{\ell_1(j_0)}(t_0)$. Для $\tau_{i_1(j_0)}$ можно повторить все проделанные рассуждения и рассмотреть последовательность $\left\{\varrho_{j_1}^1\right\}$, которая стремится к $\tau_{i_1(j_0)}$, причем ни одна из координат векторов $\tau(\varrho_{j_1}^1)$ не попадет в точку σ_{ℓ_0}. Снова возможно два случая, в одном из которых соответствующая точка принадлежит множеству $\operatorname{cl} A$. Во втором случае нам придется опять повторить рассуждения.

На каждом цикле рассуждений из рассмотрения исключается очередная точка σ_{ℓ_p}. Поскольку число таких точек конечно, то за конечное число шагов мы докажем включение $x_0 \in \mathrm{cl}\, A$. Теорема доказана.

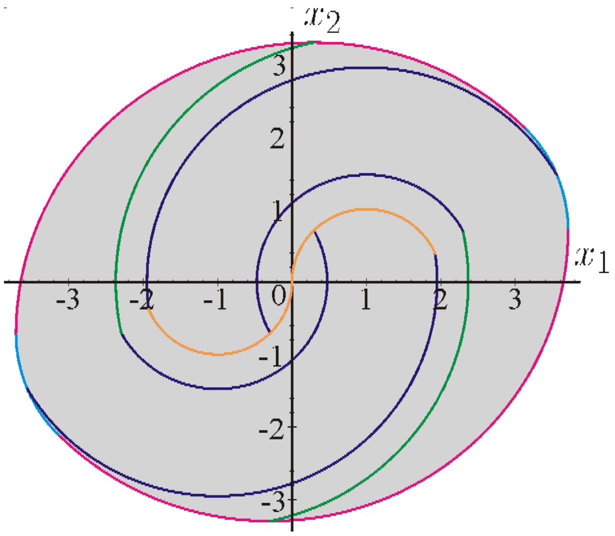

Рис. 12.2. Множество $D(0, 7\pi/4)$ для системы (12.5).

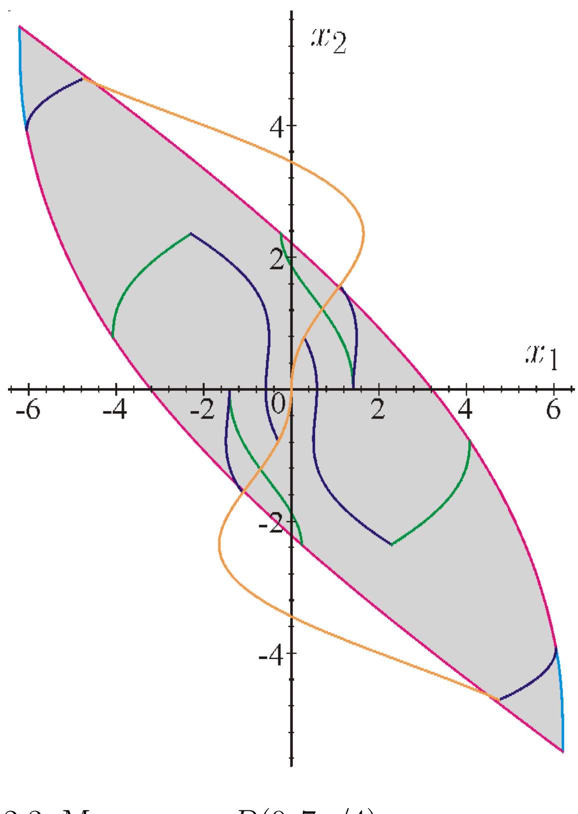

Рис. 12.3. Множество $D(0, 7\pi/4)$ для системы (12.6).

На рис. 12.2 изображено множество управляемости $D(0, 7\pi/4)$ системы

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u. \tag{12.5}$$

Эта система является Q-приводимой, причем $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \pi$. Многообразия $\overset{+}{N}{}^{(1,1)}(0, \vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^{(1,1)}(0, \vartheta)$ показаны пурпурным цветом, а многообразия $\overset{+}{N}{}^{(1,0)}(0, \vartheta)$ и $\overset{-}{N}{}^{(1,0)}(0, \vartheta)$ — голубым. Внутренность множества управляемости закрашена серым. Оптимальные траектории системы изображены зелеными, синими и оранжевыми линиями, причем в момент переключения цвет линии изменяется.

Рис. 12.3 по своему содержанию и раскраске аналогичен рис. 12.2. Система в этом случае имеет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 \sin t, \quad \dot{x}_2 = u. \tag{12.6}$$

Здесь снова выполняются равенства $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \pi$. Эта система не является Q-приводимой, однако в рассмотренном случае замыкание изображенных множеств ограничивает некоторую замкнутую выпуклую область, которая и представляет собой множество управляемости.

Литература

1. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

2. *Brunovski P.* The closed-loop time-optimal control. I: Optimality. // SIAM J. Control. 1974. V. 12, № 4. P. 624–634.

3. *Brunovski P.* Regular synthesis and singular extremas // Lect. Contr. and Inform. Sci. 1980. V. 22. P. 280–284.

4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

5. *Гамкрелидзе Р. В.* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, № 4. С. 449–474.

6. *Болтянский В. Г.* Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 28, № 3. С. 481–514.

7. *Черноусько Ф. Л., Шматков А. М.* Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка // Прикл. матем. и мех. 1997. Т. 61, Вып. 5. С. 723–731.

8. *Киселев Ю. Н.* Оптимальный синтез в гладкой линейной задаче быстродействия // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 232–237.

9. *Белоусова Е. Р., Зарх М. А.* Построение поверхности переключения в линейной задаче быстродействия четвертого порядка // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 6. С. 126–139.

10. *Белоусова Е. Р., Зарх М. А.* Синтез оптимального управления в линейной задаче быстродействия четвертого порядка // Прикл. матем. и мех. 1996. Т. 60, Вып. 2. С. 189–197.

11. *Благодатских В. И.* Линейная теория оптимального управления. М.: Наука, 1978.

12. *Аввакумов С. Н., Киселев Ю. Н., Орлов М. В.* Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Тр. Матем. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 3–31.

13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Прищепова С. В.* Синтез оптимальной по быстродействию дискретной системы // Автомат. и телемех. 1991. № 12. С. 92–99.

14. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.* Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 3–19.

15. *Brunovski P.* The closed-loop time-optimal control. II: Stability. // SIAM J. Control. 1976. V. 14, № 1. P. 156–162.

16. *Meeker L. D.* Measurement stability of third-order time-optimal control systems // J. Different. Equat. 1980. V. 36. P. 54–65.

17. *Тонков Е. Л.* Неосцилляция и число переключений в линейной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 12. С. 2180–2185.

18. *Тонков Е. Л.* О множестве управляемости линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 2. С. 269–278.

19. *Тонков Е. Л.* Неосцилляция и структура множества управляемости линейного уравнения // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38, Вып. 5 (233). С. 131.

20. *Тонков Е. Л.* К теории линейных управляемых систем // Дис. д.ф.-м.н., ИММ УНЦ АН СССР, Свердловск, 1984, 267 с.

21. *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 107–115.

22. *Альбрехт Э. Г., Ермоленко Е. А.* Синтез оптимального по быстродействию управления в линейных системах // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 11. С. 1443–1450.

23. *Сатимов Е. Я., Азамов А.* О числе переключений в линейных системах // Изв. АН УзССР. Сер. физ.–мат. наук. 1982. № 2. С. 20–23.

24. *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1996. Вып. 2 (8). С. 47–68.

25. *Николаев С. Ф.* Функция быстродействия и позиционное управление // Тезисы докладов международгой математической конференции «Еругинские чтения-IV», Витебск, 20-22 мая 1997 г. С. 77–78.

26. *Nickolayev S. F., Tonkov E. L.* Differentiability of Speed Function and Positional Control of Linear Nonstationary System // Nonsmooth and discontin. probl. of contr. and optimiz. (NDPCO 98). June 1998: Proceedings of the Internat. Workshop, Chelyabinsk, 1998. P. 163–165.

27. *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Позиционное управление нелинейной системой близкой к докритической // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1998. № 2 (13), С. 3–26.

28. *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* Дифференцируемость вектора быстродействия и позиционное управление линейной докритической системой // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 1. С. 78–84.

29. *Боткин Н. Д., Пацко В. С.* Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 78–85.

30. *Grigorieva S. V., Ushakov V. N.* Use finite family of multivalued maps for constructing stable absorption operator // Topol. meth. in nonlin. anal. 2000. V. 15, № 1. P. 75–89.

31. *Милич Н. В.* О структуре границы множества управляемости линейной докритической системы на большом промежутке времени // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1998. Вып. 2 (13). С. 27–52.

32. *Милич Н. В.* Длина промежутка чебышевскости и множество управляемости линейной нестационарной системы // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск. 2000. Т. 1. С. 109–130.

33. *Милич Н. В.* Позиционное управление возмущенной системой, близкой к докритической // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск. 2000. Вып. 2 (19). С. 38–53.

34. *Дерр В. Я., Милич Н. В., Тонков Е. Л.* Линейные управляемые Q-приводимые системы // Современные методы в теории краевых задач. Труды Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XI», Воронеж, 3-9 мая 2000 г. Ч. 1. С. 65–84.

35. *Aubin J.-P.* Mutational and Morphological Analysis. Tools for Shape Regulation and Optimization. 1998. 352 p.

36. *Понтрягин Л. С.* Оптимальные процессы регулирования // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, Вып. 1 (85). С. 3–20.

37. *Николаев С. Ф.* Численная оценка интервала докритичности // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1998. Вып. 1 (12). С. 81–88.

38. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.

39. *Тонков Е. Л.* К вопросу о неосцилляции линейных систем // Нелинейн. колебания и теор. управл. — Ижевск: УдГУ, 1982. Вып. 4. С. 62–74.

40. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1999. Вып. 1 (16). С. 3–105.

41. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1968. 408 с.

42. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

43. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Волгоград: Платон, 1998. 300 с.

44. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

45. *Тонков Е. Л.* Динамические задачи выживания // Вестн. Перм. тех. ун-та. Функционально–дифференциальные уравнения. 1997. № 4. С. 138–148.

46. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. 368 с.